大量参与者的近似 MMS 分配

Uriel Feige* Vadim Grinberg†

arXiv:2611.33051v1 [cs.GT] 24 Nov 2026

摘要

我们研究在极小最大份额（MMS）公平性基准下，如何将不可分物品分配给具有非负加性估值的代理人。我们证明，对于每个 $\rho < 1$，都存在某个 n_ρ，使得每个含有 $n \geq n_\rho$ 个代理人的分配实例都有一个 ρ-MMS 分配。作者近期的一篇论文明确提出了这一猜想，并证明当物品数量至多为 $(2-\epsilon)n$ （且 $n \geq n_{\rho,\,\epsilon}$）时猜想成立。我们基于该论文中的一些技术继续推进，包括构造序数 *MMS* 分配，使得 $n - O(\log^2 n)$ 个代理人获得完整 MMS。我们引入的新技术之一，是定义两个代理人的 MMS 划分之间的区块匹配，并证明当物品类型数量较少时，必然存在宽度较小的区块匹配。

1 引言

备注 1.1。 引言中的部分内容逐字摘自我们最近发表的论文 *[FG26]*，因为从长远来看，我们预计本文将取代 *[FG26]*。

我们研究将 m 不可分物品公平分配给 n 代理人。令 M 表示待分配的 m物品集合，并令代理人集合为 $N := [n]$。每位代理人 $i \in \mathcal{N}$ 都有一个定义在 M子集上的估值函数 v_i 。我们假设 v_i 满足 $v_i(\varnothing) = 0$，并且对于每个$S_1 \subseteq S_2$，都有 $v_i(S_1) \leq v_i(S_2)$，即 v_i 是单调且非递减的。此外，我们假设每个 v_i 都是**加性的**：对于每个 $S \subseteq M$，都有 $v_i(S) = \sum_{e \in S} v_i(e)$。

一个物品分配 M给代理人 N是将 M划分为 n个不相交集合的划分，其中代理人 i “获得”集合 P_i。我们希望这种分配是公平的，这里的公平性采用某种定义。本文将重点讨论一种基于份额的公平性概念，称为极小最大份额 [Bud11]，简称 MMS。

定义 1.1. 令 P_n 为将物品 M划分为 n个两两不相交集合的所有划分 $(P_1, \ldots, P_n)$ 构成的集合。对于估值为 v_i的代理人 i，其极小最大份额为

$$\mathrm{MMS}(M, v_i, n) = \max_{(P_1,\ldots,P_n)\in\mathcal{P}_n} \min_{j\in[n]} v_i(P_j).$$

我们将使用 $\mathrm{MMS}(n)$ 表示相对于将 M 划分为 n 个集合的划分所定义的 ***MMS***值。

若划分 $(A_1, \ldots, A_n)$ 是 M的一个***MMS*** 分配，则对每个代理人 $i \in N$，都有$v_i(A_i) \geq \mathrm{MMS}(M, v_i, n)$。也就是说，每个代理人对分配给自己的物品束 A_i的估值至少不低于其 MMS。我们还将考虑近似分配：对于一个值 $\rho \in (0, 1]$，若分配 $(A_1, \ldots, A_n)$ 对每个代理人 $i \in N$都满足 $v_i(A$，则称其为一个 ρ-MMS 分配

$_i) \geq \rho \cdot$最大最小份额$(M,\ v_i,\ n)$。在本文中，我们将聚焦于两种密切相关的设定，探讨可加性代理人的精确/近似最大最小份额分配的存在性。

*魏茨曼科学研究所，以色列。 uriel.feige@weizmann.ac.il
†魏茨曼科学研究所，以色列。 vadim.grinberg@weizmann.ac.il

1.1 将我们的结果置于背景之中

已有实例表明，对于可加性估值和 $n \geq 3$ 个代理人，最大最小份额分配未必存在。此类最初实例由 [KPW18] 给出。后续实例针对 ρ-最大最小份额分配，给出了 ρ 的明确上界：$n = 3$ [FST21], 的结果为 $\rho \leq \frac{39}{40}$，而 $n = 4$ [EG26b] 的结果为 $\rho \leq \frac{20}{21}$。对于一般的 n，[EG26b] 给出了 $1 - \Omega(\frac{1}{n^2 \log n})$ 的上界。另一方面，经过长期研究，已知存在 7 9-最大最小份额分配，而且可以在多项式时间内找到 [HZ25]。对于 $n = 3$（比例为 $\frac{11}{12}$ [FN22]）以及 $n = 4$ （比例为 $\frac{4}{5}$ [GHS+22]），已知可以达到更好的比例。

先前工作中遗留的一个开放问题是，ρ_n 是否会随着 n 增大而趋近于 1。我们在近期的一篇论文中将此表述为一个猜想 [FG26]。在那篇论文中，我们证明了这一结论成立，但前提是存在代理人冗余。

定理 1.1 ([FG26])。对于每个 $\varepsilon > 0$ 和 $\rho < 1$，都存在某个 $n_{\varepsilon,\rho}$，使得在每个具有加性估值且包含 $d \geq (1+\varepsilon)n$ 个代理人的分配实例中，每个$n \geq n_{\varepsilon,\rho}$都存在一个由 n 个代理人组成的子集，这些代理人拥有一个 ρ-MMS(n) 分配。

定理 1.1的一个直接推论证实了当物品数量较少时，该猜想成立。

推论 1.1 ([FG26])。对于每个 $\epsilon > 0$ 和 $\rho < 1$，都存在某个 $n_{\epsilon,\rho}$，使得每个具有加性估值、包含 $n \geq n_{\epsilon,\rho}$ 个代理人和 $m \leq (2-\epsilon)n$ 件物品的分配实例都有一个 ρ-*MMS* 分配。

在本文中，我们以此前开发的技术为基础 [FG26], 并结合一些新技术，在不对 m施加任何限制的情况下证实了这一猜想。我们的主要结果如下定理所示。

定理 1.2。对于每个 $\rho < 1$，都存在某个 n_ρ，使得每个具有加性估值且包含 $n \geq n_\rho$ 个代理人的分配实例都有一个 ρ-最大最小份额分配。

定理 1.2 的部分证明建立在我们先前在 [FG26] 中关于相关主题的结果之上，即针对 $d > n$ 的 1-out-of-d 最大最小份额分配，也称为序数 MMS。这一概念最早由 [BNTC21] 引入（不过此前 [Bud11] 也曾在 $d = n + 1$ 中探讨）。如果对每个代理人 $i \in N$，都有 $v_i(A_i) \geq \text{MMS}(M, v_i, d)$，那么集合 M 的划分 $(A_1, \ldots, A_n)$ 就称为 1-out-of-d 最大最小份额分配。在这种情况下，主要问题是，为了保证存在精确最大最小份额(d)分配，d （作为 n 的函数）需要多大。在我们先前的工作 [FG26], 中，我们证明了，要使此类分配存在，所需的额外物品束数量至多为关于 n 的多对数级。

定理 1.3 （[FG26]）。任何包含 n 个代理人的实例都存在一个 最大最小份额（d） 分配，其中包含 $d = n + O(\log^2 n)$。

我们重新给出**定理** 1.3 在第 5 节中的证明，因为该证明与我们的**定理** 1.2相关。

1.2 我们的算法概述

回顾一下，在 [FG26] 中，我们证明了**定理** 1.1。我们将简要回顾该定理证明中的部分内容，说明代理人冗余在该证明中的用法，并解释当前工作中使我们能够规避对代理人冗余需求的主要思想。

我们先介绍一些相当直接的预备知识。令 q 为一个较大的整数。我们的目标是证明，存在某个 n_q，使得当 $n > n_q$时，存在$(1 - O(\frac{1}{q}))$-MMS 分配（无论是否有代理人冗余）。通过缩放，我们可以假设每位代理人的 MMS 为 1，也可以假设没有任何物品的价值大于 1。对于代理人 i，我们将价值为 $v_i(e) \geq \frac{1}{q}$ 的物品e 称为大物品（也称为头部物品），而其他物品则称为小物品（也称为

尾部物品）。我们可以假设，对于每位代理人 i，其 MMS 划分中的每个物品束至多包含 q 个大物品。对于 $Q \simeq q\log q$，考虑由数值组成的集合$(x_1, x_2, \ldots, x_Q)$，其中 $x_1 = 1$,$x_{i+1} = (1 - \frac{1}{q})x_i$ 向上取整至最接近的$\frac{1}{q^2}$ 的倍数（对每个 $1 \le i \le Q-1$），并令 Q取满足 $x_Q = \frac{1}{q}$ 的最大可能值。我们按如下方式修改估值函数：对于每位代理人 i 和每件大物品 e，将 $v_i(e)$向下取整至最接近的 x_i，从而保持其价值至少为$(1 - \frac{1}{q})v_i(e)$。因此，i 的 MMS 划分中每个物品束的价值仍至少为$(1 - \frac{1}{q})$。由于我们满足于给每位代理人$(1 - O(\frac{1}{q}))$-MMS 分配，因此可以像上面那样将物品价值向下取整。因此，至多有 Q种不同的价值，使得对每位代理人而言，任何对其价值较高的物品，其价值都是这 Q 种价值之一。

定理**定理**1.1 讨论了几种情况。容易处理的情况是，小物品价值之和在代理人之间的平均值“很高”，例如为 $\Omega(\log n)$。（与物品总价值相比，这可能算不上高；物品总价值至少为 n，但这已足以得到相关结果。）在这种情况下，**定理**1.1的证明不需要代理人冗余。只有在互补的情况下才需要代理人冗余：小物品价值之和在代理人之间的平均值“很低”，即 $O(\log^2 n$。在这种情况下，证明中的论证可以分为两个部分。一部分是处理完全没有小物品的情况。也就是说，对每个代理人而言，所有物品都是大物品。在这个阶段，[FG26]给出的证明已经需要代理人冗余。这是我们当前工作引入新思路的主要部分。证明的另一部分则讨论存在小物品、但每位代理人的小物品平均总价值较低时，证明需要做出的调整。尽管这些调整并非易事，但证明**定理**1.1 （见 [FG26]）中适用的同类调整，在我们对定理1.2的证明中也适用（只需做一些相对较小的修改）。因此，在本概述中，我们重点讨论对每个代理人而言所有物品都是大物品的情况。

根据预备知识，将物品价值按 q^2的倍数进行缩放后，所有物品都是大物品的情形可以表示为这样一种设定：共有 $Q \simeq q\log q$ 个正整数价值，使得对于每个代理人 i 和物品 e，$v_i(e)$ 都是这些 Q 个价值之一；每个 MMS 捆绑至多包含q 个物品；且每位代理人的 MMS 至多为 q^2。对于这种设定，我们证明，当 n 足够大时，总是存在 MMS 分配（达到完整 MMS，无需近似）。因此，一般情况下只能得到近似 MMS 而非完整 MMS，有两个原因：将物品价值向下舍入，导致大物品只有 Q 种价值；以及小物品的存在。

按照惯例，当估值为加性时 [BL16], 我们可以假设实例是同序实例（IDO），也就是说，对于每个代理人 i 以及任意两个指标 $1 \le j < k \le m$，$v_i(e_j) \ge v_i(e_k)$。

将物品划分为尽可能少的类型：若对于每个代理人 i，都有 $v_i(e_j) = v_i(e_k)$，则物品 e_j 和 e_k 属于同一类型（不过，对于给定类型，不同代理人对该类型物品的价值可能意见不同）。令 t 表示类型总数。我们按照价值从高到低排列这些类型（因此，每个代理人对较早类型的评价至少不低于较晚类型，且至少有一个代理人的评价严格更高）。对于每个 $1 \le j \le t$，令 n_j表示类型 1 至 j 的所有类型中物品的总数（因此，$n_t = m$）。

为了更简洁地介绍证明中的思路，我们区分两种情况：类型数 t 为常数（该常数可能取决于 q），以及 t 随 n增长的情况。

1.2.1 仅有大物品，类型数为常数

在此处及全文中，我们考虑 IDO 输入实例。对于固定的 q，t，共有 $Q = O(q\log q)$ 个允许的整数物品价值（范围为 $[q, q^2]$），以及 t 种物品类型。对于每位代理人 i，同一类型的所有物品价值都相同，且该价值属于允许的取值之一；其 MMS 划分中的每个物品束至多包含 q 个物品。每位代理人的 MMS 价值为 q^2。我们

证明，当 n 足够大时，MMS 分配存在。

我们将代理人划分为若干类别，使得同一类别中的所有代理人具有相同的估值函数。物品有 t 种类型，每种类型可以具有 Q 种价值。由于实例是有序的，因此最多有 $\binom{Q+t-1}{Q} \le t^Q$ 种可能的估值函数。因此，某个代理人类别（记为 U）至少包含 $\frac{n}{t^Q}$ 个代理人。我们希望 $|U|$ 足够大，例如达到 $|U| \ge n^{0.9}$，这就为我们的证明适用时 n 的取值设定了一个下界。

同一类别的代理人具有相同的最大最小份额划分。我们当前工作的一个重要贡献（[FG26]中没有这一点）是提出了一个引理，用来关联不同类别的两个代理人的最大最小份额划分，i 和 j。该引理涉及区块匹配的概念。一个代理人的最大最小份额划分包含 n 个物品束。我们允许将这些物品束排列成互不相交的块，每个块包含正数个物品束。这种区块排列的宽度 是单个块中所包含物品束数量的最大值。

给定两个代理人 i和 j的区块排列，区块匹配是块之间的一种完美匹配：当两个块包含相同数量的物品束，且对于每种物品类型，两个块中该类型的物品数量相同时，就可以将这两个块匹配起来。换言之，一个块中各物品束里的物品可以重新排列，从而得到另一个块中的物品束。区块匹配的宽度是相应区块排列的宽度（如果存在区块匹配，则两个区块排列的宽度相同）。

引理 1.1. 考虑一个含有 t 种物品类型的 *IDO* 实例，其中，对于每个代理人，其 *MMS* 划分中的每个物品束至多包含 q 件物品。那么存在某个常数 $D_{t,q}$（与 n无关），使得任意一对代理人之间都存在宽度至多为 $D_{t,q}$的区块匹配。

引理 1.1 可以用非构造性方法证明（不明确给出 $D_{t,q}$的上界），证明中使用迪克森引理 [Dic13]。该引理的表述见 **引理 2.2**。（迪克森引理在 [FG26], 中也发挥了重要作用，但用途不同。）在 附录 C 中，我们证明 $D_{t,q} \le \binom{t+q}{q}(t+2)q^t$。

我们希望 $D_{t,\,q}$ 根据引理 1.1 得到的结果相较于 n 足够小，例如 $D_{t,\,q} \le n^{0.1}$。这为我们的证明能够成立时 n 的价值设置了另一个下界。

现在考虑只有两类代理人的情形：U（人数较多的一类）和 V。一般而言，即使只有两类代理人，也未必存在 MMS 分配 [KPW18, FST21]。不过，借助引理 1.1，可以较容易地证明，当 $n \ge 2q^3 D_{t,q}$ 时，MMS 分配确实存在。考虑一位代理人 $u \in U$ 的 MMS 划分，以及一位代理人 $v \in V$ 的 MMS 划分（并回想一下，U 中的所有代理人都有相同的 MMS 划分，V 中的所有代理人也是如此）。在这两种划分之间，考虑一个宽度至多为 $D_{t,q}$ 的区块匹配（引理 1.1 保证这样的匹配存在）。从 U 的 MMS 划分开始，我们迭代地翻转匹配的块，只要由此创建的 v MMS 捆绑数量不超过 $|V|$，就用 v 的 MMS 捆绑替换 u 的 MMS 捆绑。新创建的 v MMS 捆绑分别分配给 V 中不同的代理人。此后，V 中剩余代理人的数量 n' 小于 $D_{t,q}$。按照 v 的估值函数，将 u 的所有剩余 MMS 捆绑按价值从高到低排序。将排序最前面的 n' 个捆绑分配给 V 中的剩余代理人。每个这样的捆绑对 v 都是可接受的（对 v 而言，其价值至少与 v 的 MMS 一样高）。这是因为，剩余捆绑对 v 的平均价值至少等于其 MMS q^2，没有捆绑的价值超过 $q \cdot q^2 = q^3$，而任何不可接受的捆绑价值至多为 $q^2 - 1$（因为物品价值是整数）。因此，至少有 $\frac{n-|V|}{q^3} \ge n'$ 个捆绑是可接受的（该不等式成立是因为 $|V| \le \frac{n}{2}$, $n \ge 2q^3 D_{t,q}$ 且 $n' < D_{t,q}$）。（物品价值为整数这一假设并非本证明或其他证明中的必要假设。即便没有这一假设，也不难证明至少有 $\frac{n-|V|}{D_t,_q} \ge n'$ 个捆绑是可接受的，这使我们的证明在稍大的 n 下仍然成立。）最后，将 u 的 MMS 划分中剩余的 $n - |V| = |U|$ 个捆绑分配给 U 中不同的代理人。

代理人类别多于两类时，情况会更复杂，因为对于除 U 之外的每一类代理人 V，在相应区块匹配中使用的 u 捆绑的区块排列可能各不相同。为了解决这个问题，我们建立一个特定的整数规划，用来确定在 u 的每种区块排列中应翻转哪些块。该整数规划包含如下约束：翻转的块彼此不相交（这只涉及 t 个约束，即规定每种类型物品在所有翻转块中包含的物品总数，不得超过该类型物品的总数）；此外，还规定移除翻转的捆绑后，u 的 MMS 划分中剩余的捆绑数量要足够多，使得其他类别中未从翻转块获得捆绑的代理人能够获得可接受的捆绑（这可以用不超过 $(t+1)^q$ 个约束来表述）。我们将该整数规划松弛为线性规划（LP），并证明该线性规划存在分数可行解。接着，由于该线性规划只有少量约束，其任一基本可行解大多为整数，从而我们能够将翻转块中的捆绑分配给除 U 之外几乎所有这类代理人。剩余代理人则按照上文所述的两类代理人情形处理。

更多详情请参见**定理**2.1。

1.2.2 仅大物品，物品类型数量众多

第1.2.1节中的证明当物品类型的数量是常数或缓慢增长的函数时适用 t（例如，n 取 $t = o(\log n)$）。然而，t 可能要大得多，甚至与 n呈线性关系。这就需要对证明进行重大修改。如何进行这些修改的许多原则已见于 [FG26]（该文允许代理人冗余），并且经过一些调整后，可以应用于我们的设定（该设定不允许代理人冗余）。

其中一项原则是大幅减少物品类型的数量。这需要改变类型概念的定义。为了将新概念与原概念区分开来，在本概述中我们称新概念为伪类型。回想一下，对于每个代理人 i，每件物品都可以取 Q 个价值中的一个。将物品从 1 到 m 排列成一行，代理人 i会沿着这条线引入至多Q 个断点，其中断点是价值序列中最后一件具有某一价值的物品的索引（下一件物品的价值严格更低）。由于有 n 个代理人，因此共有 $O(nQ)$ 个断点，同一件物品可以充当多个断点（对于不同代理人）。注意，充当断点的物品数量（不计重数）恰好就是类型的数量。

根据断点的位置（包括重数），我们将把数轴划分为$3t = O(q)$个互不相交的区间。具体做法是仔细选取物品

$$(a_1 = 1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, \ldots, a_t, b_t, c_t, a_{t+1} = m+1),$$

而两个相邻选中物品之间的物品集合构成一个区间。更具体地说，区间的形式为 $[a_i, b_i]$、$[b_i+1, c_i]$ 和 $[c_i+1, a_{i+1}-1]$。

我们的构造将确保所有形式为 $[b_i+1, c_i]$ 的区间长度都相同且较小，为 ν，其中 $\nu = C \log n$，常数 C 仅取决于 q 和 Q。所有这些区间的并集记为 F（“禁用”的英文首字母）。重要的是，在这些区间内有断点的代理人集合（我们称之为 W）规模较小，大小为 $|W| \le \varepsilon n$（其中$\varepsilon > 0$较小）。

类型为 $[a_i, b_i]$ 的区间稍大一些，但仍然较小，大小为 $O(\frac{C \cdot Q}{\varepsilon} \log n)$。所有这些区间的并集记为 S（“特殊”的英文首字母）。

$[c_i+1, a_{i+1}-1]$ 类型的区间长度可以任意，但具有这样的性质：每个此类区间至多包含 $\frac{n}{2}$ 个代理人的断点。

我们的证明将表明，同一区间内的物品本质上可以相互替换，尽管它们的价值未必相同。因此，新的类型概念为每个区间对应一个独特的伪类型，而该区间内的所有物品都属于相应的伪类型。于是，物品的伪类型数量为 $3t = O(q)$。

类似的伪类型概念也曾用于 [FG26]。在那里以及本文中，引入这一概念的目的是让 F 的区间完全不含断点。如果我们能做到这一点，那么对于 F的每个区间，其中所有物品就都属于同一种类型，而不只是同一种伪类型。在 [FG26]中，这一性质是通过直接舍弃所有 W代理人来实现的。这样做是可行的，因为$|W|$ 很小，因此可以视为代理人冗余的一部分。然而，由于我们需要向所有代理人提供最大最小份额捆绑，因此不能舍弃 W。我们改为保留所有 W代理人，但对每位代理人，舍弃包含来自 F的物品的最大最小份额捆绑。由于 $|F|$ 很小， W 中的每位代理人仍能保留绝大多数自己的最大最小份额捆绑。

绝大多数物品都位于类型为 $[c_i+1, a_{i+1}-1]$ 的区间内。由于此类区间至多包含 $\frac{n}{2}$ 个代理人的断点，因此至少有 $\frac{n}{2}$ 个“优质”代理人，使得区间内的所有物品类型都相同。从这个意义上说，每个这样的区间 I 都是原有类型概念的代理。此外， F 之前的区间 I 完全没有断点，因此优质代理人的类型会延伸到 F。因此，对于优质代理人来说， I 不仅是表示某种类型的区间，更是此类区间的后缀。这一事实使证明前面部分中的某些参数具有松弛量，从而为证明后面部分留出了空间。

集合 S 是在构造所需集合 F 时产生的一个不理想的副作用。集合 S 存在问题，因为它可能包含任意多个断点。处理 S 内的物品需要特殊处理，而这之所以可行，是因为 $|S|$ 很小。

我们将物品集合 $M \setminus E$ 称为 E。（E 可以表示“容易”，因为与 S中的物品相比，这些物品更容易处理。）

与 [FG26], 类似，我们将物品划分为数量较少的伪类型，从而能够找到一个部分分配，使集合 I中的至少 $n-\varepsilon|F|-16q\log n$ 个代理人获得可接受捆绑（其价值至少达到各自的最大最小份额）。此外，这个部分分配还内置了一定的松弛量（具体含义较为技术性，此处不作定义），可用于容纳剩余物品。

回顾一下 第1.2.1节中使用的代理人类别概念。其定义依据是物品类型，以及代理人赋予该类型的价值。我们采用类似的代理人类别概念，但其定义依据是物品的伪类型，以及该伪类型内部是否存在断点。对于我们的类别，并非同一类别中的所有代理人都具有相同的估值函数，甚至不一定具有相同的最大最小份额划分。不过，由于上述松弛量，同一类别中任意两位代理人的最大最小份额划分在某种意义上是等价的：也就是说，如果（考虑到证明中涉及的约束类型）我们能够向一位代理人分配一组可接受的物品，那么也能够改为向另一位代理人分配一组物品（可能不同）。

现在我们来谈谈我们的工作与 [FG26]之间的一项重大差异。在代理人冗余的情况下，部分分配中未获得物品束的代理人集合相当大，其规模为 $\Omega(n)$。因此，其中包含一个代理人类别 U，其规模很大，远远超过我们完成部分分配、使之成为完整分配所需的代理人数量 $\varepsilon|F|+16q\log n$。概括而言， [FG26]中的证明表明，可以通过从 I 中移除一些代理人并释放他们的物品，再用这些物品（以及可能未用于部分分配的其他物品）创建足够多的物品束，使 U 中的代理人能够接受这些物品束，从而将部分分配补全为完整分配。从技术上说，这一过程分步进行，每一步都将 I 的规模增加 1；证明该步骤可以执行时用到了迪克森引理（该引理在第1.2.1节中也发挥了作用）。

上述方法实质上依赖于代理人冗余，因此不适用于我们的情况。相反，我们的集合 U 大部分或全部是 I 的子集。作为一个技术细节，重要的是 U与在 F 中有断点的集合 W不相交，因为对于 U 中的代理人，我们需要 F 的每个区间中的所有物品都具有相同的价值。此外，我们需要 U 的成员对集合 S 中断点的位置达成一致。（这不会让 U 的大小减少太多，因为每个代理人只有常数个 Q 断点，而且

$|S|$ 非常小。）概括来说，我们使用 U 以及来自第1.2.1节的区块匹配概念，将 I 中某些代理人的物品束替换为其他可接受捆绑，从而能够为 I之外的代理人另外创建可接受捆绑。这里同样分步进行，每一步都会使 I 的大小增加 1，而证明中会用到迪克森引理。

证明的完整细节见第 3 节 和第 4 节。

1.2.3 大物品与小物品的混合

到目前为止，我们处理的输入实例中只有大物品，也称为头部物品。对于这种情况，在对物品价值进行初始舍入后，我们可以根据舍入后的估值函数，为每位代理人提供完整 MMS。现在，我们来讨论部分物品对某些代理人而言属于小物品的情况。在这种情况下，我们不再致力于为代理人提供完整 MMS，而是满足于 MMS 的近似（当 n增大时，近似比趋于 1）。

小物品，加上允许每位代理人获得略低于其 MMS 的分配，为分配带来了很大的灵活性。例如，代理人可以把对自己而言较小、但对其他更需要这些物品的代理人而言更有价值的物品转让给他们。尽管如此，处理大物品与小物品的混合仍涉及许多细节，尤其是在小物品的总价值较小但不可忽略时。这使我们的证明大大变长。我们在此不再回顾如何处理这类组合，因为其原则与 [FG26] 中使用的原则非常相似。不过，我们会在此提及一项与 [FG26],相比的技术差异，我们发现这一差异很有帮助。

在 [FG26], 中，对于每位代理人 i，我们保留了一个参数 h_i ，用于统计对其而言价值较大的物品数量 i（头部物品）。每位代理人各有一个这样的参数，并在证明的多个部分中用到这些参数。在当前工作中，对于小物品总价值较小这一困难情形，我们改为只保留一个参数 h。我们对其进行选择，使得对于绝大多数代理人，排名前 h 的物品中只有头部物品，而且这些物品还包含该代理人的 MMS 划分中绝大多数物品束。我们证明了存在一个合适的 h取值，这使我们的证明更易于处理（相比之下，另一种做法是分别维护 n多个 h_i取值）。

1.3 相关工作

公平分割这一主题已在多种不同设定下得到广泛研究。在我们的工作中，我们专门关注不可分物品，并以 MMS 作为公平性的衡量标准。关于可分物品的研究，例如参见 [BT96]。关于不可分物品公平分配的更多研究，包括 EF1 和 EFX 等基于嫉妒的概念，例如参见 [ALMW22、AAB+23]。此外，关于加性以外估值的公平分配也有大量研究，例如无互补层级中的次模、XOS 和次加性类别 [LLN06], ，但这超出了本文的讨论范围。

对于加性估值以及每个 $n \geq 3$，存在最大最小份额分配不存在的示例 [KPW18]。长期以来，许多研究一直在探讨能够保证每位代理人获得的最大最小份额比例上限；已知该比例介于 $\frac{7}{9}$ [HZ25] 和 $\frac{20}{21}$ [EG26b]之间。对于一般的 n， [FST21] 证明了 $1-\frac{1}{n^4}$的上界，随后由 $1-\Omega(\frac{1}{\log^2 n})$ 改进为 [EG26b]。

尽管我们考虑的是具有大量参与者 n 的实例，但关于具有少量 n 的实例也已有其他研究结果。对于加性估值，在 $n=3$ 代理人的情况下，[FN22] 证明了 $\frac{11}{12}$-MMS 分配的存在性；而对于 $n=4$代理人， [GHS+22] 证明了 $\frac{4}{5}$ 的近似比。

1-out-of-d MMS 分配的概念最早出现在 [Bud11], 的研究中，后来由 [BNTC21]正式提出。随后一系列研究不断改进了 d的上界，其中具有里程碑意义的结果包括 $d = 4\lceil n/3 \rceil$ 由 [AGST24] 给出的结果，以及 $d = n + O(\sqrt{n}\log n)$ 由 [EG26a]给出的结果。至于朝着 $d = n + 1$的进展， [Sch26] 证明了对于 $n = 4$ 代理人，1-out-of-5 分配存在。

在技术方面，我们的算法采用了与 [BL16]相同的排序约简。以取整物品价值的相应配置替换 MMS 捆绑的想法并不新颖，过去也曾以多种方式加以运用。在 [KMT21], 中，作者通过统计单个代理人的大物品在各取整价值类别中的数量来表示其 MMS 捆绑，从而计算该代理人的 MMS，并利用小物品补全选定的捆绑类型。与我们的头尾剖面框架有些相似的构造曾在 [NR20]中用于福利近似。

我们的证明大量运用了近期论文 [FG26]中的证明技巧。该论文中的一些技巧与此前 [EG26a]中使用的技巧相似。关于这些技巧的比较，见 [FG26]的相关工作部分。

1.4 技术细节

在第 2 节中，我们证明定理 1.2 在以下特殊情形下成立：物品类型至多有 t 种，每个代理人的估值在 $[Q]$中取整数值，且 MMS 划分中的每个物品束大小至多为 q。我们所需的充分大 n 取决于这些参数 t、Q、q，并将它们视为常数。在第 3 节和第 4 节中，我们去掉关于类型数量的假设 t，并在限制较少的情形下证明定理 1.2，从而得到仅取决于 q、Q 的充分 n 。本节运用我们方法的核心，并展示了该方法在一般情形下的关键方面。在第 5 节中，我们重述先前工作 [FG26], 中定理 1.3 的证明，因为证明定理 1.2 的一般情形时需要用到其中的方法和结论。第 6 节至第 10 节涵盖定理 1.2 的证明。在附录 A 中，我们证明相关的线性规划取整结果。在附录 B 中，我们给出依赖迪克森引理的论证的证明。在附录 C 中，我们给出所有相关常数的具体估计，以及关于近似参数 ρ的最终充分上界n 。

人工智能及其他声明

本文是我们早期工作的延续 [FG26], ，该工作于 2026 年 11 月 3 日发布在 arXiv 上（这是因提交至 STOC 2027 的论文必须公开发布所致）。发布该论文后仅仅几天，我们便取得了本文报告的成果，证明了 [FG26]中的猜想 1。我们通过结合作者的新思路（例如引入区块匹配的概念，并利用迪克森引理证明其存在；或引入统一公共头部 h并利用线性规划对偶性构造它），同时借助 OpenAI 的 ChatGPT-6.1 Sol 和 ChatGPT-6.0 Astra，完成了这项工作。（如果没有作者的新思路，尽管花费了许多小时，这些人工智能助手仍未能证明本文的结果。）本文主要由人类作者撰写；他们有一段时间无法投入太多精力，这也解释了为何论文花了几周才发布。取得这些成果后，Vadim Grinberg 做了两场公开报告，题为《关于大量代理人的 MMS 分配》（11 月 11 日通过 Zoom 为 MPI 公平分配读书小组作报告，以及 11 月 18 日在魏茨曼科学研究学院作报告），并在报告中公布了这些成果，不过报告的技术内容基于 [FG26], ，且并未介绍本文的新技术。根据报告收到的反馈，作者重新编排并修订了本文，从较容易的特殊情形讲起，逐步推进至完整定理。

11月23日，Uriel Feige 收到一封电子邮件，Biaoshuai Tao 在邮件中告知他，自己与 Zehan Lin、Shengxin Liu、Xiaowei Wu 和 Yuhao Zhang 打算在不久后发布一篇论文，证明 [FG26] 中的猜想 1。因此，两篇论文的作者

同意于同一天（11月24日）将各自的论文提交至 arXiv，尽管这些论文仍可通过进一步编辑加以完善。这些论文的人类作者均未读过另一组的论文，也未听取另一组关于证明的任何技术细节。两篇论文之间的交叉引用及比较将在修订版中补充。

2 精确 常数种类整数价值类型下的最大最小份额

定义 2.1. 物品类型是一个子集 $M_s \subseteq M$，满足存在一些价值 $(\alpha_{1,s}, \ldots, \alpha_{n,s})$，使得对于每个 $e \in M_s$，都有 $v_i(e) = \alpha_{i,s}$，对每个代理人 $i \in N$均成立。

也就是说，如果每个代理人 $i \in N$ 对物品 e 和 $e' \in M$ 的价值相同，即 $v_i(e) = v_i(e')$，那么物品 e、$e' \in M$ 属于同一种类型。

请注意，对于相同类型 $M_s \subseteq M$，不同代理人对价值 $\alpha_{i,s}$ 的评估可能不同；而对于某些代理人，不同类型的物品可能具有相同的价值。

首先，我们证明**定理**1.2在特殊受限情形下成立。

定理 2.1。令 t、Q、$q \geq 1$ 为整数。存在 n（t、Q、q），使得对于每个 $n \geq n$（t、Q、q），以下结论成立。考虑一个包含 m 个物品 M 和 n 个代理人N的公平分配实例，其中对于每个 $i \in N$，估值 v_i 是加性的，并且

- 个物品 M 至多具有 t种类型；
- 对于每个代理人 $i \in N$ 和物品 $e \in M$，有 v_i（e）$\in$ {1、...、Q}；
- 每个代理人 $i \in N$ 都有一个 *MMS* 划分 $\{B_{i,1}、\ldots、B_{i,n}\}$，满足 $|B_{i,j}| \leq q$ 对所有 $j \in [n]$ 均成立。

存在一个将 M 分配给 N 的分配（B_1、...、B_n），使得对于每个代理人 $i \in N$，我们有

$$v_i(B_i) \geq \mathrm{MMS}(M, v_i, n).$$

对于每个 $i \in N$，记 μ_i：$=$MMS（M、v_i、n）。我们假设 $m \geq n$，否则所有 $\mu_i = 0$。因此，在**定理** 2.1的设定下，对于每个 $i \in N$，我们有

$$1 \leq \mu_i \leq qQ,$$

并且存在一个划分 $\{B_{i,1}, \ldots\ldots, B_{i,n}\}$ 满足 $|B_{i,j}| \leq q$ 且对于每个 $j \in [n$都有 $v_i(B_{i,j}) \geq \mu_i \quad]$.

定理 Theorem 2.1 的证明的主要思路是，从一大类在所有物品类型的所有价值上都一致的代理人中选择一个代理人 $u_* \in N$。我们将使用 u_* 的最大最小份额划分$\{B_{u_*,1}, \ldots\ldots, B_{u_*,n}\}$作为基准，然后对其进行修改，以便为所有代理人获得最大最小份额分配。关键在于，对于来自不同类别的每个其他代理人 i，我们可以取出 u_* 的少量（即常数个）最大最小份额捆绑，并将其重新划分为数量相同的 i的最大最小份额捆绑。此外，我们可以用多种不同方式做到这一点，并且实质上只需每次重新划分常数个物品束，就能将 u_* 的最大最小份额划分转换为 i的最大最小份额划分。于是，寻找最大最小份额分配的问题归结为：找到一种协调不同类别代理人之间这些重新划分的方法，决定针对每个代理人类别使用哪些重新划分，使得最终每个代理人都能获得一个不同的最大最小份额捆绑。

定义 2.2。设 $M_1, \ldots\ldots, M_t$ 为非空物品类型。对于每个 $s \in [t]$，任意选择一个代表项 $e_s \in M_s$，并对 $i \in N$ 记为

$$\alpha_{i,s} := v_i(e_s).$$

对于每个代理人 $i \in N$，将其 签名 定义为

$$\varphi_i := (\alpha_{i,1}, \ldots, \alpha_{i,t}).$$

如果两个代理人的签名相同，则它们属于同一个类别。对于签名 φ，记作

$$N_\varphi := \{i \in N : \varphi_i = \varphi\}.$$

观察 2.1。令 Φ 表示所有出现的签名构成的集合。那么 $|\Phi| \le \phi := Q^t$（在有序情况下至多为 $\binom{Q+t}{Q}$），并且存在一个集合 $U = N_\varphi$，其中某个 $\varphi \in \Phi$ 满足 $|U| \ge n/\phi$。

证明。由于对于每个 $i \in N, e \in M$ 和 $|\varphi| = t$，$v_i(e) \in \{1, \ldots, Q\}$，因此可能的签名至多有 $\phi := Q^t$ 个。取使 $|N_\varphi|$ 最大化的 $\varphi \in \Phi$，可得 $|N_\varphi| \ge n/\phi$。 □

定义 2.3。令 $U = N_\varphi$ 为使 $|N_\varphi|$ 最大化的 $\varphi \in \Phi$。我们任意选择一个代理人 $u_* \in U$，称其为供应商，并用 φ_* 表示他的签名。

我们证明，每位代理人 $i \in N$ 都“喜欢”供应商的 MMS 划分中的很大一部分。

引理 2.1. 如果一个物品束 $B \subseteq M$ 对于代理人 而言是可接受的，那么 $v_i(B) \ge \mu_i$。
每位代理人 $i \in N$ 都认为，供应商的 *MMS* 划分中至少有 $n/(qQ)$ 个捆绑 是可接受的。

证明。对于供应商 $u_* \in U$，设 $\{B_{u_*,1}, \ldots, B_{u_*,n}\}$ 为其 MMS 划分。对于代理人 $i \in N$，令 $g_i := |\{j \in [n]: v_i(B_{u_*,j}) \ge \mu_i\}|$ 表示在 u_* 的 MMS 划分中对 i 可接受的物品束数量。由于每个 MMS 捆绑的大小至多为 q，因此对于任意代理人 $i \in N$，每个物品束 $B_{u_*,j}$ 的价值至多为 qQ。由于对 i 不可接受的每个物品束的价值至多为 $\mu_i - 1$，因此我们有

$$v_i(M) \le g_i \cdot qQ + (n - g_i) \cdot (\mu_i - 1).$$

另一方面，对于任意 $i \in N$，其 MMS 划分给出 $v_i(M) \ge \mu_i n$。因此，

$$n\mu_i \le g_i \cdot qQ + (n - g_i) \cdot (\mu_i - 1) = n(\mu_i - 1) + g_i(qQ - \mu_i + 1),$$

这意味着

$$g_i \ge \frac{n}{qQ - \mu_i + 1} \ge \frac{n}{qQ}.$$

□

注意，任何 $u \in U$ 属于供应商签名类的代理人都接受供应商 u_*的 MMS 划分中的任意物品束，因为他们的估值和 MMS 值相同。此外，根据**引理**2.1，我们可以将供应商的物品束分配给至少 $n/(qQ)$ 个其他类别的代理人。然而，我们希望每个代理人 $i \in N$ 都能获得某个可接受捆绑。尽管类别 U 是最大的，但仍可能有大多数代理人认为 u_*的绝大多数 MMS 捆绑不可接受，并且他们的 MMS 划分大相径庭，因此我们不能简单地把供应商的物品束分给所有人。

我们的方法是要求每个代理人 $i \in N$修改 MMS 划分 $\{B_{u_*,1}, \ldots, B_{u_*,n}\}$，从而为 i的签名类获得充足的可接受捆绑。当然，i 可以直接简单地拿走所有物品束 $\bigcup_{j=1}^{n} B_{u_*,j} = M$，并将其重新划分为 i自己的 MMS 划分 $\{B_{i,1}, \ldots, B_{i,n}\}$。但这样我们又会遇到完全相同的问题：大多数其他代理人不接受 i 的大多数物品束。

相反，我们将要求 i 做一些更为特别的事情。我们希望 i 将供应商的 MMS 划分 $\{B_{u_*,1}, \ldots, B_{u_*,n}\}$ 拆分成若干**块**，其中每个块只包含固定数量的物品束。这些块应具有以下性质：可以将 u_* 中对应的物品束重新划分为与 i 的 MMS 划分中完全相同数量的物品束。

有了这个“有界重划分”，我们现在可以取出 u_* 个物品束，将它们重新划分为 i 个物品束，并将其分配给 i 类别中相应数量的代理人。反复这样做，我们就能为以下每位代理人获得一个 MMS 分配：

i 类别中的代理人。不过，我们不能针对每个签名类独立执行这一过程，因为不同类别在重新划分时可能会使用相同的物品束。为了协调所有代理人之间的替换，我们将使用一个线性规划松弛，使通过这些重新划分获得分配的非u_*类代理人的总数最大化，并为每个签名类选择要重新划分的块。我们将证明，舍入解只会留下少量未分配的代理人，然后利用**引理** 2.1证明，当 n足够大时，协调后的重新划分会为每位剩余代理人留下足够多可接受的供应商捆绑。这样，每位剩余代理人都能获得一个可接受的供应商捆绑，从而得到完整 MMS 分配。

2.1 有界重新划分与 Dickson 引理

为了方便起见，我们将不提及物品束中的具体物品，而是考虑其物品类型计数所构成的模式。请注意，此类模式的总数只是一个常数。

定义 2 .4. 对于物品束 $B \subseteq M$，其模式 记录了每种类型的物品数量 :

$$p(B) := (|B \cap M_1|, \ldots, |B \cap M_t|).$$

对于模式 p，记

$$|p| := \sum_{s=1}^{t} p_s,$$

并将 $P := \{p \in \mathbb{Z}^t_{\geq 0} : 1 \leq |p| \leq q\}$ 记为所有大小至多为 q 的可能模式所构成的集合。请注意，

$$|P| = \binom{t+q}{q} - 1.$$

如果物品束 B 具有模式 p，那么我们可以将 $v_i(B)$ 表示为

$$v_i(B) = v_i(p) := \sum_{s=1}^{t} \alpha_{i,s} \cdot p_s.$$

定义 2.5。 对于代理人 $i \in N$，其 *MMS* 划分为 $\{B_{i,1}, \ldots, B_{i,n}\}$，对每个 $p \in P$，令

$$\lambda_i(p) := |\{j \in [n] : p(B_{i,j}) = p\}|$$

表示物品束的数量 在 i 的 *MMS* 划分中具有模式 p。注意， $\sum_{p \in P} \lambda_i(p) = n$.

供应商 u_* 和代理人 $i \in N$ 的 MMS 划分可能包含截然不同的模式，但每种类型的物品总数必须相同。因此，总可以用具有代理人 i 的模式的划分来替换 u_* 的整个划分。下面的定理表明，可以按固定大小的块进行完全重新划分，同时保持每个块中捆绑和各类型物品的数量不变。

定义 2.6。 重新划分块是一个对 $\beta = (x, y)$，其中 $x, y \in \mathbb{Z}^P_{\geq 0}$，满足

$$\sum_{p \in P} x(p) = \sum_{p \in P} y(p) \geq 1 \qquad and \qquad \sum_{p \in P} x(p) \cdot p = \sum_{p \in P} y(p) \cdot p.$$

这里 x（p）统计重新划分过程中所使用的模式为 p 的物品束数量，而 y（p）统计所生成的模式为 p 的物品束数量。第一个条件保持重新划分过程中物品束的数量不变，第二个条件保持每种类型的物品数量不变。

将块的大小 定义为

$$|\beta| = \sum_{p \in P} x(p) = \sum_{p \in P} y(p).$$

需要注意的是，重新划分会产生与代理人 i 的最大最小份额划分具有相同模式的物品束，但实际使用的物品可能不同（尽管类型等价）。

定理 2.2 (块重新划分)。 对于每一对整数 $t, q \geq 1$，都存在一个全局常数 $D_{t,q} \geq 1$，它仅取决于 t 和 q，使得以下结论成立。

对于固定的 供应商 u_* 和每个代理人 $i \in N$，都存在一个由 $K_i \leq n$ 个块组成的序列

$$\beta_{i,1} = (x_{i,1}, y_{i,1}), \ldots, \beta_{i,K_i} = (x_{i,K_i}, y_{i,K_i}),$$

使得对于每个 $k \in [K_i]$，都有 $|\beta_{i,k}| \leq D_{t,q}$；并且对于每个模式 $p \in P$，这些块满足

$$\sum_{k=1}^{K_i} x_{i,k}(p) = \lambda_{u_*}(p), \qquad and \qquad \sum_{k=1}^{K_i} y_{i,k}(p) = \lambda_i(p).$$

因此，我们可以将 u_* 的最大最小份额捆绑分组成大小至多为 $D_{t,q}$的不相交块，使得每个块都能重新划分为相同数量的物品束，其模式来自 i的最大最小份额划分。

证明。 考虑所有具有来自 P的模式的可能重新划分块所构成的集合：

$$\mathcal{B}(t,q) := \left\{ (x,y) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^P \times \mathbb{Z}_{\geq 0}^P : \begin{array}{l} \sum_{p\in P} x(p) = \sum_{p\in P} y(p) \geq 1; \\ \sum_{p\in P} x(p) \cdot p = \sum_{p\in P} y(p) \cdot p; \end{array} \right\}.$$

注意，由于 $P = \{p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^t : 1 \leq |p| \leq q\}$ 其中 $|p| = \sum_{s=1}^t p_s$，因此该集合仅取决于 t， q。

我们希望重新划分 u_*的最大最小份额（MMS）划分中的某些物品束，以获得一组具有代理人 i 的最大最小份额（MMS）划分模式的物品束。平凡的重新划分总是存在的，它对应于 $\beta^* = (x^*, y^*)$，使得对于每个 $p \in P$,

$$x^*(p) = \lambda_{u_*}(p) \qquad \text{and} \qquad y^*(p) = \lambda_i(p),$$

即一次性取出 u_* 的所有物品束，并用 i 的最大最小份额（MMS）划分替换它们。注意$\beta^* \in \mathcal{B}(t, q)$: 由于两个划分都包含 n 个物品束，因此我们有 $\sum_{p\in P} x^*(p) = n = \sum_{p\in P} y^*(p)$，并且由于两个划分都覆盖了 M的所有物品，我们有

$$\sum_{p\in P} x^*(p) \cdot p = (|M_1|, \ldots, |M_t|) = \sum_{p\in P} y^*(p) \cdot p.$$

问题在于，该重新划分由一个大小为 n 的块组成。我们希望找到一个块$\beta = (x, y) \in \mathcal{B}(t, q)$，使得 1） x 和 y 分别与代理人 u_* 和 i 的相应 MMS 划分匹配，并且 2）该块的大小 $|\beta|$ 仅为某个常数。

此类元素 $\mathcal{B}(t, q)$ 的存在性由 Dickson 提出的以下引理保证，其简短证明见附录 B(**引理** B.3)。

引理 2.2 ([Dic13, CLO15])。 对于 $K \geq 1$，$\mathbb{Z}_{\geq 0}^K$ 的每个子集都有有限多个逐分量极小元素，并且该子集中的每个元素都支配某个极小元素。

由于 $\mathrm{B}(t,q) \subseteq \mathbb{Z}_{\geq 0}^{2|P|}$，根据引理 2.2，集合 $\mathrm{B}(t,q)$ 具有有限多个逐分量极小元素，记为 E。由于 $\mathrm{B}(t,q)$ 仅取决于 t、q，极小元素 $|\mathrm{E}|$ 的数量，以及每个极小元素的坐标 $(\hat{x}, \hat{y}) \in \mathrm{E}$ 和总和 $\sum_{p\in P} \hat{x}(p)$，也都由 t、q 的某个函数所界定（否则我们将得到一个无限的极小元素序列）。我们取

$$D_{t,q} := \max_{(\hat{x},\hat{y})\in\mathcal{E}} \sum_{p\in P} \hat{x}(p),$$

这是一个只取决于 t， q 的常数。现在， $\sum_{p\in P} \hat{x}(p) \leq D_{t,q}$ 对于每个极小的 $(\hat{x}, \hat{y}) \in \mathcal{E}$。

现在，考虑我们之前研究过的元素 $\beta^* = (x^*, y^*) \in \mathrm{B}(t,q)$，它对应于将 u_* 的 MMS 划分完全替换为 i 的 MMS 划分。根据引理 2.2，存在一个极小元 $(\hat{x}, \hat{y}) \in \mathrm{E} \subseteq \mathrm{B}(t,q)$，使得 $(\hat{x}, \hat{y}) \leq (x^*, y^*)$ 逐分量成立，并且

$\sum_{p\in P}\hat{x}(p)\le D_{t,q}$。由于 $\hat{x}\le x^*$，对于每个模式 $p\in P$，都有 $\hat{x}(p)\le x^*(p)$。这意味着，如果 $\hat{x}$ 取用了一个具有模式 p 的物品束，那么该模式 p 必须存在于 u_* 的 MMS 划分中（因为零仍为零），并且它无法重新划分出比 u_* 的 MMS 划分中此类物品束数量更多的、具有模式 p 的物品束。不等式 $\hat{y}\le y^*$ 对代理人 i 的 MMS 划分中的模式 p 也意味着完全相同的性质。

同时，$(\hat{x},\hat{y})\in\mathcal{B}(t,q)$ 保证供应商 u_* 重新划分后的捆绑数量，与具有 i模式的最终捆绑数量完全相同，并且每组捆绑所用的每种类型物品数量也完全相同。因此，如果从 u_* 和 i的所有模式中移除$(\hat{x},\hat{y})$所对应的捆绑和物品，并考虑元素$(x^*,y^*)-(\hat{x},\hat{y})=(x^*-\hat{x},y^*-\hat{y})$，该元素仍将是有效的替换块，因此$(x^*-\hat{x},y^*-\hat{y})\in\mathcal{B}(t,q)$（只要它不是$(0,0)$）。

我们将利用最后一个观察结果，反复应用上述论证，从而不再只得到一个大小恒定的块，而是得到一个覆盖 u_* 和 i的整个 MMS 划分的块序列。我们通过迭代来实现这一点。初始时，令

$$x^1:=\lambda_{u_*},\qquad\text{and}\qquad y^1:=\lambda_i.$$

在第 $k\ge 1$ 次迭代中，假设 $x^k,y^k>0$ 和 $(x^k,y^k)\in\mathrm{B}(t,q)$。令 $\beta_{i,k}:=(x_{i,k},y_{i,k})\in\mathrm{E}$ 为 $\mathrm{B}(t,q)$ 中满足 $(x_{i,k},y_{i,k})\le(x^k,y^k)$ 的极小元；根据引理 2.2，这样的元素存在。定义剩余替换为

$$x^{k+1}:=x^k-x_{i,k},\qquad\text{and}\qquad y^{k+1}:=y^k-y_{i,k},$$

这些向量均为非负向量。容易看出（对 k 使用归纳法），

$$\sum_{p\in P}x^{k+1}(p)=\sum_{p\in P}x^k(p)-\sum_{p\in P}x_{i,k}(p)=\sum_{p\in P}y^k(p)-\sum_{p\in P}y_{i,k}(p)=\sum_{p\in P}y^{k+1}(p),$$

完全类似地，

$$\sum_{p\in P}x^{k+1}(p)\cdot p=\sum_{p\in P}y^{k+1}(p)\cdot p.$$

因此，要么 $(x^{k+1},\ y^{k+1})=(0,\ 0)$，要么 $(x^{k+1},\ y^{k+1})\in\mathcal{B}(t,\ q)$ 再次成立，于是我们继续进行第 $k+1$ 次迭代。在每次迭代 k 中，我们从两边各移除 $1\le|\beta_{i,\ k}|\le D_{t,\ q}$ 个物品束。因此，至多经过 n 次迭代后，我们就能重新划分所有物品束。定理得证。 □

现在，我们将**定理** 2.2 关于模式的结果转化为关于实际物品的结果。

推论 2.1。设 $\beta_{i,\ k}=(x_{i,\ k},y_{i,\ k})$ 是将定理 2.2 应用于供应商u_* 和代理人 $i\in N$后得到的一个块。我们可以选择 $|\beta_{i,\ k}|\le D_{t,\ q}$ 个 u_* 的最大最小份额捆绑，并将它们的并集重新划分为 $|\beta_{i,\ k}|$ 个对 i 可接受的捆绑，每个捆绑至多包含 q个物品，并且每个 $p\in P$恰好对应 $y_{i,\ k}(p)$ 个捆绑。

此外，对于每个固定的 i，可以同时对所有块执行这些重新划分，并且供应商 u_*的最大最小份额划分中的每个物品束恰好使用一次。

证明。对于每个模式 $p\in P$，根据 **定理** 2.2 可得

$$\sum_{k=1}^{K_i}x_{i,k}(p)=\lambda_{u_*}(p).$$

因此，我们可以从供应商的 MMS 划分中选择每种模式的 $x_{i,k}(p)\le\lambda_{u_*}(p)$ 个物品束 $p\in P$。对于每种物品类型 $s\in[t]$，它们的并集恰好包含

$$\sum_{p\in P}x_{i,k}(p)\cdot p_s=\sum_{p\in P}y_{i,k}(p)\cdot p_s$$

s 个该类型的物品。我们按如下方式为代理人 i 构造$y_{i,k}(p)$ 个具有模式 p 的物品束。对于每种物品类型 $s \in [t]$，将所选的类型-s 物品分配到这些物品束中，每个物品束恰好分配 p_s 个物品。上面的等式保证我们拥有恰好足够的物品，并且每个选中的物品只使用一次。由于 $\sum_{p\in P} y_{i,k}(p) = \sum_{p\in P} x_{i,k}(p) = |\beta_{i,k}|$，我们得到的物品束数量将与从供应商处选取的数量相同。根据构造，所有模式的大小至多为q，因此生成的每个物品束的大小至多为 q。此外，如果 $y_{i,k}(p) > 0$，那么根据定理 2.2 $\lambda_i(p) > 0$，这意味着模式 p 出现在代理人 i的 MMS 划分中，因此$v_i(p) \geq \mu_i$，即相应的物品束是可接受的。

最后，由于对于每个 $p \in P$ 都有 $\sum_{k=1}^{K_i} x_{i,\,k}(p) = \lambda_{u_*}(p)$，我们可以将模式为 p 的所有供应商捆绑分配到块 $\beta_{i,\,1}$、……、$\beta_{i,\,K_i}$ 中，并将其中恰好 $x_{i,\,k}(p)$ 个分配给块 k。在这些不相交集合中分别执行上述构造，即可完成证明。 □

注意，如果某个代理人 $i' \neq i$ 与 i 属于同一个签名类，那么来自**定理** 2.2 的划分中的每个块都包含对代理人 i' 也可接受的物品束。因此，执行一次重新划分 $\beta_{i,\,k}$ 就已经为 i 所属类别中相应数量的代理人提供了$|\beta_{i,\,k}|$ 个可接受捆绑。在下一小节中，我们将说明如何协调不同类别之间的这些重新划分，使所有代理人能够同时获得一个可接受捆绑。

2.2 通过线性规划协调重新划分

重要的是，**推论** 2.1 适用于任何供应商捆绑集合，只要这些捆绑符合重新划分块所规定的模式，因为交换相同类型的物品不会改变捆绑的价值。因此，我们可以将每个重新划分块视为相应捆绑模式的一条拟议重新划分规则，并选择执行每条规则的副本数量。在选定一组重新划分规则后，每条具体规则都将通过一个不相交的供应商捆绑集合来实现。

我们将通过一个线性规划（LP）来实现这一点，该规划旨在最大化集合 U 外部的代理人数量，即类别与供应商不同的代理人数量；在执行所选的重新划分规则集合后，这些代理人将获得可接受的物品束。通过对其最优解进行舍入并执行选定的规则，我们将分配几乎所有非供应商类代理人，最多只剩下一个常数数量。对于 U 外部剩余的未分配代理人，我们计划为其中每位代理人提供供应商的 MMS 划分中一个他们认为可接受且彼此不同的物品束。为确保剩余的可接受物品束数量充足，我们将为供应商的 MMS 划分中的每种模式 p 保留一定比例的物品束。

我们假设 $N \setminus U \neq \varnothing$，否则供应商的划分已经能为每位代理人提供一个可接受的物品束。对于供应商 $u_* \in U$，令 φ_* 表示其签名（因此 $U = N_{\varphi_*}$）；对于每个 $\varphi \in \Phi \setminus \varphi_*$，记 $n_\varphi := |N_\varphi|$。

定义 2.7. 对于每个 $\varphi \in \Phi|\varphi_*$，选取一个代表元 $i_\varphi \in N_\varphi$，并将定理 2.2应用于 u_*和 i_φ。令 $\mathcal{B}(\varphi) = \{\beta_{i_\varphi,\,1}, \ldots, \beta_{i_\varphi,\,K_{i_\varphi}}\}$ 为所得的块集合，并记

$$\mathcal{B} = \bigsqcup_{\varphi\in\Phi\setminus\varphi_*} \mathcal{B}(\varphi).$$

每个块 $\beta \in \mathcal{B}$ 都与相应的签名类及其在该类中的对应索引相关联，也就是说，当 $\varphi \neq \varphi'$ 或 $k \neq k'$ 时，即使 $x = x'$ 和 $y = y'$，我们也将 $\beta = \beta_{i_\varphi,\,k} = (x, y)$ 与 $\beta' = \beta_{i_{\varphi'},\,k'} = (x', y')$ 视为不同的块。

定义 2.8. 对于每个满足 $\beta = \beta_{i_\varphi,\,k}$ 的 $\beta \in \mathcal{B}$，对每个 $p \in P$ 定义：

$$\lambda_\beta(p) := x_{i_\varphi,k}(p).$$

因此，$\lambda_\beta(p)$是第 每个块副本所需的模式为 p 的供应商捆绑数量 β.

观察 2.2。 根据定义和 定理 2.2，对于每个 $\beta \in \mathcal{B}$ 都有

$$\sum_{p \in P} \lambda_\beta(p) = |\beta|, \qquad and \qquad 1 \le |\beta| \le D_{t,q}.$$

此外，对于每个 $\varphi \in \Phi \setminus \varphi_*$，

$$\forall p \in P : \sum_{\beta \in \mathcal{B}(\varphi)} \lambda_\beta(p) = \lambda_{u_*}(p) \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{\beta \in \mathcal{B}(\varphi)} |\beta| = n.$$

根据 **推论** 2.1，每个块（在此情形下即重新划分规则） $\beta \in \mathcal{B}(\varphi)$ 会为代理人 $|\beta|$生成可接受的物品束 i_φ。这些物品束对于类别 N_φ中的每位代理人也都是可接受的，因为具有相同签名的代理人拥有完全相同的估值和 MMS 值。

对于供应商的 MMS 划分中的每种模式 p，我们将预留

$$\eta := \frac{|U|}{n}.$$

供应商所有具有模式 p 的物品束中的一定比例。请注意，从期望值来看，这恰好预留了 $|U|$ 个供应商捆绑，即供应者类别中的每位代理人各一个。

对于每个块 $\beta \in \mathcal{B}$，我们引入一个变量 $z_\beta \ge 0$，表示重新划分规则 β 的执行次数。考虑以下线性规划（线性规划）。

$$\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & \sum_{\beta \in \mathcal{B}} |\beta| \cdot z_\beta \\
\text{subject to} \quad & \sum_{\beta \in \mathcal{B}} \lambda_\beta(p) \cdot z_\beta \le (1-\eta)\lambda_{u_*}(p), && \forall p \in P; \\
& \sum_{\beta \in \mathcal{B}(\varphi)} |\beta| \cdot z_\beta \le n_\varphi, && \forall \varphi \in \Phi \setminus \varphi_*; \\
& z_\beta \ge 0, && \forall \beta \in \mathcal{B}.
\end{aligned} \tag{LP}$$

目标函数最大化通过执行所选规则 $\beta \in \mathcal{B}$所分配的非供应者类别代理人总数。第一个约束确保对于每种模式 $p \in P$，所选块使用的数量不超过供应商 u_* 的 MMS 划分中此类模式总数的 $(1-\eta)$ 比例，即 $\lambda_{u_*}(p)$。第二个约束表示，为类别 $\varphi \in \Phi \setminus \phi_*$ 生成的物品束数量不得超过该类别的代理人总数 n_φ。

注意到（线性规划）仅有 $|P| + |\Phi| - 1$ 个约束（即常数个），尽管变量数量 $|\mathcal{B}|$ 可能取决于 n。我们将利用这一点来估算舍入其最优解所造成的损失。

引理 2.3（块取整）。（线性规划）的最优值为 $n - |U|$。此外，存在一个最优解 z^*，其正坐标至多有 $|P| + |\Phi| - 1$ 个，并且存在整数解 $\hat{z}$，使得 $\hat{z}_\beta := \lfloor z^*_\beta \rfloor$ 对于所有 $\beta \in$ 块均可行且满足

$$\hat{Z} := n - |U| - \sum_{\beta \in \mathcal{B}} |\beta| \cdot \hat{z}_\beta \le D_{t,q}(|P| + |\Phi| - 1).$$

也就是说，舍入解 $\hat{z}$分配了除至多 $D_{t,\,q}$（$|P| + |\Phi| - 1$）个非供应商类代理人以外的所有代理人。

证明。对于每个 $\varphi \in \Phi \setminus \varphi_*$ 以及每个 $\beta \in$ 块(φ)，定义

$$z^0_\beta := \frac{n_\varphi}{n}.$$

我们将证明这是一个可行解。对于每个模式 $p \in P$，根据**观察**2.2

$$\sum_{\beta \in \mathcal{B}} \lambda_\beta(p) \cdot z^0_\beta = \sum_{\varphi \in \Phi \setminus \varphi_*} \frac{n_\varphi}{n} \sum_{\beta \in \mathcal{B}(\varphi)} \lambda_\beta(p) = \frac{n - |U|}{n} \cdot \lambda_{u_*}(p) = (1-\eta)\lambda_{u_*}(p).$$

类似地，对于每个类别 $\varphi \in \Phi \setminus \varphi_*$，**观察**2.2 给出

$$\sum_{\beta\in\mathcal{B}(\varphi)} |\beta| \cdot z_\beta^0 = \frac{n_\varphi}{n} \sum_{\beta\in\mathcal{B}(\varphi)} |\beta| = n_\varphi \qquad \text{and} \qquad \sum_{\beta\in\mathcal{B}} |\beta| \cdot z_\beta^0 = n - |U|.$$

因此， z^0 是价值为 $n-|U|$ 的可行解。容易看出，将 $\varphi \in \Phi\setminus\varphi_*$ 的约束相加后，不存在价值更大的可行解。因此， z^0 也是一个最优解；此外，每个约束 $\sum_{\beta\in\mathcal{B}(\varphi)} |\beta| \cdot z_\beta \le n_\varphi$ *must* 在每个最优解处都必须是紧的。

选择一个最优解 z^*，它同时也是（线性规划）的基本可行解。由于该线性规划有$|P|+|\Phi|-1$个约束，z^*至多有 $|P|+|\Phi|-1$个正坐标。

最后，舍入解 $\hat{z}$（其中，对于所有 $\beta \in$ *B</style}*，$\hat{}$:）是可行的。由于对于 $|\varphi_*$ 的每个约束在 z^* 处都是紧的，因此 z^* 与 $\hat{z}$ 的价值之差为

$$\hat{Z} := (n-|U|) - \sum_{\beta\in\mathcal{B}} |\beta| \cdot \hat{z}_\beta = \sum_{\beta\in\mathcal{B}} |\beta|(z_\beta^* - \hat{z}_\beta) \le \sum_{\substack{\beta\in\mathcal{B} \\ z_\beta^*>0}} |\beta| \le D_{t,q}(|P|+|\Phi|-1).$$

根据构造，对于所有 $\beta \in \mathcal{B}$，最后一个不等式由 $|\beta| \le D_{t,q}$ 得出。 □

需要注意的是，**引理** 2.3 所选取的块可以使用供应商的不同物品束同时实现，同时保留每种供应商模式至少 η-的部分。

推论 2.2。 存在一个将 M 部分分配给代理人 $I \subseteq N \setminus U$ 的部分分配 $\{B_i\}_{i\in I}$，使得

- 对于每个 $i \in I$，物品束 B_i 都是可接受的，即 $v_i(B_i) \ge \mu_i$；
- $|I| = n - |U| - \hat{Z}$，且未分配物品 $M \setminus \bigcup_{i\in I} B_i$ 恰好构成 $|U| + \hat{}$ 的并集 Z 供应商的 *MMS* 划分 $\{B_{u_*,1}, \ldots, B_{u_*,n}\}$ 中未被破坏的物品束；
- 对于每个模式 $p \in P$，至少有 $\eta\lambda_{u_*}(p)$ 个这样的完整供应商捆绑具有模式 p。

这里 $\hat{Z}$ 是满足 $0 \le \hat{Z} \le D_{t,q}(|P|+|\Phi|-1)$ 的某个整数。

证明。 对于引理 **2.3**中的整数解 $\hat{z}$，令

$$\hat{Z} = n - |U| - \sum_{\beta\in\mathcal{B}} |\beta| \cdot \hat{z}_\beta.$$

对于每个模式 $p \in P$，有

$$\sum_{\beta\in\mathcal{B}} \lambda_\beta(p) \cdot \hat{z}_\beta \le (1-\eta)\lambda_{u_*}(p),$$

因此，对于每条重新划分规则 β，我们可以选择 $\hat{z}_\beta$ 个互不相交的供应商捆绑子集合，每个子集合分别对应于 β。此外，这些子集合在不同的 β之间也互不相交。

对于每个这样的子集合，我们应用 **推论** 2.1。$\beta = \beta_{i_\varphi\text{的每个副本}k}$ 都会将 $|\beta|$ 个供应商捆绑重新划分为 $|\beta|$ 个对相应类别 φ中的代理人可接受的捆绑。由于所有子集合都互不相交，因此所有生成的捆绑也将两两不相交。由于对于每个$\varphi \in \Phi \setminus \varphi_*$，都有 $\sum_{\beta\in\mathcal{B}(\varphi)} |\beta| \cdot \hat{z}_\beta \le n_\varphi$，我们可以将生成的捆绑分配给相应类别中的不同代理人。

记此部分分配为 t 此部分分配为 $\{B_i\}_{i\in I}$，其中已分配代理人为 $I \subseteq N \setminus U$。显然，

$$|I| = \sum_{\beta\in\mathcal{B}} |\beta| \cdot \hat{z}_\beta = n - |U| - \hat{Z}.$$

该分配恰好使用供应商的 MMS 划分中的 $|I|$ 个捆绑$\{B_{u_*,1}, \ldots\ldots, B_{u_*,n}\}$，并分配其中的所有物品。因此，未分配物品恰好构成 $n - |I| = |U| + \hat{Z}$ 个完整的

供应商捆绑。最后，根据构造，对于每个 $p \in P$，具有模式 p 的完整供应商捆绑数量恰好为

$$\lambda_{u_*}(p) - \sum_{\beta \in \mathcal{B}} \lambda_\beta(p) \cdot \hat{z}_\beta \geq \eta \lambda_{u_*}(p).$$

□

现在我们可以证明原始**定理**2.1。

定理 2.1 的证明。由推论 2.2 构造部分分配 $\{B_i\}_{i \in I}$，并考虑任意一位未分配代理人 $i \notin U$。回想引理 2.1，供应商的 MMS 划分 $\{B_{u_*,1}, \ldots, B_{u_*,n}\}$ 中，至少有 $n/(qQ)$ 个物品束可被 i 接受。每个这样的可接受物品束都对应某个模式 p，其中 $v_i(p) \geq \mu_i$。因此，根据推论 2.2，对于 i 可接受且未分配给 I 的供应商捆绑数量至少为

$$\eta \cdot \sum_{\substack{p \in P \\ v_i(p) \geq \mu_i}} \lambda_{u_*}(p) \geq \frac{\eta n}{qQ} = \frac{|U|}{qQ}.$$

最后一个等式根据 $\eta = |U|/n$的定义得出。根据**观察**2.1， $|U| \geq n/\phi$，因此剩余的、可被 $i \notin U$ 接受的物品束数量至少为

$$\frac{|U|}{qQ} \geq \frac{n}{\phi qQ}.$$

现在，假设 n 满足

$$n \geq \phi qQ D_{t,q}(|P| + \phi - 1).$$

由于 $|\Phi| \leq \phi$，根据**引理** 2.3，外部未分配代理人的数量 $\hat{Z}$ 满足 U。

$$\hat{Z} \leq D_{t,q}(|P| + |\Phi| - 1) \leq \frac{n}{\phi qQ}.$$

因此，每个未分配代理人 $i \notin U$ 至少接受剩余供应商捆绑中的 $\hat{Z}$。

分配这些

令代理人在 $i \in \hat{N} \setminus (U \cup I)$ 中进行贪心分配，为每个代理人 i 提供一个完整的供应商捆绑 $\hat{}$，且该捆绑 i 认为是可接受的。由于每个此类代理人 i 认为至少有 Z 个剩余捆绑是可接受的，我们始终能够分配一个捆绑。

随后，根据 **推论** 2.2，恰好还有 $|U|$ 个完整供应商捆束保留下来。由于每位代理人$u \in U$ 与供应商具有相同的签名 u_*，因此每个剩余物品束对 U中的每位代理人来说都是可接受的。将它们任意分配给 U。再结合 $\{B_i\}_{i \in I}$ 以及先前对$N \setminus (U \cup I)$的分配，我们便得到完全分配，其中每位代理人都获得一个可接受的物品束。

最后，由于 $\phi, |P|, D_{t,q}$都只取决于 t, Q, q，取 $n(t, Q, q) = \phi qQ D_{t,q}(|P| + \phi - 1)$即可完成证明。更明确地说，我们可以取 $D_{t,q} = |P|(t+2)q^t$，其估计方法与附录 C 中的推论 C.1 类似。□

3 整数值与无界类型下的精确最大最小份额

在本节中，我们证明 **定理** 2.1 的推广，其中我们取消了 M 中的物品类型数量至多为某个常数 t这一假设。我们仍保留以下假设：每件物品的价值属于 $\{1, \ldots, Q\}$，且每位代理人的 MMS 划分中的每个物品束大小至多为 q。这样，对于每位代理人而言，物品至多分为 Q 种类型，但不同代理人之间的类型总数可能取决于 n 和 m。

我们将假设 $m \geq n$，否则该陈述显然成立。

定理 3.1。令 Q、$q \geq 1$ 为整数。存在 $n(Q,\ q)$，使得对于每个 $n \geq n(Q,\ q)$，以下结论成立。考虑一个包含 m 个物品和 n 个代理人的公平分配实例 M，其中对于每个 $i \in N$，估值函数 v_i 是加性的，并且

- 对于每个代理人 $i \in N$和物品 $e \in M$，都有 $v_i(e) \in \{1, \ldots, Q\}$；
- 每个代理人 $i \in N$都有一个 *MMS* 划分 $\{B_{i,1}, \ldots, B_{i,n}\}$，满足 $|B_{i,j}| \leq q$对所有 $j \in [n]$均成立。

存在 一个将 M分配给 N的分配 $(B_1, \ldots, B_n)$，使得对于每个代理人 $i \in N$，我们有 e

$$v_i(B_i) \geq \mathrm{MMS}(M, v_i, n).$$

在**定理** 3.1 的设定中，我们还将假设该实例是有序的。具体而言，我们将 M 与集合 $[m]$关联起来，并且对于每个代理人 $i \in N$，同时有

$$v_i(1) \geq v_i(2) \geq \ldots \geq v_i(m).$$

根据 [BL16], ，当所有估值都是加性的时，可以将公平分割实例化简为有序实例，同时保留每个代理人的 MMS 价值以及 MMS 物品束的大小。在针对加性情形设计最大化最小份额相关算法时，这是一个标准假设。

我们证明**定理** 3.1的方法核心在于以下观察。设$\{B_1$、.....、 $B_n\}$ 是将 M分配给 N的某个最大最小份额分配。那么，对于每个前缀 $0 \leq \ell \leq m$:

$$\sum_{i \in N} |B_i \cap [\ell]| \leq \ell.$$

换句话说，在每个前缀 $\{1$、.....、 $\ell\}$ 中，该分配使用的可用物品数不会超过 ℓ。同时，代理人 i 不必获得某个特定的物品束 B_i，实际上，只要物品束中的物品具有相同的价值，他就会感到满意。

我们的方法是：不直接为代理人 $i \in N$ 分配某个特定的物品束 B_i，而是首先为 i 指定所需的价值配置，即一个多重集$\{v_i(e)$: $e \in B_i\}$。对于每个这样的多重集，我们可以衡量前 ℓ 个物品中有多少个能够满足规定的价值，并以类似方式表达上述条件。注意，对于每个 $i \in N$， v_i 的取值都在$\{1$、 $\ldots Q\}$中；同时，由于我们只考虑大小至多为 q的物品束，因此即使物品类型的数量没有上界，所有代理人可能的配置总数也只是一个常数。这为设计分配提供了额外的灵活性，因为现在我们只需处理价值的多重集，而不必将其与任何特定物品关联起来。在获得可行的配置集合并将其分配给相应的代理人之后，我们再将其转换为有效分配。

3.1 需求剖面

现在我们将给出需求剖面及相关术语的形式化定义，这些定义是我们所采用的方法所必需的。

定义 3.1。需求 是一个价值 $\alpha > 0$。如果物品 $e \in M$ 满足 代理人 $i \in N$ 的需求α，则称该物品 $e \in M$ 满足该需求，即 $v_i\ (e)\ \geq \alpha$。

定义 3.2。需求剖面 是由需求构成的有限多重集 $\pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{|\pi|}\}$。如果一个子集$B \subseteq M$ 满足 代理人 $i \in N$ 的需求剖面 π，则每个需求 $\alpha \in \pi$ 都可以被分配给一个满足该需求的不同物品 $e \in B$。也就是说，存在 $\{e_1, \ldots, e_{|\pi|}\} \subseteq B$ 使得

$$v_i(e_1) \geq \alpha_1, \ldots, v_i(e_{|\pi|}) \geq \alpha_{|\pi|}.$$

一个（有保证的）配置的价值 π 是

$$v(\pi) := \sum_{\alpha \in \pi} \alpha.$$

如果代理人 i 是带符号配置 π，满足 π 时，对于某个物品束 $B \subseteq M$，可保证 $v_i(B)\ \geq v(\pi)$.

我们不再衡量特定物品束 $B \subseteq M$ 在给定前缀$\{1,\ldots,\ell\}$中使用了多少物品，也就是价值 $|B \cap [\ell]|$，而是针对需求配置衡量一个类似的量。给定某个配置 π，我们希望知道，对于每个代理人 i，每个前缀 $\{1,\ldots,\ell\}$ 中的物品有多少是代理人 i 满足 π所需的。我们将使用一种称为断点的概念来实现这一点。

定义 3.3. 对于 $i \in N$ 和需求 α，代理人 i 的一个 α-断点 是 $m_i(\alpha)$ 中价值至少为 α 的物品数量。也就是说，对于每个 $e \leq m_i(\alpha)$ ，都有 $v_i(e) \geq \alpha$。

根据定义，代理人 i 只能通过物品 $\{1,\ldots,m_i(\alpha)\}$ 满足需求 α。因此，若$m_i(\alpha) \leq \ell$，则代理人 i 必须使用前缀 $\{1,..,\ell\}$ 中的物品来满足 α。因此，将配置 π 的 ℓ-前缀负载 定义为 ℓ 之前 π 的断点总数，是很自然的。

定义 3.4. 设 $\pi = \{\alpha_1,\ldots,\alpha_{|\pi|}\}$ 为一个需求配置。对于整数 $0 \leq \ell \leq m$ 和代理人 $i \in N$，用 $P_i(\pi, \ell)$ 表示 π 中断点不超过 ℓ 的需求总数:

$$\mathcal{P}_i(\pi,\ell) = |\{\alpha \in \pi : m_i(\alpha) \leq \ell\}|.$$

也就是说，$P_i(\pi,\ell)$ 统计 π 中有多少需求只能由前 ℓ 个物品满足。我们将 $P_i(\pi,\ell)$ 称为 π 对于 i 的 ℓ-前缀负载 。

我们将前缀负载的定义扩展到配置集合。

定义 3.5。 设 $I \subseteq N$，设 $\Pi_I := \{\pi_i\}_{i\in I}$ 为一个需求剖面集合，其中 π_i 分配给代理人 $i \in I$。对于 $0 \leq \ell \leq m$， Π_I 的总 ℓ-前缀负载 为

$$\mathcal{P}(\Pi_I,\ell) := \sum_{i\in I} \mathcal{P}_i(\pi_i,\ell),$$

I 中所有代理人的需求总数，其中这些需求只能由前 ℓ 个物品满足。

以下引理表明，为某些代理人 $I \subseteq N$ 找到将 M 分配给他们的方案，等价于找到一个适当的需求剖面可行集合 Π_I。

引理 3.1。 设 $I \subseteq N$，设 $\pi_i = \{\alpha_{i,1},\ldots,\alpha_{i,|\pi_i|}\}$ 为代理人 $i \in I$ 的某个需求分布，并设 $\Pi_I := \{\pi_i\}_{i\in I}$。对于任意物品集合 $E \subseteq M$，我们可以使用 E 中不同的物品同时满足 Π_I 的所有配置，当且仅当

$$\mathcal{P}(\Pi_I,\ell) \leq |E \cap [\ell]|, \qquad \forall 0 \leq \ell \leq m.$$

此外，如果 $K := \sum_{i\in I} |\pi_i|$，则只需使用 E 的前 K 个物品。特别地，当$E = M$时，我们可以仅使用物品 $\{1、\ldots\ldots、K\}$ 来满足 Π_I 的所有配置，只要

$$\mathcal{P}(\Pi_I,\ell) \leq \ell, \qquad \forall 0 \leq \ell \leq m.$$

证明。 假设我们可以使用 E 中不同的物品来满足 Π_I 的所有配置。根据定义，

$$\mathcal{P}(\Pi_I,\ell) = \sum_{i\in I} \mathcal{P}_i(\pi_i,\ell) = \sum_{i\in I} |\{\alpha \in \pi_i : m_i(\alpha) \leq \ell\}|.$$

考虑所有断点至多为 ℓ 的 $\alpha \in \Pi_I$（对于相应的代理人），这些价值中的每一个都必须由 $\{1、\ldots\ldots、\ell\}$ 中的某个物品满足。每个这样的需求都会在 E 中得到一个满足它的不同物品，因此断点至多为 ℓ 的需求最多有 $|E\cap[\ell]|$ 个。因此，$\mathcal{P}(\Pi_I,\ \ell) \leq |E\cap[\ell]|$。

现在，假设对于每个 $0 \leq \ell \leq m$，都有 $\mathcal{P}(\Pi_I,\ell) \leq |E \cap [\ell]|$。取 $\ell = 0$，我们得到$\mathcal{P}(\Pi_I,\ 0) \leq |E\cap[0]| = 0$，因此已分配配置中的需求都没有断点 0。因此，每个需求至少有一个合格物品。

将所有个体需求 $\alpha \in \Pi_I$ 列为 (i,α)，其中 $\alpha \in \pi_i$，包括重复项，并按断点值 $m_i(\alpha)$ 排序。我们得到一个包含 $K = \sum_{i\in I} |\pi_i| =$ 个$\mathcal{P}(\Pi_I, m)$ 对的列表

$$(i_1,\alpha_1),\ldots,(i_K,\alpha_K), \qquad 1 \le m_{i_1}(\alpha_1) \le \ldots \le m_{i_K}(\alpha_K) \le m.$$

注意，$K = \mathcal{P}(\Pi_I, m) \le |E \cap [m]|$ 意味着 $K \le |E|$。

记 $m_k := m_{i_k}(\alpha_k)$，$m_1 \le \ldots \le m_K$。根据定义，对于每个 k，至少存在 k对 (i, α)，其断点为 $m_i(\alpha) \le m_k$。这意味着，至少有 k 个不同的需求想要前 m_k 个物品中的物品，因此 $\mathcal{P}(\Pi_I, m_k) \ge k$。

根据假设，$\mathcal{P}(\Pi_I, m_k) \le |E \cap [m_k]|$。由此可知，若 $E = \{e_1 < \ldots < e_{|E|}\}$，则$e_k \le m_k$。取这个 $m_k = m_{i_k}(\alpha_k)$，并将物品 e_k 分配给代理人 i_k，以满足 α_k。由于 $m_k \ge e_k$，必有 $v_{i_k}(e_k) \ge \alpha_k$。我们对每个 $1 \le k \le K$ 都这样做。由于我们始终使用不同物品，且 $K \le |E|$，因此只会使用 E 的前 K 个物品。引理得证。 □

因此，要找到物品 M 到 N的 MMS 分配，只需找到一个需求剖面集合 $\{\pi_i\}_{i\in N}$，其中代理人 $i \in N$ 被分配到配置 π_i，使得对于每个前缀 $0 \le \ell \le m$，

$$\sum_{i\in N} \mathcal{P}_i(\pi_i, \ell) \le \ell,$$

并且对于每个 $i \in N$，都有 $v(\pi_i) \ge \mu_i$。这将是本节接下来部分的目标。

我们的方法是先找到一个规模足够大的代理人集合 $I \subseteq N$，并为他们分配一些配置 $\Pi_I = \{\pi_i\}_{i\in I}$，使得对于每个 $i \in I$，$v(\pi_i) \ge \mu_i$。我们将以此分配作为基准，然后将其补全为完整分配。我们还需要另外两个约定。

定义 3.6。 空档案 是 $\varnothing$。如果代理人 $i \in N$ 被分配到一个空的 $\pi = \varnothing$，这意味着他可能得不到任何物品。对于所有 $0 \le \ell \le m$，总有 $P_i(\varnothing, \ell) = 0$。

目前，这个定义大多只是形式上的，不过将来会派上用场。

定义 3.7。 无档案 是 $\perp$。如果代理人 $i \in N$ 被分配为 $\perp$，这意味着我们不选择该代理人，而且他不会获得任何物品。对于所有 $0 \le \ell \le m$，始终有 $P_i(\perp, \ell) = 0$。

A⊥“对应于不将 $i \in N$ 纳入初始选择 I的一种选项。我们还将为每位代理人 $i \in N$定义一个最大最小份额配置集合。我们的分配程序将首先尝试找到一个较大的子集 $I \subseteq N$，使得每位代理人 $i \in I$ 都能获得一个配置 π_i，该配置对应于 i的最大最小份额划分中的某个物品束。我们无法保证每位代理人 $i \in N$都能获得这样的分配，不过，集合 I 将包含“几乎所有”代理人。

无档案

定义 3.8。 对于每位代理人 $i \in N$，令 $\{B_{i,1},\ldots,B_{i,n}\}$ 表示 M 见证最大最小份额(M, v_i, n) 的划分；对于每个$B_{i,j}$，有 $v_i(B_{i,j}) \ge \mu_i$，且$|B_{i,j}| \le q$。对于每个 $j \in [n]$，定义

$$\pi_{i,j} := \{v_i(e) : e \in B_{i,j}\}.$$

令 $\Pi := \{\varnothing, \perp\} + \bigcup_{i\in N}\{\pi_{i,j} : j \in [n]\}$。注意，根据假设，对于所有 $\pi \in \Pi$，我们都有 $|\pi| \le q$。

注意，在配置的最终分配中，可能有一些代理人 $i \in N$ 获得了配置 π，使得对于任意 $j \in [n]$，都有 $\pi \ne \pi_{i,j}$。

3.2 E/S-划分和缓冲集

在先前工作中 [FG26]，我们证明了，至少可以为 $n - O(\log^2 n)$ 名代理人获得 MMS 分配；稍后我们将在第 5 节（**定理** 5.1）中重复这一结果的证明。主要问题是，能否将这一分配扩展为完整分配

，并在让已分配代理人保持满意的同时，为其余 $O(\log^2 n)$ 名代理人提供可接受捆绑?

我们将把这个问题转化为需求配置的语言来表述。暂且假设我们已经得到一个较大的代理人子集 $I \subseteq N$（例如，$|I| \geq n - O_{Q,\,q}(\log^2 n)$），这些代理人已分配配置 $\Pi_I = \{\pi_i\}_{i\in I}$，其中每个 π_i 都满足 $\pi_i = \pi_{i,\,j}$ 对于某个 $j \in [n]$，且对于所有 $0 \leq \ell \leq m$，

$$\sum_{i\in I} \mathcal{P}_i(\pi_i, \ell) \leq \ell.$$

令 $U = N \setminus I$ 为剩余的未分配代理人。我们希望为每个 $u \in U$ 分配某个新配置 π_u（不一定具有 $\pi_{u,\,j}$ 的形式，其中 $j \in [n]$），使得对于每个 $0 \leq \ell \leq m$，

$$\sum_{i\in I} \mathcal{P}_i(\pi_i, \ell) + \sum_{u\in U} \mathcal{P}_u(\pi_u, \ell) \leq \ell.$$

对于每个 ℓ 都满足这一条件，同时保持 π_i 中所有 $i \in I$ 的配置不变，可能无法做到。因此，我们允许少数已经分配配置的代理人 $i \in I$ “放弃”其当前配置 π_i，转而获得一个新配置 $\hat{}\pi_i$。也就是说，我们希望找到一个较大的代理人子集 $A \subseteq I$，让其中的代理人保留已分配配置，而代理人 $I \setminus A$ 和 U 将获得新配置，使得对于每个 $0 \leq \ell \leq m$，都有

$$\sum_{i\in A} \mathcal{P}_i(\pi_i, \ell) + \sum_{i\in I\setminus A} \mathcal{P}_i(\hat{\pi}_i, \ell) + \sum_{u\in U} \mathcal{P}_u(\pi_u, \ell) \leq \ell.$$

为了解决这些约束，我们将施加一些额外的结构：1）指导我们如何选出这组庞大的代理人 $A \subseteq I$，使其保留已分配配置；2）确保能够创建替代配置 $\hat{}\pi_i$ 和新配置 π_u，从而使总前缀负载仍有上界。下面将概述我们的方法。

我们将把物品 M 划分为 $M = E \sqcup S$，其中集合 E 包含大部分物品，而集合 S 非常小。注意，要使代理人 $i \in N$ 的需求能够共同装入一个前缀 ℓ，只需其配置的 E部分能装入 $E \cap [\ell]$，且其配置的 S部分能装入$S \cap [\ell]$。更具体地说，我们将考虑分解为 E和 S子配置。

定义 3.9. 考虑任意划分 $M = E \sqcup S$。需求配置 π 的一个 E/S分解是由子配置 $\{\pi^E, \pi^S\}$构成的一对，满足

$$\pi = \pi^E \uplus \pi^S,$$

其中 $\uplus$ 是带重数的并集。π^E 中的需求被指定为只能由 E 中的物品满足，而 π^S 中的需求被指定为只能由 S 中的物品满足。

注释 3.1。请注意，由于我们处理的是需求配置而非实际捆绑包，因此实际上，子配置 π^E、π^S 中的每个需求也可能由 E、S 之外的许多物品满足。然而，就该方法而言，我们的意图是尝试将 π^E、π^S 限制为仅使用其相应集合 E、S 中的物品，并找出一组适当的子剖面对，使其确实能够分别仅由 E、S 满足。

注意，对于代理人的配置 $\{\pi_i\}_{i\in A}$、$\{\hat{}\pi_i\}^{i\in I\setminus A}$ 和 $\{\pi_u\}_{u\in U}$，若它们分别满足所有前缀负载约束，只需每个配置都具有某种 E/S-分解，使得对于每个 $0 \leq \ell \leq m$ 均有

$$\sum_{i\in A} \mathcal{P}_i(\pi_i^E, \ell) + \sum_{i\in I\setminus A} \mathcal{P}_i(\hat{\pi}_i^E, \ell) + \sum_{u\in U} \mathcal{P}_u(\pi_u^E, \ell) \leq |E \cap [\ell]|; \tag{E}$$

$$\sum_{i\in A} \mathcal{P}_i(\pi_i^S, \ell) + \sum_{i\in I\setminus A} \mathcal{P}_i(\hat{\pi}_i^S, \ell) + \sum_{u\in U} \mathcal{P}_u(\pi_u^S, \ell) \leq |S \cap [\ell]|. \tag{S}$$

事实上，$\mathcal{P}_i(\pi,\ \ell) = \mathcal{P}_i(\pi^E,\ \ell) + \mathcal{P}_i(\pi^S,\ \ell)$，对于 S 同样成立，因此 (E) 和 (S) 一起意味着

$$\sum_{i\in A}\mathcal{P}_i(\pi_i,\ell) + \sum_{i\in I\setminus A}\mathcal{P}_i(\hat{\pi}_i,\ell) + \sum_{u\in U}\mathcal{P}_u(\pi_u,\ell) \le |E\cap[\ell]| + |S\cap[\ell]| = \ell.$$

我们首先关注如何确保条件（E）。我们对小集合 S 的选择，将由能够保证我们添加代理人的新配置 $I\setminus A$和 U 而不违反相对于 E的任何前缀负载约束的充分条件所决定。

为方便起见，我们使用 π_u 来表示初始未分配代理人 U 或代理人 $I\setminus A$，即那些因舍入而放弃其配置的代理人。因此，

$$N\setminus A = (I\setminus A)\cup U.$$

我们希望通过适当选择 $A\subseteq I$ 中保留其舍入所得配置的代理人，以及为 π_u 选择新配置 $u\in N\setminus A$，来确保（E）成立。也就是说，对于每个 $0\le\ell\le m$，

$$\sum_{i\in A}\mathcal{P}_i(\pi_i^E,\ell) + \sum_{u\in N\setminus A}\mathcal{P}_u(\pi_u^E,\ell) \le |E\cap[\ell]|. \tag{E}$$

注意，对于 $u\in N\setminus A$，新配置 π_u 所引入的总 E-负载，可以由这些配置中的需求总数给出上界。也就是说，

$$\sum_{u\in N\setminus A}\mathcal{P}_u(\pi_u^E,\ell) \le \sum_{u\in N\setminus A}|\pi_u|.$$

此外，由于 $A\subseteq I$，对于 $i\in A$，已分配配置 π_i 的总负载至多为所有初始已分配 $i\in I$的 π_i 总负载，即包括 $I\setminus A$的旧配置。因此，

$$\sum_{i\in A}\mathcal{P}_i(\pi_i^E,\ell) + \sum_{u\in N\setminus A}\mathcal{P}_u(\pi_u^E,\ell) \le \sum_{i\in I}\mathcal{P}_i(\pi_i^E,\ell) + \sum_{u\in N\setminus A}|\pi_u|.$$

特别是，要使条件（E）成立，只需存在某个整数 $\nu\ge 1$，使旧配置 π_i 对应于 $i\in I$，以及新配置 π_u 对应于 $u\in N\setminus A$ 满足

$$\sum_{i\in I}\mathcal{P}_i(\pi_i^E,\ell) \le |E\cap[\ell]| - \frac{\nu}{2}, \qquad \forall 0\le\ell\le m \tag{E-ν}$$

$$\sum_{u\in N\setminus A}|\pi_u| \le \frac{\nu}{2}. \tag{A-ν}$$

我们不能指望一致松弛（E-ν）在每个前缀 $0\le\ell\le m$ 上都成立。例如，如果我们不断增大 ℓ，即使 $\ell\in S$，可用容量 $|E\cap[\ell]|$ 仍保持不变。与此同时，某个代理人的 E-负载 $\mathcal{P}_i(\pi_i^E,\ \ell)$ 可能会增加。事实上，即使需求 $\alpha\in\pi_i^E$ 被指定给 E，其断点 $m_i(\alpha)$ 也可能位于 S 中；如果 ℓ 越过 S，前缀负载就会增加。

为了解决这个问题，除了集合 S，我们还将构造一个小型缓冲集 $F\subseteq E$。我们将在每个前缀 $\ell\in E$ 上确立条件（E-ν） $\ell\in E\setminus F$。对于前缀 $\ell\in S\cup F$，我们将改为对数量固定且经过精心挑选的前缀（称为受保护前缀）施加更强的前缀负载约束。这些更强的负载条件将确保所有 $S\cup F$ 上的前缀可行性；再结合 E-ν）在 $\ell\in E\setminus F$ 上的条件，即可保证原始条件（E）对每个前缀 $0\le\ell\le m$ 都成立。

3.2.1 缓冲集构造

我们的集合 $S\subseteq M$ 将具有以下形式

$$S = \{a_1, a_1+1, \ldots, b_1\}\cup\ldots\cup\{a_t, a_t+1, \ldots, b_t\},$$

其中，对于 $s \in [t]$ ，每个 $[a_s, b_s]$ 都是来自 S 的物品的一个极大连续区间。我们有$t \leq 2Q+1$，且每个连续区间的长度以及 S 的总大小都至多为$O_{Q,\ q}(\log n)$。此外，还成立 $a_1 = 1$ 和 $b_t = m$，也就是说， S 包含物品 M 的某个前缀$\{1, \ldots, b_1\}$ 以及某个后缀 $\{a_t, \ldots, m\}$。

取 $E = M \setminus S$。对于松弛度界而言，更重要的或许不一定是 S 本身，而是由 S定义的**缓冲集** $F \subseteq E$。具体来说，在每个区间 $[a_s, b_s] \subset S$,$s \in [t]$之后，我们还会有另一个长度为$\nu = O_{Q,q}(\log\ n)$ 的区间$\{b_s+1, \ldots, b_s+\nu\}$，并且

$$F = E \cap (\{b_1+1, \ldots, b_1+\nu\} \cup \ldots \cup \{b_t+1, \ldots, b_t+\nu\}),$$

或者等价地，取 $c_s := \min\{b_s+\nu, a_{s+1}-1\}$ 作为 $s < t$，并使用 $b_t = m$，

$$F = \{b_1+1, \ldots, c_1\} \cup \ldots \cup \{b_{t-1}+1, \ldots, c_{t-1}\}.$$

集合 S 和参数 $\nu \geq 1$ 的选取方式使得

- 对于每个 $\ell \in E \setminus F$，整个区间 $(\ell-\nu, \ell] = \{\ell-\nu+1, \ldots, \ell\} \subseteq E$；
- 至少有 $n/2$ 个代理人在 $(\ell-\nu, \ell]$ 中没有断点。

对于在 $(\ell-\nu, \ell]$ 中没有断点的代理人，前缀 E-负载在整个长度为 ν 的区间 $(\ell-\nu, \ell]$ 上保持不变。同时，在 ℓ 处可用的 E-容量增加了 ν。对所有代理人 N 取平均后，可得该前缀 ℓ处的松弛量至少为 $\nu/2$ 。

现在我们将描述 S 的构造。

引理 3.2 (缓冲集)。 令 $Q := [Q]$。令 $\nu \geq 1$ 为一个整数，且 $\varepsilon \in (0,\ 1)$。存在物品集合$S \subseteq M$ 和 $F \subseteq E := M \setminus S$，以及代理人集合 $W \subseteq N$，满足以下性质。

- 1、 $m \in S$和 S 是至多 $t_0 = 2Q+1$ 个极大连续区间的并集；
- 集合 S 和 F 将具有以下形式

$$S = \bigcup_{s=1}^{t} \{a_s, \ldots, b_s\}, \qquad F = \bigcup_{s=1}^{t-1} \{b_s+1, \ldots, c_s\}, \quad where \quad c_s := \min\{b_s+\nu, a_{s+1}-1\};$$

- 集合的大小满足

$$|S| \leq t_0 \left(1 + \frac{Q\nu}{\varepsilon}\right), \qquad |F| \leq t_0\nu, \qquad |W| \leq \varepsilon n;$$

- 集合 W 包含所有在 F 中有断点的代理人 $i \in N$，即

$$W = \{i \in N :\ \exists \alpha \in \mathcal{Q} \ \ s.t \ \ m_i(\alpha) \in F\};$$

- 对于每个 ry $\ell \in E \setminus F$, $(\ell-\nu, \ell] \subseteq E$，以及$(\ell-\nu, \ell]$ i中的断点总数 s

$$\left|\left\{(i, \alpha) \in N \times \mathcal{Q} :\ \ell-\nu < m_i(\alpha) \leq \ell\right\}\right| \leq \frac{n}{2}.$$

证明。 对于每位代理人 $i \in N$，我们列出 i 的所有可能正断点，即所有 $m_i(\alpha) > 0$ 针对$\alpha \in \mathcal{Q}$，并将它们合并为一个多重集 $\mathcal{M}(\mathcal{Q})$:

$$\mathcal{M}(\mathcal{Q}) := \biguplus_{i \in N} \ \biguplus_{\substack{\alpha \in Q \\ m_i(\alpha) > 0}} \{(i, m_i(\alpha))\}.$$

注意， $|\mathcal{M}(\mathcal{Q})| \le Qn$。我们按照 $m_i(\alpha)$ 对 $\mathcal{M}(\mathcal{Q})$ 按非递减顺序排序，并标记每第κ个断点，其中

$$\kappa := \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1.$$

请注意，$\mathcal{M}(\mathcal{Q})$ 中任何不含已标记断点的子区间，长度至多为 $\kappa - 1$。令集合 S_0 包含$\{\mathbf{1}, m\}$ 以及 M 中对应于已标记断点的每个不同位置，即

$$S_0 = \{1, m\} \cup \Big\{ s \in \{1, \dots, m\} : \exists i \in N \text{ s.t } (i, s) = (i_{j\kappa}, m_{j\kappa}) \in \mathcal{M}(\mathcal{Q}) \text{ for some } j \ge 1 \Big\}$$

由于 $\kappa > n/2$，因已标记断点的数量小于 $2Q$，因此，在添加 $\{\mathbf{1}, m\}$ 后，

$$|S_0| \le 2Q + 1 =: t_0.$$

M 中与 S_0 不相交的任何子区间，在所有代理人中至多包含 $\kappa - 1$ 个断点。事实上，落入 M 子区间的断点（可能重复）在$\mathcal{M}(\mathcal{Q})$ 中构成一个连续区间，而任何不含已标记断点的此类区间，其长度都小于 κ。

我们构造一个**受保护区域**序列。对于整数半径 $r \ge 1$，受保护区域$S(r)$ 将包含距离 r 范围内、位于 S_0 右侧的所有物品：

$$S(r) := M \cap \bigcup_{s \in S_0} \{s, s+1, \dots, s+r-1\}.$$

我们以 ν 为增量逐步增大半径。对于 $k = 0, \mathbf{1}, \dots, K$，其中 $K := \lfloor Q/\varepsilon \rfloor + 1$，令

$$r_k := 1 + k\nu.$$

根据构造，对于所有 $k \ge 0$，集合 $S(r_{k+1}) \setminus S(r_k)$ 两两不相交。注意，必定存在某个 $0 \le k^* \le K-1$，使得至多有 εn 个断点落入 $\mathcal{M}(\mathcal{Q})$ 的 $S(r_{k^*+1}) \setminus S(r_{k^*})$ 中。事实上，否则，落入任意 $S(r_{k+1}) \setminus S(r_k)$ 中的断点总数将超过

$$K \cdot \varepsilon n = \left(\left\lfloor \frac{Q}{\varepsilon} \right\rfloor + 1 \right) \cdot \varepsilon n > Qn.$$

取这个 k^*，并定义集合

$$S := S(r_{k^*}), \qquad F := S(r_{k^*+1}) \setminus S(r_{k^*}), \qquad E := M \setminus S.$$

此外，令 W 为在 F 中有断点的代理人，则 $|W| \le \varepsilon n$.

显然，每个 $s \in S_0$ 都会对长度至多为 $1 + (K-1)\nu$ 的区间 S 作出贡献；再将该区间扩展一次，最多会为 F 增加 ν 个物品。因此，

$$|S| \le |S_0|(1 + (K-1)\nu) \le t_0 \left(1 + \frac{Q\nu}{\varepsilon}\right), \qquad |F| \le |S_0|\nu \le t_0\nu.$$

由此可知， S 是 $t \le t_0$ 个极大连续区间的并，即

$$S = \bigcup_{s=1}^{t} \{a_s, \dots, b_s\}, \quad \text{where} \quad a_1 = 1 \text{ and } b_t = m,$$

而缓冲集 F 恰好是

$$F = E \cap \bigcup_{s=1}^{t} \{b_s + 1, \dots, b_s + \nu\} = \bigcup_{s=1}^{t-1} \{b_s + 1, \dots, c_s\} \quad \text{where} \quad c_s := \min\{b_s + \nu, a_{s+1} - 1\}.$$

最后，对于 $\ell \in E \setminus F$，令 $b_s \le \ell$ 为紧接在 ℓ之前的一个 S区间的端点；根据 $1 \in S$，这样的端点存在。由于 $\ell \notin F$，我们必须有 $\ell > b_s + \nu$。因此，$(\ell - \nu,\ \ell] \subseteq (b_s,\ \ell] \subseteq E$。该区间与 $S_0 \subseteq S$不相交，因此其中至多包含 $\mathcal{M}(\mathcal{Q})$ 的 $\kappa - 1$ 个断点。引理得证。 □

我们将应用 **引理** 3.2 ，取某个整数 $\nu \geq 1$ 和 $\varepsilon \in (0,\ 1)$，并得到一个划分$M = E \sqcup S$，以及缓冲集 $F \subseteq E$ 和一个由代理人组成的小集合 $W \subseteq N$，这些代理人的断点落在 F中。这些代理人 W 在初始配置分配期间需要格外关注。具体而言，我们希望“禁止” $i \in W$ 的选定配置使用 F中的任何物品，以确保每个前缀都有足够的松弛量。

每个 MMS 配置 $\pi_{i,\ j}$ 现在都有一个自然的 E/S-分解。

定义 3.10。 考虑来自引理 3.2的划分 $M = E \sqcup S$ 。对于具有划分 $\{B_{i,\ 1}, \ldots, B_{i,\ n}\}$ 的代理人 $i \in N$，对于每个 *MMS* 配置 $\pi_{i,\ j} = \{v_i(e)\colon\ e \in B_{i,\ j}\}$，定义

$$\pi^E_{i,j} := \{v_i(e)\colon\ e \in B_{i,j} \cap E\}, \qquad \pi^S_{i,j} := \{v_i(e)\colon\ e \in B_{i,j} \cap S\}.$$

显然，对于所有 $\pi_{i,\ j}$，都有 $\pi_{i,\ j} = \pi^E_{i,\ j} \uplus \pi^S_{i,\ j}$。

备注 3.2。 划分 $M = E \sqcup S$ 对选定的配置施加了额外限制。从现在起，若配置 π 等于 $\pi_{i,\ j}$，则它在 E-部分和 S-部分上也必须一致：

$$\pi = \pi_{i,j} \quad \Longleftrightarrow \quad (\pi^E, \pi^S) = (\pi^E_{i,j}, \pi^S_{i,j}).$$

因此，如果 π 和 $\pi_{i,\ j}$ 作为多重集相同，但具有不同的 E/S-分解，我们就将它们视为两个不同的配置。基于这个更强的相等概念，我们定义公共集合

$$\Pi := \{\varnothing, \bot\} \cup \bigcup_{i \in N} \{\pi_{i,j} : j \in [n]\}.$$

观察 3.1。 对于每个 $i \in N$ 以及每个前缀 $0 \leq \ell \leq m$，都有

$$\sum_{j=1}^{n} \mathcal{P}_i(\pi^E_{i,j}, \ell) \leq |E \cap [\ell]|, \qquad \sum_{j=1}^{n} \mathcal{P}_i(\pi^S_{i,j}, \ell) \leq |S \cap [\ell]|.$$

证明。 注意，对于每个代理人 $i \in N$ 以及每个 $0 \leq \ell \leq m$，都有

$$\sum_{j=1}^{n} \mathcal{P}_i(\pi_{i,j}, \ell) \leq \ell.$$

根据定义，$\mathrm{P}_i(\pi_{i,j}, \ell)$ 统计了 $\pi_{i,j}$ 中只能由前 ℓ 个物品满足的需求数量，而上式中的总和统计了代理人 i 的此类需求总数。注意，$\pi_{i,j}$ 中的每个需求都来自 $B_{i,j}$ 中的唯一一个物品，并且最大最小份额划分 $\{B_i,1, \ldots, B_{i,n}\}$ 在每个 ℓ-前缀中至多使用 ℓ 个物品。因此，在所有配置 $\{\pi_i,1, \ldots, \pi_{i,n}\}$ 中，此类需求总数至多为 ℓ，且 $\sum_{j=1}^{n} \mathrm{P}_i(\pi_{i,j}, \ell) \leq \ell$。通过同样的推理，在所有配置 $\{\pi_{i,j}\colon\ j \in [n]\}$ 中，每个 ℓ-前缀至多有 $|E \cap [\ell]|$ 个 E-需求，且至多有 $|S \cap [\ell]|$ S 个需求，从而证明了上面的两个不等式。 □

3.2.2 受保护前缀

如前所述，缓冲区 F 将使我们能够在每个前缀$\ell \in E \setminus F$处获得足够的松弛量，以吸收新配置 π_u 在 $u \in N \setminus A$ 中的负载。在其余前缀处，即 $\ell \in S \cup F$，我们将保留数量恒定的更强前缀负载约束。

现在我们将定义受保护前缀集合。回顾一下，

$$S = \bigcup_{s=1}^{t} [a_s, b_s], \quad \text{where} \quad a_1 = 1, b_t = m \quad \text{and} \quad t \leq 2Q + 1.$$

此外，

$$F = \bigcup_{s=1}^{t-1} (b_s, c_s] \quad \text{where} \quad c_s := \min\{b_s + \nu, a_{s+1} - 1\}.$$

考虑区间 $[a_s, b_s] \subset S$，其范围为 $s < t$。在整个区间内， E容量 $|E \cap [\ell]|$保持不变，但旧/新配置的 E负载可能增加。不过，我们可以通过控制较晚的受保护前缀处的负载，来控制整个区间 $[a_s, b_s]$ 的负载。具体来说，我们可以加入以下缓冲区（b_s， $c_s] \subset F$），并在 F 的端点处采用更强的前缀负载条件，以保持整个区间 $[a_s, c_s]$ 上的 E负载：

$$\sum_{i \in A} \mathcal{P}_i(\pi_i^E, c_s) + \sum_{u \in N \setminus A} \mathcal{P}_u(\pi_u^E, c_s) \le |E \cap [b_s]|.$$

确实，对于每 个 $\ell \in [a_s, c_s]$， ℓ 处的前缀负载至多为 c_s处的前缀负载。与此同 le

- 若 $\ell \le b_s$，则有 $[\ell, b_s] \subset S$ 和 $E \cap [\ell] = E \cap [b_s]$,
- 若 $\ell \ge b_s$，则 $[b_s] \subseteq [\ell]$，且 $|E \cap [\ell]| \ge |E \cap [b_s]|$,

因此，上述单个约束可确保每个前缀 $\ell \in [a_s, c_s]$ 上的 E-负载可行性。

当 $s = t$，即 $[a_t, b_t] = [a_t, m] \subset S$ 时，为了保持 $[a_t, m]$ 上的 E-负载，我们需要使用略有不同的端点。由于此区间以 m 结束，每个 $e \in E$ 都满足 $e \le a_t$。因此，我们可以将

$$\sum_{i \in A} \mathcal{P}_i(\pi_i^E, m) + \sum_{u \in N \setminus A} \mathcal{P}_u(\pi_u^E, m) \le |E|,$$

即端点为 $c_t = m$，以确保配置的 E-部分的断点总数不超过 $|E|$。此约束控制每个 $\ell \in [a_t, b_t]$ 处的负载。

定义 3.11。对于给定的集合 S， $F \subseteq M$ 其形式如上，且由 引理 *3.2*应用于某个整数 $\nu \ge 1$ 和 $\varepsilon \in (0,1)$得到，定义集合 $\mathcal{L}_S$ 中的 t 受保护前缀 为

$$\mathcal{L}_S := \{(b_1, c_1), \dots, (b_{t-1}, c_{t-1}), (b_t, c_t)\}, \qquad where \qquad (b_t, c_t) = (m, m).$$

注意， $|\mathcal{L}_S| \le 2Q + 1$。

对于代理人 $A \subseteq I$，保留其旧配置，以及代理人 $N \setminus A$ 接收新配置，针对每个受保护前缀（b_s， c_s） $\in \mathcal{L}_S$，受保护条件为

$$\sum_{i \in A} \mathcal{P}_i(\pi_i^E, c_s) + \sum_{u \in N \setminus A} \mathcal{P}_u(\pi_u^E, c_s) \le |E \cap [b_s]|. \tag{$\mathrm{E}_{\mathcal{L}_S}$}$$

推论 3.1。考虑一个划分 $M = E \sqcup S$，该划分由 引理 *3.2* 应用于某个整数 $\nu \ge 1$ 和 $\varepsilon \in (0,1)$得到。假设代理人 $I \subseteq N$ 被分配了满足以下条件的配置 $\{\pi_i\}_{i \in I}$：

$$\sum_{i \in I} \mathcal{P}_i(\pi_i^E, \ell) \le \frac{1}{n} \sum_{i \in N} \sum_{j=1}^{n} \mathcal{P}_i(\pi_{i,j}^E, \ell), \qquad \forall 0 \le \ell \le m.$$

令 $A \subseteq I$，并且 为每个代理人 $u \in N \setminus A$ 赋予一个新剖面 π_u。如果 $\{\pi_i\}_{i \in A}$ 和 $\{\pi_u\}_{u \in N \setminus A}$ 满足

$$\sum_{i \in A} \mathcal{P}_i(\pi_i^E, c_s) + \sum_{u \in N \setminus A} \mathcal{P}_u(\pi_u^E, c_s) \le |E \cap [b_s]|, \qquad \forall (b_s, c_s) \in \mathcal{L}_S; \tag{$\mathrm{E}_{\mathcal{L}_S}$}$$

$$\sum_{u \in N \setminus A} |\pi_u| \le \frac{\nu}{2}; \tag{A-ν}$$

那么对于每个前缀 $0 \le \ell \le m$， 都有

$$\sum_{i \in A} \mathcal{P}_i(\pi_i^E, \ell) + \sum_{u \in N \setminus A} \mathcal{P}_u(\pi_u^E, \ell) \le |E \cap [\ell]|. \tag{E}$$

特别地，如果 $|\pi_u| \le q$ 对于每个 $u \in N \setminus A$，只需使得（$\mathrm{E}_{\mathcal{L}_S}$）对 $|N \setminus A| \le \nu/(2q)$ 成立。

证明。 首先，取 $\ell \in E \setminus F$，并考虑区间 $(\ell-\nu,\ \ell]$。根据**引理** 3.2，$(\ell-\nu,\ \ell] \subseteq E$，并且至少有 $n/2$ 个代理人在 $(\ell-\nu,\ \ell]$中没有断点。将这些代理人记为 N_ℓ，则对于每个 $i \in N_\ell$ **观察** 3.1 给出

$$\sum_{j=1}^{n} \mathcal{P}_i(\pi_{i,j}^E, \ell) = \sum_{j=1}^{n} \mathcal{P}_i(\pi_{i,j}^E, \ell-\nu) \le |E \cap [\ell-\nu]| = |E \cap [\ell]| - \nu.$$

对于每一个其他 $i \in N \setminus N_\ell$，E个子配置的总 ℓ前缀负载$\pi_{i,\ j}^E$至多为 $|E \cap [\ell]|$。因此，

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{i\in N}\sum_{j=1}^{n} \mathcal{P}_i(\pi_{i,j}^E, \ell) &= \frac{1}{n}\sum_{i\in N_\ell}\sum_{j=1}^{n} \mathcal{P}_i(\pi_{i,j}^E, \ell) + \frac{1}{n}\sum_{i\in N\setminus N_\ell}\sum_{j=1}^{n} \mathcal{P}_i(\pi_{i,j}^E, \ell) \\ &\le \frac{|N_\ell|}{n}\cdot(|E\cap[\ell]| - \nu) + \frac{|N\setminus N_\ell|}{n}\cdot|E\cap[\ell]| = \frac{|N|}{n}\cdot|E\cap[\ell]| - \frac{|N_\ell|}{n}\cdot\nu \\ &\le |E\cap[\ell]| - \frac{\nu}{2}.\end{aligned}$$

由假设可知，对于任意 $A \subseteq I$，在条件（A-ν）下，此前缀 ℓ满足：

$$\begin{aligned}\sum_{i\in A}\mathcal{P}_i(\pi_i^E, \ell) + \sum_{u\in N\setminus A}\mathcal{P}_u(\pi_u^E, \ell) &\le \sum_{i\in I}\mathcal{P}_i(\pi_i^E, \ell) + \sum_{u\in N\setminus A}|\pi_u| \\ &\le \frac{1}{n}\sum_{i\in N}\sum_{j=1}^{n}\mathcal{P}_i(\pi_{i,j}^E, \ell) + \frac{\nu}{2} \le |E\cap[\ell]| - \frac{\nu}{2} + \frac{\nu}{2} = |E\cap[\ell]|.\end{aligned}$$

接下来考虑前缀 $\ell \in S \cup F$。记$\mathcal{P}^E(\ell)$: $= \sum_{i\in A}\mathcal{P}_i(\pi_i^E,\ \ell) + \sum_{u\in N\setminus A}\mathcal{P}_u(\pi_u^E,\ \ell)$ 简记为此。取 S和 F的区间表示。如果 $\ell \in [a_s, c_s]$对于 $s < t$，（E$\mathcal{L}_s$）保证

$$\mathcal{P}^E(\ell) \le \mathcal{P}^E(c_s) \le |E \cap [b_s]| \le |E \cap [\ell]|,$$

作为 $[\ell, b_s] \subset S$ fo r $\ell \le b_s$，以及 $[b_s] \subseteq [\ell]$ 对于 $\ell \ge b_s$。如果 $a_t \le \ell \le m$，最后一个受保护前缀给出

$$\mathcal{P}^E(\ell) \le \mathcal{P}^E(m) \le |E| = |E \cap [\ell]|.$$

最后，由于 $1 \in S$ 和 $[b_1] \subseteq S$，我们有 $E \cap [b_1] = \varnothing$，且第一个受保护前缀给出$\mathcal{P}^E(c_1)$ $\le |E \cap [b_1]| = 0$。因此，对于 $\ell = 0$，我们有 $\mathcal{P}^E(0) \le \mathcal{P}^E(c_1) = 0$。推论得证。 □

由此可知，为了保证（E），我们需要找到

- 一组代理人 $I \subseteq N$，其配置为 $\{\pi_i\}_{i\in I}$，使得其总 E-负载至多为 MMS 配置的平均总 E-负载 $\{\pi_{i,\ j}:\ j \in [n]\}$，对于 $i \in N$。我们将通过使用线性规划对特定的分数配置 进行舍入来找到这样的集合 I。
- 一组 $A \subseteq I$ 保留旧配置并为每个 π_u 保留新配置 $u \in N \setminus A$，满足（E$\mathcal{L}_s$）和（A-ν）。这将在后文完成。

3.3 分数配置

我们不直接考虑配置 $\{\pi_{i,j}:\ j \in [n]\}$，而是针对每个代理人 $i \in N$ 定义一个关于配置 Π 的分布。我们将这些分布称为分数配置。因此，我们的目标首先是定义一个分数配置集合，使得对于每个 $0 \le \ell \le m$，都能分数地满足前缀负载条件

$$\sum_{i\in I}\mathcal{P}_i(\pi_i^E, \ell) \le |E\cap[\ell]|, \qquad \text{and} \qquad \sum_{i\in I}\mathcal{P}_i(\pi_i^S, \ell) \le |S\cap[\ell]|$$

and 然后将其舍入为整数配置集合，同时保留每个前缀约束 .

定义 3.12. 设 Π 为一个配置集合，其中包含 $\varnothing$ 和 $\perp$。代理人 $i \in N$ 的分数配置是一个有序对(x_i, Π)，其中 $x_i(\pi) \geq 0$ 对每个 $\pi \in \Pi$ 均成立，且 $\sum_{\pi \in \Pi} x_i(\pi) = 1$。

我们自然地将 E/S-前缀负载的定义扩展到分数配置。

定义 3.13。 对于具有分数配置 (x_i, Π) 的代理人 $i \in N$，其分数 ℓ-前缀 E/S-负载 对于 Π 的 $0 \leq \ell \leq m$ 分别为

$$\mathcal{H}_i^E(x_i, \Pi, \ell) := \sum_{\pi \in \Pi} x_i(\pi) \cdot \mathcal{P}_i(\pi^E, \ell), \qquad and \qquad \mathcal{H}_i^S(x_i, \Pi, \ell) := \sum_{\pi \in \Pi} x_i(\pi) \cdot \mathcal{P}_i(\pi^S, \ell).$$

假设每个代理人 $i \in N$ 对共享配置集 Π 都具有分数配置 (x_i, Π)，并令$x = \{x_i\}_{i \in N}$。对于 $0 \leq \ell \leq m$， Π 对 x 的总分数 ℓ-前缀 E/S-负载 分别为

$$\mathcal{H}^E(x, \Pi, \ell) := \sum_{i \in N} \mathcal{H}_i^E(x_i, \Pi, \ell) = \sum_{i \in N} \sum_{\pi \in \Pi} x_i(\pi) \cdot \mathcal{P}_i(\pi^E, \ell);$$
$$\mathcal{H}^S(x, \Pi, \ell) := \sum_{i \in N} \mathcal{H}_i^S(x_i, \Pi, \ell) = \sum_{i \in N} \sum_{\pi \in \Pi} x_i(\pi) \cdot \mathcal{P}_i(\pi^S, \ell).$$

我们关注的是，根据分数配置 (x_i, Π)，被分配到非 $\perp$ 配置的代理人 $i \in N$ 的预期数量。

定义 3.14。 假设每个代理人 $i \in N$ 对共享配置集 Π 都具有分数配置 (x_i, Π)，并令 $x = \{x_i\}_{i \in N}$。相对于 (x, Π) 的已分配档案的分数数量 为

$$\mathcal{I}(x, \Pi) := \sum_{i \in N} \sum_{\pi \neq \perp} x_i(\pi).$$

对于每个代理人 $i \in N$，我们将定义一个分数配置（$\hat{x}_i$， Π），之后再将其舍入为整数档案。一种自然的做法是简单地在所有配置上取均匀分布，并为每个 $\pi \in \Pi$

$$\hat{x}_i(\pi) := \frac{|\{j \in [n] : \pi_{i,j} = \pi\}|}{n}$$

容易 由**观察** 3.1 可知，这些配置实际上对所有 $0 \leq \ell \leq m$ 都满足

$$\mathcal{H}^E(\hat{x}, \Pi, \ell) \leq |E \cap [\ell]|, \qquad \text{and} \qquad \mathcal{H}^S(\hat{x}, \Pi, \ell) \leq |S \cap [\ell]|.$$

然而，这对我们来说还不够。除了这些条件之外，我们还希望保证分数（$\hat{x}$， Π）也具有松弛量，即对每个受保护前缀（b_s， c_s）$\in \mathcal{L}_s$ 都满足更强的前缀负载条件：

$$\mathcal{H}^E(\hat{x}, \Pi, c_s) \leq |E \cap [b_s]|.$$

这将使我们能够以分数形式满足条件（E$\mathcal{L}_s$），从而通过舍入得到 $I \subseteq N$也满足该条件

$$\sum_{i \in I} \mathcal{P}_i(\pi_i^E, c_s) \leq |E \cap [b_s]|,$$

对于相应的集合 $\{\pi_i\}_{i \in I}$。稍后我们将需要代理人 I 及其配置满足上述条件。

为了在受保护前缀处获得这些更强的分数 E-负载上界，我们将从分数选择中省略一些配置。具体而言，如果代理人 $i \in W$ 的 MMS 捆绑 $B_{i,j}$包含来自缓冲区 F的物品，我们就不使用对应的配置 $\pi_{i,j}$，并将其均匀权重 $1/n$ 也转移到 $\hat{x}_i(\perp)$。这样，我们就能为 $(\hat{x}, \Pi)$ 分数地满足受保护前缀条件 (E$\mathcal{L}_s$)。根据引理 3.2，两个集合 W和 F都很小，因此省略对应的配置后，仍会留下大量总权重 I($\hat{x}, \Pi$)。

定义 3.15. 对于每个代理人 $i \in N$，定义以下分数配置 $(\hat{x}_i, \Pi)$。

- 如果 $i \in N \setminus W$，则令 $\hat{x}_i(\varnothing) = 0$、$\hat{x}_i(\perp) = 0$，并且对于每个 $\pi \in \Pi \setminus \{\varnothing, \perp\}$，令

$$\hat{x}_i(\pi) = \frac{|\{j \in [n] : \pi_{i,j} = \pi\}|}{n}.$$

- 如果 $i \in W$，则令 $\hat{x}_i(\varnothing) = 0$；对于每个 $\pi \in \Pi \setminus \{\varnothing, \perp\}$，令

$$\hat{x}_i(\pi) = \frac{|\{j \in [n] : \pi_{i,j} = \pi \text{ and } B_{i,j} \cap F = \varnothing\}|}{n},$$

以及

$$\hat{x}_i(\perp) = \frac{|\{j \in [n] : B_{i,j} \cap F \neq \varnothing\}|}{n}.$$

因此，在分数集合 $(\hat{x}, \Pi)$ 中，每个 $\pi_{i,j}$ 对应于某个代理人 $i \in W$ 的物品束 $B_{i,j}$，且该物品束包含缓冲区 F中的物品，都将其权重 $1/n$ 改为计入 $\perp$。

接下来我们将证明，分数配置 $(\hat{x}, \Pi)$ 满足 **推论** 3.1 的要求，以及条件 (S)，在分数意义下成立。

引理 3.3。 在 $\hat{x}$ 中严格分数坐标的数量 $\hat{X}$ 满足 $\hat{X} \leq n^2$。此外，

$$\mathcal{I}(\hat{x}, \Pi) \geq n - \varepsilon|F|,$$

此外，对于每个前缀 $0 \leq \ell \leq m$，都有

$$\mathcal{H}^E(\hat{x}, \Pi, \ell) \leq \frac{1}{n} \sum_{i \in N} \sum_{j=1}^{n} \mathcal{P}_i(\pi^E_{i,j}, \ell) \leq |E \cap [\ell]|;$$

$$\mathcal{H}^S(\hat{x}, \Pi, \ell) \leq \frac{1}{n} \sum_{i \in N} \sum_{j=1}^{n} \mathcal{P}_i(\pi^S_{i,j}, \ell) \leq |S \cap [\ell]|;$$

对于每个受保护前缀 $(b_s, c_s) \in L_S$，都有

$$\mathcal{H}^E(\hat{x}, \Pi, c_s) \leq |E \cap [b_s]|.$$

证明。对于每个代理人 $i \in N$，对于 $\pi = \pi_{i,j}$，至多有 n 个正权重 $\hat{x}_i(\pi)$。若 $\hat{x}_i(\perp) > 0$，则至少有一个配置 $\pi_{i,j}$ 将其个体权重计入 $\perp$（注意，一些 $\hat{x}_i(\pi_{i,j})$ 仍可能为正，因为多个 $B_{i,j}$可能导出相同的配置）。至多还有 $n-1$ 个其他 $\pi_{i,j}$ 计入非-$\perp$ 坐标，其正 $\hat{x}_i(\pi)$ 的总数至多为 n。因此，$\hat{X} \leq n^2$。

接下来，根据构造，我们有

$$\mathcal{I}(\hat{x}, \Pi) = \sum_{i \in N} \sum_{\pi \neq \perp} \hat{x}_i(\pi) = |N| - \sum_{i \in N} \hat{x}_i(\perp) = n - \frac{1}{n} \sum_{i \in W} |\{j \in [n] : B_{i,j} \cap F \neq \varnothing\}|.$$

对于每个代理人 $i \in W$，至多有 $|F|$ 个最大最小份额捆绑包含来自 F 的任何物品。因此，利用 $|W|$ 的上界（见 **引理** 3.2），

$$\frac{1}{n} \sum_{i \in W} |\{j \in [n] : B_{i,j} \cap F \neq \varnothing\}| \leq \frac{|W|}{n} \cdot |F| \leq \frac{\varepsilon n}{n} \cdot |F| = \varepsilon|F|.$$

因此，

$$\mathcal{I}(\hat{x}, \Pi) \geq n - \varepsilon|F|.$$

转而考虑前缀负载，每个 $\pi_{i,j}$ 对分数负载的贡献至多为 $1/n$，因此

$$\mathcal{H}^E(\hat{x},\Pi,\ell)=\sum_{i\in N}\sum_{\pi\neq\perp}\hat{x}_i(\pi)\cdot\mathcal{P}_i(\pi^E,\ell)\le\frac{1}{n}\sum_{i\in N}\sum_{j=1}^{n}\mathcal{P}_i(\pi^E_{i,j},\ell)\le|E\cap[\ell]|,$$

其中 la　　第一个不等式由 **观察结果** 3.1得出。关于 S 的上界类似。

最后，固定一个受保护前缀 $(b_s,\ c_s)\ \in\mathcal{L}_s$，其中 $s<t$。对于代理人 $i\in N$，考虑其 MMS 配置 $\pi_{i,\ j}\neq\varnothing$，并令 $\alpha\in\pi^E_{i,\ j}$ 表示在前缀 c_s 处计数的其需求，即 $m_i(\alpha)\le c_s$。若 $e\in B_{i,\ j}\cap E$ 是 α 的来源物品，则 $\alpha=v_i(e)$ 且 $e\le m_i(\alpha)\le c_s$。因此，

- 若 $i\notin W$，则断点 $m_i(\alpha)$ 不可能属于 $(b_s,\ c_s]\subset F$，因此 $m_i(\alpha)\le b_s$，从而 $e\le b_s$；
- 若 $i\in W$ 且 $B_{i,\ j}\cap F=\varnothing$，则 $e\notin F$；又由于 $e\le c_s$ 且 $(b_s,\ c_s]\subset F$，必然有 $e\le b_s$。

因此，只要 $i\notin W$ 或 $i\in W$ 和 $B_{i,\ j}\cap F=\varnothing$，就必须有 $e\le b_s$。因此，根据 $(\hat{x}_i,\ \Pi)$ 的构造，对于配置 $\pi_{i,\ j}$，在前缀 c_s 处计入的每个 E 需求，若未对 $\perp$ 作出贡献，就必定来自 $E\cap[b_s]$ 中的某个物品。而且，这些物品必定彼此不同，因为 $\pi_{i,\ j}$ 是由不同的最大最小份额捆绑 $B_{i,\ j}$、$j\in[n]$ 引出的。因此可得

$$\sum_{\pi\neq\perp}\hat{x}_i(\pi)\cdot\mathcal{P}_i(\pi^E,c_s)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathcal{P}_i(\pi^E_{i,j},c_s)\mathbb{1}\{i\notin W\text{ or }B_{i,j}\cap F=\varnothing\}\le\frac{1}{n}\cdot|E\cap[b_s]|,$$

并对所有 $i\in N$ 求和，

$$\mathcal{H}^E(\hat{x},\Pi,c_s)\le|E\cap[b_s]|.$$

对于最后一个受保护前缀 $(b_t,\ c_t)\ =(m,\ m)$，之前的上界已给出

$$\mathcal{H}^E(\hat{x},\Pi,c_t)=\mathcal{H}^E(\hat{x},\Pi,m)\le|E|=|E\cap[b_t]|.$$

证明至此完成。 □

现在，我们将把分数配置 $(\hat{x},\ \Pi)$ 舍入为整数 $(y,\ \Pi)$，由此定义一个较大的入选代理人子集 $I\subseteq N$，其已分配配置为 $\{\pi_i\}_{i\in I}$，并满足**推论** 3.1的要求。我们将使用以下定理来实现这一点。

定理 3.2 (联合舍入)。对于一个划分 $M=E\sqcup S$，设 Π 是一个具有良定义 E/S-分解的共享配置集，并且对于每个 $\pi\in\Pi|\perp$，都有 $|\pi|\le q$，其中某个整数为 $q\ge1$。对于每个 $i\in N$，设 (x_i,Π) 是一个分数配置，记 $x=\{x_i\}_{i\in N}$。

存在一个集合 $y=\{y_i\}_{i\in N}$，其中包含整数配置 (y_i,Π)，使得对于每个 i,π，都有 $y_i(\pi)\in\{0,1\}$，并且 $y_i(\pi)=1$ 当且仅当 $\pi\neq\perp$ 时成立，若 $x_i(\pi)>0$，并且

$$\begin{aligned}&\mathcal{H}^E(y,\Pi,\ell)\le\mathcal{H}^E(x,\Pi,\ell),&&\forall0\le\ell\le m,\\&\mathcal{H}^S(y,\Pi,\ell)\le\mathcal{H}^S(x,\Pi,\ell),&&\forall0\le\ell\le m,\\&\mathcal{I}(y,\Pi)\ge\mathcal{I}(x,\Pi)-\rho_{ES}(q,X),\end{aligned}$$

其中，对于 $X=|\{(i,\pi):\ 0<x_i(\pi)<1\}|$，

$$\rho_{ES}(q,X)=8q\log\max\{1,X\}.$$

其证明见 附录 A (**定理** A.2)。

推论 3.2. 设 $M=E\sqcup S$、$F\subseteq E$ 和 $W\subseteq N$ 是将某个整数 $\nu\ge1$ 和 $\varepsilon\in(0,1)$ 代入 *引理 3.2* 得到的，并设 $(\hat{x}、\ \Pi)$ 为前面定义的分数配置。

存在一个集合 $I \subseteq N$ 和配置 $\{\pi_i\}_{i\in I}$，其中每个 π_i 都有一个 E/S 分解$\pi_i = \pi_i^E \uplus \pi_i^S$，并满足对所有 $\alpha \in \pi_i$，$|\pi_i| \le q$, $\alpha \in Q$，以及 $v(\pi_i) \ge \mu_i$。此外，

$$|I| \ge n - \varepsilon|F| - 16q\log n$$

并且对于每个前缀 $0 \le \ell \le m$，均有

$$\sum_{i\in I}\mathcal{P}_i(\pi_i^E,\ell) \le \frac{1}{n}\sum_{i\in N}\sum_{j=1}^{n}\mathcal{P}_i(\pi_{i,j}^E,\ell), \qquad \sum_{i\in I}\mathcal{P}_i(\pi_i^S,\ell) \le |S\cap[\ell]|,$$

以及对于每个受保护前缀 $(b_s、\ c_s) \in L_S$,

$$\sum_{i\in I}\mathcal{P}_i(\pi_i^E,c_s) \le |E\cap[b_s]|.$$

证明。根据构造，配置 $\pi \in \Pi\setminus\{\varnothing,\perp\}$ 具有定义良好的 E/S分解，并且由于每个 MMS 捆绑的大小至多为 q，因此有 $|\pi| \le q$。我们将定理 3.2 应用于 $(\hat{}x,\Pi)$，得到整数配置 (y,Π)。令 $I \subseteq N$包含所有满足 $y_i(\perp) = 0$的 $i \in N$，并取满足 $y_i(\pi_i) = 1$ 的 $\pi_i \in \Pi\setminus\perp$作为该 i。由于仅当 $\hat{}x_i(\pi_i) > 0$时才有 $y_i(\pi_i) > 0$，因此对于某个 $j \in [n]$，必有 $\pi_i = \pi_{i,j}$，从而对于所有 $i \in I$，均有 $v(\pi_i) \ge \mu_i$。

接下来，使用 引理**引理**3.3 关于 $\hat{} X \le n^2$ 和 $\mathcal{I}(\hat{}x,\Pi)$，**定理**3.2 给出

$$|I| = \mathcal{I}(y,\Pi) \ge \mathcal{I}(\hat{x},\Pi) - \rho_{ES}(q,\hat{X}) \ge n - \varepsilon|F| - \rho_{ES}(q,n^2) = n - \varepsilon|F| - 16q\log n.$$

接下来，对于每个前缀 $0 \le \ell \le m$，根据**定理**3.2:

$$\sum_{i\in I}\mathcal{P}_i(\pi_i^E,\ell) = \mathcal{H}^E(y,\Pi,\ell) \le \mathcal{H}^E(\hat{x},\Pi,\ell); \qquad \sum_{i\in I}\mathcal{P}_i(\pi_i^S,\ell) = \mathcal{H}^S(y,\Pi,\ell) \le \mathcal{H}^S(\hat{x},\Pi,\ell).$$

将这些不等式与**引理**3.3 结合即可证明

$$\sum_{i\in I}\mathcal{P}_i(\pi_i^E,\ell) \le \frac{1}{n}\sum_{i\in N}\sum_{j=1}^{n}\mathcal{P}_i(\pi_{i,j}^E,\ell), \qquad \sum_{i\in I}\mathcal{P}_i(\pi_i^S,\ell) \le |S\cap[\ell]|,$$

并且对于每个受保护前缀 $(b_s,\ \ c_s) \in \mathcal{L}_S$,

$$\sum_{i\in I}\mathcal{P}_i(\pi_i^E,c_s) \le \mathcal{H}^E(\hat{x},\Pi,c_s) \le |E\cap[b_s]|.$$

□

4 单一供应商

回顾一下我们在第 3.2 节中描述的最初目标。给定一个较大的代理人子集 $I \subseteq N$，其中包含已分配的整数配置 $\Pi_I = \{\pi_i\}_{i\in I}$，我们希望找到一个代理人子集 $A \subseteq I$，让其保留已分配的配置，并为每个代理人 π_u 分配一个新配置 $u \in N \setminus A$，使得对于每个$0 \le \ell \le m$ 都有

$$\sum_{i\in A}\mathcal{P}_i(\pi_i,\ell) + \sum_{u\in N\setminus A}\mathcal{P}_u(\pi_u,\ell) \le \ell.$$

如前所述，要使每个前缀都满足这一条件，只需对于任意划分$M = E \sqcup S$，对每个 $0 \le \ell \le m$ 都有

$$\sum_{i\in A}\mathcal{P}_i(\pi_i^E,\ell) + \sum_{u\in N\setminus A}\mathcal{P}_u(\pi_u^E,\ell) \le |E\cap[\ell]|, \qquad \forall 0 \le \ell \le m. \tag{E}$$

$$\sum_{i\in A}\mathcal{P}_i(\pi_i^S,\ell) + \sum_{u\in N\setminus A}\mathcal{P}_u(\pi_u^S,\ell) \le |S\cap[\ell]|, \qquad \forall 0 \le \ell \le m. \tag{S}$$

假设我们使用某个整数 $\nu \geq 1$ 和 $\varepsilon \in (0,1)$ 应用了引理 3.2，并得到一个划分 $M = E \sqcup S$，以及受保护前缀 L_S。假设最初选定的整数配置 $\Pi_I = \{\pi_i\}_{i \in I}$ 取自推论 3.2。如第 3.2 节、引理 3.2 和推论 3.1 所示，要使上述条件 (E) 和 (S) 对每个前缀$0 \leq \ell \leq m$都成立，只需找到 $A \subseteq I$ 和配置 π_u，使其对应于 $u \in N \setminus A$，并满足

$$\sum_{i \in A} \mathcal{P}_i(\pi_i^E, c_s) + \sum_{u \in N \setminus A} \mathcal{P}_u(\pi_u^E, c_s) \leq |E \cap [b_s]|, \qquad \forall (b_s, c_s) \in \mathcal{L}_S; \tag{$\mathrm{E}_{\mathcal{L}_S}$}$$

$$\sum_{u \in N \setminus A} |\pi_u| \leq \frac{\nu}{2}; \tag{A-ν}$$

$$\sum_{i \in A} \mathcal{P}_i(\pi_i^S, \ell) + \sum_{u \in N \setminus A} \mathcal{P}_u(\pi_u^S, \ell) \leq |S \cap [\ell]|, \qquad \forall 0 \leq \ell \leq m. \tag{S}$$

根据**推论**3.1，将条件（E$\mathcal{L}_S$）和（A-ν）应用于 $I \subseteq N$，根据**推论**3.2 可得（E）。

根据推论 3.2，已分配代理人的数量为 $|I| \geq n - \varepsilon|F| - 16q\log\, n$；假设$|F| = O_{Q,q}(\log\, n)$，则该数量至少为 $n - O_{Q,q}(\log\, n)$。我们希望保留这些配置中的大部分 $\{\pi_i\}_{i \in I}$，只替换其中少数几个，比如 $O_{Q,q}(\log\, n)$ 个，并为其余 $O_{Q,q}(\log\, n)$ 个代理人分配新配置，以满足（E$\mathcal{L}_S$）、（A-ν）和（S）。这样，每个代理人$i \in N$ 都会获得一个配置，使得整个配置集合都能由 M中的不同物品同时满足。

我们不可避免地会遇到若干问题，这些问题此前在第 3 节中简要提及过，但当时暂且搁置了。首先，我们希望为每个代理人 $i \in N$ 分配一个可接受的配置，即价值至少为 μ_i。已分配的配置 π_i 对于 $i \in I$ 满足 v（π_i），$\geq \mu_i$而我们需要确保每个新配置 π_u也满足同样的要求；仅满足（E$\mathcal{L}_S$）、（A-ν）和（S）还不够。

这引出了第二个主要问题：协调。为每个代理人独立选择一个新配置，几乎无法控制总负载，也无法控制哪些物品需要同时满足这些配置。例如，如果我们使用代理人 i的个人 MMS 划分，为 $i \in N$ 创建一个新配置，不同代理人可能需要相同的物品才能满足各自的配置，这可能会违反（E$\mathcal{L}_S$）和（S）。

4.1 建议配置

我们将采用证明 第 2 节时使用的方法来解决这两个问题。我们将选定一位特殊代理人 $u_* \in N$，称其为**供应商**。这位代理人将使用其个人 MMS 划分 $\{B_{u_*,1}, \ldots, B_{u_*,n}\}$ 为每位代理人 $i \in N$ 创建一个**建议配置** $\hat{}\pi_{u_*,i}$。供应商的 MMS 划分将提供一个参考点，使我们能够同时控制与不同物品束相关的负载。建议配置 $\hat{}\pi_{u_*,i}$ 可以重新安排划分 $\{B_{u_*,1}, \ldots, B_{u_*,n}\}$ 中的物品，并适应每位代理人 $i \in N$，同时保持前缀可行性约束。

定义 **第 4.1 节**。确定一个供应商 $u_* \in N$。对于每个代理人 $i \in N$，其建议配置 i s

$$\hat{\pi}_{u_*,i} := \hat{\pi}^E_{u_*,i} \uplus \hat{\pi}^S_{u_*,i},$$

其中每个部分 旨在分别仅使用 E、S 中的不同物品来满足 .

我们将不 在此部分说明供应商 u_* 如何为代理人 $i \in N$ 构建建议配置 .

定义4.2。对于具有 *MMS* 划分 $\{B_{u_*,1}, \ldots, B_{u_*,n}\}$ 的供应商 $u_* \in N$，如果物品束$B_{u_*,j}$, $j \in [n]$ 满足以下条件，则称其为例外：

$$B_{u_*,j} \cap S \neq \varnothing.$$

请注意，例外捆绑的总数最多为 $|S|$。

在为代理人 $i \in N$ 构建建议配置时，供应商 u_* 的操作取决于 $\{B_{u_*,1}, \ldots, B_{u_*,n}\}$ 中哪些物品束属于例外捆绑，哪些不属于。具体而言：

- 对于每个例外捆绑 $B_{u_*,\,j}$，我们都会选择一个不同的接收者 $i \in N$，使其在 S 中每件物品的价值上都与 u_* 一致，即对于所有 $e \in S$，$v_{u_*}(e) = v_i(e)$。我们将为 i 提供一个建议配置 $\hat{}\pi_{u_*,\,i} := \pi_{u_*,\,j} = \{v_{u_*}(e) : e \in B_{u_*,\,j}\}$，并确保该配置对代理人 i 可接受，尤其是 $v(\hat{}\pi^E_{u_*,\,i}) + v(\hat{}\pi^S_{u_*,\,i}) \geq \mu_i$。

- 所有非例外物品束 $B_{u_*,j}$ 都满足 $B_{u_*,j} \subseteq E$。对于剩余代理，我们将重新整理非例外物品束的 E-部分 $B_{u_*,j} \cap E$，从而得到一组建议配置 $\hat{}\pi_{u_*,i}$，使得 $\hat{}\pi^S_{u_*,i} = \varnothing$，即 $\hat{}\pi_{u_*,i} = \hat{}\pi^E_{u_*,i}$，并且对于每个接收者 i，都有 $v(\hat{}\pi^E_{u_*,i}) \geq \mu_i$。我们将通过第 2 节的一个类似方法来完成这一工作。

分别处理建议配置的 E 部分和 S 部分会比较方便。我们先正式描述 S 部分的构造，并假设我们已经知道每个例外捆绑分别分配给哪个代理人。

定义 4.3。固定一个供应商 $u_* \in N$，并将供应商的 *MMS* 划分中的例外捆绑 $\{B_{u_*,1}, \ldots, B_{u_*,n}\}$ 指定给不同的接收者 $i \in N$，称这些代理人为例外代理人。

对于每个拥有指定捆绑 $B_{u_*,j}$ 的例外代理人 i，定义

$$\hat{\pi}^S_{u_*,i} := \{v_{u_*}(e) : e \in B_{u_*,j} \cap S\}.$$

对于每个非例外代理人 i，令 $\hat{}\pi^S_{u_*,i} = \varnothing$。

注意，建议配置 $\hat{}\pi_{u_*,i}$ 中的价值是依据 u_* 而非 i 得出的。一个自然问题是，将这样的配置分配给代理人 $i \in N$ 是否仍然可行，即他们能否使用不同物品同时满足所有配置。我们证明，对于每个建议配置 $\hat{}\pi_{u_*,i}$，只要接收者 i 与其指定的例外捆绑$B_{u_*,j}$“兼容”，那么这些建议配置的 S 部分对于任意代理人子集 N 在 S 中都可行。

观察 4.1。对于上文定义的建议部分$\hat{}\pi^S_{u_*,\,i}$，$i \in N$，对每个 $0 \leq \ell \leq m$：

$$\sum_{i \in N} \mathcal{P}_{u_*}(\hat{\pi}^S_{u_*,i}, \ell) \leq |S \cap [\ell]|.$$

此外，如果每个代理人 $i \in N$ 还满足 S-兼容性 条件

$$\hat{\pi}^S_{u_*,i} \neq \varnothing \quad \Longrightarrow \quad \forall e \in S : \; v_i(e) = v_{u_*}(e),$$

那么对每个前缀 $0 \leq \ell \leq m$，都有

$$\sum_{i \in N} \mathcal{P}_i(\hat{\pi}^S_{u_*,i}, \ell) \leq |S \cap [\ell]|.$$

证明。由于 $\hat{}\pi^S_{u_*,i}$ 是由供应商的 MMS 划分构造的，因此供应商前缀负载$\mathcal{P}_{u_*}(\hat{}\pi^S_{u_*,i}, \ell)$所计入的每个需求 α，都有一个来源物品 $e \in S$ 满足$e \leq m_{u_*}(\alpha) \leq \ell$。并且，所有这些物品在所有建议的 S-配置中彼此不同。这证明了第一个不等式。

如果代理人 $i \in N$ 对每个 $e \in S$ 都有 $v_i(e) = v_{u_*}(e)$，那么任何形式为 $\alpha = v_{u_*}(e)$ 的需求都满足 $S \cap [m_{u_*}(\alpha)] = S \cap [m_i(\alpha)]$。因此，$S$中的任何物品若对 u_*满足 α，对 i也满足该条件。因此，如果我们将$\hat{}\pi^S_{u_*,i}$ 中的每个需求匹配到$B_{u_*,j} \cap S$ 中对应$j \in [n]$的来源物品，那么这些匹配到的不同物品也会同时满足它们对 i的需求。

现在，如果需求 α 计入 $\mathcal{P}_i(\hat{}\pi^S_{u_*,i}, \ell)$，则其匹配的物品 e 满足 $e \leq m_i(\alpha) \leq \ell$。因此，前缀 ℓ 中的每个计数需求都与 $S \cap [\ell]$中的一个不同物品相匹配。证明如下。 □

我们将选择一位供应商 u_* 及其例外捆绑的指定接收者，使得**观察**4.1的兼容条件成立。E 建议配置的 - 部分按**定理**2.1中的方法构造，稍后将对此进行说明。

4.1.1 有界替换

暂且假设我们选择了某位供应商 $u_* \in N$，并构造了一个由 S-部分组成的建议配置集合 $\{\hat{\pi}_{u_*,i}\}_{i\in N}$（这些部分遵循观察 4.1），其中代理人 $i \in N$获得了建议配置 $\hat{\pi}_{u_*,i}$。现在，正如本节前面所述，我们的任务是选择一组代理人 $A \subseteq I$，让他们保留旧配置 π_i，并为每位其他代理人 $i \in N \setminus A$提供建议配置 $\hat{\pi}_{u_*,i}$，使得条件 (E$\mathcal{L}_S$)、(A-ν) 和 (S) 均成立。更确切地说，我们希望

$$\sum_{i\in A} \mathcal{P}_i(\pi_i^E, c_s) + \sum_{i\in N\setminus A} \mathcal{P}_i(\hat{\pi}_{u_*,i}^E, c_s) \le |E \cap [b_s]|, \qquad \forall (b_s, c_s) \in \mathcal{L}_S; \tag{E$_{\mathcal{L}_S}$}$$

$$\sum_{i\in N\setminus A} |\hat{\pi}_{u_*,i}| \le \frac{\nu}{2}; \tag{A-ν}$$

$$\sum_{i\in A} \mathcal{P}_i(\pi_i^S, \ell) + \sum_{i\in N\setminus A} \mathcal{P}_i(\hat{\pi}_{u_*,i}^S, \ell) \le |S \cap [\ell]|, \qquad \forall 0 \le \ell \le m. \tag{S}$$

（S）的约束更为棘手，因为我们需要同时控制$m+1$ 不同前缀处的负载。幸运的是，我们可以像之前处理条件（E）和（E$\mathcal{L}_S$）那样进行类似的缩减，并且只在对应于供应商 u_*的断点的常数个不同前缀处保留（S）。

定义4.4。令 $I \subseteq N$ 和 $\{\pi_i\}_{i\in I}$ 由 推论 *3.2*得到。对于配置 S的证书 是指配置 $\{\pi_i^S\}_{i\in I}$ 的一族两两不相交的集合 $S_i \subseteq S$，对于 $i \in I$满足 $|S_i| = |\pi_i^S|$ 并且S_i 使代理人 π_i^S满足配置 i。根据 推论 *3.2* 和 引理 *3.1*，这样的证书存在。

集合 S_i 记录了对于 $i \in I$，集合 S 中的哪些物品满足旧配置 S-部分。如果代理人 $i \in I$ 保留其旧配置，即 $i \in A$，我们就“保留”其证书 S_i；否则，S_i 中的物品将可供供应商 u_*的建议配置使用。

注意，对于每个 $i \in I$，对于每个前缀 ℓ，均有 $\mathrm{P}_i(\pi_i^S, \ell) \le |S_i \cap [\ell]|$。我们将利用这个上界，将代理人配置 A 和 $N \setminus A$ 的建议供应商配置上的条件 (S)，简化为仅针对供应商配置 $\hat{\pi}_{u_*,i}$ 的条件。这样一来，我们无需在 $i \in A$ 的配置 π_i^S 以及 $i \in N \setminus A$ 的 $\hat{\pi}_{u_*,i}^S$ 的每个相关断点处检查 (S)；这些断点的数量可能取决于代理人/物品的数量。只需在每个可能的供应商断点处检查仅针对供应商的 (S) 版本即可。由于 $|\mathrm{Q}| = Q$，供应商断点的数量是常数。这样还会针对物品 S 增加一组受保护前缀约束。

引理 4.1。固定一个供应商 $u_* \in N$ 并构造建议配置 $\hat{\pi}_{u_*,i}^S$、$i \in N$，并假设它们满足 S-兼容条件（见观察 *4.1*）。如果选择 $A \subseteq I$ 满足

$$\sum_{i\in A} |S_i \cap [m_{u_*}(\alpha)]| + \sum_{i\in N\setminus A} \mathcal{P}_{u_*}(\hat{\pi}_{u_*,i}^S, m_{u_*}(\alpha)) \le |S \cap [m_{u_*}(\alpha)]| \tag{S$*$}$$

对于每个可能的供应商断点 $m_{u_*}(\alpha)$，对于 $\alpha \in Q$ 中的每个前缀 $0 \le \ell \le m$，

$$\sum_{i\in A} \mathcal{P}_i(\pi_i^S, \ell) + \sum_{i\in N\setminus A} \mathcal{P}_i(\hat{\pi}_{u_*,i}^S, \ell) \le |S \cap [\ell]|. \tag{S}$$

证明。为每个 $i \in A$预留物品束 S_i，这些代理人将零售其旧的 S配置。我们将证明，所有其他代理人 $i \in N \setminus A$ 的建议 S配置 $\hat{\pi}_{u_*,i}^S$ 可以使用互不相同的剩余物品同时得到满足。

考虑任意前缀 ℓ下的条件 (S$*$。注意，我们可以将其重新排列为

$$\sum_{i\in N\setminus A} \mathcal{P}_{u_*}(\hat{\pi}_{u_*,i}^S, \ell) \le |S \cap [\ell]| - \sum_{i\in A} |S_i \cap [\ell]|. \tag{$*$}$$

(∗) 的右侧统计了 S 在前缀 $[\ell]$ 中、为 A预留证书后仍可使用的物品数量。事实上，由于所有 S_i 都是 S的两两不交子集，因此我们有

$$|S \cap [\ell]| - \sum_{i \in A} |S_i \cap [\ell]| = \left| \left(S \setminus \bigcup_{i \in A} S_i \right) \cap [\ell] \right|.$$

特别是，该数量非负，且随 ℓ非递减；当我们将 ℓ 增加 1 时，只有当物品 $\ell+1$ 是 S的未预留物品时，(∗) 中的剩余容量才会增加 1。

另一方面，(∗)的左侧仅在供应商断点 $m_{u_*}(\alpha)\alpha \in$Q处增加。因此，为了对每个前缀 $0 \le \ell \le m$ 都满足(∗)，只需在前缀 $\ell = m_{u_*}(\alpha)$（ $\alpha \in$ Q）处保持该不等式。事实上，如果 ℓ 处的负载为正，并且 $m_{u_*}(\alpha) \le \ell$是 $\alpha \in \hat{\pi}^S_{u_*}$中小于 ℓ的最后一个 S断点，那么 $m_{u_*}(\alpha)$处的负载与 ℓ 相同，而 ℓ 处的剩余容量至少与 $m_{u_*}(\alpha)$处的一样大。因此，在 $m_{u_*}(\alpha)$处满足(∗)（这恰好就是(S∗)）也就意味着它在 ℓ 处同样成立。如果负载为 0，则不等式无论如何都成立。

根据假设，对于每个供应商断点 $m_{u_*}(\alpha)$，(S∗)都成立，因此，(∗)在每个前缀 $0 \le \ell \le m$处都成立。接着，根据**引理** 3.1 ，我们可以同时满足所有建议配置$\{\hat{\pi}^S_{u_*,i}\}_{i \in N \setminus A}$ ，其估值为 v_{u_*} ，并使用来自

$$S \setminus \bigcup_{i \in A} S_i.$$

我们可以将此分配视为需求 $\alpha \in \hat{\pi}^S_{u_*,i}$ 与相应物品 e 之间的匹配，满足 α，即 $v_{u_*}(e) \ge \alpha$。根据**观察** 4.1 的 S-兼容性，对于每个代理人 $i \in N \setminus A$ 以及每个与物品 e匹配的需求 $\alpha \in \hat{\pi}^S_{u_*,i}$ ，也有 $v_i(e) \ge \alpha$成立。

由此可知，结合关于 $i \in A$的证书 S_i ，我们得到 S 中的物品与所有配置$\{\pi^S_i\}_{i \in A}$ 及$\{\hat{\pi}^S_{u_*,i}\}_{i \in N \setminus A}$中的需求之间的匹配，使得对于每个与代理人 i 配置中的需求 α 匹配的物品 e ，都有 $v_i(e) \ge \alpha$成立。但是，计入代理人 A 和 $N \setminus A$ 在前缀 ℓ 处总负载的每个需求，都必须与$S \cap [\ell]$中的一个不同物品匹配。因此，对于每个前缀 $0 \le \ell \le m$ ，必须有

$$\sum_{i \in A} \mathcal{P}_i(\pi^S_i, \ell) + \sum_{i \in N \setminus A} \mathcal{P}_i(\hat{\pi}^S_{u_*,i}, \ell) \le |S \cap [\ell]|.$$

□

由**观察** 4.1 和**引理** 4.1 可知，对于选择的子集 $A \subseteq I$ ，其中的代理人保留其已分配配置$\{\pi_i\}_{i \in A}$；而对于收到供应商建议 $\hat{\pi}_{u_*,i}$的剩余代理 $i \in N \setminus A$ ，要使每个前缀 $0 \le \ell \le m$ 都满足

$$\sum_{i \in A} \mathcal{P}_i(\pi_i, \ell) + \sum_{i \in N \setminus A} \mathcal{P}_i(\hat{\pi}_{u_*,i}, \ell) \le \ell,$$

只需使 以下条件在 $A \subseteq I$ 和建议集合$\{\hat{\pi}_{u_*,i}\}_{i \in N}$ 上成立。

$$\sum_{i \in A} \mathcal{P}_i(\pi^E_i, c_s) + \sum_{i \in N \setminus A} \mathcal{P}_i(\hat{\pi}^E_{u_*,i}, c_s) \le |E \cap [b_s]|, \qquad \forall (b_s, c_s) \in \mathcal{L}_S; \qquad (\mathrm{E}_{\mathcal{L}_S})$$

$$\sum_{i \in N \setminus A} |\hat{\pi}_{u_*,i}| \le \frac{\nu}{2}; \qquad (\text{A-}\nu)$$

$$\sum_{i \in A} |S_i \cap [m_{u_*}(\alpha)]| + \sum_{i \in N \setminus A} \mathcal{P}_{u_*}(\hat{\pi}^S_{u_*,i}, m_{u_*}(\alpha)) \le |S \cap [m_{u_*}(\alpha)]|, \qquad \forall \alpha \in \mathcal{Q}. \qquad (\mathrm{S}*)$$

请注意，现在我们需要处理的约束总数为 $|\mathcal{L}_S| + |\mathcal{Q}| + 1$。由于 $|\mathcal{L}_S| \le 2Q + 1$，这只是一个取决于 Q 的**常数** 。

我们先来尝试寻找一个集合 $A \subseteq I$，使其仅满足（E$\mathcal{L}_S$）和（S$*$）。假设建议供应商集合 $\{\hat{}\pi_{u_*,i}\}_{i\in N}$ 满足（E$\mathcal{L}_S$）和（S$*$），其中 $A = \varnothing$，也就是说：

$$\sum_{i\in N} \mathcal{P}_i(\hat{\pi}^E_{u_*,i}, c_s) \le |E \cap [b_s]|, \qquad \forall (b_s, c_s) \in \mathcal{L}_S; \qquad (\mathrm{E}_{\mathcal{L}_S}\text{-}u)$$

$$\sum_{i\in N} \mathcal{P}_{u_*}(\hat{\pi}^S_{u_*,i}, m_{u_*}(\alpha)) \le |S \cap [m_{u_*}(\alpha)]|, \qquad \forall \alpha \in \mathcal{Q}. \qquad (\mathrm{S}*\text{-}u)$$

这样，如果将每个旧配置 $\{\pi_i\}_{i\in I}$ 替换为建议配置，我们就能得到一个满足受保护前缀约束（E$\mathcal{L}_S$）和（S$*$）的可行集合。这种替换的问题在于，新增需求的总数 $\sum_{i\in N} |\hat{}\pi_{u_*,i}|$ 可能没有上界，而我们希望替换规模至多为 $\nu/2$，大约为 $O_{Q,q}(\log n$。我们的目标是证明，只需将有限个旧配置替换为建议配置，就能得到满足（E$\mathcal{L}_S$）和（S$*$）的可行配置。

读者可能会问，为什么一定存在这样一个有界的交换？考虑仅为 $N\setminus I$ 中的一个未分配代理插入建议配置。我们知道存在某种可行交换：将每个旧配置替换为供应商提供的建议。现在，每次替换 $\pi_i \to \hat{}\pi_{u_*,i}$只会影响常数个约束 $|\mathrm{L}_S| + |\mathrm{Q}|$，并且对每个约束的贡献都是一个不超过 $\max\{|\pi_i|, |\hat{}\pi_{u_*,i}|\}$ 的整数。因此，如果所有建议配置的大小都有上界，比如 $|\hat{}\pi_{u_*,i}| \le q$，那么对于旧配置和建议配置，在（E$\mathcal{L}_S$）和（S$*$）中总共只有有限个负载配置。接着，迪克森引理 [Dic13] 将使我们能够从一个可能无界规模的替换中提取出一个规模仅为常数的替换。这样，新增一个未分配代理，只需将常数个旧配置换成对应的建议配置。

定理 4.1 (有界替换)。对于每个整数三元组 t、Q、$q \ge 1$，存在一个全局常数 $C_{t,\,Q,\,q} \ge 1$，其仅取决于 t、Q、q，使得以下结论成立。

令 $I \subseteq N$ 和 $\{\pi_i\}_{i\in I}$ 由 推论 3.2获得。对于每个 $i \in I$，固定一个 S-证书 $\{S_i\}_{i\in I}$，并令受保护的 E-前缀数量为 $|L_S| = t$。固定一个供应商 $u_* \in N$，并对于每个代理人 $i \in N$，固定相应的建议配置 $\hat{}\pi_{u_*,\,i} = \hat{}\pi^E_{u_*,\,i} \uplus \hat{}\pi^S_{u_*,\,i}$。

假设 f　对于每个 $i \in N$、$|\hat{}\pi_{u_*,\,i}| \le q$，每个 S-需求 $\alpha \in \hat{}\pi^S_{u_*,\,i}$ 都属于 Q，并且

$$\sum_{i\in N} \mathcal{P}_i(\hat{\pi}^E_{u_*,i}, c_s) \le |E \cap [b_s]|, \qquad \forall (b_s, c_s) \in \mathcal{L}_S; \qquad (\mathrm{E}_{\mathcal{L}_S}\text{-}u)$$

$$\sum_{i\in N} \mathcal{P}_{u_*}(\hat{\pi}^S_{u_*,i}, m_{u_*}(\alpha)) \le |S \cap [m_{u_*}(\alpha)]|, \qquad \forall \alpha \in \mathcal{Q}。 \qquad (\mathrm{S}*\text{-}u)$$

于是存在 $A \subseteq I$，使得 $|N \setminus A| \le C_{t,\,Q,\,q}(|N| - |I|)$ 且

$$\sum_{i\in A} \mathcal{P}_i(\pi^E_i, c_s) + \sum_{i\in N\setminus A} \mathcal{P}_i(\hat{\pi}^E_{u_*,i}, c_s) \le |E \cap [b_s]|, \qquad \forall (b_s, c_s) \in \mathcal{L}_S; \qquad (\mathrm{E}_{\mathcal{L}_S})$$

$$\sum_{i\in A} |S_i \cap [m_{u_*}(\alpha)]| + \sum_{i\in N\setminus A} \mathcal{P}_{u_*}(\hat{\pi}^S_{u_*,i}, m_{u_*}(\alpha)) \le |S \cap [m_{u_*}(\alpha)]|, \qquad \forall \alpha \in \mathcal{Q}. \qquad (\mathrm{S}*)$$

特别地，

$$\sum_{i\in N\setminus A} |\hat{\pi}_{u_*,i}| \le qC_{t,Q,q}(|N| - |I|),$$

因此，如果整数 ν 满足 $\nu \ge 2qC_{t,\,Q,\,q}(|N| - |I|)$，则条件（$A$-$\nu$）对于相同的 A选择成立。

我们在**附录 B**中证明定理**4.1**（**定理**B.1）。

定理 4.1 允许将代理人 $\{\pi_i\}_{i\in I}$ 的配置初始集合 $I \subseteq N$ 扩展为所有代理人的完整配置集合 N，同时，每新增一名代理人，只需替换常数个旧配置。现在，我们将展示如何把该定理与此前在 第 3 节 中确立的约化结合起来，从而在每个前缀 $0 \le \ell \le m$上实现可行性。

请回顾，**推论** 3.2 至多留下

$$|N| - |I| \le \varepsilon |F| + 16q \log n$$

未分配代理人。因此，**定理** 4.1 引入的数量至多为

$$\sum_{i \in N \setminus A} |\hat{\pi}_{u_*,i}| \le q C_{t,Q,q} (\varepsilon |F| + 16q \log n)$$

额外需求。我们希望该数量至多为 $\nu/2$，这样**推论** 3.1便适用。由于 $|F| \le (2Q+1) \cdot \nu$，增大 ν 也会增大缓冲区 F导致的未分配代理人数量上界。因此，为了控制这一部分的影响，我们将先选择足够小的 $\varepsilon \in (0,1)$，然后选择整数 $\nu \ge 1$ 来弥补剩余的损失。

定义 4.5。 对于整数 $q \ge 1$，定义全局常数 $C_{Q,\,q}$ 为

$$C_{Q,q} := \max \{ C_{t,Q,q} : 1 \le t \le 2Q+1 \},$$

其中 $C_{t,\,Q,\,q}$ 由定理 *4.1*得到。

推论 4.1。 选择 $\varepsilon \in (0,1)$ 以及满足以下条件的整数 $\nu \ge 1$

$$\varepsilon \le \frac{1}{4q C_{Q,q} (2Q+1)}, \qquad \nu \ge 64 q^2 C_{Q,q} \log n.$$

应用引理 *3.2*，取这些 ε，ν 的值，得到一个划分 $M = E \sqcup S$、集合 $F \subseteq E$、$W \subseteq N$ 和受保护前缀 $\mathcal{L}_S$，然后使用推论 *3.2* 得到集合 $I \subseteq N$，其中包含配置已分配的代理人 $\{\pi_i\}_{i \in I}$，并具有以下性质：

- 对于每个 $i \in I$，π_i 都有一个分解 $\pi_i = \pi_i^E \uplus \pi_i^S$，其中 $v(\pi_i) \ge \mu_i$，$|\pi_i| \le q$ 和

$$|N| - |I| \le \varepsilon |F| + 16q \log n;$$

- 它们的 E-前缀负载满足

$$\sum_{i \in I} \mathcal{P}_i(\pi_i^E, \ell) \le |E \cap [\ell]| - \frac{\nu}{2}, \qquad \forall \ell \in E \setminus F; \qquad (\text{E-}\nu)$$

$$\sum_{i \in I} \mathcal{P}_i(\pi_i^E, c_s) \le |E \cap [b_s]|, \qquad \forall (b_s, c_s) \in \mathcal{L}_S. \qquad (\text{E}_{\mathcal{L}_S})$$

- 存在不相交集合 $S_i \subseteq S$、$i \in I$，使得 S_i 对于代理人 i 满足 π_i^S，并且 $|S_i| = |\pi_i^S|$.

假设存在供应商 $u_* \in N$ 以及配置 $\hat{}\pi_{u_*,\,i} = \hat{}\pi_{u_*,\,i}^E \uplus \hat{}\pi_{u_*,\,i}^S$、$i \in N$，使得

- 对于每个 $i \in N$，$v(\hat{}\pi_{u_*,\,i}) \ge \mu_i$，$|\hat{}\pi_{u_*,\,i}| \le q$，以及 $\hat{}\pi_{u_*,\,i}^S$ 均如定义 *4.3*；
- $\{\hat{}\pi_{u_*,i}\}_{i \in N}$ 的 E 个部分满足受保护前缀不等式：

$$\sum_{i \in N} \mathcal{P}_i(\hat{\pi}_{u_*,i}^E, c_s) \le |E \cap [b_s]|, \qquad \forall (b_s, c_s) \in \mathcal{L}_S; \qquad (\text{E}_{\mathcal{L}_S}\text{-}u)$$

- 每个 $i \in N$ 都是 S-兼容的：如果 $\hat{}\pi_{u_*,i}^S \ne \varnothing$，那么对于每个 $e \in S$，都有 $v_i(e) = v_{u_*}(e)$。

那么存在集合 $A \subseteq I$，使得 $|N \setminus A| \le \nu/(2q)$，并且对于每个前缀 $0 \le \ell \le m$，

$$\sum_{i \in A} \mathcal{P}_i(\pi_i, \ell) + \sum_{i \in N \setminus A} \mathcal{P}_i(\hat{\pi}_{u_*,i}, \ell) \le \ell.$$

作为推论，这些配置 $\{\pi_i\}_{i \in A}$ 和 $\{\hat{}\pi_{u_*,i}\}_{i \in N \setminus A}$ 可由 M 中不同的物品同时满足，其中它们的 E-部分和 S-部分分别在 E, S 内得到满足，并且每位代理人 $i \in N$都会收到一个物品束 B_i，使得 $v_i(B_i) \ge \mu_i$。

证明。 由于 $|F| \le (2Q+1)\cdot\nu$，根据参数 ε, ν 的选取，我们有

$$|N| - |I| \le 16q\log n + \varepsilon(2Q+1)\nu \le \frac{\nu}{4qC_{Q,q}} + \frac{\nu}{4qC_{Q,q}} = \frac{\nu}{2qC_{Q,q}}.$$

根据定义，$\hat{}$中的所有需求 $\pi^S_{u_*,\,i}$ 都属于 $\mathcal{Q}$，并且根据**观察**4.1，

$$\sum_{i\in N} \mathcal{P}_{u_*}(\hat{\pi}^S_{u_*,i}, m_{u_*}(\alpha)) \le |S \cap [m_{u_*}(\alpha)]|, \qquad \forall \alpha \in \mathcal{Q}. \tag{S*-u}$$

因此，我们可以应 用**定理**4.1，得到 $A \subseteq I$ 其中 $|N \setminus A| \le C_{Q,\,q}(|N| - |I|) \le \nu/(2q)$以及

$$\sum_{i\in A} \mathcal{P}_i(\pi^E_i, c_s) + \sum_{i\in N\setminus A} \mathcal{P}_i(\hat{\pi}^E_{u_*,i}, c_s) \le |E \cap [b_s]|, \qquad \forall (b_s, c_s) \in \mathcal{L}_S; \tag{E$_{\mathcal{L}_S}$}$$

$$\sum_{i\in A} |S_i \cap [m_{u_*}(\alpha)]| + \sum_{i\in N\setminus A} \mathcal{P}_{u_*}(\hat{\pi}^S_{u_*,i}, m_{u_*}(\alpha)) \le |S \cap [m_{u_*}(\alpha)]|, \qquad \forall \alpha \in \mathcal{Q}. \tag{S*}$$

特别地，

$$\sum_{i\in N\setminus A} |\hat{\pi}_{u_*,i}| \le q|N \setminus A| \le \frac{\nu}{2}.$$

应用**推论**3.1 于 A 和$\{\hat{}\pi_{u_*,\,i}\}_{i\in N\setminus A}$，结合（E$\mathcal{L}_S$），我们得到，对于每个 $0 \le \ell \le m$，

$$\sum_{i\in A} \mathcal{P}_i(\pi^E_i, \ell) + \sum_{i\in N\setminus A} \mathcal{P}_i(\hat{\pi}^E_{u_*,i}, \ell) \le |E \cap [\ell]|. \tag{E}$$

接下来，（S*）与 S-兼容性相结合，使我们能够应用**引理**4.1，从而对 $0 \le \ell \le m$有：

$$\sum_{i\in A} \mathcal{P}_i(\pi^S_i, \ell) + \sum_{i\in N\setminus A} \mathcal{P}_i(\hat{\pi}^S_{u_*,i}, \ell) \le |S \cap [\ell]|. \tag{S}$$

结合 (E) 和 (S)，对每个 $0 \le \ell \le m$，都有：

$$\sum_{i\in A} \mathcal{P}_i(\pi_i, \ell) + \sum_{i\in N\setminus A} \mathcal{P}_i(\hat{\pi}_{u_*,i}, \ell) \le |E \cap [\ell]| + |S \cap [\ell]| = \ell.$$

引理 3.1 在各自的集合中实现每个子轮廓，并任意分配未使用物品，即可得到 M 的完全分配。根据假设，每个 $i \in I$ 都有 $v(\pi_i) \ge \mu_i$，且对每个 $i \in N$，都有 $v(\hat{}\pi_{u_*,\,i}) \ge \mu_{i_0}$ 因此，同时满足 A 和 $N \setminus A$ 的所有选定配置，可确保每位代理人获得的物品束价值至少达到其最大最小份额。 □

4.2 选择供应商和接收者

推论 4.1 指出供应商 u_* 及其建议配置 $\{\hat{}\pi_{u_*,\,i}\}_{i\in N}$必须满足哪些条件，才能将代理人 $\{\pi_i\}_{i\in I}$ 的初始分配 $I \subseteq N$ 转化为所有代理人 N 的完全可行分配（可能需要用建议配置替换某些旧配置）。我们将说明如何选择一位供应商及其建议配置的接收者，使其兼容，即给这些代理人分配相应配置后满足条件 (E$\mathcal{L}_S$-u)，并满足 S-兼容性条件，即**观察** 4.1。

回顾一下，对于具有划分 $\{B_{u_*,1}, \ldots, B_{u_*,n}\}$ 的供应商 u_*，物品束 $B_{u_*,j}$ 若

$$B_{u_*,j} \cap S \ne \varnothing.$$

每个此类例外捆绑都将分配给不同的例外接收者 $i \in N$，相应的 $\hat{}\pi_{u_*,\,i}$ S-部分则简单构造如下

$$\hat{\pi}^S_{u_*,i} = \{v_{u_*}(e) : e \in B_{u_*,j} \cap S\}.$$

根据观察4.1，对于 $\hat{}\pi_{u_*,\ i}$的供应商 u_* 和接收者 i，我们要求：

$$\hat{\pi}^{S}_{u_*,i} \neq \varnothing \quad \Longrightarrow \quad \forall e \in S:\ v_i(e) = v_{u_*}(e).$$

这表明，可以根据代理人对 S 中物品价值的认同情况，将所有代理人 $i \in N$ 划分为等价类。由于每件物品的价值只能取$\mathcal{Q} = \{1, \dots, Q\}$中的值，因此最多会产生 $\binom{|S|+Q-1}{Q-1}$ 个等价类；当$|S| = O_{Q,q}(\log n)$时，这个数量很小。

对于供应商 u_* 的每个例外捆绑，我们将选取一位不同的接收者，该接收者与 u_* 属于同一个 S-等价类。请注意，只有当这个等价类足够大时，这才有可能实现，也就是说，其中的代理人数量至少要与例外捆绑的数量相同。特别地，只要 u_* 所属的 S-等价类的大小至少为 $|S|$，就足够了。

请注意，通过这种方式，我们可以在任意一个足够大的供应商候选者集合中，选出供应商及其例外捆绑的接收者。这促使我们采用以下三阶段过程来选出供应商和接收者，并构造建议配置。

1. 选择一个足够大的供应商候选者集合 U，使得对于任意候选对象 $u \in U$，我们始终可以构造一个建议的$\{\hat{}\pi^{E}_{u,\ i}\}_{i\in N}$ E-配置集合，满足

$$\sum_{i\in N} \mathcal{P}_i(\hat{\pi}^{E}_{u,i}, c_s) \leq |E \cap [b_s]|, \qquad \forall (b_s, c_s) \in \mathcal{L}_S. \qquad (\mathrm{E}_{\mathcal{L}_S}\text{-}u)$$

2. 将 U 中的所有代理人划分为 S-等价类，并从大小至少为 $|S|$的类别中选择一名供应商 $u_* \in U$。

3. 选择供应商 u_*后，将该供应商的每个例外捆绑指定给一个不同的合格接收者，并根据定义 4.3构造 S-配置。然后，构造相应的建议 E-配置 $\{\hat{}\pi^{E}_{u_*,\ i}\}_{i\in N}$，满足（E$\mathcal{L}_S$-$u$）。

下一小节将解释针对给定供应商候选者 u 构造建议 E-配置$\{\hat{}\pi^{E}_{u,\ i}\}_{i\in N}$ 的方法。本小节的其余部分将用于选择较大的供应商候选者集合 U，以及随后选择供应商 $u_* \in U$。

4.2.1 E-类别与供应商候选人

为了找到一个较大的供应商候选人集合 U，使得对于任意 $u \in U$，都有建议的 E-配置$\{\hat{}\pi^{E}_{u,\ i}\}_{i\in N}$ 满足受保护前缀不等式（E$\mathcal{L}_S$-u），且这些候选人也都是可接受的，我们将所有代理人 N 划分为多个类别，使得在每个类别中，所有代理人在受保护前缀 (b_s, c_s) 方面都是“等价”的 $\in \mathcal{L}_S$。具体做法如下。回顾引理S 中的集合 3.2，以及内部受保护前缀 c_s, $s \in [t-1]$，它们具有以下形式：

$$S = \bigcup_{s=1}^{t} \{a_s, \dots, b_s\}, \qquad \text{and} \qquad c_s = \min\{b_s + \nu, a_{s+1} - 1\}, \forall s \in [t-1].$$

最后一个受保护前缀是 $(b_t, c_t) = (m, m)$，不会影响我们的分类。集合 S将物品 $E = M \setminus S$ 划分为 $t-1$ 个区间，这些区间位于 S的连续分量之间。

定义 4.6。对于每个 $s \in [t-1]$，将 E 的第 s个区间定义为

$$E_s := \{b_s + 1, \dots, a_{s+1} - 1\}.$$

我们将为每个 $e \in E$ 关联一个包含 e的区间 E_s 的代表性物品 $c_s + 1$。然后，我们将根据代理人 N对这些 $t-1$代表性物品的舍入值进行分类。

对于每个代理人 $i \in N$和每个 $s \in [t-1]$，定义 ***s-th*** 代表需求$\boldsymbol{a}$ s

$$\alpha_{i,s} := v_i(c_s + 1).$$

Note 使得 $m_i(\alpha_{i,s}) \geq c_s + 1$，因此需求 $\alpha_{i,s}$ 在受保护前缀 c处不产生负载 s.

定义 4.7。 对于每个代理人 $i \in N$，定义其 E-签名 为

$$\varphi_i := (\alpha_{i,1}, \ldots, \alpha_{i,t-1}, \mu_i).$$

如果两个代理人的 E-签名相同，则它们属于同一类别。对于签名 φ，记

$$N_\varphi := \{i \in N : \ \varphi_i = \varphi\}.$$

引理 4.2。 令 $\Phi := \{\varphi_i : \ i \in N\}$ 表示所有出现过的 E-签名的集合。则

$$|\Phi| \le \phi := qQ\binom{3Q}{Q}.$$

*Mor*此外，存在一个签名 φ，使得集合 $U = (N \setminus W) \cap N_\varphi$ 满足

$$|U| \ge \frac{n}{2\phi},$$

并且对于每个 $u \in U$、$s \in [t-1]$ 和 $e \in E_s$，

$$v_u(e) \le \alpha_{u,s}.$$

也就是说，对于每个代理人 $u \in U$，每件物品 $e \in E_s$ 的价值都不超过 $c_s + 1$ 的价值。

证明。由于每个 MMS 捆绑的大小至多为 q，且价值属于 $\{1, \ldots, Q\}$，因此对于每个 $i \in N$，都有 $1 \le \mu_i \le qQ$。接下来，由于代表项 $c_s + 1$ 的位置随着 s递增，对于每个代理人 $i \in N$，都有 $\alpha_{i,1} \ge \alpha_{i,2} \ge \ldots \ge \alpha_{i,t-1}$。因此，每个签名 φ_i的前 $t-1$ 个坐标都是长度为 $t-1$、元素属于 $Q \cup \{0\}$ 的非递增向量。每个这样的向量都由各类型元素的数量确定，因此根据插板法，可能的签名总数为（使用引理 3.2 中的上界 $t \le 2Q + 1$）：

$$qQ\binom{t-1+Q}{Q} \le qQ\binom{2Q+Q}{Q} = \phi.$$

接下来，我们寻找一个包含许多供应商候选者的签名类。根据**引理** 3.2 可得 $|W| \le \varepsilon n$。根据**推论** 4.1 中参数的选择，可得 $\varepsilon \le 1/2$，因此

$$|N \setminus W| \ge |N| - |W| \ge n - \varepsilon n \ge \frac{n}{2}.$$

选择使 $|(N \setminus W) \cap N_\varphi|$最大的 φ，并取 $U := (N \setminus W) \cap N_\varphi$。由于最多有 ϕ 个类别，因此必有 $|U| \ge n/(2\phi)$。

固定 $u \in U$，$s \in [t-1]$ 和物品 $e \in E_s$，令 $\alpha := v_u(e)$。如果 $e \ge c_s + 1$，则立即有 $v_u(e) \le v_u(c_s + 1) = \alpha_{u,\,s}$。否则，$b_s < e \le c_s$ 且 $m_u(\alpha) \ge e > b_s$。由于 $u \notin W$，u 的所有断点都不属于 F，特别是 $m_u(\alpha) \notin (b_s,\ c_s]$。因此，$m_u(\alpha) \ge c_s + 1$，从而 $\alpha_{u,\,s} = v_u(c_s + 1) \ge \alpha = v_u(e)$。□

我们将在下一小节中证明，对于每个代理人 $u \in U$，其中 U 取自**引理** 4.2，都可以构造一个建议$\{\hat{\pi}^E_{u,i}\}_{i \in N}$ 配置的集合 E，使其满足受保护前缀不等式（E$\mathcal{L}_{s\text{-}u}$）。具体做法与第 2 节类似。

4.2.2 S-类别与供应商选择

固定签名 φ 并令 $U = (N \setminus W) \cap N_\varphi$，该签名和集合由**引理** 4.2得到。所有代理人 $u \in U$ 对于与区间相对应的代表需求意见一致 E_s, $s \in [t-1]$。然而，他们对 S 的估值可能不同。我们将把 U 划分为等价类，使每个类别中的所有代理人对 S中的物品估值一致。然后，我们从最大的 u_* 等价类中选出一位供应商 S。如果集合 U 足够大，那么 u_*所在类别的大小至少为 $|S|$，因此他能够将所有例外物品指定给不同的接收者，同时满足**观察** 4.1的兼容性条件。

这些等价类的数量可能取决于 $|S|$。然而，对于每个代理人 $i \in N$， S 中的每件物品的价值都属于$\mathcal{Q} = \{1, \dots, Q\}$，因此类别总数不会太多。

定义4.8。 枚举 $S := \{e_1 < \dots < e_{|S|}\}$。对于代理人 $i \in U$，定义其 S-签名

$$\sigma_i = (v_i(e_1), \dots, v_i(e_{|S|})).$$

如果两个代理人具有相同的 S-签名，则他们属于同一个 S-类别。对于签名 σ，令

$$U_\sigma := \{i \in U : \sigma_i = \sigma\}.$$

引理 4.3（供应商选择）。 假设

$$|U| \geq |S| \binom{|S| + Q - 1}{Q - 1}.$$

那么，存在一位供应商 $u_* \in U$，并可将其例外捆绑$B_{u_*,j}$ 指定给不同的接收者 $i(j) \in U$，使得对于每个 $e \in S$，$v_{i(j)}(e) = v_{u_*}(e)$，且完整建议配置

$$\hat{\pi}_{u_*,i} := \{v_{u_*}(e) : e \in B_{u_*,j}\}$$

满足 $|\hat{\pi}_{u_*,\, i(j)}| \leq q$ 和 $v(\hat{\pi}_{u_*,\, i(j)}) \geq \mu_{i(j)}$。特别地，只要满足以下条件，上述大小条件就成立

$$n \geq 2\phi |S| \binom{|S| + Q - 1}{Q - 1}.$$

证明。 每个 S-签名都是一个长度为 $|S|$ 的非递增向量，其元素属于 $\{1, \dots, Q\}$，因此可能的签名数量至多为

$$\binom{|S| + Q - 1}{Q - 1}.$$

选择最大的类别 U_σ，根据假设，它满足

$$|U_\sigma| \geq \frac{|U|}{\binom{|S|+Q-1}{Q-1}} \geq |S|.$$

任取一个供应商 $u_* \in U_\sigma$，如 定义4.2所述，它至多有 $|S|$个例外捆绑。因此，我们可以将 u_* 的所有例外捆绑分别指定给 U_σ中的不同代理人。根据定义，所有接收者在 S中的每件物品上都与 u_* 一致。

此外，供应商和所有指定接收者都属于 N_φ，因此$\mu_{i(j)} = \mu_{u_*}$。因此，选择 $\hat{\pi}_{u_*,\, i(j)} := \{v_{u_*}(e) : e \in B_{u_*,\, j}\}$ 可得 $|\hat{\pi}_{u_*,\, i(j)}| = |B_{u_*,\, j}| \leq q$ 和$v(\hat{\pi}_{u_*,\, i(j)}) = v_{u_*}(B_{u_*,\, j}) \geq \mu_{u_*} = \mu_{i(j)}$。

最后，根据**引理** 4.2 我们有 $|U| \geq n/(2\phi)$，从而完成证明。 □

由此可知，对于充分大的 n，我们可以选择一个供应商 $u_* \in U$ 并构造 S部分的建议档案集合 $\{\hat{\pi}_{u_*,\, i}\}_{i \in N}$，使其满足**推论** 4.1的条件。

推论 4.2。 固定整数 Q，$q \geq 1$，并在推论 4.1 中选取参数 ε，ν 如下：

$$\varepsilon := \frac{1}{4qC_{Q,q}(2Q+1)}, \qquad \nu := \lceil 64q^2 C_{Q,q} \log n \rceil.$$

对于充分大的 n，存在一个供应商 $u_* \in U$ 以及将其例外捆绑指定给 U 中不同接收者的一种指定，使得建议配置

$$\hat{\pi}^E_{u_*,i} := \{v_{u_*}(e) : e \in B_{u_*,j} \cap E\}, \qquad \hat{\pi}^S_{u_*,i} := \{v_{u_*}(e) : e \in B_{u_*,j} \cap S\}$$

对于每个拥有指定捆绑 $B_{u_*,\,j}$的例外代理人 i，以及 $\hat{}\pi^S_{u_*,\,i} = \varnothing$对于每个非例外代理 i，均满足

$$\hat{\pi}^S_{u_*,i} \neq \varnothing \quad \Longrightarrow \quad \forall e \in S : v_i(e) = v_{u_*}(e),$$

并且每个例外代理人 i 均满足 $|\hat{}\pi_{u_*,\,i}| \leq q$ 以及 $v(\hat{}\pi_{u_*,\,i}) \geq \mu_i$。

证明。由于 $C_{Q,\,q}$ 仅取决于 Q，q，参数 $\varepsilon > 0$ 是一个仅取决于 q，Q的常数。因此，我们的选择给出 $\nu = O_{Q,\,q}(\log n)$。然后，根据 **引理** 3.2，我们有

$$|S| \leq (2Q+1)\left(1 + \frac{Q\nu}{\varepsilon}\right) = O_{Q,q}(\log n).$$

根据 **引理** 4.2 $|U| \geq n/(2\phi)$，并且由于 ϕ 仅取决于 Q，q，对于所有充分大的 n

$$2\phi|S|\binom{|S|+Q-1}{Q-1} = O_{Q,q}(\log^Q n) < n.$$

根据**引理** 4.3，存在一个供应商 $u_* \in U$ 以及所有例外捆绑的互不相同的合格接收者$i(j) \in U\, B_{u_*,\,j}$，满足 S-兼容性条件。 □

4.3 受保护前缀的建议 E-配置

下面仍需证明，对于充分大的 n，对于从**引理** 4.3 中选定的供应商 $u_* \in U$，我们始终可以构造一个集合$\{\hat{}\pi^E_{u,\,i}\}_{i \in N}$，其中包含满足以下条件的建议 E-配置

$$\sum_{i \in N} \mathcal{P}_i(\hat{\pi}^E_{u,i}, c_s) \leq |E \cap [b_s]|, \qquad \forall (b_s, c_s) \in \mathcal{L}_S. \qquad (\mathrm{E}_{\mathcal{L}_S}\text{-}u)$$

我们将基本按照第 2 节中的方式进行。

定义 4.9。 对于每个代理人 $i \in N$，在 E 上定义代表性估值

$$\hat{v}_i(e) := \alpha_{i,s} \quad where \quad e \in E_s,\, s \in [t-1],$$

并将其加性扩展到 E 的子集。注意，对于 $e \in E_s \setminus F$，我们有

$$e \geq c_s + 1 \quad \Longrightarrow \quad \hat{v}_i(e) = v_i(c_s + 1) \geq v_i(e),$$

同时对于供应商 $u_* \in U$ 引理 4.2 给出了 $\hat{}v_{u_*}(e) \geq v_{u_*}(e)$ 对所有 $e \in E$。

定义 4.10。 我们将 M 中的物品划分为以下 t 种类型 $M_1, \ldots, M_{t-1}, M_t$：

$$M_t := S \cup F, \qquad \forall s \in [t-1] : M_s := E_s \setminus F.$$

如 第 2 节所述，我们将考虑物品束 $B \subseteq M$ 的模式：

$$p(B) := (|B \cap M_1|, \ldots, |B \cap M_t|), \quad \text{with} \quad |p| = \sum_{s=1}^{t} p_s,$$

并考虑大小至多为 q 的所有可能模式：

$$P := \{p \in \mathbb{Z}^t_{\geq 0} : \ 1 \leq |p| \leq q\}.$$

回顾第2.2 节中的定理 2，其证明仅使用了物品束模式及其在相应最大最小份额划分中的计数。因此，它同样适用于我们的类型 M_1、.....、 M_t 以及模式 p，尽管这些不一定是原始估值中的类型。

定理 4.2 （定理 2.2 的重述）： 对于任意一对整数 t、 $q \geq 1$，存在一个全局常数 $D_{t,\ q} \geq 1$，其仅取决于 t 和 q，使得以下结论成立。

对于固定的供应商 u_* 和每个代理人 $i \in N$，存在一个由 $K_i \leq n$ 个块组成的序列

$$\beta_{i,1} = (x_{i,1}, y_{i,1}), \ldots, \beta_{i,K_i} = (x_{i,K_i}, y_{i,K_i}),$$

使得对于每个 $k \in [K_i]$ ，都有 $|\beta_{i,\ k}| \leq D_{t,\ q}$，并且对于每个模式 $p \in P$，块均满足

$$\sum_{k=1}^{K_i} x_{i,k}(p) = \lambda_{u_*}(p), \qquad and \qquad \sum_{k=1}^{K_i} y_{i,k}(p) = \lambda_i(p).$$

因此，我们可以将 u_* 的最大最小份额捆绑划分为大小至多为 $D_{t,\ q}$ 的不相交的块，使得每个块都可以重新划分为数量相同的物品束，其模式来自 i 的最大最小份额划分。

我们将供应商 u_* 的 E-签名记为 φ_* ，并将 u_* 的完整 E-类别记为

$$V := N_{\varphi_*},$$

注意， $U = (N \setminus W) \cap V$。对于每个 $\varphi \in \Phi \setminus \varphi_*$ ，记 $n_\varphi := |N_\varphi|$。

定义 4.11. 对于每个 $\varphi \in \Phi|\varphi_*$，选取一个代表元 $i_\varphi \in N_\varphi$ ，并将定理4.2应用于 u_* 和 i_φ。令 $\mathcal{B}(\varphi) = \{\beta_{i_\varphi,1}, \ldots, \beta_{i_\varphi,K_{i_\varphi}}\}$ 为所得的块集合，并记

$$\mathcal{B} = \bigsqcup_{\varphi \in \Phi \setminus \varphi_*} \mathcal{B}(\varphi).$$

每个块 $\beta \in \mathcal{B}$ 都与相应的签名类以及该块在该类中的相应索引相关联。也就是说，当 $\varphi \neq \varphi'$ 或 $k \neq k'$ 时，我们将 $\beta = \beta_{i_\varphi,k} = (x, y)$ 和 $\beta' = \beta_{i_{\varphi'},k'} = (x', y')$ 视为不同的块，即使 $x = x'$ 和 $y = y'$。

对于供应商 u_*的最大最小份额划分中的每种模式 p ，我们将预留

$$\eta := \frac{|V|}{n}$$

所有具有模式 p 的供应商物品束所占比例。如 第 2 节 所述，我们考虑以下线性规划（线性规划）。

$$\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & \sum_{\beta \in \mathcal{B}} |\beta| \cdot z_\beta \\
\text{subject to} \quad & \sum_{\beta \in \mathcal{B}} \lambda_\beta(p) \cdot z_\beta \leq (1-\eta)\lambda_{u_*}(p), && \forall p \in P; \\
& \sum_{\beta \in \mathcal{B}(\varphi)} |\beta| \cdot z_\beta \leq n_\varphi, && \forall \varphi \in \Phi \setminus \varphi_*; \\
& z_\beta \geq 0, && \forall \beta \in \mathcal{B}.
\end{aligned} \tag{LP}$$

根据 **引理** 2.3 的证明，存在一个满足下列条件的（z 线性规划的整数解 ˆ线性规划）

$$n - |V| - \sum_{\beta \in \mathcal{B}} |\beta| \cdot \hat{z}_\beta \leq D_{t,q}(|P| + |\Phi| - 1),$$

因此，只有少数非供应者类别代理人未被选定的重新划分块覆盖。

与**推论**2.2中一样，我们首先使用一个不相交集合的供应商 MMS 捆绑来实现由 ˆz 选定的块。不过，我们将省略所有使用了包含 M_t的物品的捆绑的区块副本；这些物品将改用于特殊代理分配。每个剩余的区块副本都将根据代表性估值提供可接受捆绑。

推论 4.3。 存在一个集合 $J \subseteq N \setminus V$和不相交捆绑 $B_i \subseteq M \setminus M_t$，对应于 $i \in J$，我们将其称为源捆绑，使得对于每个 $i \in J$，$|B_i| \leq q$ 以及ˆ$v_i(B_i) \geq \mu_i$，还有

- 获得　　这些源捆绑 B_i 的代理人数量满足 $|J| = n - |V| - \hat{}Z$，其中

$$0 \leq \hat{Z} \leq D_{t,q}(|P| + |\Phi| - 1 + |M_t|);$$

- 剩余物品 $M \setminus_{i \in J} B_i$ 恰好构成 $|V| + \hat{}Z$ 个完整的供应商捆绑的并集，其中包括每个与 M_t相交的供应商捆绑；
- 对于每种模式 $p \in P$，剩余供应商捆绑中至少有 $\eta\lambda_{u_*}(p)$ </style>具有模式 p。

证明。 取上文得到的整数解 ˆz。与**推论** 2.2中一样，我们可以选择实现所有选定区块副本对应模式的不相交供应商捆绑集合。

现在，如果某个选定的区块 β 副本所对应的捆绑中包含来自M_t的物品，则将其丢弃。由于不同的区块副本使用不相交的供应商捆绑，因此最多有 $|M_t|$个副本被丢弃。每个副本都是一个大小至多为 $D_{t,\ q}$的重新划分块，因此丢弃这些副本至多移除 $D_{t,\ q}|M_t|$个为非供应者类别代理人提出的捆绑。因此，最多将有

$$D_{t,q}(|P| + |\Phi| - 1 + |M_t|)$$

V 之外的代理人没有分配到捆绑。

现在，考虑一个区块副本 $\beta \in \mathcal{B}(\varphi)$。由于与 β对应的供应方 MMS 捆绑不包含 M_t中的任何物品，因此 β 使用的每种输出模式 p 都满足 $p_t = 0$。此外，由于**定理** 4.2 在重新划分过程中保持每种类型物品的数量不变，因此，这种模式 p必然出现在代表 N_φ的代理人 i_φ 的 MMS 划分中，即对于某个与 M_t不相交的捆绑 $B_{i_\varphi,\ j}$。

我们采用 **推论** 2.1 的证明中的物品计数构造，应用于 β，并为类型为 N_φ的代理人得到一组来源捆绑 B_i。根据上述推理，如果将由块 β生成的模式 p的结果捆绑 B_i 分配给代理人 $i \in N_\varphi$，则

$$\hat{v}_i(B_i) = \sum_{s=1}^{t-1} p_s \cdot \alpha_{i,s} = \hat{v}_{i_\varphi}(B_{i_\varphi,j}) \geq v_{i_\varphi}(B_{i_\varphi,j}) \geq \mu_{i_\varphi} = \mu_i.$$

对 β 选出的每个块重复这一过程z，我们就得到一组代理人 $J \subseteq N \setminus V$，并为其分配了来源捆绑。按照 **推论** 2.2中的相同推理，这一构造恰好使用 $|J|$个原始供应商捆绑，并留下恰好 $n - |J| = |V| + \hat{}Z$个完好的捆绑。

最后，在丢弃块副本之前，选择 ˆz 至少留下了 $\eta \cdot \lambda_{u_*}(p)$ 个模式为 p 的供应商捆绑完好，对每个 $p \in P$ 都如此。丢弃块副本只会使更多捆绑保持完好，因此相同的下界仍然成立。 □

在**推论** 4.3 中获得的这些源捆绑将定义建议的供应商档案。ˆ **推论** 4.3 的部分构造仅留下 Z 个代理人处于外部 V，没有分配到源捆绑。与第 2 节一样，我们将利用供应商的 MMS 划分中未被破坏的物品束，以贪心方式为这些代理人完成分配。首先，我们将处理与 M_t不相交的物品束。

引理 4.4。 若一个供应商 *MMS* 捆绑 $B_{u_*,\ j}$ 是干净的，则 $B_{u_*,\ j} \cap M_t = \varnothing$。对于每个代理人$i \in N$，至少

$$\frac{n - qQ|M_t|}{qQ}$$

供应商的 *MMS* 划分中的干净捆绑满足 $\hat{}v_i(B_{u_*,\ j}) \geq \mu_i$。

证明。 </style}至多有 $|M_t|$ 个供应商捆绑与 M_t 相交，且它们的并集至多包含 $q|M_t|$ 个物品，因此对每个代理人 $i \in N$，其价值至多为 $qQ|M_t|$。

注意，对于干净捆绑中的每个物品 e，根据定义，$\hat{}v_i(e) \geq v_i(e)$。因此，

$$\sum_{\substack{j \in [n] \\ B_{u_*,j} \text{ clean}}} \hat{v}_i(B_{u_*,j}) \geq v_i(M) - qQ|M_t| \geq n\mu_i - qQ|M_t|.$$

令 g_i 为代表值 $\hat{}v_i$ 至少为 μ_i 的干净捆绑数量。由于每个捆绑的代表值不可能超过 qQ，并且每个未被 g_i 计入的捆绑价值至多为 $\mu_i - 1$，

$$\sum_{\substack{j \in [n] \\ B_{u_*,j} \text{ clean}}} \hat{v}_i(B_{u_*,j}) \leq g_i \cdot qQ + n(\mu_i - 1).$$

引理得证。 □

现在，我们可以为每个代理人 $i \in N$ 补全来源捆绑，并用它们定义所有建议配置。由此得到的 M 划分也将自动满足受保护前缀条件，因为每个需求都有一个不同的来源物品。

引理 4.5。 固定供应商 u_*，并假设

$$n \geq 4\phi qQ D_{t,q}(|P| + |\Phi| - 1 + |M_t|).$$

那么源 ***b*** 物品束来自 推论 *4.3* 可扩展为划分 $\{B_1, \ldots, B_n\}$ 为 M 使得

- 每个例外代理人 例外代理人 i 都被分配到相应的例外物品束 $B_i = B_{u_*,j}$ 属于 u_*；
- 每个其他代理人 i 都有 $B_i \subseteq E$, $|B_i| \leq q$ 并且 $\hat{}v_i(B_i) \geq \mu_i$。

此外，对于建议配置 $\hat{}\pi_{u_*,\ i}$ 对于例外 i，如 推论 *4.2*所示；对于定义如下的每个其他代理人 i

$$\hat{\pi}^E_{u_*,i} := \{\hat{v}_i(e) :\ e \in B_i\}, \qquad \hat{\pi}^S_{u_*,i} = \varnothing,$$

建议配置满足 $v(\hat{}\pi_{u_*,\ i}) \geq \mu_i$ 以及 $|\hat{}\pi_{u_*,\ i}| \leq q$ 对所有 $i \in N$均成立，并且

$$\sum_{i \in N} \mathcal{P}_i(\hat{\pi}^E_{u,i}, c_s) \leq |E \cap [b_s]|, \qquad \forall (b_s, c_s) \in \mathcal{L}_S. \qquad (\mathrm{E}_{\mathcal{L}_S}\text{-}u)$$

证明。 关于 n 的假设意味着 $n \geq 2qQ|M_t|$。根据 **引理** 4.4，对于每个 $i \in N$，供应商的最大最小份额划分中至少有 $n/(2qQ)$ 个干净物品束，其 $\hat{}v_i$-价值至少为 μ_i。

注意，对于干净物品束 $B_{u_*,\ j}$，其价值 $\hat{}v_i(B_{u_*,\ j})$ 仅取决于其模式。根据**推论** 4.3，我们至少保留每个供应商模式中 η-的部分不变，因此每个未分配代理人 $i \notin V$ 至少有

$$\eta \cdot \frac{n}{2qQ} \geq \frac{n}{4\phi qQ} \geq D_{t,q}(|P| + |\Phi| - 1 + |M_t|) \geq \hat{Z}$$

还剩下价值至少为 μ_i的$\hat{}$干净完整供应商捆束。因此，我们可以贪心地向 Z个剩余的非供应商类代理中的每一个分配一个不同的干净供应者捆绑，他们各自将获得至少 μ_i的$\hat{}v_i$-价值。

现在，恰好还剩下 $|V|$ 个完整供应商捆束，包括那些与 M_t相交的，因为到目前为止我们只使用了干净捆绑。请注意，每一个指定的例外捆绑仍然可用，因为它们每一个都与 M_t相交。

每个例外代理人 i 都来自供应商的等价类 $U_\sigma \subseteq V$。将 u_* 中的每个例外捆绑分配给 V 中的对应代理人，依据**引理**4.3。将剩余的供应商捆绑任意分配给每个其余代理人。请注意，每个这样的捆绑都与 S 不相交，但可能与 F 相交。不过，由于每个 $i \in V$ 与供应商 u_* 具有相同的 E 签名，对于每个接收供应商捆绑 B_{u_*} 的非例外代理人 $i \in V$，j 均有

$$\hat{v}_i(B_{u_*,j}) = \hat{v}_{u_*}(B_{u_*,j}) \geq v_{u_*}(B_{u_*,j}) \geq \mu_{u_*} = \mu_i.$$

因此，对于得 到的划分 $\{B_1, \ldots, B_n\}$，其中 M，对于每个非例外 i，$\hat{v}_i(B_i) \geq \mu_i$。

根据**引理**4.3，所有例外的建议配置的大小都不超过 q，且价值至少达到对应接收者的最大最小份额。对于非例外代理人 i，配置 $\hat{\pi}^E_{u_*,\,i} := \{\hat{v}_i(e) : e \in B_i\}$ 根据构造满足 $v(\hat{\pi}^E_{u_*,\,i}) = \hat{v}_i(B_i) \geq \mu_i$。

还需验证这些建议配置满足受保护前缀条件。考虑一个需求 $\alpha \in \hat{\pi}^E_{u_*,i}$，并令 $e \in B_i \cap E$ 为其来源物品。假设 $e \in E_s$。如果i 不是例外，则 $\alpha = \alpha_{i,s}$，且 $m_i(\alpha) \geq c_s + 1$。如果 i 是例外，则 $\alpha = v_{u_*}(e)$ 且$i \in N_{\varphi_*}$，根据**引理** 4.2，有 $v_{u_*}(e) \leq \alpha_{u_*,s} = \alpha_{i,s}$。因此，我们也有 $m_i(\alpha) \geq c_s + 1$。

考虑针对 $r < t$ 的受保护前缀 (b_r, c_r)。在前缀 c_r 处计数的需求，必须来源于某个满足 $s < r$ 的 E_s 中的物品。由于来源捆绑 B_i 划分了 M，所有此类来源物品彼此不同。因此，

$$\sum_{i \in N} \mathcal{P}_i(\hat{\pi}^E_{u_*,i}, c_r) \leq \sum_{s<r} |E_s| = |E \cap [b_r]|.$$

至于最后一个受保护对 $(b_t, c_t) = (m, m)$，恰有 $|E|$ 个建议的 E-需求，每个需求对应 E 中的一个物品。引理得证。 □

综合所有结果，我们最终可以证明**定理** 3.1。

定理 ***3.1***的证明。 按照 ε、ν 中的方式选择参数**推论** 4.2。由于 $t \leq 2Q + 1$，$D_{t,\,q}$、$|P|$、$|\Phi|$ 均由仅依赖于 Q和 q的常数所界定。因此，当 n 充分大时，**引理** 4.3的供应商选择条件成立。此外，

$$|M_t| = |S| + |F| = O_{Q,q}(\log n),$$

因此，当 n 足够大（仅依赖于 Q和 q）时，我们同样有

$$n \geq 4\phi q Q D_{t,q}(|P| + |\Phi| - 1 + |M_t|).$$

使用**推论** 3.2 以获得代理人$\{\pi_i\}_{i \in I}$ 的初始集合 $I \subseteq N$。然后，应用**引理** 4.3 和**引理** 4.5，以获得满足$\{\hat{\pi}_{u_*,\,i}\}_{i \in N}$中条件的建议配置集合**推论** 4.1。因此，利用**推-论** 4.1 的有界替换，通过**引理** 3.1即可得到精确最大化最小份额分配。 □

5 个 1-out-of-d 最大最小份额，适用于 $d = n + O(\log^2 n)$

在本节中，我们将重述**定理** 1.3 的证明，该证明来自 [FG26], ，因为它将在我们证明主要结果**定理** 1.2时发挥关键作用。

定理 5.1 (**定理**1.3, [FG26])。 考虑一个包含物品 M 和n 个可加性代理人 N，其估值为 $\{v_i\}_{i \in N}$。当MMS(d) 时，始终存在一种分配

$$d \geq n + 46(1 + \log n)^2,$$

我们采用以下假设，这些假设是设计近似 MMS 分配时的标准做法。

假设1。 不失一般性，在 定理 1.1 的情形下，我们可以假设

- 对于每个代理人 $i \in N$ 和物品 $e \in M$，都有 $v_i(e) \in [0,1]$;
- 对于 每个 $i \in N$, d-划分 $(B_{i,1}, \ldots, B_{i,d})$ 的 M 满足 $\mathrm{MMS}(M, v_i, d)$ es

$$\forall j \in [d] : v_i(B_{i,j}) = 1;$$

我们将此 d-划分中的物品束称为代理人 i的MMS 捆绑 。

- ([BL16]) 物品 $M = \{e_1, \ldots, e_m\}$ 按顺序排列，使得对于每个代理人 $i \in N$，都有 t

$$v_i(e_1) \geq v_i(e_2) \geq \ldots \geq v_i(e_m).$$

值得注意的是，对于每个 $i \in N$， $v_i(M) = d$。

我们先从几个简单的观察开始。

观察 5.1。 设 $U \subseteq N$, $S \subseteq M$ 满足：对于每个 $u \in U$， $v_u(S) \geq 2|U| - 1$。存在一种将 S 分配给 U 的方案，使得每个代理人 $u \in U$ 获得的物品束价值至少为 1。

证明。 若 $|U| = 1$，则将所有 S 分配给 U 中的一个代理人。对于 $|U| > 1$，按任意顺序将物品加入一个初始为空的物品束 B，直到某个代理人 $u \in U$ 对 $v_u(B)$ 的价值达到 ≥ 1。注意，在最后一件物品加入 B 之前，每个代理人对 B 的价值都小于 1；并且对于每个 $u' \neq u$， $v_{u'}(B) < 2$。因此， $v_{u'}(S - B) \geq 2|U| - 3 = 2(|U| - 1) - 1$。由关于 $|U|$ 的归纳法即可得到该引理。 □

若 $d \geq 2n - 1$，我们可以取 $U = N$和 $S = M$并应用 观察 5.1。对于每个代理人$i \in N$， $v_i(S) = v_i(M) = d \geq 2n - 1 = 2|U| - 1$。从现在起，假设 $n + 1 \leq d \leq 2n - 1$。

观察 5.1 给出了如下启示。假设我们使用某个物品集合 $E \subseteq M$ 分配了几乎所有代理人，并且每个代理人 $i \in N$ 对 E 的价值至多为 ηd，其中参数为$\eta \in (0,1]$。那么，只要剩余代理人的数量足够少，我们就能仅用剩余物品为他们取得各自的最大最小份额。

推论 5.1。 令 $\eta \in (0,1],$，并假设 $E \subseteq M$满足 $v_i(E) \leq \eta d$对于每个 $i \in N$均成立。对于任意由 $|U| \leq (1-\eta)_2^{d+1}$ 个代理人组成的集合 $U \subseteq N$，存在一种将 $M \setminus E$ 分配给 U 的方案，使得每个代理人 $u \in U$ 获得的物品束价值至少为 1。

特别地，当 $\eta = n/d$ 或 $\eta = (n+1)/d$ 时，该集合 E 应分别满足 $v_i(E) \leq n$或 $v_i(E) \leq n + 1$，对每个 $i \in N$均成立；并且我们应分配除 $(d - n)/2$ 名代理人以外的所有代理人。

Proof. 如果 $U = \varnothing$，则无需进行任何操作。否则，由于对每个 $u \in U$都有 $v_u(M) = d$，

$$v_u(M \setminus E) = v_u(M) - v_u(E) \geq (1 - \eta)d \geq 2|U| - 1.$$

这正是观察 5.1 关于集合 $S = M \setminus E$ 和 U的条件 . □

现在我们将着重寻找这样一个集合 $E \subseteq M$，其总价值为 $v_i(E) \leq \eta d$ 对所有 $i \in N$ 均成立（其中η 选择为 $(n+1)/d$），以便我们能够用它为除 $(1-\eta)_2^{d+1} = (d-n)/2$ 名代理人以外的所有代理人进行分配。

根据假设 ，我们将 M 与 $[m]$关联起来，并且对于每个代理人 $i \in N$，我们同时有

$$v_i(1) \geq v_i(2) \geq \ldots \geq v_i(m).$$

我们注意到，若要给物品的价值 $E \subseteq M$ 设定上界，只需对 $M = \{1, \ldots, m\}$ 的每个前缀中来自 E 的物品总数设定上界即可。

引理 5.1。 设 $E \subseteq M$，并假设对于每个 $0 \leq \ell \leq m$ 均有 $|E \cap [\ell]| \leq \eta \ell$，其中某个价值为 $\eta \in (0,1]$。那么对于每个代理人 $i \in N$ 均有 $v_i(E) \leq \eta d$。

证明。 注意，对于每个 $0 \le \ell \le m$， $\ell \in E$当且仅当 $|E \cap [\ell]| - |E \cap [\ell-1]| = 1$。因此，

$$v_i(E) = \sum_{\ell=1}^{m} v_i(\ell) \cdot \Big(|E \cap [\ell]| - |E \cap [\ell-1]|\Big) = \sum_{\ell=1}^{m} \Big(v_i(\ell) - v_i(\ell+1)\Big) \cdot |E \cap [\ell]|$$
$$\le \eta \sum_{\ell=1}^{m} \Big(v_i(\ell) - v_i(\ell+1)\Big) \cdot \ell = \eta \sum_{\ell=1}^{m} v_i(\ell) = \eta d.$$

我们采用了约定 $[0] = \varnothing$ 和 $v_i\ (m+1)\ = 0$。 □

我们将 $|E \cap [\ell]|$ 称为集合 ℓ的前缀负载 E。我们在 [FG26] 中寻找一个 E 前缀负载有界的集合所采用的方法，是转而考虑需求分布，这与第 3 节类似。在该节中，我们证明了：将 M 分配给一些代理人 $I \subseteq N$ 等价于寻找由适当需求分布构成的可行集合 Π_I。

引理5.2 (引理 3.1 重述) 。令 $I \subseteq N$，令 $\pi_i = \{\alpha_{i,1}, \ldots, \alpha_{i,|\pi_i|}\}$ 为代理人 $i \in I$ 的某个需求分布，并令 $\Pi_I := \{\pi_i\}_{i \in I}$。对于任意物品集合 $E \subseteq M$，当且仅当可以使用 E 中的不同物品同时满足 Π_I 的所有配置时，

$$\mathcal{P}(\Pi_I, \ell) \le |E \cap [\ell]|, \qquad \forall 0 \le \ell \le m.$$

此外，如果 $K := \sum_{i \in I} |\pi_i|$，则只需使用 E 的前 K 个物品。特别地，当$E = M$时，只要满足以下条件，我们就可以仅使用物品 $\{1, \ldots, K\}$ 来满足 Π_I 的所有配置

$$\mathcal{P}(\Pi_I, \ell) \le \ell, \qquad \forall 0 \le \ell \le m.$$

在**引理**5.1中，我们寻求一个集合 $E \subseteq M$，使得 E 的前缀负载满足$|E \cap [\ell]| \le \eta\ell$，而**引理**5.2 仅保证了一个平凡的上界 ℓ。对**引理**5.2 的证明稍作修改后，只要给定的配置集合 $E \subseteq M$满足更强的前缀负载条件 Π_I，我们就能得到所需的集合。

推论 5.2 （**引理**5.2的改进）。设 $I \subseteq N$，设 π_i 是代理人$i \in I$的某个需求分布 $\Pi_I := \{\pi_i\}_{i \in I}$。设 $\eta \in (0, 1]$, 并假设对于每个 $0 \le \ell \le m$，都有

$$\mathcal{P}(\Pi_I, \ell) \le \eta\ell.$$

接下来，可以使用 $E \subseteq M$ 中的不同物品同时满足 Π_I 的所有配置，使得

$$|E \cap [\ell]| \le \eta\ell, \qquad \forall 0 \le \ell \le m.$$

证明。 将所有需求 $\alpha \in \Pi_I$ 列为对 (i, α)，其中 $\alpha \in \pi_i$，重复项也包括在内，并按照断点值 $m_i(\alpha)$ 排序。我们得到一个已排序的 $K = \sum_{i \in I} |\pi_i| = \mathcal{P}(\Pi_I, m)$ 对列表

$$(i_1, \alpha_1), \ldots, (i_K, \alpha_K), \qquad 1 \le m_{i_1}(\alpha_1) \le \ldots \le m_{i_K}(\alpha_K) \le m.$$

记 $m_k := m_{i_k}(\alpha_k)$，$m_1 \le \ldots \le m_K$。按照引理5.2的证明，对于每个$k \in [K]$，都有 $k \le \mathcal{P}(\Pi_I, m_k) \le \eta m_k$。取这个 $m_k = m_{i_k}(\alpha_k)$，并将物品 $e_k := \lceil k/\eta \rceil$ 分配给代理人 i_k。注意到 $1 \le e_k \le m_k \le m$，因此 $e_k \in M$ 并满足需求 α_k。由于 $\eta \le 1$，所以有$e_{k+1} \ge e_k + 1$，因此这种分配会为每项需求使用不同的物品。

令 $E = \{e_k\}^{k \in [K]}$ 为已分配物品集合。我们立即得到，对任意 $0 \le \ell \le m$:

$$|E \cap [\ell]| = |\{k \in [K] : \lceil k/\eta \rceil \le \ell\}| = |\{k \in [K] : k \le \eta\ell\}| = \min\{K, \lfloor \eta\ell \rfloor\} \le \eta\ell.$$

□

因此，要找到一个具有有界前缀负载的集合 $E \subseteq M$，只需找到某些代理人 $I \subseteq N$ 的需求配置集合 Π_I，使其具有有界前缀负载。一个自然的起点是由其 MMS 捆绑诱导出的 $i \in N$ 的配置 $\{B_{i,1}, \ldots, B_{i,d}\}$。也就是说，存在某些$\pi_{i,j} = \{v_i(e) : e \in B_{i,j}$ 以及 $v_i(e) > 0\}$。这里的问题在于，$\pi_{i,j}$ 中的需求总数可能大到 m。因此，我们将把每个配置 π 拆分为两个：一个需求数量有界的头部 配置，以及一个尾部 配置。

5.1 头部与尾部画像

根据**推论**5.2，我们希望找到一个集合 $I \subseteq N$，其中包含若干代理人，并为他们分配一些价值为 1 的画像，使总前缀负载有界。如果 $|I|$足够大，**推论**5.1保证未分配代理人能够获得一个价值至少为 1 的物品束。

我们不再试图一次性为某个代理人子集 I 找到一个价值为 1 的完整画像集合，而是将任务拆分开来，分别找到一个 Π_I 头部配置 $\pi_i \in \Pi_I$ 集合和一个Ψ_I尾部配置 $\psi_i \in \Psi_I$ 集合。在这种情况下，代理人 $i \in I$ 会获得一个完整画像 $\{\pi_i, \psi_i\}$。

定义 5.1。 对于 $h \in [m]$，我们将 $\{1, \ldots, h\}$ 称为头部物品，将 $\{h+1, \ldots, m\}$ 称为尾部物品。对于代理人 $i \in N$， i 的尾部价值为

$$T_i = \sum_{e>h} v_i(e).$$

定义 5.2。 对于代理人 $i \in N$，如果对于某个头部物品 $e \le h$，每个$\alpha \in \pi$ 都满足 $\alpha \le v_i(e)$，则我们称需求分布 π 是 i 的头部配置。

类似地，如果对于某个尾部物品 $e > h$，每个 $\sigma \in \psi$ 都满足 $\sigma \le v_i(e)$，则我们称需求分布 ψ 是 i 的尾部配置。

我们采用与之前相同的约定。

定义 5.3。 空档案 是 $\varnothing$。如果代理人 $i \in N$ 被分配到空头部配置$\pi = \varnothing$ 或空尾部配置 $\psi = \varnothing$，这意味着他可能不会从头部或尾部获得任何物品。对于所有 $0 \le \ell \le m$，总有 $P_i(\varnothing, \ell) = 0$ 。

我们允许代理人 $i \in N$ 成为 I 中被分配的对象之一，但获得空档案 $\pi_i = \varnothing$ 或空尾部配置 $\psi_i = \varnothing$。

我们还将定义一个“无档案” $\perp$，它对应于不将 $i \in N$选入最终代理人集合 I的选项。

定义 5.4。 无档案 是 $\perp$。如果代理人 $i \in N$ 被分配到 $\perp$，这意味着我们不选择该代理人，并且他完全不会获得任何物品。对于所有 $0 \le \ell \le m$，总有 $P_i(\perp, \ell) = 0$ 。

我们的方法首先是找出一个足够大的代理人集合 $I \subseteq N$，并为他们分配 仅包含头部配置 $\Pi_I = \{\pi_i\}_{i \in I}$，这些配置只使用 $[h]$中的物品。所有其他 $N - I$代理人将获得 $\perp$，并将在之后根据 **推论** 5.1 获得一个物品束。每个 $i \in I$ 代理人获得一个头部配置 π_i后，我们将找到相应的尾部配置 ψ_i，使得 $v(\pi_i) + v(\psi_i) \ge 1$。 **推论** 5.2 随后保证 i将获得价值至少为 1 的物品束。

由于配置 Π_I 没有使用 M中的所有物品，许多配置 $\pi_i \in \Pi_I$ 可能具有 $v(\pi_i) < 1$。我们引入档案亏缺这一概念，用于衡量 $i \in I$ 从 π_i中遗漏了多少价值。

定义 5.5。 对于头部配置 $\pi \neq \perp$，其缺口 为

$$\Delta(\pi) := (1 - v(\pi))_+.$$

此处 $(\cdot)_+ :=$ 最大$\{0, \cdot\}$。

假设代理人 $i \in N$ 被分配了一个头部配置 $\pi_i \neq \perp$。如果 $\Delta(\pi_i) > 0$，那么使用头部物品的一个子集 $[h]$来满足π_i 并不能保证 i 获得一个价值为 1 的物品束。因此，我们需要使用尾部中的一些物品 $\{h+1, \ldots\ldots, m\}$ 来补偿缺失价值。

我们采用一种受忠实舍入方法启发的方法，该方法也出现在[BEF22、EG26a]。假设除了满足 π_i 的头部物品之外，代理人 i 还可以从每个尾部物品中取得相同的 $\Delta(\pi_i)/T_i$ 分数。那么， i 保证至少获得以下价值

$$v(\pi_i) + \frac{\Delta(\pi_i)}{T_i} \sum_{e>h} v_i(e) = v(\pi_i) + \Delta(\pi_i) \ge 1.$$

本质上，价值 $\triangleq_{(\pi,i)} T_i$ 定义了将尾部物品进行“分数分配”给代理人 i 的方式。虽然已知可以通过牺牲至多一个物品来对分数分配进行舍入，但我们希望让每个代理人获得总价值恰好为 1，因此在这里放弃物品并不可行。我们将针对头部配置 π_i 的前缀负载给出充分条件，使得无需任何损失即可对这一分数分配进行“舍入”。

定义 5.6。对于代理人 $i \in N$ 和头部配置 π，令

$$\tau_i(\pi) := \begin{cases} \Delta(\pi)/T_i, & \pi \neq \perp \text{ and } T_i > 0; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

考虑某个前缀 $\ell > h$，其中我们可能会使用尾部物品。从每个尾部物品 $e > h$ 中取相同的 $\tau_i(\pi_i)$-比例，可以看作每取一个物品只生成了需求的 $\tau_i(\pi_i)$-比例。因此，对于前缀 $\ell > h$，代理人 i 通过这一过程产生的总额外负载，即增加的需求量，“本质上”是 $\tau_i(\pi_i)(\ell - h)$。这说明了头部配置需要多少松弛量，才能允许完成尾部配置。

引理 5.3（尾部补全）。令 $I \subseteq N$，令 π_i 为分配给代理人 $i \in I$ 的头部配置，并令 $\Pi_I = \{\pi_i\}_{i \in I}$。假设 $T_i = 0$ 蕴含 $\Delta(\pi_i) = 0$ 对每个 $i \in I$ 都成立。对于 $\eta \in (0, 1]$，假设对于每个 $0 \leq \ell \leq h$，我们都有 $P(\Pi_I, \ell) \leq \eta\ell$，并且对于每个 $h + 1 \leq \ell \leq m$，我们都有

$$\mathcal{P}(\Pi_I, \ell) \leq \eta\ell - (\ell - h) \sum_{i \in I} \tau_i(\pi_i) - |I|.$$

存在一个 尾部配置的集合 $\Psi_I := \{\psi_i\}_{i \in I}$，其中代理人 i 被分配了 ψ_i，使得

$$\forall 0 \leq \ell \leq m : \mathcal{P}(\Pi_I, \ell) + \mathcal{P}(\Psi_I, \ell) \leq \eta\ell,$$

并且对于每个 $i \in I$，都有 $v(\pi_i) + v(\psi_i) \geq 1$。

证明。考虑 $i \in I$，并记 $\tau_i := \tau_i(\pi_i)$。按如下方式构造尾部配置 ψ_i。我们将尾部 $\{h+1, \ldots, m\}$ 划分为长度约为 $1/\tau_i$ 的分段，并将每段中第一个物品的价值加到 ψ_i 中。也就是说，对于每个 $t = 1, \ldots, \lceil \tau_i \cdot (m - h) \rceil$，只要 $v_i(e_{i,t})$ 为正，就将其加到 ψ_i 中，其中

$$e_{i,t} = h + 1 + \left\lfloor \frac{t-1}{\tau_i} \right\rfloor.$$

这种构造背后的直觉很简单：取每个长度为 $1/\tau_i$ 的分段中的第一个物品后，选中物品的总价值至少与从每个尾部物品中取其 τ_i 分之一时一样大。如果 $\tau_i = 0$，那么我们只需令 $\psi_i = \varnothing$。

我们也可以用以下方式描述这一构造。对于 $1 \leq k \leq m - h$，令 $\sigma_{i,\,k} := v_i(h + k)$，即代理人 i 的第 k 个尾部物品的价值。然后，对于每个 $k \in [m - h]$，我们恰好添加

$$\lceil \tau_i \cdot k \rceil - \lceil \tau_i \cdot (k-1) \rceil$$

份 $\sigma_{i,\,k}$ 到配置 ψ_i 中（只要其值为正）。为此，请注意

$$e_{i,t} \leq h + k \iff \left\lfloor \frac{t-1}{\tau_i} \right\rfloor \leq k - 1 \iff t - 1 < \tau_i \cdot k \iff t \leq \lceil \tau_i \cdot k \rceil.$$

因此，前 k 个 $\lceil \tau_i$ 尾部物品中，来自 ψ_i 的 $k\rceil$ 选中的物品最多有 $\lceil \tau_i \cdot k \rceil$，而尾部物品 k 的副本数量恰好为 $\lceil \tau_i \cdot k \rceil - \lceil \tau_i \cdot (k-1) \rceil$。请注意，这两种构造都允许出现 $\tau_i > 1$，在这种情况下，代理人 i 会向 ψ_i 添加同一需求的多个副本。然而，在我们实际应用这一引理时，将有 $\tau_i \leq 1$，因此每个物品向 ψ_i 添加的需求副本数至多为一个。

设 $\sigma_{i,m-h+1}=0$。很容易看出，这样选择 ψ_i 可以弥补代理人 i 的全部缺口：

$$v(\psi_i)=\sum_{k=1}^{m-h}\sigma_{i,k}\cdot\Big(\lceil\tau_i\cdot k\rceil-\lceil\tau_i\cdot(k-1)\rceil\Big)=\sum_{k=1}^{m-h}\lceil\tau_i\cdot k\rceil\cdot(\sigma_{i,k}-\sigma_{i,k+1})$$
$$\geq\tau_i\sum_{k=1}^{m-h}k\cdot(\sigma_{i,k}-\sigma_{i,k+1})=\tau_i\sum_{k=1}^{m-h}\sigma_{i,k}=\tau_iT_i=\Delta(\pi_i).$$

由于 $\Delta(\pi_i)=(1-v(\pi_i))_+$，因此可立即得出 $v(\pi_i)+v(\psi_i)\geq 1$。

接下来需要对 $\Psi_I=\{\psi_i\}_{i\in I}$ 产生的额外前缀负载给出上界。注意，对于每个 $i\in I$，$\sigma_{i,k}\in\psi_i$ 的断点至少为 $h+k$。因此，对于每个 $0\leq\ell\leq h$，有

$$\mathcal{P}_i(\psi_i,\ell)=\sum_{\sigma\in\psi_i}\mathbb{1}\{m_i(\sigma)\leq\ell\}=0,$$

对每个 $i\in I$ 均成立，因此 $\mathcal{P}(\Psi_I,\ell)=0$。对于 $\ell>h$，如前所述，在前 $k=\ell-h$ 个尾部物品中，来自 ψ_i 的选中物品数量至多为 $\lceil\tau_i\cdot(\ell-h)\rceil\leq\tau_i\cdot(\ell-h)+1$。因此，在前缀 $\ell>h$ 处，尾部配置 Ψ_I 产生的额外负载至多为

$$\mathcal{P}(\Psi_I,\ell)\leq\sum_{i\in I}\Big(\tau_i\cdot(\ell-h)+1\Big)=(\ell-h)\sum_{i\in I}\tau_i+|I|.$$

引理得证。 □

因此，为了得到一个 $I\subseteq N$ 代理人集合，其中包含一个完整剖面集合，且满足**推论** 5.2，只需找到 $I\subseteq N$ 以及一个仅含头部配置的集合 $\Pi_I=\{\pi_i\}_{i\in I}$，使其满足**引理** 5.3。我们将在下一小节中说明如何选取一个足够大的集合 $I\subseteq N$ (大小约为$n-O(\log^2 n)$)，以及具有这些性质的相应配置 Π_I。

5.2 分数头部配置

We 首先定义一个头部配置集合，代理人 $i\in N$ 将从中进行选择 .

定义 5.7。 对于每个代理人 $i\in N$，令 $\{B_{i,1},\ldots,B_{i,d}\}$ 表示见证 $\mathrm{MMS}(M,v_i,d)$ 的 d-划分。对于每个 $B_{i,j}$, $j\in[d]$，均有 $v_i(B_{i,j})=1$。对于每个 $j\in[d]$，定义

$$\pi_{i,j}:=\{v_i(e):\ e\in B_{i,j}\cap[h],v_i(e)>0\}.$$

令 $\Pi:=\{\varnothing,\ \perp\}+\bigcup_{i\in N}\{\pi_{i,\ j}:\ \ j\in[d]\}$。

我们不直接考虑这些配置，而是针对每个代理人 $i\in N$ 定义一个分布，分布在配置 之上 Π。我们将这些分布称为 分数配置。因此，我们的目标首先是定义一个分数配置集合，使其满足**引理** 5.3中的前缀负载条件，然后将其舍入为整数配置集合，同时保持每个前缀约束。

定义 5.8。 设 Π 是一个头部配置集合，其中包含 $\varnothing$ 和 $\perp$。代理人 $i\in N$ 的分数头部配置 是一个二元组 $(x_i,\ \Pi)$，其中 $x_i(\pi)\geq 0$ 对每个 $\pi\in\Pi$ 以及 $\sum_{\pi\in\Pi}x_i(\pi)=1$均成立。

我们自然地将（头部）前缀负载的定义扩展到分数配置。

定义 5.9。 对于具有分数头部配置 $(x_i,\ \Pi)$的代理人 $i\in N$，其对于 $0\leq\ell\leq m$ 的 Π 的分数 ℓ-前缀头部负载 为

$$\mathcal{H}_i(x_i,\Pi,\ell):=\sum_{\pi\in\Pi}x_i(\pi)\cdot\mathcal{P}_i(\pi,\ell).$$

假设每个代理人 $i\in N$ 都具有共享配置集 Π的分数头部配置 $(x_i,\ \Pi)$，并令 $x=\{x_i\}_{i\in N}$。对于 $0\leq\ell\leq m$，Π 的总分数 ℓ-前缀头部负载 x 为

$$\mathcal{H}(x,\Pi,\ell):=\sum_{i\in N}\mathcal{H}_i(x_i,\Pi,\ell)=\sum_{i\in N}\sum_{\pi\in\Pi}x_i(\pi)\cdot\mathcal{P}_i(\pi,\ell).$$

除了分数头部负载之外，我们还将考虑分数尾部负载。由于所有代理人共享一个公共尾部$\{h+1, \ldots\ldots, m\}$，因此我们不再为每个前缀 ℓ定义分数尾部负载，而是从定义中省略乘子（$\ell - h$），并考虑一个公共项。

定义 5.10。 对于具有分数头部配置 (x_i, Π) 的代理人 $i \in N$，其 Π 的 分数尾部负载为

$$\tau_i(x_i, \Pi) := \sum_{\pi \in \Pi} x_i(\pi) \cdot \tau_i(\pi).$$

假设对于共享配置集Π，每个代理人 $i \in N$ 都具有分数头部配置 (x_i, Π)，并令 $x = \{x_i\}_{i \in N}$。对于 x， Π 的总分数尾部负载 为

$$\tau(x, \Pi) := \sum_{i \in N} \tau_i(x_i, \Pi) = \sum_{i \in N} \sum_{\pi \in \Pi} x_i(\pi) \cdot \tau_i(\pi).$$

最后，我们将关注根据分数配置 (x_i, Π)，被分配到非-$\perp$ 配置的代理人 $i \in N$ 的期望数量。

定义 5.11。 假设对于共享配置集 Π，每个代理人 $i \in N$ 都具有分数头部配置 (x_i, Π)，并令 $x = \{x_i\}_{i \in N}$。相对于(x, Π) 的已分配档案的分数数量为

$$\mathcal{I}(x, \Pi) := \sum_{i \in N} \sum_{\pi \neq \perp} x_i(\pi).$$

对于每个代理人 $i \in N$，我们的初始分数头部配置 (x_i, Π) 将只是对代理人 i的最大最小份额配置的均匀分布。

定义 5.12。 令 $\Pi := \{\varnothing, \perp\} + \bigcup_{i \in N} \{\pi_{i,j} \colon j \in [d]\}$。对于每位代理人 $i \in N$，考虑以下分数头部配置 $(\hat{x}_i, \Pi)$：对于每个 $\pi \in \Pi$，令

$$\hat{x}_i(\pi) = \frac{|\{j \in [d] : \pi_{i,j} = \pi\}|}{d}.$$

我们将把 $(\hat{x}_i, \Pi)$ 称为代理人 i 的分数 ***MMS*** 头部配置 。

现在我们将证明，代理人$\pi_{i,j}$ 的最大最小份额配置 $i \in N$ 相对于配置 $(\hat{x}$**引理** 5.3，满足其分数形式的条件$x_i, \Pi)$。

引理 5.4。 考虑代理人 $i \in N$ 的分数 *MMS* 头部配置 $(\hat{x}, \Pi)$。成立的是

$$\forall 0 \leq \ell \leq m : \ \mathcal{H}(\hat{x}, \Pi, \ell) \leq \frac{n}{d} \min\{\ell, h\}; \qquad \tau(\hat{x}, \Pi) \leq \frac{n}{d}, \qquad \mathcal{I}(\hat{x}, \Pi) = n.$$

作为推论，对于 $\eta = (n+1)/d$ 和 $h = \min\{nd, m\}$，对于每个 $0 \leq \ell \leq h$，我们有 $H(\hat{x}, \Pi, \ell)$ $\leq \eta\ell$；而对于每个 $h+1 \leq \ell \leq m$，

$$\mathcal{H}(\hat{x}, \Pi, \ell) \leq \eta\ell - (\ell - h) \cdot \tau(\hat{x}, \Pi) - \mathcal{I}(\hat{x}, \Pi).$$

证明。 我们首先观察到，对于每个代理人 $i \in N$ 以及每个 $0 \leq \ell \leq m$，都有

$$\sum_{j=1}^{d} \mathcal{P}_i(\pi_{i,j}, \ell) \leq \min\{\ell, h\}.$$

根据定义，$\mathcal{P}_i(\pi_{i,j}, \ell)$统计了在$\pi_{i,j}$ 中只能由前 ℓ个物品满足的需求数量，而上面的总和统计了代理人 i的此类需求总数。注意，$\pi_{i,j}$中的每个需求都来自$B_{i,j}$中的一个唯一物品，并且 MMS 划分$\{B_{i,1}, \ldots, B_{i,d}\}$ 在每个 ℓ前缀中至多能使用 ℓ 个物品。因此，所有配置中的此类需求至多有 ℓ 个

$\{\pi_{i,1},\ldots,\pi_{i,d}\}$。由于每个$\pi_{i,j}$中的需求仅对应于 $[h]$中的头部物品，因此 i的需求总数不可能超过 h。结合这两个上界可得 $\sum_{j=1}^{d}\mathcal{P}_i(\pi_{i,j},\ell)\le\min(\ell,h)$。

由此立即可得

$$\mathcal{H}(\hat{x},\Pi,\ell)=\frac{1}{d}\sum_{i\in N}\sum_{j=1}^{d}\mathcal{P}_i(\pi_{i,j},\ell)\le\frac{n}{d}\min\{\ell,h\}.$$

接下来，对于每个 $i\in N$ 和 $j\in[d]$，我们有

$$\Delta(\pi_{i,j})=1-v(\pi_{i,j})=v(B_{i,j}\cap\{h+1,\ldots,m\}),$$

因此，根据可加性，有 $\sum_{j=1}^{d}\Delta(\pi_{i,j})=T_i$，并且

$$\tau(\hat{x},\Pi)=\frac{1}{d}\sum_{\substack{i\in N\\T_i>0}}\sum_{j=1}^{d}\frac{\Delta(\pi_{i,j})}{T_i}\le\frac{n}{d}.$$

等式 $\mathcal{I}(\hat{x},\Pi)=n$ 由 $\sum_{\pi\neq\perp}\hat{x}_i(\pi)=1$ 对每个 $i\in N$都成立可得。

现在，令 $\eta=(n+1)/d$，并令 $h=\min\{nd,m\}$。若 $h=m$，则不存在尾部，并且对于所有 $0\le\ell\le m$，$\mathcal{H}(\hat{x},\Pi,\ell)\le\eta\ell$显然成立。若 $h=nd<m$，则对于每个 $\ell>h$，都有 $n<\ell/d$。对于这个 ℓ，

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(\hat{x},\Pi,\ell)+(\ell-h)\cdot\tau(\hat{x},\Pi)+\mathcal{I}(\hat{x},\Pi)&\le\frac{n}{d}\cdot h+(\ell-h)\cdot\frac{n}{d}+n\\&<\frac{n}{d}\cdot\ell+\frac{\ell}{d}=\frac{n+1}{d}\cdot\ell=\eta\ell.\end{aligned}$$

引理得证。 □

前进的路径现在已十分明确：令 $h=\min\{nd,m\}$，并将分数 MMS 配置 $(\hat{x},\Pi)$ 舍入为某个整数配置集合 $\Pi_I=\{\pi_i\}_{i\in I}$，适用于代理人数足够多的情况 $I\subseteq N$。具体而言，要通过推论 5.1 证明定理 5.1，我们需要 $|I|\ge n-O(\log^2 n)$。因此，从 $\mathrm{I}(\hat{x},\Pi)=n$ 出发，舍入过程中最多只能损失 $O(\log^2 n)$ 个代理人。

具体而言，我们证明以下定理。

定理 5.2（头部舍入）。设 Π 为一个共享头部配置集，满足 $|\pi|\le h$，其中某个整数 $h\ge 1$。对于每个 $i\in N$，令 (x_i,Π) 为一个分数配置，并记 $x=\{x_i\}_{i\in N}$。

存在一个整数头部配置集合 $y=\{y_i\}_{i\in N}$，其中的头部配置为 (y_i,Π)，使得对于每个 i,π，都有 $y_i(\pi)\in\{0,1\}$，并且 $y_i(\pi)=1$ 仅当 $\pi\neq\perp$ 满足 $x_i(\pi)>0$ 时成立，并且

$$\begin{aligned}&\mathcal{H}(y,\Pi,\ell)\le\mathcal{H}(x,\Pi,\ell),\qquad\forall 0\le\ell\le m,\\&\tau(y,\Pi)\le\tau(x,\Pi),\\&\mathcal{I}(y,\Pi)\le\mathcal{I}(x,\Pi),\\&\mathcal{I}(y,\Pi)\ge\mathcal{I}(x,\Pi)-\rho(h,X),\end{aligned}$$

其中 $X=|\{(i,\pi):\ 0<x_i(\pi)<1\}|$ 以及

$$\rho(h,X):=8+4\log\max\{1,X\}\cdot(1+\ln h+\ln\max\{1,X\}).$$

我们在**定理** 5.2中证明附录 A (**定理** A.1)，并利用它证明**定理** 5.1。

定理 *定理 5.1*的证明。取 $h=\min\{nd,\ m\}$，并为每个$i\in N$、 $j\in[d]$构造最大最小份额头部配置 $\pi_{i,j}$，令 $\Pi:=\{\varnothing,\ \perp\}+\bigcup_{i\in N}\{\pi_{i,j}:\ j\in[d]\}$。考虑分数最大最小份额头部配置 $(\hat{x},\ \Pi)$。根据$\pi_{i,j}$的定义我们自动得到，对于每个 $\pi\in\Pi$，均有 $|\pi|\le h$。

$\hat{}$ 注意，$\hat{}x$ 中的严格分数条目总数至多为 $X \le nd$。应用**定理** 5.2 于 $(\hat{}x, \Pi)$。根据**引理** 5.4，得到整数头部配置 (y, Π)，使得

$$\begin{aligned}
&\mathcal{H}(y,\Pi,\ell) \le \mathcal{H}(\hat{x},\Pi,\ell) \le \frac{n}{d}\min\{\ell,h\}, \qquad \forall 0 \le \ell \le m,\\
&\tau(y,\Pi) \le \tau(\hat{x},\Pi) \le \frac{n}{d}\\
&\mathcal{I}(y,\Pi) \le \mathcal{I}(\hat{x},\Pi) = n,\\
&\mathcal{I}(y,\Pi) \ge \mathcal{I}(\hat{x},\Pi) - \rho(h,\hat{X}) \ge n - \rho(h,nd).
\end{aligned}$$

令 $I \subseteq N$ 为大小为 $\mathcal{I}(y, \Pi)$ 的集合，其中 $i \in I$ 当且仅当 $y_i(\perp) = 0$。令 $\pi_i \in \Pi - \perp$ 为满足 $y_i(\pi_i) = 1$ 的配置，并令 $\Pi_I := \{\pi_i\}_{i\in I}$。

若 $h = m$，取 $\eta = n/d$ 便会自动使得对每个 $0 \le \ell \le m$，都有 $\mathcal{P}(\Pi_I, \ell) = \mathcal{H}(y, \Pi, \ell) \le \mathcal{H}(\hat{}x, \Pi, \ell) \le \eta\ell$。若 $h < m$，则除了对所有 $0 \le \ell \le h$，都有 $\mathcal{P}(\Pi_I, \ell) \le \eta\ell$ 之外，取 $\eta = (n+1)/d$ 后，对每个 $h+1 \le \ell \le m$，我们还有

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(\Pi_I,\ell) + (\ell-h)\sum_{i\in I}\tau_i(\pi_i) + |I| &= \mathcal{H}(y,\Pi,\ell) + (\ell-h)\tau(y,\Pi) + \mathcal{I}(y,\Pi)\\
&\le \mathcal{H}(\hat{x},\Pi,\ell) + (\ell-h)\cdot\tau(\hat{x},\Pi) + \mathcal{I}(\hat{x},\Pi) \le \frac{n}{d}\cdot h + (\ell-h)\cdot\frac{n}{d} + n\\
&< \frac{n}{d}\cdot\ell + \frac{\ell}{d} = \frac{n+1}{d}\cdot\ell = \eta\ell.
\end{aligned}$$

根据构造，对每个 $i \in I$，我们都有 $T_i = 0$ 蕴含 $\Delta(\pi_i) = 0$，因为 $y_i(\pi_i) = 1$ 蕴含 $x_i(\pi_i) > 0$，因此 π_i 必定是代理人 i 的某个最大最小份额配置。然后，我们可以应用 **引理** 5.3，得到一个由尾部配置组成的集合 $\Psi_I = \{\psi_i\}_{i\in I}$，使得对每个 $0 \le \ell \le m$，我们都有

$$\mathcal{P}(\Pi_I,\ell) + \mathcal{P}(\Psi_I,\ell) \le \eta\ell,$$

并且对于每个 $i \in I$ 都有 $v(\pi_i) + v(\psi_i) \ge 1$。因此，将**推论** 5.2 应用于 $(I、\Pi_I、\Psi_I)$ 会产生某个集合 $E \subseteq M$，使得所有配置 $\{\pi_i、\psi_i\}_{i\in I}$ 都能使用 E 中的不同物品同时得到满足，并且对于每个 $0 \le \ell \le m$ 都有 $|E \cap [\ell]| \le \eta\ell$。

每个代理人 $i \in I$ 都会收到一个不相交的物品束 $E_i \subseteq E$，使得 $v_i(E_i) \ge v(\pi_i) + v(\psi_i) \ge 1$。接下来还需为 U 中的代理人进行分配：$= N - I$。由于 $|I| = \mathrm{I}(y, \Pi) \ge n - \rho(h, nd)$，因此有 $|U| \le \rho(h, nd)$。与此同时，引理 5.1 保证对于每个 $u \in U$ 都有 $v_u(E) \le \eta d$。因此，只要 $|U| \le (d-n)/2$，推论 5.1 就能为代理人 U 分配物品 $M \setminus E$，使每个 $u \in U$ 都收到价值至少为 1 的物品束。然后，为了保证 $|U| \le (d-n)/2$，只需取 d 使得

$$\rho(h,nd) \le (d-n)/2 \quad \Longleftrightarrow \quad d \ge n + 2\rho(h,nd).$$

现在估计 $\rho(h, nd)$。由于 $h, \hat{}X \le nd$ 且 $d \le 2n-1$（**观察** 5.1 求解 $d > 2n-1$），

$$\begin{aligned}
\rho(h,nd) &\le 8 + 4\log(nd)\cdot(1 + \ln(nd) + \ln(nd))\\
&\le 8 + 4\log(nd) + 8\ln 2\log^2(nd) \le 8 + 4\log(2n^2) + 8\ln 2\log^2(2n^2).
\end{aligned}$$

令 $z = 1 + \log n$，上述上界为

$$\begin{aligned}
\rho(h,nd) &\le 8 + 4(2z-1) + 8\ln 2(2z-1)^2\\
&= 32\ln 2 z^2 + (8 - 32\ln 2)z + 4 + 8\ln 2 < 32\ln 2 z^2 < 23(1+\log n)^2.
\end{aligned}$$

因此，取 $d \ge n + 46(1 + \log n)^2$ 即可。 □

6 $(1-\delta)$-最大最小份额分配（MMS 分配），适用于足够大的 n

本节中，我们证明**定理**1.2。我们假设 $m \geq n$，否则用零值填充物品。我们只考虑 ρ-最大最小份额分配，其中仅有 $\rho > 3/4$，因为 [HZ25] 保证加性估值下的$_{3\,4}$-最大最小份额分配，且对 n 不作任何限制。

定理*6.1*（重述定理 *1.2*）。对于每个固定的 $0 < \delta < 1/4$，存在 n_δ，使得对于每个 $n \geq n_\delta$，以下结论成立。考虑一个公平分配实例，其中有 m 件物品M 和 n 个代理人 N，且对于每个 $i \in N$，估值函数 v_i 都是加性的。存在一个将 M分配给 N的分配 $(B_1, \ldots, B_n)$，使得对于每个代理人 $i \in N$，都有 $v_i(B_i) \geq (1-\delta)$·最大最小份额(M, v_i, n)。此外，只需取 n_δ 为

$$n_\delta = 2^{16\delta^{-2}\log^2(8/\delta)}.$$

我们不会直接证明此定理，而是在对物品总数增加额外假设的情况下证明它。具体而言，我们假设 $m \leq \Gamma n$，其中 $\Gamma \geq 1$为某个整数。

定理 *6.2*。设 $\Gamma \geq 1$ 和 $q \geq 9$ 为整数。存在 $n(\Gamma, q)$，使得对于每个 $n \geq n(\Gamma, q)$，以下结论成立。考虑一个公平分配实例，其中有 m 件物品 M和 n 个代理人 N，且对于每个 $i \in N$，估值函数 v_i 都是加性的。若 $m \leq \Gamma n$，则存在一个将 M 分配给 N 的分配 $(B_1, \ldots, B_n)$，使得对于每个代理人 $i \in N$，都有 $v_i(B_i) \geq (1 - 2/q) \cdot$ 最大最小份额(M, v_i, n)。此外，只需取 $n(\Gamma, q)$为

$$n(\Gamma, q) = 2^{4q^2\log^2(2q)} \cdot (\log(2\Gamma))^{2q}.$$

假设 **Ass umption 1**（其中 $d = n$），我们说明 **定理** 6.2 如何推出 **定理** 6.1。

利用 定理 *6.1* 证明 定理 *6.2*。对于固定的 $0 < \delta < 1/4$，取

$$q = \left\lceil \frac{2}{\delta} + \frac{1}{4} \right\rceil, \qquad \text{and} \qquad \Gamma = 4q^2.$$

我们将把初始实例中的 m 个物品和 n 个加性估值 $\{v_i\}_{i \in N}$ 转换为一个包含 $m \leq \Gamma n$ 个元物品 和 n 个加性估值 $\{\tilde{v}_i\}_{i \in N}$的实例，这些估值定义在元物品上。

我们按如下方式进行。令 $K = 2q^2 n$。我们单独保留物品 {1、……、$K-1$}（如果 $m < K$，则保留所有物品），然后根据轮流分区将剩余物品分组为 K 个桶。也就是说，对于桶 E_k，其中 $k \in K$，我们取

$$E_k := M \cap \bigcup_{s \geq 1} \{s \cdot K + k - 1\} = M \cap \{K + k - 1, 2K + k - 1, \ldots\}.$$

~我们将把每个桶 E_k视为一个单独的元物品。令 $M =$ {1、……、$K-1$、E_1、E_2、……、E_K} 为 ~元物品的集合，并为每个代理人 $i \in N$ 定义在 M 上的估值 $\tilde{v}_i$，如下所示：

$$\forall e \in [K-1]: \ \tilde{v}_i(e) = v_i(e), \qquad \forall k \in [K]: \ \tilde{v}_i(E_k) = v_i(E_k) = \sum_{e \in E_k} v_i(e),$$

~ ~以加性方式扩展到 M的子集上。很容易看出，$|M| \leq 2K - 1 < \Gamma n$。

引理6.1。对于每个代理人 $i \in N$，都有最大最小份额$(\widetilde{M}, \tilde{v}_i, n) \geq 1 - 1/(2q^2)$。

~证明。只需考虑 $m \geq K + 1$ 的情况，否则 $M = M$。为说明最大最小份额上界，固定某个 $i \in N$，并考虑代理人 i 的最大最小份额划分 $\{B_{i,1}, \ldots\ldots, B_{i,n}\}$。我们按如下方式创建一个新的 ~ ~划分 $\{B_{i,1}, \ldots\ldots, B_{i,n}\}$。首先，对于每个最大最小份额捆绑，我们保留第一个 $[K-1]$ 中的物品不变，将这些子集称为

$$\forall j \in [n]: \ B^K_{i,j} := B_{i,j} \cap [K-1].$$

现在，我们将从 $j=1$ 开始并递增至 n，以贪心方式将全部元物品分配给 B_i^K、$_j$。假设当前考虑 B_i^K、$_j$、 $j\in[n]$。令 $b_j:=1-v_i(B_i^K$、$_j)$ 表示缺失价值。如果 $b_j\le 1/(2q^2)$，则无需添加任何内容，因为 $\tilde{v}_i(B_i^K$、$_j)\ge 1-1/(2q^2)$。否则，我们以任意顺序不断添加可用元物品 E_k，直到 B_i^K、$_j$ 的总价值达到 $1-1/(2q^2)$（或者等价地，直到所添加物品的总价值至少达到 $b_j-1/(2q^2)$）。令 K_j 表示添加到 B_i^K、$_j$ 的元物品，并设

$$\widetilde{B}_{i,j}=B_{i,j}^K\cup\{E_k:k\in K_j\}.$$

元物品 K_j 不可用，我们继续处理部分 $j+1$。完成 $j=n$ 后，任意分配剩余的元物品。为方便证明，不失一般性地假设到 $j=n$ 时所有元物品都已分配。

为保证上述过程始终成功，只需证明在每次迭代 j开始时，可用元物品的总价值至少为 $\sum_{k=j}^n b_k$。我们对 j使用归纳法证明，基本情形 $j=1$ 由

$$\sum_{j=1}^n b_j=n-v_i([K-1])=v_i(M-[K-1])=\sum_{k=1}^K v_i(E_k).$$

假设价值下界对迭代 j之前的所有迭代均成立。若 $b_j>1/(2q^2$，则可用元物品的价值至少为 b_j，因此我们可以保证至少增加 $b_j-1/(2q^2)$。注意，对于每个前缀 $\ell\ge 0$以及每个 $k\in[K]$，都有 $|E_k\cap[\ell]|\le \ell/K$。于是，根据 **引理** 5.1，可得$\tilde{v}_i(E_k)\le n/K=1/(2q^2)$，对每个代理人 $i\in N$均成立。由于将最后一个元物品加入K_j之前，已增加的总价值低于 $b_j-1/(2q^2)$，因此必有

$$\sum_{k\in K_j} v_i(E_k)<b_j,$$

这意味着在迭代 $j+1$ 开始时，可用物品的总价值至少为

$$\sum_{k=j}^n b_k-\sum_{k\in K_j} v_i(E_k)\ge\sum_{k=j+1}^n b_k.$$

因此，元物品分配算法成功完成。

根据构造，所有物品都已分配，并且对于每个 $j\in[n]$，要么 $b_j\le 1/(2q^2)$ 且 $\tilde{v}_i(\widetilde{B}_i,\ _j)\ge\tilde{v}_i(B_i^K,\ _j)\ge 1-1/(2q^2)$，要么 $b_j>1/(2q^2)$，并且我们有

$$\tilde{v}_i(\widetilde{B}_{i,j})\ge v_i(B_{i,j}^K)+b_j-1/(2q^2)=1-1/(2q^2).$$

由此可得 MMS$(\widetilde{M},\ \tilde{v}_i,\ n)\ge 1-1/(2q^2)$。 □

若 $n\ge n(\Gamma,\ q)$，将 **定理** 6.2 应用于元物品 $\mathcal{M}$ 和估值 $\{\tilde{v}_i\}_{i\in N}$，则可得到一个~ ~分配 $(B_1,\dots,B_n)$，根据 **引理** 6.1，每个代理人 $i\in N$ 获得的价值为

$$\tilde{v}_i(\widetilde{B}_i)\ge\left(1-\frac{2}{q}\right)\mathrm{MMS}(\widetilde{M},\tilde{v}_i,n)\ge\left(1-\frac{2}{q}\right)\left(1-\frac{1}{2q^2}\right)\ge 1-\frac{2}{q}-\frac{1}{2q^2}\ge 1-\delta,$$

其中我们对 $q=\lceil 2/\delta+1/4\rceil\ge 9$ 使用了 $\delta\ge 2/q+1/(2q^2)$。将已分配的元物品展开为常规物品，即可得到 M 的 $(1-\delta)$-最大最小份额分配。

还需证明 $n(\Gamma,\ q)\le 2^{16\delta^{-2}\text{对数}2(8/\delta)}$。由于对于 $q\ge 9$，我们有 $\log(2q)\le q/2$，

$$\log(2\Gamma)=\log(8q^2)=2\log(2q)+1\le 2q,$$

因此

$$\log n(\Gamma,q)=\log\left(2^{4q^2\log^2(2q)}\cdot(\log(2\Gamma))^{2q}\right)\le 4q^2\log^2(2q)+2q\log(2q)<4\left(q\log(2q)+\frac{1}{4}\right)^2.$$

取凸函数 $f(x):=x\log(4x)$。根据 $q,\,2/\delta>q-5/4$ 的选择，再由凸性可得

$$\begin{aligned}\frac{2}{\delta}\log\frac{8}{\delta}=f(2/\delta)&\ge f(q)-\frac{5}{4}f'(q)\\&\ge q\log(2q)+q-\frac{5}{4}(\log(2q)+1+\log e)\ge q\log(2q)+\frac{3q-25}{8}\ge q\log(2q)+\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

由此可得 $n(\Gamma,\ q)\ \le 2^{16\delta^{-2}\log^2(8/\delta)}=:\ n_\delta$。 □

6.1 线性规划对偶问题中的公共头部/尾部

本文余下部分将致力于证明 **定理** 6.2。根据假设，$m\le\Gamma n$，因此我们获取一个 $(1-2/q)$-最大最小份额分配的第一个朴素尝试，就是直接采用第 5 节中已有的方法，其中 $h=m$ 且 $d=n$。更具体地说，对于每个代理人 $i\in N$ 及其最大最小份额物品束 $j\in[n]$，考虑完整的最大最小份额配置

$$\pi_{i,j}:=\{v_i(e):\ e\in B_{i,j},v_i(e)>0\},$$

集合 $\Pi=\{\varnothing,\ \bot\}+\bigcup_{i\in N}\{\pi_{i,\ j}:\ j\in[n]\}$，并构造分数最大最小份额头部配置

$$\forall\pi\in\Pi:\ \hat{x}_i(\pi)=\frac{|\{j\in[n]:\pi_{i,j}=\pi\}|}{n}.$$

根据引理 5.4，对于每个前缀 $0\le\ell\le m$，均有 $\mathrm{H}(\hat{x},\Pi,\ell)\ \le\ell$，且 $\mathrm{I}(\hat{x},\Pi)\ =n$。接着直接应用定理 5.2 的舍入方法，可得到至少 $n-O(\log^2 n)$ 个代理人，其已分配整数配置的价值为 1；这些配置可以通过 M 中不同的物品同时满足。遗憾的是，对于剩余未分配物品集合而言，这种分配无法为其余 $O(\log^2 n)$ 个代理人提供任何保证：正如引理 5.1 中的 $d=n$ 和 $\eta=1$，推论 5.1 对此无能为力，因为它仅适用于大小为零的代理人子集。

然而，**定理**5.2 的舍入未能将配置分配给所有代理人，这让我们得以了解最大最小份额配置的前缀负载的一些重要信息。

为了获得一些直观认识，我们先考虑一种利用配置线性规划寻找 $(1-2/q)$-最大最小份额分配的“标准”方法。我们引入可接受捆绑这一自然概念。

定义 6.1。设 $i\in N$。若物品束 $B\subseteq M$ 对代理人 i 可接受，则称其为可接受捆绑，当且仅当 $v_i(B)\ \ge1-2/q$。令 $\mathcal{B}_i=\{B\subseteq M:\ v_i(B)\ \ge1-2/q\}$ 表示代理人 i 的所有可接受捆绑所构成的集合。

对于 $i\in N,\ B\subseteq M$ 令 $x_i(B)$ 表示将物品束 B 分配给代理人 i 对应的指示变量。考虑以下配置线性规划的变体：

$$\begin{aligned}\text{minimize}\quad&\eta\\\text{subject to}\quad&\sum_{B\in\mathcal{B}_i}x_i(B)=1,&&\forall i\in N;\\&\sum_{i\in N}\sum_{\substack{B\in\mathcal{B}_i\\B\ni e}}x_i(B)\le\eta,&&\forall e\in M;\\&x_i(B)\ge0,&&\forall i\in N,B\subseteq M.\end{aligned}\tag{C-LP}$$

此变量 η 对应于某件物品的最大分数使用量。它所发挥的作用与第 5 节中的作用基本相同，在第 5 节中，它表示施加于每件物品上的最大分数负载

的 ℓ-前缀。显然，为代理人 i的 MMS 划分中的每个物品束赋予权重 $x_i(B_{i,j}) = 1/n$，使得（C-LP）在 $\eta = 1$下可行。

如果最优值 η^* （C-LP）充分低于 1，则分数解提供的大量松弛量可以补偿舍入过程中损失的代理人。在第 5 节 中，当我们有$d = n+O(\log^2 n)$ 以及划分为 d 个物品束的 MMS 划分时，一个为每个 MMS 物品束提供 $x_i(B_{i,j}) = 1/d$的可行解将保证最优值为 $\eta^* \le \frac{n}{d} = 1 - \frac{d-n}{d}$。于是，如果某种舍入最多遗漏 $\rho(n)$ 个代理人，并使用一组物品进行分配，使每个代理人获得的物品总价值至多为 $\eta^* d$，则每个被遗漏的代理人对剩余物品的估值至少为 $(1-\eta^*)d$。为了能够为被遗漏的代理人分配物品（即**推论** 5.1），我们的充分条件是

$$\rho(n) \le \frac{(1-\eta^*)d}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad d - n \ge 2\rho(n).$$

因此，当 $\rho(n) = O(\log^2 n)$ 以及 $d = n+O(\log^2 n)$ 如**定理** 5.1中所述时，我们可以为所有代理人进行分配。

然而，在 **定理** 6.2 的设定中，我们有 $d = n$，而初始的均匀解为 $x_i(B_{i,j}) = 1/n$，得到 $\eta = 1$，即无法保证松弛量。现在让我们改为考察最优分数负载 η^*。按照上述相同的推理，如果对（C-LP）进行某种舍入，使用满足$\rho(n)$ 的集合 E 为每个代理人 $v_i(E) \le \eta^* n$ 分配除 i 个代理人之外的所有代理人，那么只要

$$\rho(n) \le \frac{(1-\eta^*)n}{2}.$$

如果 η^* 与 1 充分分离，我们就有足够的松弛量，可以完成分配。

主要问题在于，当 η^* 非常接近 1 时该怎么办。事实证明，在这种情况下，（*C-LP*）的对偶问题提供了有用的结构信息。缩放后，对偶问题可以写成

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & \frac{1}{n}\sum_{i\in N} \lambda_i \\ \text{subject to} \quad & \sum_{e\in B} w(e) \ge \lambda_i, \quad \forall i \in N, B \in \mathcal{B}_i; \\ & \sum_{e\in M} w(e) = n; \\ & w(e) \ge 0, \qquad\qquad \forall e \in M. \end{aligned} \tag{D-LP}$$

这里，w是 M上的加性函数，由每个物品 $e \in M$的共同价格 $w(e)$定义；而对于 $i \in N$，λ_i 是该代理人的每个可接受捆绑的价格下界 i。

令 (λ^*, w^*) 为最优对偶解。注意到，最优性要求 $\lambda_i^* = \min_{B\in\mathcal{B}_i} w^*(B)$，即代理人 $i \in N$ 的可接受捆绑的最低价格，否则我们可以增加 λ_i^*。由于每个 MMS 捆绑 $B_{i,j}$ 对于 i 都是可接受的，因此对于每个 $i \in N$，有

$$0 \le \lambda_i^* \le \min_{j\in[n]} w^*(B_{i,j}) \le \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} w^*(B_{i,j}) = \frac{w^*(M)}{n} = 1.$$

定义 $\Lambda^* := \sum_{i\in N}(1-\lambda_i^*)$。根据强对偶性，我们有

$$\sum_{i\in N} \lambda_i^* = \eta^* n \quad \Longleftrightarrow \quad \Lambda^* = \sum_{i\in N}(1-\lambda_i^*) = (1-\eta^*)n.$$

特别是，由于每个 $(1-\lambda_i^*)$ 都是非负的，对于任意 $\varepsilon > 0$，至少有 $(1-\varepsilon)n$ 位代理人 $i \in N$ 的可接受捆绑的共同价格至少为

$$\lambda_i^* \ge 1 - \frac{\Lambda^*}{\varepsilon n} = 1 - \frac{1-\eta^*}{\varepsilon}.$$

为什么这一切特别有用？根据构造，(D-LP) 保证，对于每位代理人$i \in N$和物品束 $B \subseteq M$，如果 B对 i而言是可接受的， $w^*(B) \geq \lambda_i^*$必然成立。于是，当η^* 非常接近 1 时，大多数代理人的 λ_i^* 都非常接近 1，这意味着这些代理人的可接受捆绑都具有较高的共同价格。

这一观察使我们能够构造一个共同前缀，其中包含大多数代理人都认为价值很高的物品，具体如下。对于代理人 $i \in N$，可行的 w^* 必须满足 $\sum_{j=1}^{n} w^*(B_{i,j}) = w^*(M) = n$。如果某个子集 $D_{i,j} \subseteq B_{i,j}$ 的价值至多为 $2/q$，那么 $v_i(B_{i,j} \setminus D_{i,j}) \geq 1 - 2/q$，因此 $B_{i,j} \setminus D_{i,j}$ 是可接受的。接着，其共同价格 $w^*(B_{i,j} \setminus D_{i,j}) \geq \lambda_i^*$，并且

$$w^*(D_{i,j}) \leq w^*(B_{i,j}) - \lambda_i^*.$$

因此，如果代理人 i 有 $\lambda_i^* \geq 1 - \Lambda^*/(\varepsilon n)$，那么代理人 i 的最大最小份额捆绑中这些低价值子集的共同价格总额至多为

$$\sum_{j=1}^{n} w^*(D_{i,j}) \leq \sum_{j=1}^{n} \left(w^*(B_{i,j}) - \lambda_i^* \right) = n(1 - \lambda_i^*) \leq \frac{\Lambda^*}{\varepsilon}.$$

因此，对于每个 $\varepsilon > 0$，至少有比例为 $(1 - \varepsilon)$ 的代理人，其最大最小份额捆绑中的低价值子集的共同价格总额仅为 Λ^*/ε。因此，如果关于 η^* 的条件不成立，我们便得到

$$\rho(n) > \frac{(1 - \eta^*)n}{2} \quad \Longrightarrow \quad \Lambda^* = (1 - \eta^*)n < 2\rho(n).$$

在这种情况下，至少有 $(1-\varepsilon)n$ 个代理人的低价值子集的共同价格至多为 $2\rho(n)/\varepsilon$，而物品的总价格为 n。于是，对于固定的 $\varepsilon > 0$，如果 $\rho(n) \ll n$，这些子集仅占共同价格总额的一小部分。

单凭这一观察并不能说明太多，因为不同代理人的低价值部分可能各不相同，而这些低价值部分合起来可能覆盖所有物品 M。不过，我们将证明，只要物品的 w^*-价格按顺序排列，即 $w^*(1) \geq w^*(2) \geq \ldots \geq w^*(m)$，那么只要 n 足够大，大多数代理人就必定有一个由高价值物品构成的共同前缀。

引理 6.2。对于 (D-LP) 的一个可行解 (λ, w)，记 $\Lambda := \sum_{i \in N}(1 - \lambda_i)$。假设共同价格 w 满足 $w(1) \geq w(2) \geq \ldots \geq w(m)$。那么，对于任意 $\varepsilon \in (0, 1]$，存在一个整数 $h \in \{0, 1, \ldots, m\}$，使得 $qn \geq h \geq n - 2q\Lambda/\varepsilon - q$，并且

- 每件物品 $e \in \{1, \ldots, h\}$ 的价格为 $w(e) \geq 1/q$；
- 代理人子集

$$G_\varepsilon = \left\{ i \in N : \; n(1 - \lambda_i) \leq \frac{\Lambda}{\varepsilon} \right\}$$

  有 $|G_\varepsilon| \geq (1 - \varepsilon)n$，并且对于每件 $i \in G_\varepsilon$ 物品 $e \in \{1, \ldots, h\}$，均有 $v_i(e) \geq 1/q$；
- 对于每个代理人 $i \in N$ 满足 $\lambda_i \geq 1/2$，均有

$$v_i(\{h + 1, \ldots, m\}) \leq \frac{4q\Lambda}{\varepsilon} + q.$$

证明。如前所述，由于对于每个代理人 $i \in N$ 每个 MMS 捆绑 $B_{i,\,j}$， $j \in [n]$ 都是可接受的，因此对于一个可行解（λ， w），有

$$n = w(M) = \sum_{j=1}^{n} w(B_{i,j}) \geq n\lambda_i \quad \Longrightarrow \quad \lambda_i \leq 1.$$

特别地， $1-\lambda_i \geq 0$对于所有 $i \in N$。因此，由于 $\sum_{i\in N}(1-\lambda_i) = \Lambda$，集合

$$G_\varepsilon = \left\{ i \in N : \; n(1-\lambda_i) \leq \frac{\Lambda}{\varepsilon} \right\}$$

大小至少为 $(1-\varepsilon)n$。注意，即使 $\varepsilon = 1$，这个集合也非空，因为总存在一个代理人 i 满足 $(1-\lambda_i) \leq \Lambda/n$，且若 $\Lambda = 0$，则 $G_\varepsilon = N$。

首先假设 $n \leq \frac{2q\Lambda}{\varepsilon} + q - 3$。在这种情况下，取 $h = 0$，并且对每个 $i \in N$，都有

$$v_i(\{1,\ldots,m\}) = n \leq \frac{2q\Lambda}{\varepsilon} + q - 3 \leq \frac{4q\Lambda}{\varepsilon} + q.$$

从现在起，假设 $n > \frac{2q\Lambda}{\varepsilon} + q - 3$，因为 $q \geq 9$，所以有 $n > \frac{2q\Lambda}{\varepsilon}$。

对于每个代理人 $i \in N$，令 $L_i := \{e \in M : \; v_i(e) < 1/q\}$。我们将证明这些低价值物品的价格必然很低，具体而言，$w(L_i) \leq qn(1-\lambda_i)$。为此，取 $B_{i,\,j}$，其中 $j \in [n]$，并将 $B_{i,\,j} \cap L_i$ 贪心地划分为若干子捆绑，使每个子捆绑的 v_i 价值至多为 $2/q$：只要再加入一个物品不会使总价值超过 $2/q$，就继续向物品束中添加物品。由于 $B_{i,\,j} \cap L_i$ 中的每件物品价值都小于 $1/q$，除最后一个子捆绑外，其余子捆绑的价值都将大于 $1/q$。接着，由于 $v(B_{i,\,j}) = 1$，这样的子捆绑至多有 q 个。将它们记作 $D_{i,\,j,\,k}$，其中 $k \leq q$。

对于每个 k，从 B_i 中移除 $D_{i,\,j,\,k}$ 后，物品束仍然是可接受的，因为 $v_i(B_{i,\,j} \backslash D_{i,\,j,\,k}) \geq 1-2/q$。因此，我们必须有 $w(D_{i,\,j,\,k}) \leq w(B_{i,\,j}) - \lambda_i$。对所有 k 以及 MMS 划分的所有部分求和，可得

$$w(L_i) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k} w(D_{i,j,k}) \leq q \sum_{j=1}^{n} (w(B_{i,j}) - \lambda_i) = qn(1-\lambda_i).$$

接下来，对于每个 $i \in G_\varepsilon$,

$$\lambda_i \geq 1 - \frac{\Lambda}{\varepsilon n} > 1 - \frac{1}{2q},$$

特别地，$\lambda_i \geq 1/2$ 且 $w(L_i) \leq q\Lambda/\varepsilon$。注意，$i \in G_\varepsilon$ 的每个 MMS 物品束若完全包含于 L_i 中，其价格仍至少为 $1/2$。因此，此类物品束的总数至多为

$$|\{j \in [n] : \; B_{i,j} \subseteq L_i\}| \leq 2w(L_i) \leq \frac{2q\Lambda}{\varepsilon}.$$

每个其 他 MMS 物品束 i 至少包含一个价值不低于 $1/q$ 的物品。定义

$$h_i := |\{e \in M : \; v_i(e) \geq 1/q\}| \qquad \text{and} \qquad h_\varepsilon := \min_{i \in G_\varepsilon} h_i.$$

由此可知，$h_\varepsilon \geq n - \frac{2q\Lambda}{\varepsilon}$，且 G_ε 的每个代理人对 $[h_\varepsilon]$ 中每件物品的估值至少为 $1/q$。

取 $h := h_\varepsilon - q + 3$，显然 $qn \geq h \geq n - \frac{2q\Lambda}{\varepsilon} - q + 3$。现在我们将证明共同价格的下界。考虑这些 $q-2$ 物品 $\{h,\ h+1,\ \ldots\ldots,\ h_\varepsilon\}$，注意对于任意$i \in G_\varepsilon$，都有 $v_i(\{h,\ \ldots\ldots,\ h_\varepsilon\}) \geq (q-2)/q = 1-2/q$，因此 $\{h,\ \ldots\ldots,\ h_\varepsilon\}$ 是可接受的。然后，由于$w(h) \geq w(h+1) \geq \ldots \geq w(h_\varepsilon)$，并利用 $\lambda_i \geq 1-2/q$ 对于 $i \in G_\varepsilon$，我们得到

$$(q-2) \cdot w(h) \geq w(\{h,\ldots,h_\varepsilon\}) \geq \lambda_i \geq (q-2)/q.$$

因此，$w(h) \geq 1/q$，这意味着对于每个 $e \leq h$，我们也有 $w(e) \geq 1/q$。

最后，我们给出尾部价值的上界。设 $i_\varepsilon \in G_\varepsilon$ 是达到 $h_{i_\varepsilon} = h_\varepsilon$的某个代理人。那么，$\{h_\varepsilon + 1,\ \ldots\ldots,\ m\} = L_{i_\varepsilon}$，且 $w(\{h_\varepsilon + 1,\ \ldots\ldots,\ m\}) \leq qn(1-\lambda_{i_\varepsilon}) \leq q\Lambda/\varepsilon$。

任取一个拥有 $\lambda_i \geq 1/2$ 的代理人 $i \in N$，并将 $\{h_\varepsilon + 1, \ldots, m\}$ 贪心地划分为价值至少为 v_i 的子捆绑。也就是说，我们不断向物品束中添加物品，直到其价值至少达到

$1-2/q$，然后转到下一个物品束，前提是剩余物品的价值至少为 $1-2/q$。显然，除了最后一个子捆绑（如果存在）之外，每个子捆绑都是可接受的，且价值至多为 2。

设 k 为可接受的子捆绑数量。它们的共同价格总额至少为 $k\cdot\lambda_i$，至多为 $w(\{h_\varepsilon+1,\dots,m\})$，因此

$$k\le\frac{w(\{h_\varepsilon+1,\dots,m\})}{\lambda_i}\le 2w(\{h_\varepsilon+1,\dots,m\}).$$

由于剩余物品的总价值小于 1，因此可得

$$v_i(\{h_\varepsilon+1,\dots,m\})\le 2k+1\le 4w(\{h_\varepsilon+1,\dots,m\})+1\le\frac{4q\Lambda}{\varepsilon}+1.$$

最后，$\{h+1,\dots,h_\varepsilon\}$ 恰好包含 $q-3$ 个物品，每个物品的价值至多为 1，因此

$$v_i(\{h+1,\dots,m\})\le v_i(\{h_\varepsilon+1,\dots,m\})+q-3\le\frac{4q\Lambda}{\varepsilon}+q-2.$$

引理得证。 □

回顾 在最优解 (λ^*,w^*) 中，成立 $\Lambda^*=(1-\eta^*)n$。如前所述，

$$\rho(n)>\frac{(1-\eta^*)n}{2}\quad\Longrightarrow\quad\Lambda^*=\sum_{i\in N}(1-\lambda_i^*)=(1-\eta^*)n<2\rho(n),$$

其中我们假设 $\rho(n)\ll n$。然后，如果 w^* 是有序的，根据引理 6.2，对于任意 $\varepsilon>0$，存在一个较大的公共头部 $\{1,\dots,h\}$，使得：1）$[h]$ 中的每件物品的共同价格 w^* 至少为 $1/q$；2）至少有 $(1-\varepsilon)n$ 个代理人（即 G_ε）对 $[h]$ 中的每件物品的估值至少为 $1/q$；3）对于每个满足 $\lambda_i^*\ge 1/2$ 的代理人 $i\in N$，公共尾部 $\{h+1,\dots,m\}$ 的价值都非常小。这将使我们能够成功地利用第 5 节中关于 h 的头部 / 尾部剖面框架。

6.2 配置线性规划的对偶问题

此前我们描述了配置线性规划的最优原始解与对偶解之间的二分关系。现在，我们将使用需求剖面和前缀负载约束来表述相同的思想，从而应用我们的舍入算法 **定理** 5.2 并获得值 $\rho(n)=O(\log^2 n)$，如 第 5 节所述。此外，这将使我们能够获得经过排序的共同价格，从而使 **引理** 6.2 得以应用。这些价格将直接由前缀负载约束上的对偶权重产生，其中每件物品将获得包含它的各个前缀的总权重。然后，我们将利用互补松弛性证明，共同价格实际上编码了最优配置线性规划解中哪些前缀负载约束是紧的，以及哪些约束具有大量剩余容量，可以累积额外需求。

首先，我们将考虑所有可接受捆绑的需求剖面，而不只是 MMS 捆绑（请回想一下，**定理** 5.2 的舍入并未限制我们使用哪些特定的共同配置）。目前还没有头部或尾部，因为它们稍后将由共同价格和**引理** 6.2确定。因此，在**定理** 5.2 的设定中，我们有 $h=m$。

定义 6.2. 对于 $i\in N$ 和 $B\subseteq M$，将诱导需求剖面 $\pi_i(B)$ 定义为

$$\pi_i(B):=\{v_i(e):\ e\in B, v_i(e)>0\}.$$

如果存在某个 $B\in\mathcal{B}_i$，使得 π 对于代理人 i 而言是可接受的 $\pi=\pi_i(B)$。令 $\Pi_i:=\{\pi_i(B):\ B\in\mathcal{B}_i\}$。

定义 6.3。令 $\Pi := \{\varnothing, \perp\} + \bigcup_{i\in N} \Pi_i$。该剖面配置线性规划是

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \eta \\ \text{subject to} \quad & \sum_{\pi\in\Pi_i} x_i(\pi) = 1, && \forall i \in N; \\ & \mathcal{H}(x, \Pi, \ell) \le \eta\ell, && \forall 1 \le \ell \le m; \\ & x_i(\pi) \ge 0, && \forall i \in N, \pi \in \Pi_i. \end{aligned} \tag{P-LP}$$

这里 $\mathcal{H}(x, \Pi, \ell)$ 是第 5 节中的分数 ℓ-前缀负载。我们将每个 x_i 扩展到共享的 Π，方法是令 $x_i(\pi) = 0$ 对于 $\pi \notin \Pi_i$成立，从而使每个代理人在可行解中都能分数地获得一个可接受配置。舍入解可能违反这些条件，并将 $\perp$ 分配给某些代理人。

注意，在（P-LP）的任何可行解中，前缀 0 处的负载始终为 0，因为每个代理人仅在可接受配置上具有非零权重。因此，$\mathcal{H}(x, \Pi, 0) \le 0$ 自动成立。

定理 6.3（配置档线性规划对偶性）。令 η^* 为（*P-LP*）的最优值。那么 $\eta^* \in (0, 1]$, 并且

- 若 $n(1-\eta^*) \ge 2\rho(m, n+m)$，则存在一个 $(1-2/q)$-最大最小份额分配，将 M 分配给 N；
- 否则，存在一个可行解 (λ, w) 使得（*D-LP*）满足 $w(1) \ge \ldots \ge w(m)$，$\lambda_i \in [0, 1]$ 对每个 $i \in N$均成立，且

$$\Lambda := \sum_{i\in N}(1-\lambda_i) < 2\rho(m, n+m),$$

其中 $\rho(h, X) := 8 + 4\log\max\{1, X\} \cdot (1 + \ln h + \ln\max\{1, X\})$ 如定理 *5.2* 。

证明。回想一下，不等式 $\pi_{i,j} = \pi_i(B_{i,j})$ 对于最大最小份额捆绑 $B_{i,j}$ 代理人 $i \in N$。分数配置

$$x_i(\pi) = \frac{|\{j \in [n] : \pi_{i,j} = \pi\}|}{n},$$

可得到（P-LP）的一个可行解，其中 $\eta = 1$。这是通过应用 **引理** 5.4 并结合$d = n$ 得到 $\mathcal{H}(x, \Pi, \ell) \le \ell$ 对所有 $0 \le \ell \le m$成立。然后，若 x^* 是（P-LP）的最优解，且其价值为 η^*，则有 $\eta^* \le 1$。反过来，每个可接受配置都非空，因此任意可行解都满足

$$\mathcal{H}(x, \Pi, m) = \sum_{i\in N}\sum_{\pi\in\Pi_i} x_i(\pi) \cdot |\pi| \ge n,$$

因此 $\eta^* \ge n/m > 0$。

注意，我们可以选择 x^*，其 $n+m$ 个坐标为正；只需取 x^*，它是 (P-LP) 的基本可行解，因为该线性规划中有 $n+m$ 个约束。

首先假设 $n(1-\eta^*) \ge 2\rho(m, n+m)$。这种情形本质上沿用了第 5 节中的论证和**定理**5.1的证明：每个前缀 $0 \le \ell \le m$ 的分数负载总量至多为 $\eta^*\ell$，因此仍有足够的价值分配给在舍入**定理**5.2时被省略的代理人。

具体而言，对解 x^*应用**定理**5.2中的舍入方法 Π（将其视为共享配置上的分数配置$x_i^*(\pi) = 0$，并对 $\pi \notin \Pi_i$扩展 $h = m$）。每个配置的大小至多为 m，而 X^* 中严格分数坐标的数量至多为 $x^*\, n + m$。我们得到整数配置 y，使得$\mathcal{I}(y, \Pi) \ge n - \rho(m, n+m)$，并且

$$\mathcal{H}(y, \Pi, \ell) \le \mathcal{H}(x^*, \Pi, \ell) \le \eta^*\ell, \qquad \forall 0 \le \ell \le m.$$

舍入可能会将 $\perp$ 分配给部分代理人，但对于每个 $\pi \in \Pi\setminus\perp$，只要 $y_i(\pi) = 1$ 对代理人 $i \in N$ 而言必须是可接受的，即 $\pi \in \Pi_i$。请注意，这些不一定是原始的最大最小份额配置，因为我们对最优解 x^*进行舍入，而不只是对任意可行解进行舍入。

令 $I \subseteq N$ 为舍入所选出的代理人，即 $I = \{i \in N : y_i(\perp) = 0\}$。应用**推论** 5.2，我们使用集合 $E \subseteq M$ 中的不同物品为所有代理人 I 进行分配，使其满足

$$|E \cap [\ell]| \leq \eta^* \ell, \qquad \forall 0 \leq \ell \leq m.$$

根据**引理**5.1，对于每个 $i \in N$，我们有 $v_i(E) \leq \eta^* n$。被省略的代理人数量至多为

$$\rho(m, n+m) \leq \frac{(1-\eta^*)n}{2},$$

因此应用**推论**5.1，我们得到一个将 $M - E$ 分配给 $N - I$ 的分配，使得每个代理人$u \in N - I$ 都能获得价值至少为 1 的物品束。通过舍入选出的代理人可获得价值至少为 $1 - 2/q$的物品束，从而得到一个$1 - 2/q$-最大最小份额分配，将 M 分配给 N。

现在假设 $n(1-\eta^*) < 2\rho(m, n+m)$。为了构造（D-LP）的可行解，我们首先考虑（P-LP）的对偶问题。在该对偶问题中，我们为每个前缀负载约束 $1 \leq \ell \leq m$关联一个乘子 ω_ℓ/n，并为每个代理人权重约束$i \in N$关联一个乘子 λ_i/n。经过重新缩放后，我们得到以下线性规划。

$$\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & \frac{1}{n}\sum_{i \in N} \lambda_i \\
\text{subject to} \quad & \sum_{\ell=1}^{m} \omega_\ell \cdot \mathcal{P}_i(\pi, \ell) \geq \lambda_i, \quad \forall i \in N, \pi \in \Pi_i; \\
& \sum_{\ell=1}^{m} \omega_\ell \cdot \ell = n; \\
& \omega_\ell \geq 0, \qquad\qquad \forall 1 \leq \ell \leq m.
\end{aligned} \tag{DP-LP}$$

变量 ω_ℓ对应于前缀 $\{1, \ldots, \ell\}$ 中一个负载单位的价格。若为了满足配置π，代理人 i需要从 $\{1, \ldots, \ell\}$ 中使用 $\mathrm{P}_i(\pi, \ell)$ 个物品，那么该代理人使用前缀 ℓ 必须支付$\omega_\ell \cdot \mathrm{P}_i(\pi, \ell)$ 的总价格。因此，代理人 i 满足配置 π 的总价格为$\sum_{\ell=1}^{m} \omega_\ell \cdot \mathrm{P}_i(\pi, \ell)$。正如我们将从互补松弛中看到的那样，如果在最优解中有$\omega_\ell^* > 0$，那么 $\mathrm{H}(x^*, \Pi, \ell) = \eta^* \ell$，也就是说，前缀 ℓ处的分数负载已达上限，没有剩余容量。类似地，如果 $\mathrm{H}(x^*, \Pi, \ell) < \eta^* \ell$，那么 $\omega_\ell^* = 0$，使用前缀 ℓ就“免费”。

对偶负载价格自然地定义了公共物品价格。每个物品 $e \in M$ 恰好属于以下前缀 $\{1, \ldots, \ell\}$ 当且仅当 $\ell \geq e$。那么，如果我们想使用物品 e，就会在每个前缀 $\ell \geq e$中使用一个负载单位，并且必须为每个单位支付 ω_ℓ。因此，对于 (λ^*, ω^*) 这一（DP-LP）的最优对偶解，我们定义

$$w^*(e) := \sum_{\ell=e}^{m} \omega_\ell^*,$$

显然，w^* 具有加性，并且自动满足 $w^*(1) \geq \ldots \geq w^*(m) \geq 0$，且

$$w^*(M) = \sum_{e=1}^{m} \sum_{\ell=e}^{m} \omega_\ell^* = \sum_{\ell=1}^{m} \omega_\ell^* \cdot \ell = n.$$

该构造反映了每个需求分布对各个前缀负载的贡献。对于代理人 $i \in N$ 的配置$\pi \in \Pi_i$，将其总对偶负载价格定义为

$$\Lambda_i^*(\pi) := \sum_{\ell=1}^{m} \omega_\ell^* \cdot \mathcal{P}_i(\pi, \ell).$$

需求 α 带有断点 $m_i(\alpha)$，会为每个前缀 $\ell \geq m_i(\alpha)$贡献一个负载单位，因此该断点的对偶价格为 $w^*(m_i(\alpha))$。因此，

$$\Lambda_i^*(\pi) = \sum_{\ell=1}^{m} \omega_\ell^* \cdot |\{\alpha \in \pi : m_i(\alpha) \leq \ell\}| = \sum_{\alpha \in \pi} w^*(m_i(\alpha)).$$

特别地，对于（η^*，x^*）的最优解（P-LP），分数对偶负载价格总和为

$$\sum_{i\in N}\sum_{\pi\in\Pi_i} x_i^*(\pi)\cdot\Lambda_i^*(\pi)=\sum_{\ell=1}^{m}\omega_\ell^*\cdot\mathcal{H}(x^*,\Pi,\ell).$$

根据强对偶性，

$$\sum_{i\in N}\lambda_i^*=n\eta^*,$$

并且在最优解 $(\lambda^*,\ \omega^*)$ 处，我们必须有

$$\lambda_i^*=\min_{\pi\in\Pi_i}\Lambda_i^*(\pi)\geq 0.$$

因此，

$$n\eta^*=\sum_{i\in N}\lambda_i^*\leq\sum_{i\in N}\sum_{\pi\in\Pi_i}x_i^*(\pi)\cdot\Lambda_i^*(\pi)=\sum_{\ell=1}^{m}\omega_\ell^*\cdot\mathcal{H}(x^*,\Pi,\ell)\leq\eta^*\sum_{\ell=1}^{m}\omega_\ell^*\cdot\ell=\eta^*n,$$

强制中文
日韩

$$\sum_{\ell=1}^{m}\omega_\ell^*\cdot(\eta^*\ell-\mathcal{H}(x^*,\Pi,\ell))=0.$$

这正是互补松弛：由于所有加数均非负，$\omega_\ell^*>0$迫使 $\mathcal{H}(x^*,\ \Pi,\ \ell)=\eta^*\ell$，因此我们只对分数负载达到紧约束的前缀支付正价格。此外，根据 w^* 的定义，对于每个 $1\leq\ell\leq m$（其中 $w^*(m+1)=0$），我们有

$$w^*(\ell)-w^*(\ell+1)=\omega_\ell^*.$$

因此，只有当物品经过一个紧的前缀约束时，其共同价格才会严格下降。反过来，如果前缀约束不紧，物品价格就保持不变。

在讨论了 w^* 背后的直觉后，我们终于可以证明 (λ^*,w^*) 是 (D-LP) 的一个可行解。任取一个代理人 $i\in N$ 及其可接受物品束 $B\in\mathcal{B}_i$，根据定义 $\pi_i(B)\in\Pi_i$。此外，对于每个 $e\in B$ 满足 $v_i(e)>0$ 的 $m_i(v_i(e))\geq e$。因此，

$$\lambda_i^*\leq\Lambda_i^*(\pi_i(B))=\sum_{\substack{e\in B\\ v_i(e)>0}}w^*(m_i(v_i(e)))\leq\sum_{\substack{e\in B\\ v_i(e)>0}}w^*(e)\leq w^*(B).$$

因此，对于 i 的每个可接受物品束，其价格至少为 λ_i^*，所以 (λ^*,w^*) 是可行的。此外，

$$n\lambda_i^*\leq\sum_{j=1}^{n}w^*(B_{i,j})=w^*(M)=n,$$

因此，对于每个代理人 $i\in N$，$\lambda_i^*\in[0,1]$。最后，最优性要求

$$\Lambda^*:=\sum_{i\in N}(1-\lambda_i^*)=n-\sum_{i\in N}\lambda_i^*=n(1-\eta^*)<2\rho(m,n+m).$$

□

App结合 **定理** 6.3 和 **引理** 6.2 以及 $\varepsilon=1/4$，我们得到以下推论 .

推论 *6.1*。设 η^* 为 *(P-LP)* 的最优值。若 $n(1-\eta^*)<2\rho(m,n+m)$，则存在满足 $w(1)\geq\ldots\geq w(m)\geq 0$ 的共同可加价格 w，以及对于 $i\in N$的数值 $\lambda_i\in[0,1]$，还有一个整数 $h\in\{0,1,\ldots,m\}$，具备以下性质。设 $\Lambda:=\sum_{i\in N}(1-\lambda_i)$，并且

$$G:=\{i\in N:\ n(1-\lambda_i)\leq 4\Lambda\}.$$

那么 $\Lambda<2\rho(m,n+m)$，整数 h 满足 $qn\geq h\geq n-q(8\Lambda+1)$，并且

- $w(M) = n$，且每个 $B \subseteq M$ 代理人可接受的物品束 $i \in N$ 都满足 $w(B) \geq \lambda_i$；
- 对于每件物品 $e \in \{1, \ldots, h\}$，都有 $w(e) \geq 1/q$；
- $|G| \geq 3n/4$，并且对于每个代理人 $i \in G$ 和物品 $e \in \{1, \ldots, h\}$，都有 $v_i(e) \geq 1/q$；
- 对于每个满足 $\lambda_i \geq 1/2$ 的代理人 $i \in N$，都有

$$T_i := v_i(\{h+1, \ldots, m\}) \leq q(16\Lambda + 1),$$

如果还满足 $n \geq q^2(16\Lambda + 1)$，那么 $G \subseteq \{i \in N : \lambda_i \geq 1/2\}$，并且对于每个满足 $\lambda_i \geq 1/2$的 $i \in N$，

$$v_i(\{1, \ldots, h\}) \geq n - q(16\Lambda + 1).$$

从现在起，假设 $n(1-\eta^*) < 2\rho(m, n+m)$，即 **定理** 6.3 未能给出产生一种分配的充分条件，使每个代理人的价值至少为 $1 - 2/q$。因此，我们没有进行舍入，而是得到了价格 w 和数值 λ_i，以及公共头部 h。

6.3 头部贫乏代理人的预分配

推论 6.1 中的公共头部 $[h]$ 对于**推论**6.1 包含了每位代理人几乎所有的价值 $i \in N$其中 $\lambda_i \geq 1/2$。此外，对于每位代理人 $i \in G$，我们将其称为优质代理人，每件物品 $e \leq h$ 单独的价值至少为 $1/q$。

我们希望接下来只考虑那些对公共头部 $[h]$ 估值很高的代理人。我们将通过向所有对 $[h]$ 估值较低的代理人预分配一小部分尾部物品 $\{h+1, \ldots, m\}$ 来实现这一点，从而为每位这样的代理人提供一个可接受捆绑。唯一的问题是，究竟该如何定义“很高”和“较低”，才能使这种方法成立。

根据推论 6.1，对于每个满足 $\lambda_i \geq 1/2$ 的 $i \in N$，都有 $v_i([h]) \geq n - q(16\Lambda + 1)$（当 n 足够大时），并且很容易看出，不满足此上界的代理人数至多为 2Λ，也就是说数量很少。然而，这个下界过强，因为我们可能无法在保持所用物品子集足够小的同时，保证每位估值较低的代理人获得足够的尾部价值。因此，我们将称$i \in N$ 在 $v_i([h]) \geq (1 - 1/q)n$时对 $[h]$ 的估值很高，这是一个稍弱的上界。注意，对于所有满足 $\lambda_i \geq 1/2$ 的 i，只要 $n \geq q^2(16\Lambda + 1)$，该条件就自动成立。

定义 6.4。若代理人 $u \in N$ 头部贫乏，则 $v_u([h]) < (1 - 1/q)n$。用 $U =$ 表示头部贫乏代理人的$u \in N$集合：$v_u([h]) < (1 - 1/q)n$。

观察 6.1。如果 $n \geq q^2(16\Lambda + 1)$，则 $\lambda_u < 1/2$ 对每个头部贫乏代理人 $u \in U$均成立。特别地，我们有 $G \cap U = \varnothing$ 以及 $|U| \leq 2\Lambda$。

证明。当 $n \geq q^2(16\Lambda + 1)$ 时，每个 $u \in U$ 都满足

$$T_u = n - v_u([h]) > n/q \geq q(16\Lambda + 1),$$

这意味着 $\lambda_u < 1/2$ 根据 **推论** 6.1。因此，$G \cap U = \varnothing$ 并且

$$\Lambda = \sum_{i \in N}(1 - \lambda_i) \geq \sum_{u \in U}(1 - \lambda_u) \geq |U|/2.$$

□

我们将使用公共尾部物品的一个子集 预分配所有头部贫乏代理人 $U\{h+1, \ldots\ldots, m\}$。我们将以这样的方式选择该子集：使每个带有 $\lambda_i \geq 1/2$ 的剩余代理人损失的价值都很少，即至多为 $1/(2q^2)$。完成后，我们将移除所有预分配代理及其物品，并仅使用剩余物品完成对剩余代理人的分配。

引理 6.3。 设 $n \geq \max\{q^2(16\Lambda+1),\ 8q^4\Lambda(16\Lambda+1),\ 2q\}$。存在关于 $u \in U$ 的不相交集合 $D_u \subseteq \{h+1, \ldots, m\}$，使得对于每个头部贫乏代理人 $u \in U$，都有 $v_u(D_u) \geq 1$，并且

$$D := \bigcup_{u \in U} D_u$$

对每个代理人 $i \in N$，当 $\lambda_i \geq 1/2$ 时，均满足 $v_i(D) \leq 1/(2q^2)$。

证明。 这里的关键直觉是，如果代理人 $u \in U$ 对头部 $[h]$ 的估值较低，那么代理人 u的价值中必有相当一部分来自尾部物品 $\{h+1, \ldots, m\}$。我们将利用这一点，通过使用一个较小的尾部物品稀疏子集，为 U 构造一个分配。我们将采用与引理 5.3 的尾部概况构造类似的方法，但不引入额外的尾部概况术语。

如果 $|U| = 0$，则对所有 $u \in U$ 取 $D_u = \varnothing$，问题就解决了。否则，令

$$L := \left\lfloor \frac{n}{2q} \right\rfloor,$$

根据假设 $L \geq 2q^3|U|(16\Lambda+1)$。我们将尾部 $\{h+1, \ldots, m\}$ 划分为大小均为 $|B_k| = L$ 的连续区块 $B_1, \ldots, B_K$，另有一个大小小于 L 的区块 B_{K+1}；区块数 K 取适当的值。至少存在两个完整区块，因为 $m - h \geq T_u$ 且

$$T_u = n - v_u([h]) > n/q \geq 2L.$$

对于每个 $k \in [K]$，我们取块 B_k 中最后 $|U|$件物品，并将它们分配给代理人 U，使每个 $u \in U$ 恰好从 B_k获得其中一件物品。令 $e_{u,\,k}$ 表示从 B_k分配给代理人 $u \in U$ 的物品，并令 $D_u := \{e_{u,\,k} : k \in [K]\}$。

显然，物品束 D_u, $u \in U$ 互不相交。为说明 $v_u(D_u) \geq 1$，我们注意到，对于每个$k \in [K]$，B_{k+1} 中的每件物品的价值都至多为从 B_k分配的物品 $e_{u,\,k}$ 的价值 $v_u(e_{u,\,k})$。因此，

$$v_u(B_{k+1}) \leq L \cdot v_u(e_{u,k}), \qquad \forall k \in [K].$$

对所有 $k \in [K]$求和，得到

$$v_u(D_u) \geq \frac{1}{L}\sum_{k=1}^{K} v_u(B_{k+1}) = \frac{T_u - v_u(B_1)}{L} \geq \frac{T_u - L}{L} \geq 1.$$

接下来，对于任意代理人 $i \in N$，考虑被 $D = \cup_{u \in U} D_u$移除的价值。在每个完整块$k \in [K]$中，集合 $D \cap B_k$ 由最后 $|U|$ 件物品组成。由于 $B_k - D$ 中的每件物品的价值至少等于 $D \cap B_k$中物品的平均价值，因此我们有

$$v_i(D \cap B_k) \leq \frac{|U|}{L} \cdot v_i(B_k).$$

对所有 $k \in [K]$ 求和，得到

$$v_i(D) \leq \frac{|U|}{L}\sum_{k=1}^{K} v_i(B_k) \leq \frac{|U|}{L} \cdot T_i.$$

最后，对于每个 $i \in N$ 满足 $\lambda_i \geq 1/2$的情况，**推论**6.1 给出

$$v_i(D) \leq \frac{|U|}{L} \cdot T_i \leq \frac{|U|q(16\Lambda+1)}{L} \leq \frac{1}{2q^2}.$$

□

假设代理人数量 n 足够大，我们将**引理**6.3 应用于头部贫乏代理人的集合 U，并得到一个分配$\{D_u\}_{u\in U}$。此时，头部贫乏代理人 U 的处理已经完成：每个 $u \in U$ 都会保留其获得的物品束 D_u，直至算法最终结束，并将其作为最终分配的一部分。因此，我们将从 U 中移除代理人 N，并从 $D = \bigcup_{u\in U} D_u$ 中移除物品 M，然后继续构造一个分配，使每个剩余代理人的价值至少为 $1 - 2/q$。

观察　　对于每个代理人 $i \in N \setminus U$，其拥有 MMS 捆绑 $B_{i,j}$, $j \in [n]$，如果 $\lambda_i \geq 1/2$ 那么

$$v_i(B_{i,j} \setminus D) \geq v_i(B_{i,j}) - v_i(D) \geq 1 - \frac{1}{2q^2}.$$

对于每个代理人 $i \in N \setminus U$，将其 MMS 捆绑 $B_{i,j}$, $j \in [n]$ 替换为 $B_{i,j} \setminus D$，并重新标记$B_{i,j} \setminus D \to B_{i,j}$。此外，我们还将按顺序重新标记剩余代理 $N - U \to N$ 和剩余物品 $M \setminus D \to M$，同时保留共同价格 $w(e)$ 对于 $e \in M$。

从现在起，N 表示 $d := |N| = n - |U| \geq n - 2\Lambda$ 剩余代理（下界源于**观察** 6.1），M 表示 $m = |M| \leq \Gamma n$ 剩余物品。每个剩余 d 代理人仍有一个个人划分 $\{B_{i,1}, \ldots, B_{i,n}\}$，将 M 划分为 n 部分。注意，其中一些部分的价值可能非常低，甚至可能为空。

注意，我们**不会**对实例重新归一化，我们的目标仍然是让每个剩余代理获得 $i \in N$个 v_i价值至少为 $1-2/q$的物品束。根据**引理**6.3，公共头部$\{1, \ldots, h\}$仍完全包含在 M中，并且根据 U的定义，现在对每一个 $i \in N$，都有

$$v_i([h]) \geq \left(1 - \frac{1}{q}\right) n.$$

根据**观察**6.1 $G \cap U = \varnothing$，因此 $G \subseteq N$ 保持不变，其头部价值保证也不变。

考虑某个剩余代理 $i \in N$及其“最大最小份额”划分$\{B_{i,1}, \ldots, B_{i,n}\}$，该划分对应 M。根据构造，对每个 $j \in [n]$，都有 $v_i(B_{i,j}) \leq 1$；根据**引理6.3**，如果 $\lambda_i \geq 1/2$，那么

$$1 \geq v_i(B_{i,j}) \geq 1 - \frac{1}{2q^2}, \qquad \forall j \in [n],$$

因此，这些 i中的每个“最大最小份额”物品束都保留了几乎所有原有价值。此外，由于头部$[h]$ 保持不变，根据**推论6.1**，对每个 $i \in N$ 满足 $\lambda_i \geq 1/2$ 的情况，我们都有一个更紧的上界

$$v_i([h]) \geq n - q(16\Lambda + 1).$$

由于每个优质代理人 $i \in G$ 肯定至少拥有 n 个非空束，因此剩余物品的数量满足 $m \geq n$。如前所述，删除物品也会保留**定理** 6.2的原始上界，因此 $m \leq \Gamma n$。

接下来，共同价格 w保持其顺序 $w(1) \geq \ldots \geq w(m)$，相对于物品而言为 M。对于剩余物品的每个子集 $B \subseteq M$，B 中的物品均不属于移除集合 D。因此，每个 $B \subseteq M$ 的价值都完全保持不变，价格也是如此。所以，对于每个 $B \subseteq M$，

$$v_i(B) \geq 1 - \frac{2}{q} \quad \Longrightarrow \quad w(B) \geq \lambda_i.$$

由于物品已被移除，$w(M) \leq n$，也就是说，不再需要等式成立。最后，我们有

$$\sum_{i\in N}(1 - \lambda_i) \leq \Lambda \leq 2\rho(\Gamma n, (\Gamma + 1)n),$$

通过使用**推论** 6.1 并代入 Γn 关于原始物品数量的上界。结合上述所有推导，我们得到以下推论的证明。

推论 6.2。假设 $n \geq$ 最大值$\{q^2(16\Lambda + 1)\ \ 8q^4\Lambda(16\Lambda + 1)\ \ + 2q\}$，其中 Λ 沿用 推论 *6.1*中的原有含义。在使用物品 D预分配头部贫乏代理人 U 后，包含代理人 N 和物品 $M = [m]$ 的剩余实例具有以下性质。

- 对于 $d := |N|$ 成立 $n \geq d \geq n - 2\Lambda$；对于 $m := |M|$ 成立 $n \leq m \leq \Gamma n$。
- 公共头部 h 满足 $qn \geq h \geq n - q(8\Lambda + 1)$，且对每个 $i \in N$，都有

$$v_i([h]) \geq \left(1 - \frac{1}{q}\right) n.$$

- 对于每个代理人 $i \in N$，都有一个 M 的划分 $\{B_{i,1}, \ldots, B_{i,n}\}$，其中 $v_i(B_{i,j}) \in [0,1]$ 对所有 $j \in [n]$ 均成立，且某些物品束 $B_{i,j}$ 可能为空。若进一步有 $\lambda_i \geq 1/2$，则

$$\forall j \in [n] : \; v_i(B_{i,j}) \geq 1 - \frac{1}{2q^2}, \qquad and \qquad v_i([h]) \geq n - q(16\Lambda + 1).$$

- 优质代理人集合 $G = \{i \in N : \; n(1 - \lambda_i) \leq 4\Lambda\}$ 保持不变。特别地，$|G| \geq 3n/4$, $G \subseteq \{i \in N : \; \lambda_i \geq 1/2\}$，且对每个 $i \in G$，都有

$$\forall e \leq h : \; v_i(e) \geq \frac{1}{q}.$$

- 共同价格满足 $w(1) \geq \ldots \geq w(m) \geq 0$，以及 $w(e) \geq 1/q$ 对所有 $e \leq h$ 均成立。此外，$w(M) \leq n$，且对每个 $i \in N$ 和 $B \subseteq M$，

$$v_i(B) \geq 1 - \frac{2}{q} \quad \Longrightarrow \quad w(B) \geq \lambda_i.$$

- 对于每个 $i \in N$，我们都有 $\lambda_i \in [0,1]$，并且 $\sum_{i \in N} (1 - \lambda_i) \leq \Lambda \leq 2\rho (\Gamma n, \; (\Gamma + 1) n)$。

我们的目标现在是证明以下定理。

定理 6.4。设 $\Gamma \geq 1$ 和 $q \geq 9$ 为整数。存在 $n(\Gamma, q)$，使得对于每个$n \geq n(\Gamma, q)$，以下结论成立。考虑一个包含 m 个物品 m 和 d 个代理人N 的公平分配实例，该实例满足推论 6.2，其中对于每个 $i \in N$，估值函数 v_i 都是加性的。则存在一个将 M分配给 N的分配 $(B_1, \ldots, B_d)$，使得对于每个代理人 $i \in N$，我们都有 $v_i(B_i) \geq 1 - 2/q$。此外，只需取 $n(\Gamma, q)$ 作为

$$n(\Gamma, q) = 2^{4q^2 \log^2(2q)} \cdot (\log(2\Gamma))^{2q}.$$

容易看出，结合**定理** 6.4与 **推论** 6.2 和**引理** 6.3，我们可以为所有原始代理人得到一个分配，使每个代理人获得价值至少为$1 - 2/q$，从而证明了 **定理** 6.2。

7 分配公共头部物品

现在，我们将重点研究如何将剩余 m 物品 M 分配给剩余的 $d = |N|$代理人 N，使每位代理人 $i \in N$获得的物品束价值至少为 $1 - 2/q$。我们将采用与第 5 节中所用方法类似的方法。也就是说，我们希望找到一个配置集合$\Pi_N = \{\pi_i\}_{i \in N}$，适用于所有代理人，使得对每个 $i \in N$，都有 $v(\pi_i) \geq 1 - 2/q$；并且对每个前缀 $0 \leq \ell \leq m$，都有

$$\mathcal{P}(\Pi_N, \ell) \leq \ell.$$

然后，我们可以应用**引理**3.1，并为所有 $i \in N$分配价值至少为 $1 - 2/q$的不相交物品束。

和之前一样，我们首先找到一组 Π_N 头部配置 $\pi_i \in \Pi_N$，然后用一组尾部配置 $\psi_i \in \Psi_N$将其补全为完整配置，使得对于每个 $i \in N$，我们都有

$v(\pi_i) + v(\psi_i) \geq 1 - 2/q$，且代理人 i 获得 $\{\pi_i, \psi_i\}$。主要困难在于，在**推论** 6.2的条件下，尽管所有代理人 $i \in N$ 共享一个他们都高度重视的公共头部 h，但并非所有物品 $e \leq h$ 对每个代理人来说都足够有价值。因此，头部配置与尾部配置之间的区别变得有些模糊。

在 **定理** 5.1 的证明中，代理人 $i \in N$ 拥有多少种不同的头部配置，以及这些配置可以有多大，对我们而言都无关紧要。每个头部需求基本上可以取 $0, 1]$, 中的任意值，并且一个头部配置中最多可以有 $O(n^2)$ 个不同的需求。然而，对于 **定理** 6.4 的证明而言，以下两点对我们至关重要：1）每个头部配置的大小至多为常数；2）初始舍入中使用的所有头部配置，其需求均来自某个有限集合，该集合的大小仅取决于 q。之后，我们可以以受控的方式将它们替换为更小的需求。

我们通过将高价值物品向下舍入为 $(1 - 1/q)$ 的幂来实现这一点。

定义 7.1。 对于整数 $q > 0$，所有可能的取整后的高需求 组成的集合 Q 为

$$\mathcal{Q} = \left\{\frac{1}{q}\right\} \cup \left\{\left(1 - \frac{1}{q}\right)^k : k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \left(1 - \frac{1}{q}\right)^k > \frac{1}{q}\right\}.$$

也就是说，舍入后的高需求 是一个正值 $\alpha \in (0, 1]$，满足 $\alpha = 1/q$ 或 $\alpha = (1 - 1/q)^k$，其中整数幂 k 满足$(1 - 1/q)^k > 1/q$。舍入后的高部剖面 是由舍入后的高需求组成的有限多重集 $\pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{|\pi|}\}$。

类似地，低需求是一个正值 $\sigma \in (0, 1]$ 使得 $\sigma < 1/q$。

我们有时会省略“舍入”一词，而将这类配置直接称为高配置。记 $Q := |\mathcal{Q}|$。显然，

$$Q := |\mathcal{Q}| = 1 + \left\lceil \frac{\ln q}{-\ln(1 - 1/q)} \right\rceil \leq 2 + q \ln q.$$

注意，对于每个代理人 $i \in N$，满足 $v_i(B) \leq 1$ 的物品束 $B \subseteq M$ 至多包含 q件价值至少为 $1/q$ 的物品。因此，由这样的 B 诱导的高配置大小至多为 q。

定义 7.2。 对于 $t \in [0, 1]$，定义舍入函数 g 为

$$g(t) := \begin{cases} t, & t < 1/q; \\ \max\{\alpha \in \mathcal{Q} : t \geq \alpha\}, & t \geq 1/q. \end{cases}$$

注意，对于每个 $t \in [0, 1]$，都有

$$t \geq g(t) \geq \left(1 - \frac{1}{q}\right) t.$$

对于每个代理人 $i \in N$，其舍入估值为 $\tilde{v}_i$，使得

$$\tilde{v}_i(e) := g(v_i(e)).$$

It 容易看出，对于每个 $\alpha \in Q$，我们都有 $\tilde{v}_i(e) \geq \alpha \Longleftrightarrow v_i(e) \geq \alpha$，因此 re

$$|\{e \in M : \tilde{v}_i(e) \geq \alpha\}| = |\{e \in M : v_i(e) \geq \alpha\}| = m_i(\alpha).$$

因此，相对于舍入后的 $\tilde{v}_i$，关于 $\alpha \in Q$ 的断点与关于 v_i 的原始断点完全相同。

观察 7.1。 对于每个代理人 $i \in N$ 均有

$$\tilde{v}_i([h]) \geq \left(1 - \frac{1}{q}\right) v_i([h]) \geq \left(1 - \frac{1}{q}\right)^2 n.$$

对于每个 每个优质代理人 $i \in G$，$\tilde{v}_i(e) \in Q$ 对于每个 $e \leq h$ 都成立，因此 $\tilde{v}_i(e) \geq 1/q$ 对所有 $e \leq h$ 都成立。

7.1 头部划分和缓冲集

在第 5 节以及**定理**5.1的证明中，为了将一个集合 Π_N 中的头部配置同时与$\{1、\ldots\ldots、\ h\}$补充为完整的尾部配置 Ψ_N，我们需要确保 Π_N 在每个前缀处都有足够的松弛量。

目前，我们完全不考虑尾部配置的松弛量 Ψ_N，而是尝试至少找出一个仅由头部配置组成的集合 $\Pi_N = \{\pi_i\}_{i\in N}$，使其满足前缀负载约束。也就是说，我们希望对每个 $0 \le \ell \le m$,

$$\sum_{i\in N} \mathcal{P}_i(\pi_i, \ell) \le \ell.$$

此外，我们只考虑高头部配置，即对于每个 $i \in N$，我们希望对每个需求 $\alpha \in \pi_i$ 都有 $\alpha \in \mathcal{Q}$。

遵循第 5 节 的方法以及**定理** 5.1的证明，对于每个代理人 $i \in N$，我们可以定义 MMS 头部配置 $\pi_{i,\ j}, j \in [n]$，同时将物品价值舍入到 $\mathcal{Q}$:

$$\pi_{i,j} = \{\tilde{v}_i(e) : e \in B_{i,j} \cap [h]\}.$$

当然，并非每个物品 $e \le h$ 对每个代理人 $i \in N$都有 $\tilde{v}_i(e) \ge 1/q$，但现在暂且假设 $\pi_{i,\ j}$ 的所有需求都属于 $\mathcal{Q}$，即每个 $\pi_{i,\ j}$ 都是高配置。于是，取公共配置集

$$\Pi := \{\varnothing, \perp\} \cup \bigcup_{i\in N} \{\pi_{i,j} : j \in [n]\},$$

我们可以考虑分数配置（x，Π），其中对于 $\pi \in \Pi \setminus \perp$，我们为每个代理人 $i \in N$ 设定

$$x_i(\pi) = \frac{|\{j \in [n] : \pi_{i,j} = \pi\}|}{n},$$

然后对 (x，Π) 应用 **定理** 5.2 中的舍入方法，以得到某个整数配置集合。

遗憾的是，仅靠舍入本身还不够好。尽管如 第6节 所述，它只会使一小部分代理人没有配置，但它无法提供足够有力的保证，确保每个未分配的代理人都能获得可接受的物品束。与 第 5 节不同，我们希望为 π_i 每一位代理人 $i \in N$分配某个头部配置。

7.1.1 E/S-公共头部的划分

我们的方法正是对第 3 节的扩展。设 (x，Π) 是定义在 Π 上的某个分数配置集合。假设将 (x，Π) 舍入为某个整数配置集合 (y，Π) 后，我们得到一个较大的代理人子集 $I \subseteq N$，其中的代理人已分配整数配置$\Pi_I = \{\pi_i\}_{i\in I}$，且每个 π_i 都是取整头部档案 $\pi_i = \pi_{i,\ j}$，对应于某个 $j \in [n]$。

我们希望选择一个较大的代理人子集 $A \subseteq I$，让他们保留已分配配置，并为每个 $u \in N \setminus A$ 提供某个新配置 π_u（不一定具有 $\pi_{u,j}$ 的形式，其中某个 $j \in [n]$，甚至不一定是高配置），使得对于每个 $0 \le \ell \le m$,

$$\sum_{i\in A} \mathcal{P}_i(\pi_i, \ell) + \sum_{u\in N\setminus A} \mathcal{P}_u(\pi_u, \ell) \le \ell.$$

与第 3 节类似，我们将把头部物品 $[h]$ 划分为 $[h] = E \sqcup S$，其中集合 E包含大多数头部物品，而集合 S 非常小。我们以完全相同的方式定义分解为 E-和S-子配置。

定义 7.3。 考虑任意的头部划分 $[h] = E \sqcup S$。需求分布 π 的 E/S-分解是由一对子配置 $\{\pi^E, \pi^S\}$ 构成的，使得

$$\pi = \pi^E \uplus \pi^S,$$

其中 $\uplus$ 是带重数的并集。π^E 中的需求被指定为只能由 E 中的物品满足，而 π^S 中的需求被指定为只能由 S 中的物品满足。

注记 7.1。请注意，由于我们处理的是需求剖面而非实际捆绑包，因此实际上，子配置 π^E、π^S 中的每项需求也可能由 E、S 之外的许多物品满足，甚至可能由头部 $[h]$ 之外的物品满足。然而，就该方法而言，我们的意图是尝试将 π^E、π^S 限制为仅使用其对应集合 E、S 中的物品，并找出一组适当的子剖面对，使其确实能够分别仅由 E、S 满足。

代理人 $A, N \setminus A$ 的配置 $\{\pi_i\}_{i\in A}$、$\pi_u\}^{u\in N\setminus A}$ 分别满足所有前缀负载约束的充分条件是：这些配置中的每一个都具有某种 E/S-分解，使得对于每个 $0 \le \ell \le m$，都有

$$\sum_{i\in A} \mathcal{P}_i(\pi_i^E, \ell) + \sum_{u\in N\setminus A} \mathcal{P}_u(\pi_u^E, \ell) \le |E \cap [\ell]|; \tag{E}$$

$$\sum_{i\in A} \mathcal{P}_i(\pi_i^S, \ell) + \sum_{u\in N\setminus A} \mathcal{P}_u(\pi_u^S, \ell) \le |S \cap [\ell]|. \tag{S}$$

事实上，$\mathcal{P}_i(\pi, \ell) = \mathcal{P}_i(\pi^E, \ell) + \mathcal{P}_i(\pi^S, \ell)$，对于 S同样成立，因此 (E) 和 (S) 一起推出

$$\sum_{i\in A} \mathcal{P}_i(\pi_i, \ell) + \sum_{u\in N\setminus A} \mathcal{P}_u(\pi_u, \ell) \le |E \cap [\ell]| + |S \cap [\ell] = \min\{h, \ell\} \le \ell.$$

类似于第 3 节，我们可以给出其上界

$$\sum_{u\in N\setminus A} \mathcal{P}_u(\pi_u^E, \ell) \le \sum_{u\in N\setminus A} |\pi_u|,$$

由于 $A \subseteq I$，以 I 的总负载对 A 的总负载给出上界，可得

$$\sum_{i\in A} \mathcal{P}_i(\pi_i^E, \ell) + \sum_{u\in N\setminus A} \mathcal{P}_u(\pi_u^E, \ell) \le \sum_{i\in I} \mathcal{P}_i(\pi_i^E, \ell) + \sum_{u\in N\setminus A} |\pi_u|.$$

因此，要使 (E) 成立，只要存在某个整数 $\nu \ge 1$，使旧配置 π_i 对于 $i \in I$ 以及新配置 π_u 对于 $u \in N \setminus A$ 满足

$$\sum_{i\in I} \mathcal{P}_i(\pi_i^E, \ell) \le |E \cap [\ell]| - \frac{\nu}{q}, \qquad \forall 0 \le \ell \le m \tag{E-ν}$$

$$\sum_{u\in N\setminus A} |\pi_u| \le \frac{\nu}{q}. \tag{A-ν}$$

再次强调，我们不能期待一致松弛量 (E-ν) 在每个前缀 $0 \le \ell \le m$都成立，因此我们将通过构造一个小型缓冲集 $F \subseteq E$来缓解这一问题。

7.1.2 缓冲集构造

与第 3 节中一样，我们的集合 $S \subseteq [h]$ 将具有以下形式

$$S = \{a_1, a_1 + 1, \dots, b_1\} \cup \dots \cup \{a_t, a_t + 1, \dots, b_t\},$$

其中，每个 $[a_s, b_s]$ （ $s \in [t]$ ）都是来自 S 的一个极大连续物品区间。我们将有$t = O(q \log q)$，且每个连续区间的长度以及 S 的总大小都至多为 $O_{\Gamma,\, q}(\log^2 n)$。此外，还将满足 $a_1 = 1$ 和 $b_t = h$，即 S 包含公共头部 $[h]$ 的某个前缀$\{1, \dots, b_1\}$ 以及某个后缀 $\{a_t, \dots, h\}$。

取 $E = [h] \setminus S$。我们将得到一个由 S 定义的缓冲集 $F \subseteq E$。在每个区间$[a_s, b_s] \subset S$、$s \in [t]$之后，我们再取一个长度为 $\nu = O_{\Gamma,\, q}(\log^2 n)$ 的区间$\{b_s + 1, \dots, b_s + \nu\}$，并

$$F = E \cap (\{b_1 + 1, \dots, b_1 + \nu\} \cup \dots \cup \{b_t + 1, \dots, b_t + \nu\}),$$

或者等价地，为 $s < t$ 设置 $c_s := \min\{b_s + \nu, a_{s+1} - 1\}$，并使用 $b_t = h$ ，

$$F = \{b_1 + 1, \dots, c_1\} \cup \dots \cup \{b_{t-1} + 1, \dots, c_{t-1}\}.$$

集合 S 和参数 $\nu \ge 1$ 的选取方式应满足

- 对于每个 $\ell \in E \setminus F$，整个区间 $(\ell-\nu, \ell] = \{\ell-\nu+1, \ldots\ldots, \ell\} \subseteq E$；
- 至少有 $|N|/q$ 个代理人在 $(\ell-\nu, \ell]$ 内没有取整需求断点。

对于在 $(\ell-\nu, \ell]$ 内没有取整需求断点的代理人，前缀 E 负载在整个长度为 ν 的区间 $(\ell-\nu, \ell]$ 上保持不变。同时，ℓ 处可用的 E 容量增加了 ν。对所有代理人取平均后，前缀 ℓ 的松弛量至少为 ν/q。

我们将现在描述 S 的构造。回顾取整后的高需求集合

$$\mathcal{Q} = \left\{\frac{1}{q}\right\} \cup \left\{\left(1-\frac{1}{q}\right)^k : k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \left(1-\frac{1}{q}\right)^k > \frac{1}{q}\right\}, \qquad Q := |\mathcal{Q}|.$$

下面的引理是**引理 3.2** 的一个类似结果，该引理出自第 3 节。

引理 7.1 (缓冲集)。设 $\nu \geq 1$ 为一个整数，且 $\varepsilon \in (0, 1)$。存在物品集合 $S \subseteq [h]$ 和 $F \subseteq E := [h] \setminus S$，以及代理人集合 $W \subseteq N$，满足以下性质。

- $1, h \in S$，且 S 是至多由 $t_0 = \lceil Q \cdot \frac{q}{q-1} \rceil + 1$ 个极大连续区间组成的并集：
- 集合 S 和 F 将具有以下形式

$$S = \bigcup_{s=1}^{t} \{a_s, \ldots, b_s\}, \qquad F = \bigcup_{s=1}^{t-1} \{b_s+1, \ldots, c_s\}, \quad where \quad c_s := \min\{b_s+\nu, a_{s+1}-1\};$$

- 这些集合的大小满足

$$|S| \leq t_0\left(1+\frac{Q\nu}{\varepsilon}\right), \qquad |F| \leq t_0\nu, \qquad |W| \leq \varepsilon d;$$

- 集合 W 包含每个在 F 中具有取整后的高需求断点的代理人 $i \in N$，即

$$W = \{i \in N : \exists \alpha \in \mathcal{Q} \ \ s.t \ \ m_i(\alpha) \in F\};$$

- 对于每个 $\ell \in E \setminus F$，$(\ell-\nu, \ell] \subseteq E$，以及 $(\ell-\nu, \ell]$ 中的高断点总数为

$$\left|\left\{(i,\alpha) \in N \times \mathcal{Q} : \ell-\nu < m_i(\alpha) \leq \ell\right\}\right| \leq \left(1-\frac{1}{q}\right) d.$$

这里的 $d = |N|$，以及所有断点 $m_i(\alpha)$，都是相对于包含所有物品的集合 M 而言的。

证明。对于每个代理人 $i \in N$，我们列出 i 中位于 $[h]$内的所有可能的正高需求断点，即对于 $\alpha \in \mathcal{Q}$的所有 $0 < m_i(\alpha) \leq h$，并将它们合并成多重集 $\mathcal{M}(\mathcal{Q})$：

$$\mathcal{M}(\mathcal{Q}) := \biguplus_{i \in N} \ \biguplus_{\substack{\alpha \in \mathcal{Q} \\ 0 < m_i(\alpha) \leq h}} \{(i, m_i(\alpha))\}.$$

注意，$|\mathcal{M}(\mathcal{Q})| \leq dQ$。我们按照相对于 $m_i(\alpha)$ 的非递减顺序对 $\mathcal{M}(\mathcal{Q})$ 进行排序，并标记每第κ个断点，其中

$$\kappa := \left\lfloor \left(1-\frac{1}{q}\right) d \right\rfloor + 1.$$

注意，$\mathcal{M}(\mathcal{Q})$ 中不含标记断点的任何子区间，其长度至多为 $\kappa-1$。令集合 S_0 包含 $\{1, h\}$ 以及 M 中与标记断点对应的每个不同位置，即

$$S_0 = \{1, h\} \cup \left\{s \in \{1, \ldots, h\} : \exists i \in N \text{ s.t } (i, s) = (i_{j\kappa}, m_{j\kappa}) \in \mathcal{M}(\mathcal{Q}) \text{ for some } j \geq 1\right\}.$$

由于 $\kappa > (1-1/q)d$，标记断点的数量小于 $qQ/(q-1)$，因此

$$|S_0| \le \left\lceil Q \cdot \frac{q}{q-1} \right\rceil + 1 =: t_0.$$

所有与 S_0 不相交的 M 子区间中，所有代理人的断点总数至多为 $\kappa - 1$ 。事实上，落入 M 的子区间内的断点（可能重复）在$\mathcal{M}(\mathcal{Q})$中构成一个连续区间，而其中不含任何标记断点的此类区间长度小于 κ。

我们构造一系列**受保护区域**。对于整数半径 $r \ge 1$，受保护区域$S(r)$将包含 $[h]$ 中距离 S_0 （向右）不超过 r 的所有物品：

$$S(r) := [h] \cap \bigcup_{s \in S_0} \{s, s+1, \dots, s+r-1\}.$$

我们以 ν为增量逐步增大半径。对于 $k = 0$，**1**，**.....**，K，其中 $K := \lfloor Q/\varepsilon \rfloor + 1$，令

$$r_k := 1 + k\nu.$$

根据构造，对于所有 $k \ge 0$，集合 $S(r_{k+1}) \setminus S(r_k)$两两不相交。注意，必定存在某个 $0 \le k^* \le K-1$，使得$\mathcal{M}(\mathcal{Q})$中落入 $S(r_{k^*+1}) \setminus S(r_{k^*})$的断点至多为 εd。事实上，否则，落入任意 $S(r_{k+1}) \setminus S(r_k)$的断点总数将超过

$$K \cdot \varepsilon d = \left(\left\lfloor \frac{Q}{\varepsilon} \right\rfloor + 1 \right) \cdot \varepsilon d > dQ.$$

取此 k^* 并定义集合

$$S := S(r_{k^*}), \qquad F := S(r_{k^*+1}) \setminus S(r_{k^*}), \qquad E := [h] \setminus S.$$

此外，令 W 表示在 F中有断点的代理人，则 $|W| \le \varepsilon d$。

显然，每个 $s \in S_0$对 S贡献一个长度至多为 $1+(K-1)\nu$ 的区间，而将此区间再扩展一次，最多会向 F贡献 ν 个物品。因此，

$$|S| \le |S_0|(1 + (K-1)\nu) \le t_0 \left(1 + \frac{Q\nu}{\varepsilon}\right), \qquad |F| \le |S_0|\nu \le t_0\nu.$$

由此可知， S 是 $t \le t_0$ 个极大连续区间的并，即

$$S = \bigcup_{s=1}^{t} \{a_s, \dots, b_s\}, \quad \text{where} \quad a_1 = 1 \text{ and } b_t = h,$$

而缓冲集 F 恰好为

$$F = E \cap \bigcup_{s=1}^{t} \{b_s + 1, \dots, b_s + \nu\} = \bigcup_{s=1}^{t-1} \{b_s + 1, \dots, c_s\} \quad \text{where} \quad c_s := \min\{b_s + \nu, a_{s+1} - 1\}.$$

最后，对于 $\ell \in E \setminus F$，令 $b_s \le \ell$为紧邻 ℓ之前的一个区间的端点，该端点存在，因为 $1 \in S$。由于 $\ell \notin F$，我们必须有 $\ell > b_s + \nu$。因此，$(\ell - \nu, \ell] \subseteq (b_s, \ell] \subseteq E$。此区间与 $S_0 \subseteq S$ 不相交，因此其中至多包含 $\mathcal{M}(\mathcal{Q})$ 的 $\kappa - 1$ 个断点。引理得证。 □

我们将应用 **引理 7.1** ，取某个整数 $\nu \ge 1$ 和 $\varepsilon \in (0, 1)$，并得到一个划分$[h] = E \sqcup S$，以及缓冲集 $F \subseteq E$ 和一个小型代理人集合 $W \subseteq N$，其中代理人的高需求断点落入 F。在定义分数头部配置时，这些代理人 W 需要格外注意。具体而言，我们希望“禁止” $i \in W$ 的选定配置使用 F中的任何物品，从而确保每个前缀都有足够的松弛量。

7.1.3 受保护前缀

现在我们将定义 受保护前缀集合，方法与 第 3 节类似。回顾一下，

$$S = \bigcup_{s=1}^{t} [a_s, b_s], \quad \text{where} \quad a_1 = 1, b_t = h \quad \text{and} \quad t \le \left\lceil Q \cdot \frac{q}{q-1} \right\rceil + 1.$$

此外，

$$F = \bigcup_{s=1}^{t-1} (b_s, c_s] \quad \text{where} \quad c_s := \min\{b_s + \nu, a_{s+1} - 1\}.$$

考虑区间 $[a_s, b_s] \subset S$ for $s < t$。在此区间内， E-容量 $|E \cap [\ell]|$保持不变，但旧/新配置的 E-负载可能增加。不过，通过控制后续 受保护前缀处的负载，我们可以控制整个区间 $[a_s, b_s]$ 的负载。具体而言，我们可以包含以下缓冲区（b_s， $c_s] \subset F$，并通过在 F的端点处采用更强的前缀负载条件，在整个区间$[a_s, c_s]$ 内保持 E-负载：

$$\sum_{i \in A} \mathcal{P}_i(\pi_i^E, c_s) + \sum_{u \in N \setminus A} \mathcal{P}_u(\pi_u^E, c_s) \le |E \cap [b_s]|.$$

事实上，对于每个 $\ell \in [a_s, c_s]$， ℓ 处的前缀负载至多为 c_s处的前缀负载。同时

- 如果 $\ell \le b_s$，则有 $[\ell, b_s] \subset S$和 $E \cap [\ell] = E \cap [b_s]$,
- 如果 $\ell \ge b_s$，则 $[b_s] \subseteq [\ell]$，并且 $|E \cap [\ell]| \ge |E \cap [b_s]|$,

因此上面的单个约束确保每个前缀 $\ell \in [a_s, c_s]$上的 E-负载可行性 .

当 $s = t$，即 $[a_t, b_t] = [a_t, h] \subset S$时，为了保持 $[a_t, h]$上的E-负载，我们需要稍作不同的端点。由于此区间在 h处结束，每个 $e \in E$ 都满足 $e \le a_t$。因此，我们可以放置

$$\sum_{i \in A} \mathcal{P}_i(\pi_i^E, m) + \sum_{u \in N \setminus A} \mathcal{P}_u(\pi_u^E, m) \le |E|,$$

即端点为 $c_t = m$，以确保配置中 E-部分的断点总数不超过 $|E|$。此约束控制每个 $\ell \in [a_t, b_t]$ 以及每个前缀 $\ell > h$ 上的负载。请注意，必须使用 m 而不是 h，因为头部配置中某项需求的断点可能超过 h。

定义7.4。对于给定的集合 S， $F \subseteq [h]$，它们具有上述形式，由 引理 7.1应用于某个整数 $\nu \ge 1$ 和 $\varepsilon \in (0,1)$，定义集合 $\mathcal{L}_S$ 中的 t 受保护前缀 如下

$$\mathcal{L}_S := \{(b_1, c_1), \ldots, (b_{t-1}, c_{t-1}), (b_t, c_t)\}, \qquad where \qquad (b_t, c_t) = (h, m).$$

请注意， $|\mathcal{L}_S| \le \lceil Q \cdot \frac{q}{q-1} \rceil + 1$。

对于保留旧配置的代理人 $A \subseteq I$，以及$\setminus A$ 接收新配置的代理人 N，每个受保护前缀 $(b_s$， $c_s)$ $\in \mathcal{L}_S$ 的受保护条件 为

$$\sum_{i \in A} \mathcal{P}_i(\pi_i^E, c_s) + \sum_{u \in N \setminus A} \mathcal{P}_u(\pi_u^E, c_s) \le |E \cap [b_s]|. \qquad (\mathrm{E}_{\mathcal{L}_S})$$

以下推论是对 **推论** 3.1 （见第 3 节）的扩展。

推论 7.1。考虑一个划分 $[h] = E \sqcup S$ 由 引理 7.1 应用于某个整数 $\nu \geq 1$ 和 $\varepsilon \in (0,\ 1)$得到。对于每个代理人 $i \in N$，令 $\{\pi_{i,\ j}^{E}:\ \ j \in [n]\}$ 为一个由高子配置组成的集合，其需求属于 Q（允许空档案），且对于每个 $0 \leq \ell \leq m$，

$$\sum_{j=1}^{n} \mathcal{P}_i(\pi_{i,j}^{E}, \ell) \leq |E \cap [\ell]|.$$

假设 代理人 $I \subseteq N$ 已分配配置 $\{\pi_i\}_{i \in I}$，满足对每个 $0 \leq \ell \leq m$ ：

$$\sum_{i \in I} \mathcal{P}_i(\pi_i^{E}, \ell) \leq \frac{1}{n} \sum_{i \in N} \sum_{j=1}^{n} \mathcal{P}_i(\pi_{i,j}^{E}, \ell).$$

设 $A \subseteq I$，并为每个代理人 $u \in N \setminus A$ 赋予一个新配置 π_u。如果 $\{\pi_i\}_{i \in A}$ 和 $\{\pi_u\}^{u \in N \setminus A}$ 满足

$$\sum_{i \in A} \mathcal{P}_i(\pi_i^{E}, c_s) + \sum_{u \in N \setminus A} \mathcal{P}_u(\pi_u^{E}, c_s) \leq |E \cap [b_s]|, \qquad \forall (b_s, c_s) \in \mathcal{L}_S; \tag{$\mathrm{E}_{\mathcal{L}_S}$}$$

$$\sum_{u \in N \setminus A} |\pi_u| \leq \frac{\nu}{q}; \tag{A-ν}$$

那么对于每个前缀 $0 \leq \ell \leq m$，都有

$$\sum_{i \in A} \mathcal{P}_i(\pi_i^{E}, \ell) + \sum_{u \in N \setminus A} \mathcal{P}_u(\pi_u^{E}, \ell) \leq |E \cap [\ell]|. \tag{E}$$

特别地，如果 $|\pi_u| \leq q$ 对于每个 $u \in N \setminus A$，只需 $(\mathrm{E}_{\mathcal{L}_S})$ 对 $|N \setminus A| \leq \nu/q^2$成立。

证明。首先，取 $\ell \in E \setminus F$，并考虑区间 $(\ell - \nu, \ell]$。根据**引理** 7.1，$(\ell - \nu, \ell] \subseteq E$，且至少有 $d/q = |N|/q$ 个代理人在 $(\ell - \nu, \ell]$ 中没有高需求断点。将这些代理人记为 N_ℓ，根据假设，对于每个 $i \in N_\ell$，配置 $\pi_{i,j}$ 的所有需求都属于 $\mathcal{Q}$，因此

$$\sum_{j=1}^{n} \mathcal{P}_i(\pi_{i,j}^{E}, \ell) = \sum_{j=1}^{n} \mathcal{P}_i(\pi_{i,j}^{E}, \ell - \nu) \leq |E \cap [\ell - \nu]| = |E \cap [\ell]| - \nu.$$

对于其他每个 $i \in N \setminus N_\ell$，E-子配置的总 ℓ-前缀负载$\pi_{i,\ j}^{E}$至多为 $|E \cap [\ell]|$。因此，

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n} \sum_{i \in N} \sum_{j=1}^{n} \mathcal{P}_i(\pi_{i,j}^{E}, \ell) &= \frac{1}{n} \sum_{i \in N_\ell} \sum_{j=1}^{n} \mathcal{P}_i(\pi_{i,j}^{E}, \ell) + \frac{1}{n} \sum_{i \in N \setminus N_\ell} \sum_{j=1}^{n} \mathcal{P}_i(\pi_{i,j}^{E}, \ell) \\
&\leq \frac{|N_\ell|}{n} \cdot (|E \cap [\ell]| - \nu) + \frac{|N \setminus N_\ell|}{n} \cdot |E \cap [\ell]| = \frac{|N|}{n} \cdot |E \cap [\ell]| - \frac{|N_\ell|}{n} \cdot \nu \\
&\leq \frac{d}{n} \left(|E \cap [\ell]| - \frac{\nu}{q} \right) \leq |E \cap [\ell]| - \frac{\nu}{q}.
\end{aligned}$$

最后一个不等式使用了 $d \leq n$ 和 $|E \cap [\ell]| \geq \nu$。根据假设可知，对于任意$A \subseteq I$，在条件（A-ν）下，此前缀 ℓ满足：

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in A} \mathcal{P}_i(\pi_i^{E}, \ell) + \sum_{u \in N \setminus A} \mathcal{P}_u(\pi_u^{E}, \ell) &\leq \sum_{i \in I} \mathcal{P}_i(\pi_i^{E}, \ell) + \sum_{u \in N \setminus A} |\pi_u| \\
&\leq \frac{1}{n} \sum_{i \in N} \sum_{j=1}^{n} \mathcal{P}_i(\pi_{i,j}^{E}, \ell) + \frac{\nu}{q} \leq |E \cap [\ell]| - \frac{\nu}{q} + \frac{\nu}{q} = |E \cap [\ell]|.
\end{aligned}$$

接下来考虑前缀 $\ell \in S \cup F$。记 $\mathcal{P}^{E}(\ell)$: $= \sum_{i \in A} \mathcal{P}_i(\pi_i^{E}, \ell) + \sum_{u \in N \setminus A} \mathcal{P}_u(\pi_u^{E}, \ell)$，简写为此。取 S 和 F 的区间表示。如果 $\ell \in [a_s, c_s]$ 对于 $s < t$，$(\mathrm{E}_{\mathcal{L}_S})$ 可确保

$$\mathcal{P}^{E}(\ell) \leq \mathcal{P}^{E}(c_s) \leq |E \cap [b_s]| \leq |E \cap [\ell]|,$$

对于 $\ell \le b_s$，为 $[\ell, b_s] \subset S$，对于 $\ell \ge b_s$，为 $[b_s] \subseteq [\ell]$。如果 $a_t \le \ell \le m$，最后一个受保护前缀给出

$$\mathcal{P}^E(\ell) \le \mathcal{P}^E(m) \le |E| = |E \cap [\ell]|.$$

最后，由于 $1 \in S$ 和 $[b_1] \subseteq S$，我们有 $E \cap [b_1] = \varnothing$，并且第一个受保护前缀给出$\mathcal{P}^E(c_1) \le |E \cap [b_1]| = 0$。因此，对于 $\ell = 0$，我们有 $\mathcal{P}^E(0) \le \mathcal{P}^E(c_1) = 0$。推论得证。 □

对于每个代理人 $i \in N$，我们将从其最大最小份额划分中获得一个合适的集合 $\{\pi_{i,j} : j \in [n]\}$，其中包含高配置。根据 **推论** 7.1，为了保证（E），我们需要找到

- 一组代理人 $I \subseteq N$，其配置为 $\{\pi_i\}_{i \in I}$，使其总 E负载不超过配置的平均总 E负载 $\{\pi_{i,j} : j \in [n]\}$，其中 $i \in N$。我们将按照 I 第 3 节中使用定理 3.2 舍入特定的分数头部配置集合，以找到这样的集合。
- 一组 $A \subseteq I$ 保留旧配置的代理人，以及新配置 π_u 对于每个 $u \in N \setminus A$，满足 (E$\mathcal{L}_S$) 和 (A-ν)。稍后将对此进行说明。

7.2 分数头部配置

在本小节中，对于每个代理人 $i \in N$，我们根据其最大最小份额划分 $\{B_{i,1}, \ldots, B_{i,n}\}$，为其提供一组经过舍入的头部配置 $\{\pi_{i,j} : j \in [n]\}$，方法与第 3 节类似。我们将对 $j \in [n]$ 取 $B_{i,j}$，只考虑其头部物品 $B_{i,j} \cap [h]$，并通过舍入估值 $\tilde{v}_i$导出头部需求，从而构造$\pi_{i,j}$。然而，我们只关注满足以下条件的头部配置$\pi_{i,j}$：1）可接受，即价值至少为 $1 - 2/q$；2）仅包含舍入后的高需求，也就是说，对于每个 $\alpha \in \pi_{i,j}$，都必须满足 $\alpha \ge 1/q$。这限制了每个代理人可用的头部配置数量。尽管所有 $i \in N$ 都对头部 $[h]$ 赋予较高价值，但不同的最大最小份额物品束$B_{i,j}$与 $[h]$的交集各不相同；只有对于优质代理人 $i \in G$，我们才能保证每件头部物品的价值至少为 $1/q$。这使得我们的构造稍微不那么直接。

定义 7.5. 对于每个代理人 $i \in N$，考虑 M 的划分 $\{B_{i,1}, \ldots, B_{i,n}\}$。对于每个物品束 $j \in [n]$，定义其取整头部档案 $\pi_{i,j}$ 如下。

- 如果对于所有 $B_{i,j} \cap [h]$，$v_i(B_{i,j} \cap [h]) \ge 1 - 1/q$ 且 $v_i(e) \ge 1/q$，那么

$$\pi_{i,j} = \{\tilde{v}_i(e) : e \in B_{i,j} \cap [h]\}.$$

- 否则，$\pi_{i,j} = \varnothing$，我们将这样的配置称为无效。

令 $\theta_i := |\{j \in [n] : \pi_{i,j} = \varnothing\}|$ 表示代理人 i 的无效头部档案数量。

设置配置 $\pi_{i,j} = \varnothing$ 会使 $\pi_{i,j}$ 对代理人 i而言不可接受，因此它永远不会分配给 i。不过，我们仍可以在之后的线性规划舍入中将 i 选入集合 I，而代理人 i之后仍可能在其潜在分配中使用来自 $B_{i,j}$ 的物品。

观察 7.2. 对于每个 $i \in N$，如果 $\pi_{i,j} \ne \varnothing$，那么 $|\pi_{i,j}| \le q$，每个 $\alpha \in \pi_{i,j}$ 都属于 Q，并且

$$1 \ge v(\pi_{i,j}) \ge 1 - \frac{2}{q}.$$

证明。 根据构造，每个有效配置 $\pi_{i,j}$ 都满足

$$v(\pi_{i,j}) = \sum_{e \in B_{i,j} \cap [h]} g(v_i(e)) \ge \left(1 - \frac{1}{q}\right) v_i(B_{i,j} \cap [h]) \ge \left(1 - \frac{1}{q}\right)^2 = 1 - \frac{2}{q} + \frac{1}{q^2},$$

以及 $v(\pi_{i,j}) \le v_i(B_{i,j} \cap [h]) \le v_i(B_{i,j}) \le 1$。由于每个 $e \in B_{i,j} \cap [h]$ 对 i的价值至少为 $1/q$，因此我们有 $|\pi_{i,j}| \le q$，以及对所有 $\alpha \in \pi_{i,j}$都有 $\alpha \in Q$。 □

现在，我们将为每个代理人 θ_i 界定无效头部配置 $i \in N$的数量，并证明平均而言，无效配置的数量相对较少。这需要进行两类估计，分别对应取整头部配置 $\pi_{i,\ j}$ 有效所需满足的两个条件。首先，物品束 $B_{i,\ j}$ 的头部部分 $B_{i,\ j} \cap [h]$ 必须具有较高价值。我们将利用 **推论** 6.2 中的总头部价值上界，说明这一条件不可能经常不满足。其次，$B_{i,\ j}$ 中的每个头部物品价值都必须至少为 $1/q$。我们将利用共同价格w 来说明，若某个物品 $e \in B_{i,\ j}$ 具有 $v_i(e) < 1/q$，那么将其从 $B_{i,\ j}$ 中移除后，剩下的仍是可接受捆绑，因此它必定具有较高的共同价格。进而，共同价格较高的物品束总数不会太多。

引理 7.2。 对于每个代理人 $i \in N$，无效取整头部档案的数量 θ_i 满足

$$\theta_i \leq q^2(16\Lambda + 1) + qn(1 - \lambda_i).$$

此外，对于每个 $i \in G$，都有 $\theta_i \leq q^2$（$16\Lambda+1$）。因此，取 θ：$= q^2$（$16\Lambda+1$）$+q\Lambda$，

$$\frac{1}{n}\sum_{i \in N} \theta_i \leq \theta.$$

证明。 首先 考虑具有 $\lambda_i \geq 1/2$ 的代理人 $i \in N$。由于物品束 $\{B_{i,\ 1}$，...，$B_{i,\ n}\}$ 构成划分 M，

$$\sum_{j=1}^{n}(1 - v_i(B_{i,j} \cap [h])) = n - v_i([h]) \leq q(16\Lambda + 1),$$

这里用到了**推论** 6.2。由于对于每个 $j \in [n]$，$v_i(B_{i,\ j}) \leq 1$，因此所有加项均非负。每个满足 $v_i(B_{i,\ j} \cap [h])$ $< 1 - 1/q$ 的物品束 $B_{i,\ j}$ 对上面的总和至少贡献 $1/q$，因此满足 $v_i(B_{i,\ j} \cap [h]) < 1 - 1/q$ 的 $j \in [n]$ 的数量至多为 $q^2(16\Lambda + 1)$。

接下来，对于同一个代理人 i，假设$B_{i,\ j}$，$j \in [n]$包含物品 $e \leq h$ 且 $v_i(e) < 1/q$。根据**推论**6.2，

$$v_i(B_{i,j} - \{e\}) > 1 - \frac{1}{2q^2} - \frac{1}{q} \geq 1 - \frac{2}{q},$$

因此$B_{i,\ j} - \{e\}$ 对 i是可接受的。因此，**推论**6.2 保证了

$$w(B_{i,j} - \{e\}) \geq \lambda_i \quad \Longrightarrow \quad w(B_{i,j}) - \lambda_i \geq w(e) \geq \frac{1}{q}.$$

由于每个$B_{i,\ j}$, $j \in [n]$对 i都是可接受的，使用 $w(M) \leq n$ 可得

$$0 \leq \sum_{j=1}^{n}(w(B_{i,j}) - \lambda_i) = w(M) - n\lambda_i \leq n(1 - \lambda_i).$$

任何包含物品 e 且满足 $v_i(e) < 1/q$ 的物品束$B_{i,\ j}$ 对上述总和的贡献至少为 $1/q$。因此，此类物品束的总数至多为 $qn(1-\lambda_i)$。结合这两个条件，

$$\theta_i \leq q^2(16\Lambda + 1) + qn(1 - \lambda_i).$$

注意，对于 $i \in G$，我们总有 $v_i \quad (e) \geq 1/q$ 对所有 $e \leq h$均成立，因此不存在求和项 $qn\,(1 - \lambda_i)$.

如果 $\lambda_i < 1/2$，我们只需使用 $\theta_i \leq n \leq qn(1-\lambda_i)$，因此上述上界对所有代理人 $i \in N$均成立 N。最后，$d \leq n$中的代理人总数为 $\sum_{i \in N}(1 - \lambda_i)$，因此根据 $\leq \Lambda$ 中的**推论**6.2，

$$\frac{1}{n}\sum_{i \in N} \theta_i \leq \frac{d}{n} \cdot q^2(16\Lambda + 1) + q\sum_{i \in N}(1 - \lambda_i) \leq q^2(16\Lambda + 1) + q\Lambda.$$

□

我们将应用**引理**7.1，取某个整数 $\nu \geq 1$ 和 $\varepsilon \in (0,1)$，从而得到头部划分$[h] = E \sqcup S$ 以及集合 $F \subseteq E$ 和 $W \subseteq N$。每个所定义的 $\pi_{i,\,j}$ 现在都有一个自然的 E/S 分解。

定义 7.6。考虑**引理** 7.1中的划分 $[h] = E \sqcup S$。对于具有 M 的划分 $\{B_{i,\,1}, \ldots\ldots, B_{i,\,n}\}$ 的代理人 $i \in N$，对于每个有效舍入头部配置 $\pi_{i,\,j} \neq \varnothing$，定义子配置

$$\pi_{i,j}^{E} := \{\tilde{v}_i(e) :\ e \in B_{i,j} \cap E\}, \qquad \pi_{i,j}^{S} := \{\tilde{v}_i(e) :\ e \in B_{i,j} \cap S\}.$$

对于每个无效的 $\pi_{i,\,j} = \varnothing$，令 $(\pi_{i,\,j}^{E},\ \pi_{i,\,j}^{S}) = (\varnothing,\ \varnothing)$。显然，对于所有 $\pi_{i,\,j}$，都有 $\pi_{i,\,j} = \pi_{i,\,j}^{E} \uplus \pi_{i,\,j}^{S}$。

注记 7.2。划分 $[h] = E \sqcup S$ 对选定的配置施加了额外限制。从现在起，对于配置 π 要等于$\pi_{i,\,j}$，它还必须在 E-部分和 S-部分上都一致：

$$\pi = \pi_{i,j} \quad \Longleftrightarrow \quad (\pi^{E}, \pi^{S}) = (\pi_{i,j}^{E}, \pi_{i,j}^{S}).$$

因此，如果 π 和 $\pi_{i,\,j}$ 作为多重集相同，但具有不同的 E/S-分解，我们将它们视为两个不同的配置。在这一更强的相等概念下，我们定义公共集合

$$\Pi := \{\varnothing, \perp\} \cup \bigcup_{i \in N} \{\pi_{i,j} : j \in [n]\}.$$

观察 7.3。对于每个 $i \in N$ 以及每个前缀 $0 \leq \ell \leq m$，均有

$$\sum_{j=1}^{n} \mathcal{P}_i(\pi_{i,j}^{E}, \ell) \leq |E \cap [\ell]|, \qquad \sum_{j=1}^{n} \mathcal{P}_i(\pi_{i,j}^{S}, \ell) \leq |S \cap [\ell]|.$$

证明。与**引理** 5.4类似，$\pi_{i,j}$ 中的每项需求都来自 $B_{i,j}$中的唯一一个物品，而 M的最大最小份额划分$\{B_{i,1}, \ldots, B_{i,n}\}$ 在每个 ℓ-前缀中至多能使用 ℓ 个物品。因此，在所有配置 $\{\pi_{i,j} :\ j \in [n]\}$ 中，每个 ℓ-前缀内至多有 $|E \cap [\ell]|$ E 个需求和 $|S \cap [\ell]|$ S 个需求。由于 $\tilde{v}_i$ 和 v_i 具有相同的断点，结论成立。 □

现在，对于每个代理人 $i \in N$，我们将通过为每个配置 $\pi \in \Pi$赋予权重 $\tilde{x}_i(\pi) \geq 0$，来定义一个分数头部配置（$\tilde{x}_i, \Pi$）。与第 3 节类似，每个最大最小份额配置 $\pi_{i,j}$ 都将被均匀选取，即选取概率为 $1/n$。不过，我们的构造需要进行若干修改。

- 如果代理人 $\pi_{i\,\text{的配置},\,j}$ 代理人 $i \in N$ 的配置无效，即 $\pi_{i,\,j} = \varnothing$那么它的均匀权重 $1/n$ 将转移到 $\tilde{x}_i(\perp)$。这将迫使舍入算法仅选择满足以下条件的 i 配置：1）可接受；2）只包含高需求；这正是 **推论** 7.1所需的。如**引理** 7.2所示，平均而言，从选择中移除的无效配置数量很少。

- 为了在受保护前缀处获得更强的 E-负载上界（EL_s），我们将从分数选择中额外省略一些配置。具体而言，如果代理人 $i \in W$ 及其 MMS 捆绑 $B_{i,j}$ 包含缓冲区 F中的物品，我们就不使用相应的配置 $\pi_{i,j}$，并将其均匀权重 $1/n$ 转移到 $\tilde{x}_i(\perp)$。这将使我们能够针对 $(\tilde{x}, \Pi)$ 分数地满足受保护前缀条件（EL_s）。根据引理 7.1，集合 W和 F都很小，因此省略相应的配置后，仍会保留大量总权重 $\text{I}(\tilde{x}, \Pi)$。

定义 7.7. 对于每个代理人 $i \in N$，定义以下分数头部配置 $(\tilde{x}_i, \Pi)$.

- 若 $i \in N \setminus W$，令 $\tilde{x}_i(\varnothing) = 0$、$\tilde{x}_i(\perp) = \theta_i/n$，并对每个 $\pi \in \Pi \setminus \{\varnothing, \perp\}$，令

$$\tilde{x}_i(\pi) = \frac{|\{j \in [n] :\ \pi_{i,j} = \pi\}|}{n}.$$

- 若 $i \in W$，令 $\tilde{x}_i(\varnothing) = 0$，对每个 $\pi \in \Pi \mid \{\varnothing, \perp\}$，令

$$\tilde{x}_i(\pi) = \frac{|\{j \in [n] : \pi_{i,j} = \pi \text{ and } B_{i,j} \cap F = \varnothing\}|}{n},$$

以及

$$\tilde{x}_i(\perp) = \frac{\theta_i}{n} + \frac{|\{j \in [n] : \pi_{i,j} \neq \varnothing \text{ and } B_{i,j} \cap F \neq \varnothing\}|}{n}.$$

我们将 $(\tilde{x}, \Pi)$ 称为代理人 i 的分数舍入头部配置 。

因此，在分数集合 $(\tilde{x}, \Pi)$ 中，每个无效配置 $\pi_{i,j}$，以及每个对应于某个代理人 $i \in W$ 的物品束 $B_{i,j}$ 的有效配置 $\pi_{i,j}$（该物品束包含来自缓冲区 F 的物品），都会将其权重 $1/n$ 计入 $\perp$ 。

定义 7.8。 考虑引理 7.1中的划分 $[h] = E \sqcup S$ 。对于分数配置$(\tilde{x}, \Pi)$ 和前缀 $0 \leq \ell \leq m$，将总分数 E-负载和 S-负载分别定义为

$$\mathcal{H}^E(\tilde{x}, \Pi, \ell) := \sum_{i \in N} \sum_{\pi \neq \perp} \tilde{x}_i(\pi) \cdot \mathcal{P}_i(\pi^E, \ell);$$
$$\mathcal{H}^S(\tilde{x}, \Pi, \ell) := \sum_{i \in N} \sum_{\pi \neq \perp} \tilde{x}_i(\pi) \cdot \mathcal{P}_i(\pi^S, \ell).$$

接下来我们将证明，分数配置 $(\tilde{x}, \Pi)$ 分数地满足 **推论** 7.1的要求以及条件 (S)。

引理 7.3。 严格分数坐标在 $\tilde{x}$ 中的数量 X 满足 $X \leq dn$。此外，

$$\mathcal{I}(\tilde{x}, \Pi) \geq d - \theta - \varepsilon|F|,$$

其中 $\theta = q^2(16\Lambda + 1) + q\Lambda$ 来自引理7.2。此外，对于每个前缀 $0 \leq \ell \leq m$ 均成立

$$\mathcal{H}^E(\tilde{x}, \Pi, \ell) \leq \frac{1}{n} \sum_{i \in N} \sum_{j=1}^{n} \mathcal{P}_i(\pi^E_{i,j}, \ell) \leq \frac{d}{n}|E \cap [\ell]|;$$
$$\mathcal{H}^S(\tilde{x}, \Pi, \ell) \leq \frac{1}{n} \sum_{i \in N} \sum_{j=1}^{n} \mathcal{P}_i(\pi^S_{i,j}, \ell) \leq \frac{d}{n}|S \cap [\ell]|;$$

对于每个受保护前缀 $(b_s, c_s) \in \boldsymbol{L}_S$ 均成立

$$\mathcal{H}^E(\tilde{x}, \Pi, c_s) \leq \frac{d}{n}|E \cap [b_s]|.$$

证明。 对于每个代理人 $i \in N$，至多有 n 个正权重 $\tilde{x}_i(\pi)$ 对应于 $\pi = \pi_{i,j}$。如果 $\tilde{x}_i(\perp) > 0$，则至少有一个配置 $\pi_{i,j}$ 将其个体权重贡献给 $\perp$ （注意，某些 $\tilde{x}_i(\pi_{i,j})$ 仍可能为正，因为多个 $B_{i,j}$可能诱导出同一个配置）。至多有 $n-1$ 个其他$\sim\pi_{i,j}$ 对非$\perp$ 坐标作出贡献，其正权重 $\tilde{x}_i(\pi)$ 的总数至多为 n 。因此， $X \leq dn$。

接下来，根据构造，我们有

$$\mathcal{I}(\tilde{x}, \Pi) = \sum_{i \in N} \sum_{\pi \neq \perp} \tilde{x}_i(\pi) = |N| - \sum_{i \in N} \tilde{x}_i(\perp)$$
$$= d - \frac{1}{n} \sum_{i \in N} \theta_i - \frac{1}{n} \sum_{i \in W} |\{j \in [n] : \pi_{i,j} \neq \varnothing \text{ and } B_{i,j} \cap F \neq \varnothing\}|.$$

对于每个代理人 $i \in W$，最多有 $|F|$ 个 MMS 捆绑，其中包含来自 F的任意物品。因此，根据 $|W|$ 在 **引理** 7.1中的上界，

$$\frac{1}{n} \sum_{i \in W} |\{j \in [n] : \pi_{i,j} \neq \varnothing \text{ and } B_{i,j} \cap F \neq \varnothing\}| \leq \frac{|W|}{n} \cdot |F| \leq \frac{\varepsilon d}{n} \cdot |F| \leq \varepsilon|F|.$$

将该上界与 $\frac{1}{n}\sum_{i\in N}\theta_i \le \theta$ 在 **引理 7.2**中的结果结合起来，可得

$$\mathcal{I}(\tilde{x},\Pi) \ge d - \theta - \varepsilon|F|.$$

转到前缀负载，由于每个 $\pi_{i,j}$ 对分数负载的贡献至多为 $1/n$，因此

$$\mathcal{H}^E(\tilde{x},\Pi,\ell) = \sum_{i\in N}\sum_{\pi\neq\perp}\tilde{x}_i(\pi)\cdot\mathcal{P}_i(\pi^E,\ell) \le \frac{1}{n}\sum_{i\in N}\sum_{j=1}^{n}\mathcal{P}_i(\pi^E_{i,j},\ell) \le \frac{d}{n}|E\cap[\ell]|,$$

其中 la　　最后一个不等式由 **观察 7.3**得出。对于 S，上界同理。

最后，固定一个受保护前缀 $(b_s,c_s)\in\mathcal{L}_s$，对于 $s<t$。对于代理人 $i\in N$，考虑其 MMS 配置 $\pi_{i,j}\neq\varnothing$，并令 $\alpha\in\pi^E_{i,j}$ 表示在前缀 c_s处统计的需求，即 $m_i(\alpha)\le c_s$。如果 $e\in B_{i,j}\cap E$是 α的来源物品，则 $\alpha=\tilde{v}_i(e)\le v_i(e)$，且 $e\le m_i(\alpha)\le c_s$。因此，

- 如果 $i\notin W$，则断点 $m_i(\alpha)$ 不可能属于 $(b_s,c_s]\subset F$)，因此 $m_i(\alpha)\le b_s$，从而 $e\le b_s$；
- 如果 $i\in W$且 $B_{i,j}\cap F=\varnothing$，那么 $e\notin F$；又由于 $e\le c_s$且 $(b_s,c_s]\subset F$，必然有 $e\le b_s$。

因此，只要 $i\notin W$或 $i\in W$且 $B_{i,\,j}\cap F=\varnothing$，就必有 $e\le b_s$。因此，根据 $(\tilde{x}_i,\ \Pi)$ 的构造，对于配置为 $\pi_{i,\,j}$且不贡献于 $\perp$的情况，在前缀 c_s处计数的每个 E-需求都必须源自 $E\cap[b_s]$中的某个物品。此外，所有这些物品都必须各不相同，因为 $\pi_{i,\,j}$ 是由不同的 MMS 捆绑 $B_{i,\,j}$、$j\in[n]$诱导出的。由此可得

$$\sum_{\pi\neq\perp}\tilde{x}_i(\pi)\cdot\mathcal{P}_i(\pi^E,c_s) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathcal{P}_i(\pi^E_{i,j},c_s)\mathbb{1}\{i\notin W \text{ or } B_{i,j}\cap F=\varnothing\} \le \frac{1}{n}\cdot|E\cap[b_s]|,$$

并对所有 $i\in N$ 求和，得到

$$\mathcal{H}^E(\tilde{x},\Pi,c_s)\le\frac{d}{n}|E\cap[b_s]|.$$

对于最后一个受保护前缀 $(b_t,\ c_t)=(h,\ m)$，前面的上界已经给出

$$\mathcal{H}^E(\tilde{x},\Pi,c_t)=\mathcal{H}^E(\tilde{x},\Pi,m)\le\frac{d}{n}|E|=\frac{d}{n}|E\cap[h]|=\frac{d}{n}|E\cap[b_t]|.$$

证明完毕。 □

如前所述，我们现在将把分数配置（$\tilde{x}$，Π）舍入为整数配置（y，Π），由此定义一个较大的子集 $I\subseteq N$，其中的入选代理人具有已分配配置 $\{\pi_i\}_{i\in I}$，并满足**推论 7.1**的要求。我们将使用**定理 3.2**来完成这一点，下面将重述该定理。

定理 7.1 (联合舍入)。对于一个划分 $[h]=E\sqcup S$，设 Π 是一个具有定义良好的 E/S 分解的共享头部配置集，使得对于每个 $\pi\in\Pi\setminus\perp$，都有 $|\pi|\le q$，其中某个 $q\ge1$ 为整数。对于每个 $i\in N$，令 $(x_i,\ \Pi)$ 为一个分数配置，记 $x=\{x_i\}_{i\in N}$。

存在一个整数头部配置的集合 $y=\{y_i\}_{i\in N}$，$(y_i,\ \Pi)$，使得对于每个 i、π，都有 $y_i(\pi)\in\{0,1\}$，并且 $y_i(\pi)=1$ 当且仅当 $\pi\neq\perp$ $x_i(\pi)>0$，并且

$$\begin{aligned}
&\mathcal{H}^E(y,\Pi,\ell)\le\mathcal{H}^E(x,\Pi,\ell), && \forall 0\le\ell\le m,\\
&\mathcal{H}^S(y,\Pi,\ell)\le\mathcal{H}^S(x,\Pi,\ell), && \forall 0\le\ell\le m,\\
&\mathcal{I}(y,\Pi)\ge\mathcal{I}(x,\Pi)-\rho_{ES}(q,X),
\end{aligned}$$

其中，对于 $X=|\{(i,\pi):\ 0<x_i(\pi)<1\}|$，

$$\rho_{ES}(q,X)=8q\log\max\{1,X\}.$$

其证明与**定理**5.2类似，详见**附录 A** (**定理**A.2)。我们注意到，对于本文的目的而言，**定理**5.2 所提供的 $O_q(\log^2 n)$ 舍入损失保证已足够，而 $O(q \log n)$ 的改进**定理**7.1 并无实质影响。我们仍给出**定理**7.1的另一种舍入方法，以供未来研究使用。

推论 7.2。设 $[h] = E \sqcup S$、$F \subseteq E$和 $W \subseteq N$由 *引理 7.1* 应用某个整数 $\nu \geq 1$ 和 $\varepsilon \in$ （0，1）得到，并设 $(\tilde{x},\ \Pi)$ 为前面定义的分数配置。

存在一个集合 $I \subseteq N$ 和配置 $\{\pi_i\}_{i \in I}$，其中每个 π_i 都有一个 E/S 分解$\pi_i = \pi_i^E \uplus \pi_i^S$，并且对所有 $\alpha \in \pi_i$都满足 $|\pi_i| \leq q$, $\alpha \in Q$，以及 $1 \geq v\ (\pi_i)\ \geq 1 - 2/q$。此外，

$$|I| \geq d - \theta - \varepsilon|F| - \rho_{ES}(q, dn), \qquad \theta = q^2(16\Lambda + 1) + q\Lambda,$$

对于每个前缀 $0 \leq \ell \leq m$，都有

$$\sum_{i \in I} \mathcal{P}_i(\pi_i^E, \ell) \leq \frac{1}{n} \sum_{i \in N} \sum_{j=1}^{n} \mathcal{P}_i(\pi_{i,j}^E, \ell), \qquad \sum_{i \in I} \mathcal{P}_i(\pi_i^S, \ell) \leq |S \cap [\ell]|,$$

对于每个受保护前缀 $(b_s、\ c_s)\ \in \boldsymbol{L}_S$，同样有，

$$\sum_{i \in I} \mathcal{P}_i(\pi_i^E, c_s) \leq |E \cap [b_s]|.$$

证明。根据构造，配置 $\pi \in \Pi \setminus \{\varnothing, \perp\}$ 具有定义良好的 E/S 分解，并且根据观察 7.2 $|\pi| \leq q$。我们将定理 7.1 应用于 $(\tilde{x}, \Pi)$，得到整数配置 (y, Π)。令 $I \subseteq N$ 包含所有满足 $y_i\ (\perp)\ = 0$的 $i \in N$，并取满足 $y_i\ (\pi_i)\ = 1$ 的 $\pi_i \in \Pi \setminus \perp$，其中的 i。由于仅当 $\tilde{x}_i\ (\pi_i)\ > 0$时，$y_i\ (\pi_i)\ > 0$，观察 7.2 保证对于 $i \in I$有 $1 \geq v\ (\pi_i)\ \geq 1 - 2/q$。

接下来，利用**引理**7.3 关于 $\widetilde{X} \leq dn$ 以及$\mathcal{I}(\tilde{x},\ \Pi)$，**定理**7.1 可得

$$|I| = \mathcal{I}(y, \Pi) \geq \mathcal{I}(\tilde{x}, \Pi) - \rho_{ES}(q, \widetilde{X}) \geq d - \theta - \varepsilon|F| - \rho_{ES}(q, dn).$$

接下来，对于每个前缀 $0 \leq \ell \leq m$，根据**定理**7.1：

$$\sum_{i \in I} \mathcal{P}_i(\pi_i^E, \ell) = \mathcal{H}^E(y, \Pi, \ell) \leq \mathcal{H}^E(\tilde{x}, \Pi, \ell); \qquad \sum_{i \in I} \mathcal{P}_i(\pi_i^S, \ell) = \mathcal{H}^S(y, \Pi, \ell) \leq \mathcal{H}^S(\tilde{x}, \Pi, \ell).$$

将这些不等式与**引理**7.3结合，并利用 $d \leq n$，即可证明

$$\sum_{i \in I} \mathcal{P}_i(\pi_i^E, \ell) \leq \frac{1}{n} \sum_{i \in N} \sum_{j=1}^{n} \mathcal{P}_i(\pi_{i,j}^E, \ell), \qquad \sum_{i \in I} \mathcal{P}_i(\pi_i^S, \ell) \leq |S \cap [\ell]|,$$

对于每个受保护前缀 $(b_s,\ c_s)\ \in \mathcal{L}_S$,

$$\sum_{i \in I} \mathcal{P}_i(\pi_i^E, c_s) \leq \mathcal{H}^E(\tilde{x}, \Pi, c_s) \leq |E \cap [b_s]|.$$

□

8 一般情形的单供应商

回顾我们在第 7.1.1 节中描述的最初目标。给定一个大型代理人子集 $I \subseteq N$及其已分配的整数配置 $\Pi_I = \{\pi_i\}_{i \in I}$，这些配置定义在公共头部$\{1, \ldots, h\}$上，我们希望找到一个 $A \subseteq I$ 代理人子集，使其保留已分配的配置，并为每个代理人赋予一个新配置 π_u $u \in N \setminus A$，从而对每个 $0 \leq \ell \leq m$ 均有

$$\sum_{i \in A} \mathcal{P}_i(\pi_i, \ell) + \sum_{u \in N \setminus A} \mathcal{P}_u(\pi_u, \ell) \leq \ell.$$

如前所述，要使这一条件对每个前缀都成立，只需满足：对于任意的头部划分 $[h] = E \sqcup S$，对每个 $0 \le \ell \le m$，都有

$$\sum_{i \in A} \mathcal{P}_i(\pi_i^E, \ell) + \sum_{u \in N \setminus A} \mathcal{P}_u(\pi_u^E, \ell) \le |E \cap [\ell]|, \qquad \forall 0 \le \ell \le m. \tag{E}$$

$$\sum_{i \in A} \mathcal{P}_i(\pi_i^S, \ell) + \sum_{u \in N \setminus A} \mathcal{P}_u(\pi_u^S, \ell) \le |S \cap [\ell]|, \qquad \forall 0 \le \ell \le m. \tag{S}$$

假设我们对某个整数 $\nu \ge 1$ 和 $\varepsilon \in (0, 1)$ 应用了引理 7.1，并得到了一个头部划分 $[h] = E \sqcup S$ 以及受保护前缀 L_S。假设最初选定的整数配置 $\Pi_I = \{\pi_i\}_{i \in I}$ 是推论 7.2 中的配置。如第 7.1.1 节、引理 7.1 和推论 7.1 所示，要对每个前缀$0 \le \ell \le m$满足上述条件 (E) 和 (S)，只需找到 $A \subseteq I$ 以及满足以下条件的配置 π_u（其中 $u \in N \setminus A$）：

$$\sum_{i \in A} \mathcal{P}_i(\pi_i^E, c_s) + \sum_{u \in N \setminus A} \mathcal{P}_u(\pi_u^E, c_s) \le |E \cap [b_s]|, \qquad \forall (b_s, c_s) \in \mathcal{L}_S; \tag{E$_{\mathcal{L}_S}$}$$

$$\sum_{u \in N \setminus A} |\pi_u| \le \frac{\nu}{q}; \tag{A-ν}$$

$$\sum_{i \in A} \mathcal{P}_i(\pi_i^S, \ell) + \sum_{u \in N \setminus A} \mathcal{P}_u(\pi_u^S, \ell) \le |S \cap [\ell]|, \qquad \forall 0 \le \ell \le m. \tag{S}$$

根据 **推论** 7.1，条件 (E$_{\mathcal{L}_S}$) 和 (A-ν) 应用于 $I \subseteq N$ 来自 **推论** 7.2 得到 (E)。

根据推论 7.2，已分配的代理人数为 $|I| \ge d - \theta - \varepsilon|F| - \rho_{ES}(q, dn)$。利用先前得到的关于 d, θ 的上界，并假设$|F| = O_{\Gamma,q}(\log^2 n)$，该人数至少为 $n - O_{\Gamma,q}(\log^2 n)$。我们希望保留这些配置中的大部分 $\{\pi_i\}_{i \in I}$，只替换其中少量配置，比如 $O_{\Gamma,q}(\log^2 n)$，并为剩余的 $O_{\Gamma,q}(\log^2 n)$ 个代理人分配新配置，以满足 (E$_{\mathcal{L}_S}$)、(A-ν) 和 (S)。这样，每个代理人 $i \in N$ 都会获得一个配置，从而整个配置集合都能由头部 $[h]$ 中的不同物品同时满足。

我们不可避免地会遇到几个在第 7 节中简要提到、但先前搁置的问题。首先，我们希望为每个代理人 $i \in N$ 分配一个可接受的配置，即其价值至少为 $1 - 2/q$。已分配给 $i \in I$ 的配置 π_i 满足 $v(\pi_i) \ge 1 - 2/q$；而对于每个新配置 π_u，仅满足 (E$_{\mathcal{L}_S}$)、(A-ν) 和 (S) 并不足以保证这一点。更棘手的是，尽管对于每个代理人 $i \in N$，都有 $\tilde{v}_i([h]) \ge (1 - 1/q)^2 n \ge (1 - 2/q)n$（根据观察 7.1），但这并不意味着代理人 i 高度重视的所有物品$e \le h$ 都满足 $\tilde{v}_i(e) \ge 1/q$。因此，我们甚至可能无法得到一个可行的可接受配置集合，使其仅由头部 $\{1, \ldots, h\}$ 中的物品满足；而且，我们甚至不能把公共尾部 $M \setminus [h]$ 视为一组“低价值”物品。

只要我们能够选出 $A \subseteq I$ 并为每个$u \in N \setminus A$ 配置 π_u，使得：1）所有新配置 π_u 相对于舍入损失的总缺口足够小；2）所有配置都能由某个物品子集同时满足，并且每个最终获得不可接受配置的代理人对未使用物品的价值都足够高，能够弥补其缺口。那么，我们可以使用尾部补全**引理**5.3，将每个已分配的配置补全至总价值 $1 - 2/q$。

这引出了第二个主要问题：协调。为每个代理人独立选择新的配置，几乎无法控制总负载，也无法控制为同时满足这些配置而需要哪些物品。例如，如果我们使用代理人 i的个人 MMS 划分来创建 $i \in N$ 的新配置，不同的代理人可能需要相同的物品来满足各自的配置，这可能会违反（E$_{\mathcal{L}_S}$）和（S）。此外，为了能够使用某种类似于**引理** 5.3的结果，我们需要确保所有已分配配置只使用截至某个共同阈值的物品，否则我们无法适当地定义用于完成分配的“尾部”——现有的$M \setminus [h]$ 可能无法奏效。

8.1 建议配置

与第 4 节类似，我们将采用以下方法，同时解决高价值／共同阈值问题以及协调问题。我们将选择一个特殊代理人 $u_* \in N$，并将其称为**供应商**。该代理人将使用其个人 MMS 划分 $\{B_{u_*,1},\dots,B_{u_*,n}\}$（如**推论** 6.2中所述），以便为每个代理人 $i \in N$ 创建**建议配置** $\hat{}\pi_{u_*,i}$。供应商的 MMS 划分将提供一个参考点，使我们能够同时控制与不同物品束相关的负载。建议配置 $\hat{}\pi_{u_*,i}$ 可以重新组织划分 $\{B_{u_*,1},\dots,B_{u_*,n}\}$ 中的物品，并适应每个代理人 $i \in N$，同时保持前缀可行性约束。

回顾一下，每个优质代理人 $i \in G$ 满足 $v_i(e) \geq 1/q$ 对于每个物品 $e \leq h$，并且集合 $W \subseteq N$ 包含所有代理人 i，这些代理人在缓冲区 F中具有高需求断点。

定义8.1。 我们将代理人 $G \mid W$ 称为供应商候选人。对于每个 $u \in G \mid W$，令

$$h_u := m_u(1/q) = |\{e \in M : v_u(e) \geq 1/q\}|$$

表示代理人 u 估值至少为 $1/q$的物品数量，我们称其为代理人 u的头部阈值。注意，对于每个 $u \in G \mid W$，都有 $h_u \geq h$成立。将代理人 u 的剩余头部定义为

$$H_u^+ := \{h+1,\dots,h_u\}.$$

每个供应商候选人 $u \in G \setminus W$ 提供一个划分

$$M = E \sqcup S \sqcup H_u^+ \sqcup \{h_u+1,\dots,m\}.$$

我们引入 h_u 的原因是，并非公共头部 $[h]$ 之外的每件物品对供应商而言都必须是小的（即价值低于 $1/q$）。附加集合 H_u^+恰好包含那些对代理人 u而言仍具有高价值的额外物品，并且 $v_u(e) < 1/q$ 对所有 $e > h_u$都成立。现在，给定一个供应商 $u \in G \setminus W$，我们的目标是获得一个可行配置集合，使其中的配置能够同时由 $[h_u] = E \sqcup S \sqcup H_u^+$中的不同物品满足。这样，我们就能将尾部补全 **引理** 5.3 推广到供应者尾部 $\{h_u+1,\dots,m\}$。

观察 8.1。 对于每个供应商候选者 $u \in G \mid W$，剩余头部 H_u^+很小，即

$$h_u - h \leq q^2(16\Lambda+1).$$

证明。 根据 H_u^+的定义，我们有 $v_u(H_u^+) \geq |H_u^+|/q$。然后，由**推论** 6.2，

$$\frac{h_u - h}{q} \leq v_u(H_u^+) \leq v_u(M \setminus [h]) \leq n - v_u([h]) \leq q(16\Lambda+1).$$

观察如下。 □

定义8.2。 固定供应商 $u_* \in G \mid W$。对于每个代理人 $i \in N$，其建议配置 为

$$\hat{\pi}_{u_*,i} := \hat{\pi}^E_{u_*,i} \uplus \hat{\pi}^S_{u_*,i} \uplus \hat{\pi}^+_{u_*,i},$$

其中，每个部分都旨在分别仅使用 E、S、$H_{u_*}^+$ 中的不同物品来满足。

现在，我们将部分说明供应商 u_* 如何为代理人 $i \in N$ 构建建议配置。

定义 8.3。 对于具有 *MMS* 划分 $\{B_{u_*,1},\dots,B_{u_*,n}\}$ 的供应商 $u_* \in G \mid W$，如果一个物品束 $B_{u_*,j}$, $j \in [n]$ 被称为例外，则

$$B_{u_*,j} \cap S \neq \varnothing \qquad or \qquad v_{u_*}(B_{u_*,j} \cap [h]) < 1 - 1/q.$$

观察 8.2。 对于供应商 $u_* \in G|W$，例外捆绑的总数至多为

$$|S| + q^2(16\Lambda + 1).$$

证明。 所有物品束 $B_{u_*,\,1}$，……，$B_{u_*,\,n}$ 两两不相交，因此它们中至多有 $|S|$ 个与 S相交。此外，每个满足 $v_{u_*}(B_{u_*,\,j} \cap [h]) < 1 - 1/q$ 的物品束都会导出一个无效的舍入头部配置 $\pi_{u_*,\,j}$。由于 $u_* \in G$，根据 **引理** 7.2 此类物品束的总数为 $\theta_{u_*} \le q^2(16\Lambda + 1)$，因此例外物品束的总数至多为

$$|S| + q^2(16\Lambda + 1).$$

□

为代理人 $i \in N$构造建议配置时，供应商 u_* 的操作会根据 $\{B_{u_*,\,1}$，……，$B_{u_*,\,n}\}$ 中的哪些物品束属于例外、哪些不属于例外而有所不同。具体而言：

- 对于每个例外物品束 $B_{u_*,\,j}$，我们将选择一个不同的接收者 $i \in N$，并仅根据$B_{u_*,\,j}$中物品的价值，创建建议配置部分 $\hat{}\pi^{E}_{u_*,\,i}$、$\hat{}\pi^{S}_{u_*,\,i}$ 和 $\hat{}\pi^{+}_{u_*,\,i}$。由此得到的建议配置 $\hat{}\pi_{u_*,\,i}$ 对代理人 i而言可能不可接受。如果 i 最终使用了不可接受的 $\hat{}\pi_{u_*,\,i}$，他将在之后的尾部补全过程中获得适当的尾部配置。

- 所有非例外捆绑 $B_{u_*,j}$ 都满足 $B_{u_*,j} \cap [h] \subseteq E$。对于剩余代理，我们将重新整理非例外捆绑的 E 部分 $B_{u_*,j} \cap E$，从而得到一组建议配置 $\hat{}\pi_{u_*,i}$，使得 $\hat{}\pi^{S}_{u_*,i} = \varnothing = \hat{}\pi^{+}_{u_*,i}$，即 $\hat{}\pi_{u_*,\,i} = \hat{}\pi^{E}_{u_*,i}$，并且每位接收者$i$ 的建议配置 $\hat{}\pi_{u_*,i}$ 都已可接受（因此无需进行尾部补全）。

为了说明供应商 u_* 究竟如何为代理人 $i \in N$创建建议配置，以及这些配置为何可行，我们将介绍建议配置中 S 部分和 $H^{+}_{u_*}$ 部分的构造，并假设我们已知每个例外物品束分配给了哪个代理人。

定义 8.4。 固定一个供应商 $u_* \in G \setminus W$，并将供应商的 *MMS* 划分 $\{B_{u_*,1}, \ldots, B_{u_*,n}\}$ 中的例外捆绑指定给不同的接收者 $i \in N$，称这些代理人为例外代理人。

对于每个指定捆绑为 $B_{u_*,j}$ 的例外代理人 i，定义

$$\hat{\pi}^{S}_{u_*,i} := \{\tilde{v}_{u_*}(e) :\ e \in B_{u_*,j} \cap S\}, \qquad \hat{\pi}^{+}_{u_*,i} := \{\tilde{v}_{u_*}(e) :\ e \in B_{u_*,j} \cap H^{+}_{u_*}\}.$$

对于每个非例外代理人 i，设 $\hat{}\pi^{S}_{u_*,i} = \varnothing = \hat{}\pi^{+}_{u_*,i}$。

注意，建议配置的部分 $\hat{}\pi^{S}_{u_*,i}$ 和 $\hat{}\pi^{+}_{u_*,i}$ 中的价值是根据 u_* 而非 i 计算的。一个自然的问题是，将这样的配置分配给代理人 $i \in N$ 是否仍然可行，即他们能否使用不同物品同时满足所有配置。我们将证明，对于每个建议配置 $\hat{}\pi_{u_*,i}$，只要接收者 i 与其指定的例外捆绑 $B_{u_*,j}$“兼容”，那么对于任意代理人子集 N，这些建议配置的 S 部分和 $H^{+}_{u_*}$ 部分分别在 S 和 $H^{+}_{u_*}$ 中都是可行的。

引理 8.1. 对于上述建议的部分 $\hat{}\pi^{S}_{u_*,i}$ 和 $\hat{}\pi^{+}_{u_*,i}$，$i \in N$，对于每个 $0 \le \ell \le m$：

$$\sum_{i \in N} \mathcal{P}_{u_*}(\hat{\pi}^{S}_{u_*,i}, \ell) \le |S \cap [\ell]|, \qquad \sum_{i \in N} \mathcal{P}_{u_*}(\hat{\pi}^{+}_{u_*,i}, \ell) \le |H^{+}_{u_*} \cap [\ell]|.$$

此外，如果每个代理人 $i \in N$ 还满足

- S-兼容性：对于每个 $\alpha \in \hat{}\pi^{S}_{u_*,i}$，都有 $v_i(\max(S \cap [m_{u_*}(\alpha)])) \ge \alpha$；
- H^{+}-兼容性：对于每个 $\alpha \in \hat{}\pi^{+}_{u_*,\,i}$ 都有 $v_i(m_{u_*}(\alpha)) \ge \alpha$；

然后，对于每个前缀 $0 \le \ell \le m$，我们都有

$$\sum_{i \in N} \mathcal{P}_i(\hat{\pi}^S_{u_*,i}, \ell) \le |S \cap [\ell]|, \qquad \sum_{i \in N} \mathcal{P}_i(\hat{\pi}^+_{u_*,i}, \ell) \le |H^+_{u_*} \cap [\ell]|.$$

证明。由于 $\hat{\pi}^S_{u_*,i}$ 是根据供应商的 MMS 划分构造的，因此，供应商的前缀负载 $\mathcal{P}_{u_*}(\hat{\pi}^S_{u_*,i}, \ell)$ 所计数的每个需求 α 都有一个来源物品 $e \in S$ 满足 $e \le m_{u_*}(\alpha) \le \ell$。此外，所有这些物品在所有建议的 S-配置之间均各不相同。这证明了关于 S-部分的第一个不等式，而关于 $H^+_{u_*}$-部分的证明完全类似。

接下来，考虑某个物品 $e \in B_{u_*,j} \cap H^+_{u_*}$的需求 $\alpha = \tilde{v}_{u_*}(e)$。由于 $v_{u_*}(e) \ge \alpha \ge 1/q$，

$$h < e \le m_{u_*}(\alpha) \le h_{u_*},$$

也就是说，断点位于 $H^+_{u_*}$ 中。如果对于 $i \in N$ 我们有 $v_i(m_{u_*}(\alpha)) \ge \alpha$，那么 $m_i(\alpha) \ge m_{u_*}(\alpha)$。因此，对于每个 $i \in N$ 和每个前缀 $0 \le \ell \le m$，

$$\mathcal{P}_i(\hat{\pi}^+_{u_*,i}, \ell) \le \mathcal{P}_{u_*}(\hat{\pi}^+_{u_*,i}, \ell),$$

这直接意味着

$$\sum_{i \in N} \mathcal{P}_i(\hat{\pi}^+_{u_*,i}, \ell) \le \sum_{i \in N} \mathcal{P}_{u_*}(\hat{\pi}^+_{u_*,i}, \ell) \le |H^+_{u_*} \cap [\ell]|.$$

最后，考虑某件物品 $e \in B_{u_*,j} \cap S$ 的需求 $\alpha = \tilde{v}_{u_*}(e)$，其中 $\alpha \in \hat{\pi}^s_{u_*,i}$适用于代理人 $i \in N$。由于 $v_{u_*}(e) \ge \alpha$，我们有 $e \in S \cap [m_{u_*}(\alpha)]$,，因此它非空。然后，根据假设 $v_i(\max(S \cap [m_{u_*}(\alpha)]))$ $\ge \alpha$，因此

$$e \le \max(S \cap [m_{u_*}(\alpha)]) \le m_i(\alpha).$$

因此，若将 α 计入 $\mathcal{P}_i(\hat{\pi}^S_{u_*,i}, \ell)$，其来源物品 e 满足 $e \le m_i(\alpha) \le \ell$。因此，在 ℓ 处计入总 S-前缀负载的每项需求，其来源物品都属于 $S \cap [\ell]$，而且这些物品在所有建议配置的 S-配置中各不相同。由此可知，对每个 $0 \le \ell \le m$，

$$\sum_{i \in N} \mathcal{P}_i(\hat{\pi}^S_{u_*,i}, \ell) \le |S \cap [\ell]|.$$

□

我们将挑选一位供应商 u_* 以及其例外捆绑的指定接收者，使得**引理** 8.1的兼容性条件成立。构造建议配置的 E-部分要复杂得多，稍后再讨论。

8.1.1 有界替换

暂且假设我们选择了某个供应商 $u_* \in G \setminus W$，并构造了某个由建议配置组成的集合 $\{\hat{\pi}_{u_*,i}\}_{i \in N}$（根据引理 8.1，包含 S 部分和 $H^+_{u_*}$ 部分），其中代理人 $i \in N$ 的建议配置为 $\hat{\pi}_{u_*,i}$。现在，正如本节前面所述，我们的任务是选择一个代理人集合 $A \subseteq I$，让其中的代理人保留其旧配置 π_i，并为其他每个代理人 $i \in N \setminus A$指定一个建议配置 $\hat{\pi}_{u_*,i}$，使得条件 (E$_{\mathcal{L}_S}$)、(A-ν) 和 (S) 均成立。更确切地说，我们希望

$$\sum_{i \in A} \mathcal{P}_i(\pi^E_i, c_s) + \sum_{i \in N \setminus A} \mathcal{P}_i(\hat{\pi}^E_{u_*,i}, c_s) \le |E \cap [b_s]|, \qquad \forall (b_s, c_s) \in \mathcal{L}_S; \tag{E$_{\mathcal{L}_S}$}$$

$$\sum_{i \in N \setminus A} |\hat{\pi}_{u_*,i}| \le \frac{\nu}{q}; \tag{A-ν}$$

$$\sum_{i \in A} \mathcal{P}_i(\pi^S_i, \ell) + \sum_{i \in N \setminus A} \mathcal{P}_i(\hat{\pi}^S_{u_*,i}, \ell) \le |S \cap [\ell]|, \qquad \forall 0 \le \ell \le m. \tag{S}$$

请注意，配置 $\hat{}\pi_{u_*,\,i}$ 的残余头部部分不会对集合 A的选择施加额外限制，因为代理人 $i \in I$ 的旧配置 π_i 仅使用头部 $[h]$，且根据 **引理** 8.1 对于任意 $A \subseteq I$，

$$\sum_{i \in N \setminus A} \mathcal{P}_i(\hat{\pi}^+_{u_*,i}, \ell) \le \sum_{i \in N} \mathcal{P}_i(\hat{\pi}^+_{u_*,i}, \ell) \le |H^+_{u_*} \cap [\ell]|, \qquad \forall 0 \le \ell \le m.$$

（S）的约束更为棘手，因为我们需要同时控制$m+1$ 不同前缀处的负载。幸运的是，我们可以像之前利用条件（E）和（E$\mathcal{L}_S$）那样获得类似的简化，并且只在有限个不同前缀处保留（S），这些前缀对应于供应商 u_*的高需求断点。

定义 8.5。 设 $I \subseteq N$ 和 $\{\pi_i\}_{i \in I}$ 由 推论 7.2得到。对于配置 $\{\pi^S_i\}_{i \in I}$，一个 S-证书 是一个两两不相交的集合族 $S_i \subseteq S$，对于 $i \in I$，满足 $|S_i| = |\pi^S_i|$ 和S_i 为代理人 i满足配置 π^S_i。根据 推论 7.2 和 引理 3.1，这样的证书必然存在。

集合 S_i 记录了集合 S 中满足旧配置 π^S_i 的 S 部分的物品，适用于 $i \in I$。如果代理人 $i \in I$ 保留其旧配置，即 $i \in A$，我们就“保留”其证书 S_i；否则， S_i 中的物品将可供供应商 u_* 的建议配置使用。

注意，对于每个 $i \in I$，对于每个前缀 ℓ，均有 $\mathbf{P}_i(\pi^S_i, \ell) \le |S_i \cap [\ell]|$。我们将利用这个上界，把代理人配置 A 和为 $N \setminus A$ 建议的供应商配置上的条件 (S)，简化为仅针对供应商配置 $\hat{}\pi_{u_*,i}$ 的条件。这样一来，无需在配置 π^S_i（对应 $i \in A$）和 $\hat{}\pi^S_{u_*,i}$（对应 $i \in N \setminus A$）的每个相关断点处检查 (S)——断点数量可能取决于代理人/物品的数量——只需在每个可能的供应商断点处检查仅涉及供应商的 (S) 版本即可；由于 $|\mathsf{Q}| = Q = O(q \log q)$，这样的断点数量是常数。这将针对物品 S 增加一组额外的受保护前缀约束。

下面的引理是**引理** 4.1 （见第 4 节）的一个类似结果。

引理 8.2。 固定一个供应商 $u_* \in G \setminus W$ 并构造建议配置 $\hat{}\pi^S_{u_*,i}$, $i \in N$，并假设它们满足 S-兼容条件（见引理 8.1）。若选择 $A \subseteq I$ 满足

$$\sum_{i \in A} |S_i \cap [m_{u_*}(\alpha)]| + \sum_{i \in N \setminus A} \mathcal{P}_{u_*}(\hat{\pi}^S_{u_*,i}, m_{u_*}(\alpha)) \le |S \cap [m_{u_*}(\alpha)]| \tag{S$*$}$$

对于每个可能的供应商断点 $m_{u_*}(\alpha)$ 对于 $\alpha \in \mathsf{Q}$，进而对于每个前缀 $0 \le \ell \le m$，

$$\sum_{i \in A} \mathcal{P}_i(\pi^S_i, \ell) + \sum_{i \in N \setminus A} \mathcal{P}_i(\hat{\pi}^S_{u_*,i}, \ell) \le |S \cap [\ell]|. \tag{S}$$

证明。为每个 $i \in A$预留物品束 S_i，这些代理人将零售其原有的 S-配置。我们将证明，所有其他代理人 $i \in N \setminus A$ 所建议的 S-配置 $\hat{}\pi^S_{u_*,\,i}$ 可以使用互不相同的剩余物品同时得到满足。

考虑任意前缀 ℓS$*$的条件（ ℓ。注意，我们可以将其重新排列为

$$\sum_{i \in N \setminus A} \mathcal{P}_{u_*}(\hat{\pi}^S_{u_*,i}, \ell) \le |S \cap [\ell]| - \sum_{i \in A} |S_i \cap [\ell]|. \tag{$*$}$$

($*$) 的右侧统计了 S 在前缀 $[\ell]$ 中的物品数量，这些物品在为 A预留证书后仍可用。事实上，由于所有 S_i 都是 S的两两不交子集，因此有

$$|S \cap [\ell]| - \sum_{i \in A} |S_i \cap [\ell]| = \left| \left(S \setminus \bigcup_{i \in A} S_i \right) \cap [\ell] \right|.$$

特别地，该数量关于 ℓ是非负且非递减的；当我们将 ℓ 增加 1 时，只有当物品 $\ell+1$ 是 S的未预留物品时，($*$)中的剩余容量才会增加 1。

另一方面，(∗)的左侧仅在供应商断点 $m_{u_*}(\alpha)$,$\alpha \in Q$ 处增加。因此，为了使每个前缀 $0 \le \ell \le m$ 都满足 (∗)，只需仅在前缀 $\ell = m_{u_*}(\alpha)$（ $\alpha \in Q$）处预先保持该不等式即可。事实上，如果 ℓ 处的负载为正，且 $m_{u_*}(\alpha) \le \ell$是 $\alpha \in \hat{\pi}^S_{u_*}$的最后一个 S-断点，i 位于 ℓ之前，那么 $m_{u_*}(\alpha)$ 处的负载与 ℓ 处相同，而 ℓ 处的剩余容量至少与 $m_{u_*}(\alpha)$处的一样。因此，在 $m_{u_*}(\alpha)$处强制满足 (∗)（这正是 (S∗)）也意味着 ℓ 处满足该不等式。如果负载为 0，则无论如何不等式都成立。

根据假设，(S∗) 对每个供应商断点 $m_{u_*}(\alpha)$ 都成立，因此 (∗) 在每个前缀 $0 \le \ell \le m$ 处都成立。然后，根据 **引理**3.1 ，我们可以同时满足所有建议配置$\{\hat{\pi}^S_{u_*,\,i}\}_{i \in N \setminus A}$ （相对于估值 v_{u_*}），使用不同物品的

$$S \setminus \bigcup_{i \in A} S_i.$$

我们可以将此分配视为需求 $\alpha \in \hat{\pi}^S_{u_*,i}$ 与相应物品 e 之间的匹配，该匹配满足 α，即 $v_{u_*}(e) \ge \alpha$。我们声称，对于每个代理人 $i \in N \setminus A$ 以及与物品 e 匹配的每个需求 $\alpha \in \hat{\pi}^S_{u_*,i}$，也有 $v_i(e) \ge \alpha$ 成立。事实上，由于 $v_{u_*}(e) \ge \alpha$，我们有$e \in S \cap [m_{u_*}(\alpha)]$,，因此 $e \le \max\{S \cap [m_{u_*}(\alpha)]\}$，并且根据引理 8.1 的 S-兼容性，

$$v_i(e) \ge v_i(\max\{S \cap [m_{u_*}(\alpha)]\}) \ge \alpha.$$

由此可知，结合针对 $i \in A$ 的证书 S_i，我们得到S 中的物品与所有配置 $_{i \in A}$ 和 $_{i \in N \setminus A}$ 的需求之间的一个匹配，使得对于每个与代理人 i 的配置中的需求 α 匹配的物品 e，都有 v_i $(e) \ge \alpha$。但这样一来，代理人 A 和 $N \setminus A$ 在前缀 ℓ 处的总负载中计入的每项需求，都必须与$S \cap [\ell]$中的一个不同物品匹配。因此，对于每个前缀 $0 \le \ell \le m$，必须满足

$$\sum_{i \in A} \mathcal{P}_i(\pi^S_i, \ell) + \sum_{i \in N \setminus A} \mathcal{P}_i(\hat{\pi}^S_{u_*,i}, \ell) \le |S \cap [\ell]|.$$

□

由**引理** 8.1 和**引理** 8.2 可知，对于所选的子集 $A \subseteq I$ （其中的代理人保留其已分配配置$\{\pi_i\}$ $_{i \in A}$），以及收到供应商建议 $\hat{\pi}_{u_*,i}$ 的剩余代理 $i \in N \setminus A$，要使每个前缀 $0 \le \ell \le m$ 都满足

$$\sum_{i \in A} \mathcal{P}_i(\pi_i, \ell) + \sum_{i \in N \setminus A} \mathcal{P}_i(\hat{\pi}_{u_*,i}, \ell) \le \ell,$$

只需满足　以下条件对 $A \subseteq I$ 和建议集合 $\{\hat{\pi}_{u_*,i}\}_{i \in N}$成立。

$$\sum_{i \in A} \mathcal{P}_i(\pi^E_i, c_s) + \sum_{i \in N \setminus A} \mathcal{P}_i(\hat{\pi}^E_{u_*,i}, c_s) \le |E \cap [b_s]|, \qquad \forall (b_s,\ c_s) \in \mathcal{L}_S; \qquad (\mathrm{E}_{\mathcal{L}_S})$$

$$\sum_{i \in N \setminus A} |\hat{\pi}_{u_*,i}| \le \frac{\nu}{q}; \qquad (\text{A-}\nu)$$

$$\sum_{i \in A} |S_i \cap [m_{u_*}(\alpha)]| + \sum_{i \in N \setminus A} \mathcal{P}_{u_*}(\hat{\pi}^S_{u_*,i}, m_{u_*}(\alpha)) \le |S \cap [m_{u_*}(\alpha)]|, \qquad \forall \alpha \in \mathcal{Q}. \qquad (\mathrm{S}*)$$

请注意，现在我们需要处理的约束总数为 $|\mathcal{L}_S| + |\mathcal{Q}| + 1$，这只是一个取决于 q 的**常数**，因为 $|\mathcal{L}_S| \le \lceil Q \cdot \frac{q}{q-1} \rceil + 1$。

我们首先尝试寻找一个集合 $A \subseteq I$，使其仅满足（E$\mathcal{L}_S$）和（S∗）。假设建议供应商集合$\{\hat{\pi}_{u_*,i}\}$ $_{i \in N}$ 满足（E$\mathcal{L}_S$）和（S∗），且 $A = \varnothing$，也就是说，

$$\sum_{i \in N} \mathcal{P}_i(\hat{\pi}^E_{u_*,i}, c_s) \le |E \cap [b_s]|, \qquad \forall (b_s, c_s) \in \mathcal{L}_S; \qquad (\mathrm{E}_{\mathcal{L}_S}\text{-}u)$$

$$\sum_{i \in N} \mathcal{P}_{u_*}(\hat{\pi}^S_{u_*,i}, m_{u_*}(\alpha)) \le |S \cap [m_{u_*}(\alpha)]|, \qquad \forall \alpha \in \mathcal{Q}。 \qquad (\mathrm{S}*\text{-}u)$$

这样，如果我们将每个旧配置$\{\pi_i\}_{i\in I}$替换为建议配置，就会得到一个满足受保护前缀约束（E$\mathcal{L}_S$）和（S$*$）的可行集合。这种替换的问题在于，新增需求的总数$\sum_{i\in N}|\hat{}\pi_{u_*,i}|$可能没有上界，而我们希望替换规模至多为$\nu/q$，其大致为$O_q(\log^2 n)$。我们的目标是证明，只需将有限个旧配置替换为建议配置，就能得到一个满足（$A\subseteq I$（E$\mathcal{L}_S$）和（S$*$）的可行。这与第4节中的做法类似，使用迪克森引理 [Dic13]。

下面的定理是**定理**4.1的完整对应版本。

定理 8.1 (有界替换)。对于每一对整数t、$q\geq 1$，都存在一个全局常数$C_{t,\,q}\geq 1$，它仅取决于t和q，使得以下结论成立。

令$I\subseteq N$和$\{\pi_i\}_{i\in I}$由推论7.2得到。对于每个$i\in I$，固定一个S-证书$\{S_i\}_{i\in I}$，并令受保护的E-前缀数量为$|L_S|=t$。固定一个供应商$u_*\in G\setminus W$，并为每个代理人$i\in N$指定一个相应的建议配置$\hat{}\pi_{u_*,\,i}=\hat{}\pi^{E}_{u_*,\,i}\uplus\hat{}\pi^{S}_{u_*,\,i}\uplus\hat{}\pi^{+}_{u_*,\,i}$。

假设f　对于每个$i\in N$，$|\hat{}\pi_{u_*,\,i}|\leq q$，每个$S$-需求$\alpha\in\hat{}\pi^{S}_{u_*,\,i}$都属于$Q$，并且

$$\sum_{i\in N}\mathcal{P}_i(\hat{\pi}^{E}_{u_*,i},c_s)\leq|E\cap[b_s]|,\qquad\forall(b_s,c_s)\in\mathcal{L}_S;\qquad(\mathrm{E}_{\mathcal{L}_S}\text{-}u)$$

$$\sum_{i\in N}\mathcal{P}_{u_*}(\hat{\pi}^{S}_{u_*,i},m_{u_*}(\alpha))\leq|S\cap[m_{u_*}(\alpha)]|,\qquad\forall\alpha\in\mathcal{Q}.\qquad(\mathrm{S}*\text{-}u)$$

那么，存在$A\subseteq I$使得$|N\setminus A|\leq C_{t,\,q}(d-|I|)$且

$$\sum_{i\in A}\mathcal{P}_i(\pi^{E}_{i},c_s)+\sum_{i\in N\setminus A}\mathcal{P}_i(\hat{\pi}^{E}_{u_*,i},c_s)\leq|E\cap[b_s]|,\qquad\forall(b_s,c_s)\in\mathcal{L}_S;\qquad(\mathrm{E}_{\mathcal{L}_S})$$

$$\sum_{i\in A}|S_i\cap[m_{u_*}(\alpha)]|+\sum_{i\in N\setminus A}\mathcal{P}_{u_*}(\hat{\pi}^{S}_{u_*,i},m_{u_*}(\alpha))\leq|S\cap[m_{u_*}(\alpha)]|,\qquad\forall\alpha\in\mathcal{Q}.\qquad(\mathrm{S}*)$$

特别是，

$$\sum_{i\in N\setminus A}|\hat{\pi}_{u_*,i}|\leq qC_{t,q}(d-|I|),$$

因此，如果整数ν满足$\nu\geq q^2C_{t,\,q}(d-|I|)$，条件（$A$-$\nu$）对同一个$A$选择成立。

我们在附录 B（定理 B.1）中证明定理 8.1。我们将其证明应用于$Q:=|\mathcal{Q}|$和$C_{t,q}:=C_{t,\mathcal{Q},q}$。推论 7.2 保证了初始受保护的$E$-前缀不等式，而引理 8.2 中固定的$S$-证书给出了关于$S$的初始不等式。我们仅使用建议配置的$E/S$部分，合并后的大小仍不超过$q$。

定理 8.1 允许将代理人$\{\pi_i\}_{i\in I}$的初始配置集合补全$\{\pi_i\}_{i\in I}$，使其成为代理人$I\subseteq N$的完整配置集合N，同时每增加一名新代理人，只替换数量为常数的旧配置。现在我们将展示如何把该定理与第 7 节中先前建立的约化结合起来，从而在每个前缀$0\leq\ell\leq m$上实现可行性。

回顾一下，**推论** 7.2 最多留下

$$d-|I|\leq\theta+\varepsilon|F|+\rho_{ES}(q,dn)$$

未分配的代理人。因此，**定理** 8.1 最多引入

$$\sum_{i\in N\setminus A}|\hat{\pi}_{u_*,i}|\leq qC_{t,q}(\theta+\varepsilon|F|+\rho_{ES}(q,dn))$$

额外需求。我们希望该数量至多为ν/q，从而**推论** 7.1适用。由于$|F|\leq(\lceil Q\cdot\frac{q}{q-1}\rceil+1)\cdot\nu$，增大$\nu$也会增大由缓冲区$F$导致的未分配代理人数上界。因此，为了控制这一部分的贡献，我们将先选择足够小的$\varepsilon\in(0,1)$，然后选择整数$\nu\geq 1$以弥补剩余的损失。

定义 8.6。 对于整数 $q \geq 9$，定义全局常数 C_q 为

$$C_q := \max\left\{C_{t,q} : 1 \leq t \leq \left\lceil Q \cdot \frac{q}{q-1} \right\rceil + 1\right\},$$

其中 $C_{t,\ q}$ 由定理*8.1*得到。

推论 8.1. 在　　推论 *6.2*的情形下，选取 $\varepsilon \in (0,\ 1)$ 和满足条件的整数 $\nu \geq 1$

$$\varepsilon \leq \frac{1}{2q^2 C_q\left(\left\lceil Q \cdot \frac{q}{q-1}\right\rceil + 1\right)}, \qquad \nu \geq 2q^2 C_q(\theta + \rho_{ES}(q, dn)).$$

应用引理*7.1*，取这些 ε、ν 的值，得到一个划分 $[h] = E \sqcup S$、集合 $F \subseteq E$、$W \subseteq N$ 和受保护前缀 $\mathcal{L}_S$，然后使用推论*7.2* 得到集合 $I \subseteq N$，其中包含已分配配置的代理人$\{\pi_i\}_{i\in I}$，并具有以下性质：

- 对于每个 $i \in I$，　π_i 都有一个分解 $\pi_i = \pi_i^E \uplus \pi_i^S$，其中 $|\pi_i| \leq q$、　$v(\pi_i) \geq 1 - 2/q$ 并且

$$d - |I| \leq \theta + \varepsilon|F| + \rho_{ES}(q, dn);$$

- 它们的 E-前缀负载满足

$$\sum_{i\in I} \mathcal{P}_i(\pi_i^E, \ell) \leq |E \cap [\ell]| - \frac{\nu}{q}, \qquad \forall \ell \in E \setminus F; \qquad (\text{E-}\nu)$$

$$\sum_{i\in I} \mathcal{P}_i(\pi_i^E, c_s) \leq |E \cap [b_s]|, \qquad \forall (b_s, c_s) \in \mathcal{L}_S. \qquad (\text{E}_{\mathcal{L}_S})$$

- 存在不相交集合 $S_i \subseteq S$, $i \in I$，使得 S_i 满足 π_i^S，对于代理人 i 和 $|S_i| = |\pi_i^S|$。

假设存在一个供应商 $u_* \in G \setminus W$ 以及配置 $\hat{}\pi_{u_*,\ i} = \hat{}\pi^E_{u_*,\ i} \uplus \hat{}\pi^S_{u_*,\ i} \uplus \hat{}\pi^+_{u_*,\ i}$, $i \in N$，使得

- 对于每个 $i \in N$，　$|\hat{}\pi_{u_*,\ i}| \leq q$，以及 $\hat{}\pi^S_{u_*,\ i}$，　$\hat{}\pi^+_{u_*,\ i}$ 均如 定义 *8.4*;
- $\{\hat{}\pi_{u_*,\ i}\}_{i\in N}$ 的　E-部分满足受保护前缀不等式：

$$\sum_{i\in N} \mathcal{P}_i(\hat{\pi}^E_{u_*,i}, c_s) \leq |E \cap [b_s]|, \qquad \forall (b_s, c_s) \in \mathcal{L}_S; \qquad (\text{E}_{\mathcal{L}_S}\text{-}u)$$

- 每个 $i \in N$ 都是 S-兼容的：对于每个 $\alpha \in \hat{}\pi^S_{u_*,\ i}$ 成立 $v_i(\max(S \cap [m_{u_*}(\alpha)])) \geq \alpha$;
- 每个 $i \in N$ 都是 H^+-兼容的：对于每个 $\alpha \in \hat{}\pi^+_{u_*,\ i}$ 都有 $v_i\left(m_{u_*}(\alpha)\right) \geq \alpha$。

那么存在集合 $A \subseteq I$，使得 $|N \setminus A| \leq \nu/q^2$，并且对于每个前缀 $0 \leq \ell \leq m$,

$$\sum_{i\in A} \mathcal{P}_i(\pi_i, \ell) + \sum_{i\in N\setminus A} \mathcal{P}_i(\hat{\pi}_{u_*,i}, \ell) \leq \min\{\ell, h_{u_*}\}.$$

作为推论，这些配置 $\{\pi_i\}_{i\in A}$ 和 $\{\hat{}\pi_{u_*,\ i}\}^{i\in N\setminus A}$ 可以由 $[h_{u_*}]$ 中不同的物品同时满足，其中它们的 E-、 S-以及残余头部部分分别在 E、 S、$H^+_{u_*}$ 内得到满足。

证明。 由于 $|F| \leq (\lceil Q \cdot \frac{q}{q-1}\rceil + 1) \cdot \nu$，根据参数 ε，　ν的选取，我们有

$$d - |I| \leq \theta + \rho_{ES}(q, dn) + \varepsilon\left(\left\lceil Q \cdot \frac{q}{q-1}\right\rceil + 1\right)\nu \leq \frac{\nu}{2q^2 C_q} + \frac{\nu}{2q^2 C_q} = \frac{\nu}{q^2 C_q}.$$

根据 定义 8.4，所有位于 $\hat{}\pi^S_{u_*,\,i}$，$i \in N$的需求都属于 $\mathcal{Q}$。此外，**引理** 8.1 表明

$$\sum_{i\in N} \mathcal{P}_{u_*}(\hat{\pi}^S_{u_*,i}, m_{u_*}(\alpha)) \le |S \cap [m_{u_*}(\alpha)]|, \qquad \forall \alpha \in \mathcal{Q}. \tag{S*-u}$$

因此，我们可以应用**定理**8.1，得到 $A \subseteq I$ 其中 $|N \setminus A| \le C_q(d - |I|) \le \nu/q^2$ 并且

$$\sum_{i\in A} \mathcal{P}_i(\pi^E_i, c_s) + \sum_{i\in N\setminus A} \mathcal{P}_i(\hat{\pi}^E_{u_*,i}, c_s) \le |E \cap [b_s]|, \qquad \forall (b_s, c_s) \in \mathcal{L}_S; \tag{E$_{\mathcal{L}_S}$}$$

$$\sum_{i\in A} |S_i \cap [m_{u_*}(\alpha)]| + \sum_{i\in N\setminus A} \mathcal{P}_{u_*}(\hat{\pi}^S_{u_*,i}, m_{u_*}(\alpha)) \le |S \cap [m_{u_*}(\alpha)]|, \qquad \forall \alpha \in \mathcal{Q}. \tag{S*}$$

特别地，

$$\sum_{i\in N\setminus A} |\hat{\pi}_{u_*,i}| \le q|N \setminus A| \le \frac{\nu}{q}.$$

将**推论**7.1 应用于 A 和$\{\hat{}\pi_{u_*,\,i}\}_{i\in N\setminus A}$，其中 (E$\mathcal{L}_S$)，可得，对于每个 $0 \le \ell \le m$，

$$\sum_{i\in A} \mathcal{P}_i(\pi^E_i, \ell) + \sum_{i\in N\setminus A} \mathcal{P}_i(\hat{\pi}^E_{u_*,i}, \ell) \le |E \cap [\ell]|. \tag{E}$$

接下来，(S*) 与 S-相容性使我们能够应用**引理**8.2，从而对于 $0 \le \ell \le m$:

$$\sum_{i\in A} \mathcal{P}_i(\pi^S_i, \ell) + \sum_{i\in N\setminus A} \mathcal{P}_i(\hat{\pi}^S_{u_*,i}, \ell) \le |S \cap [\ell]|. \tag{S}$$

最后，**引理**8.1 和 H^+-相容性意味着，对于每个 $0 \le \ell \le m$:

$$\sum_{i\in N\setminus A} \mathcal{P}_i(\hat{\pi}^+_{u_*,i}, \ell) \le \sum_{i\in N} \mathcal{P}_i(\hat{\pi}^+_{u_*,i}, \ell) \le |H^+_{u_*} \cap [\ell]|. \tag{+}$$

结合 (E)、(S) 和 (+)，并利用 $E \sqcup S \sqcup H^+_{u_*} = [h_{u_*}]$，可得，对于每个 $0 \le \ell \le m$:

$$\sum_{i\in A} \mathcal{P}_i(\pi_i, \ell) + \sum_{i\in N\setminus A} \mathcal{P}_i(\hat{\pi}_{u_*,i}, \ell) \le |E \cap [\ell]| + |S \cap [\ell]| + |H^+_{u_*} \cap [\ell]| = \min\{\ell, h_{u_*}\}.$$

引理 3.1 在各自的集合中实现每个子轮廓，从而完成证明 f. □

8.2 选择供应商和接收者

推论 8.1 确定了供应商 u_* 及其建议配置 $\{\hat{}\pi_{u_*,i}\}_{i\in N}$为完成初始分配$\{\pi_i\}_{i\in I}$ 对于代理人 $I \subseteq N$ 到所有代理人的完整可行分配 N 所必须满足的条件（可能将一些旧配置替换为建议配置）。我们将说明如何选择供应商及其建议配置的接收者，使这些接收者兼容，即为这些代理人提供相应配置后满足条件（E$\mathcal{L}_S$-u），以及 S- 和 H^+- 兼容性条件**引理** 8.1。

回顾一下，对于具有划分 $\{B_{u_*,1}, \ldots, B_{u_*,n}\}$ 的供应商 u_*，物品束 $B_{u_*,j}$ 若满足以下条件，则称其为例外

$$B_{u_*,j} \cap S \ne \varnothing \qquad \text{or} \qquad v_{u_*}(B_{u_*,j} \cap [h]) < 1 - 1/q.$$

每个例外捆绑都将被分配给一个不同的例外接收者 $i \in N$，相应的建议 S-部分和 $H^+_{u_*}$-部分 $\hat{}\pi_{u_*,i}$ 则简单构造为

$$\hat{\pi}^S_{u_*,i} = \{\tilde{v}_{u_*}(e) : e \in B_{u_*,j} \cap S\}, \qquad \hat{\pi}^+_{u_*,i} = \{\tilde{v}_{u_*}(e) : e \in B_{u_*,j} \cap H^+_{u_*}\}.$$

根据**引理** 8.1，对于供应商 u_* 和接收者 i 的 $\hat{}\pi_{u_*,\,i}$，我们要求 :

- S-**相容性**：对于每个 $\alpha \in \hat{\pi}^{S}_{u_*,\,i}$ 均有 $v_i(\max(S \cap [m_{u_*}(\alpha)])) \geq \alpha$；
- H^{+}-**相容性**：对于每个 $\alpha \in \hat{\pi}^{+}_{u_*,\,i}$ 都有 $v_i(m_{u_*}(\alpha)) \geq \alpha$；

这表明，可以为每个例外捆绑$B_{u_*,\,j}$关联一组相容代理人，我们将其称为 B_{u_*}的合格接收者 $B_{u_*,\,j}$。随后，当 u_* 需要指定一个例外捆绑 $B_{u_*,\,j}$ （并构建一个配置）时，他可以从 B_{u_*}的合格接收者中 i $_j$任意挑选一位。

请注意，不同物品束的合格接收者可能相同或有所重叠，因为它们本质上是将所有代理人划分为相对较少的（可能不互斥的）类别。因此，为每个例外捆绑分别选择一位合格接收者，并不能保证这些代理人彼此不同。一个充分条件是，每个例外捆绑都有至少与供应商的例外捆绑数量相同的合格接收者。这样，我们就可以逐一指定接收者，并始终找到一位尚未被选用的合格代理人。

这一性质对任意供应商未必成立。因此，我们将从足够大的供应商候选人集合中选择 u_*，该集合同时也将作为例外捆绑的潜在接收者池。这里的关键观察是，每位供应商候选者都有资格接收自己的例外捆绑。因此，若某位候选者拥有的某个例外捆绑所对应的合格接收者过少，那么该候选者本身必定属于这些较小的合格接收者集合之一。接着，选择一位不属于任何此类较小合格接收者类别的供应商 u_*，即可保证其每个例外捆绑都对应一个较大的合格接收者集合。

我们将证明，例外捆绑能够引出的不同兼容类总数有一个上界。结合每位候选者所拥有的例外捆绑数量的上界 **观察** 8.2，我们便能对属于较小合格接收者集合的供应商候选者总数给出上界。于是，只要供应商候选者池足够大，我们就能选择一位不属于所有这些较小集合的供应商。这样一来，该供应商的每个例外捆绑都将有足够多的合格接收者，从而能够进行互不相同的分配。

请注意，通过这种方式，我们可以在任意足够大的供应商候选者集合中，选择供应商及其例外捆绑的接收者。这促使我们采用以下三阶段过程来选择供应商和接收者，并构造建议配置。

1. 选择一个足够大的供应商候选者集合 U，使得对于任意候选对象 $u \in U$，我们始终可以构造一个集合 $\{\hat{\pi}^{E}_{u,\,i}\}_{i \in N}$，其中的建议 E-配置满足

$$\sum_{i \in N} \mathcal{P}_i(\hat{\pi}^{E}_{u,i}, c_s) \leq |E \cap [b_s]|, \qquad \forall (b_s, c_s) \in \mathcal{L}_S. \qquad (\mathrm{E}_{\mathcal{L}_S}\text{-}u)$$

2. 在这个大型供应商候选者集合 U 中，选择一个供应商 $u_* \in U$，使其所有例外捆绑都拥有大量合格接收者。

3. 选定供应商 u_* 后，将该供应商的每个例外捆绑分别指定给一个不同的合格接收者，并根据定义 8.4构造相应的 S-和 H^{+}-配置。然后，构造相应的建议 E-配置 $\{\hat{\pi}^{E}_{u_*,\,i}\}_{i \in N}$，使其满足（$\mathrm{E}_{\mathcal{L}_S}$-$u$）。

下一节将解释如何为给定的供应商候选者 u 构造建议 E-配置$\{\hat{\pi}^{E}_{u,\,i}\}_{i \in N}$。本节其余部分将专门讨论如何选择大型供应商候选者集合 U，以及随后如何选择供应商 $u_* \in U$。

8.2.1 E 类别和供应商候选人

为了找到一个较大的 U 供应商候选者集合，使得对于任意 $u \in U$，都有相应的 E-配置 $\{\hat{\pi}^{E}_{u,i}\}$ $_{i \in N}$ 满足受保护前缀不等式（$\mathrm{E}_{\mathcal{L}_S}$-$u$），我们将把所有代理人 N 划分为若干类别，使得每个类别中的所有代理人在以下方面都“等价”：

受保护前缀 $(b_s, c_s) \in \mathcal{L}_S$。具体做法如下。回顾引理 S 中的集合 7.1，以及内部受保护前缀 c_s，$s \in [t-1]$，它们具有如下形式：

$$S = \bigcup_{s=1}^{t} \{a_s, \ldots, b_s\}, \qquad \text{and} \qquad c_s = \min\{b_s + \nu, a_{s+1} - 1\}, \forall s \in [t-1].$$

最后一个受保护前缀是 $(b_t, c_t) = (h, m)$，不会影响我们的分类。集合 S将物品 $E = [h] \setminus S$ 划分为 $t-1$ 个区间，这些区间位于 S的连续组成部分之间。

定义 8.7。对于每个 $s \in [t-1]$，将 E 的第 s 个区间定义为

$$E_s := \{b_s + 1, \ldots, a_{s+1} - 1\}.$$

我们为每个 $e \in E$ 关联一个与区间 $E_s \ni e$对应的代表项 $c_s + 1$。然后，我们将根据这些 $t-1$代表项的舍入值对代理人 N进行分类。

对于每个 a $gent$ $i \in N$ 以及每个 $s \in [t-1]$，定义第 s 个代表需求 a s

$$\alpha_{i,s} := \tilde{v}_i(c_s + 1).$$

注意，如果 $m_i(\alpha_{i,\ s}) \geq c_s + 1$ 且 $\alpha_{i,\ s} > 0$，则需求 $\alpha_{i,\ s}$ 不会在受保护前缀 c_s处产生负载。

定义 8.8。对于每个代理人 $i \in N$，定义其 E-签名 如下

$$\varphi_i := (\varphi_i(1), \ldots, \varphi_i(t-1)), \quad where \quad \varphi_i(s) := \begin{cases} \alpha_{i,s}, & \alpha_{i,s} \geq 1/q; \\ 0, & \alpha_{i,s} < 1/q. \end{cases}$$

如果两个代理人具有相同的 E-签名，则它们属于同一类别。对于签名 φ，记

$$N_\varphi := \{i \in N : \varphi_i = \varphi\}.$$

较小的代表需求 $\alpha_{i,s} < 1/q$ 不会被替换为零；我们只使用高需求 $\alpha_{i,s} \geq 1/q$ 来定义这些类别。

引理 8.3。令 $\Phi = \{\varphi_i : i \in N\}$ 表示所有出现过的 E-签名的集合。则

$$|\Phi| \leq \phi := \binom{\lceil Q \cdot \frac{q}{q-1} \rceil + Q}{Q}.$$

Mor此外，存在一个签名 φ，使得集合 $U = (G \mid W) \cap N_\varphi$ 满足

$$|U| \geq \frac{n}{2\phi},$$

对于每个 $i \in N_\varphi, s \in [t-1]$，我们都有 $\alpha_{i,s} = \varphi(s) \in Q$；并且对于每个 $u \in U, s \in [t-1]$ 和 $e \in E_s$，

$$\tilde{v}_u(e) \leq \alpha_{u,s} = \varphi(s).$$

也就是说，对于每个代理人 $u \in U$，每个 $e \in E_s$的舍入值都不超过 $c_s + 1$的价值。

证明。由于代表性物品的位置 $c_s + 1$ 随着 s增加，对于每个代理人 $i \in N$我们都有 $\alpha_{i,\ 1} \geq \alpha_{i,\ 2} \geq \cdots \geq \alpha_{i,\ t-1}$，并且将较小的需求替换为 0 不会影响顺序。因此，每个签名 φ_i都是一个长度为 $t-1$、其元素取自 $\mathcal{Q} \cup \{0\}$的非递增向量。每个这样的向量都由各类型元素的数量决定，因此根据插板法，可能的签名总数为（使用 $t \leq \lceil Q \cdot \frac{q}{q-1} \rceil + 1$ 这一来自 **引理** 7.1的上界）：

$$\binom{t-1+Q}{Q} \leq \binom{\lceil Q \cdot \frac{q}{q-1} \rceil + Q}{Q} = \phi.$$

接下来，我们寻找一个包含大量供应商候选人的签名类。根据 **推论** 6.2，至少有 $|G| \geq 3n/4$ 名优良代理人；根据 **引理** 7.1 我们有 $|W| \leq \varepsilon d$。根据 **推论** 8.1 中参数的选取方式，我们有 $\varepsilon \leq 1/4$，并且由于 $d \leq n$，

$$|G \setminus W| \geq |G| - |W| \geq \frac{3n}{4} - \varepsilon d \geq \frac{n}{2}.$$

选择使 $|(G \setminus W) \cap N_\varphi|$ 最大的 φ，并取 $U := (G \setminus W) \cap N_\varphi$。由于至多有 ϕ 个类别，因此必有 $|U| \geq n/(2\phi)$。

现在我们证明，代理人 $i \in N_\varphi$ 必须在所有代表性需求上完全一致，而不仅仅是在 φ_i-价值上。为此，取 $u \in U$。根据构造，对于每个 $s \in [t-1]$，都有 $c_s + 1 \leq a_{s+1} \leq h$。由于 $u \in G$，根据**推论** 6.2，我们有 $v_u(c_s + 1) \geq 1/q$，因此 $\varphi(s) = \alpha_{u,\,s} = \tilde{v}_u(c_s + 1) \in \mathcal{Q}$。与此同时，对于任何其他 $i \in N_\varphi$，我们也必须有 $\alpha_{i,\,s} = \varphi_i(s) = \varphi(s) \in \mathcal{Q}$。

最后，固定 $u \in U$，$s \in [t-1]$ 和物品 $e \in E_s$，令 $\alpha := \tilde{v}_u(e)$，注意到 $\alpha \in \mathcal{Q}$。如果 $e \geq c_s + 1$，那么我们立即有 $\tilde{v}_u(e) \leq \tilde{v}_u(c_s + 1) = \alpha_{u,\,s}$。否则，$b_s < e \leq c_s$ 且 $m_u(\alpha) \geq e > b_s$。由于 $u \notin W$，u 的高需求断点中没有一个属于 F，特别是，$m_u(\alpha) \notin (b_s,\ c_s]$。因此，$m_u(\alpha) \geq c_s + 1$，从而 $\alpha_{u,\,s} = \tilde{v}_u(c_s + 1) \geq \alpha = \tilde{v}_u(e)$。 □

我们将在下一节证明，对于每个代理人 $u \in U$，其中 U 选自**引理**8.3，都可以构造一个集合 $\{\hat{\pi}^E_{u,\,i}\}_{i \in N}$，其中的建议 E-配置满足受保护前缀不等式（E$\mathcal{L}_S$-u）。

8.2.2 兼容性类别和合格接收者

固定签名 φ 并设 $U = (G \setminus W) \cap N_\varphi$，其由**引理**8.3得到。所有代理人 $u \in U$ 都同意与区间 E_s、$s \in [t-1]$相对应的代表需求。然而，他们在S 上的价值以及其高需求断点可能不同。我们希望找到一个供应商 $u_* \in U$，使得 u_*的每个例外捆绑都有大量合格接收者，即与该捆绑的 S-部分和 H^+-部分兼容的代理人。这样，我们就能够将 u 的所有例外捆绑分别指定给不同的接收者，同时保持**引理**8.1的兼容条件。

首先，我们将每个供应商候选者的每个例外捆绑与一段简短描述相关联，该描述说明该捆绑的接收者必须满足的兼容性条件。

定义 8.9。 考虑供应商候选者 $u \in U$ 的一个例外捆绑 $B_{u,\,j}$。对于每个物品 $e \in B_{u,\,j} \cap (S \cup H^+_u)$，将 e 的参考物品 定义为

$$r_u(e) := \begin{cases} \max(S \cap [m_u(\alpha)]), & e \in S; \\ m_u(\alpha), & e \in H^+_u; \end{cases} \qquad where \qquad \alpha = \tilde{v}_u(e).$$

因此，对于 $e \in S$、H^+_u，参考物品 $r_u(e)$ 分别是 S、H^+_u 中能够满足代理人 u 因 e 而产生的需求的最后一个物品。

观察 8.3。 对于任意物品 $e \in B_{u,\,j} \cap (S \cup H^+_u)$，如果 $i \in N$ 满足 $v_i(r_u(e)) \geq \alpha$，那么与 e 属于同一集合（即 S 或 H^+_u）且满足代理人 u 的需求的每个物品，也会满足代理人 i 的需求。

此外，至多存在 $L := |S| + \lceil q^2(16\Lambda + 1) \rceil$ 个不同的参考物品，并且每个供应商候选者 $u \in U$ 的每个参考物品都属于集合

$$S \cup \{h+1, \ldots, \min(m, h + \lceil q^2(16\Lambda + 1) \rceil)\}.$$

证明。 在 S 和 H^+_u中，参考物品 $r_u(e)$ 是能够满足 $\alpha = \tilde{v}_u(e)$ 的最后一个物品，适用于 u。因此，若物品 e' 与 e 和 $v_u(e') \geq \alpha$属于同一个集合（S 或 H^+_u），则 $e' \leq r_u(e)$，这意味着 $v_i(e') \geq v_i(r_u(e)) \geq \alpha$。

现在，对于 $e \in S$，我们还有 $r_u(e) \in S$；而对于 $e \in H_u^+$，我们有 $\tilde{v}_u(e) \geq 1/q$，因此

$$h < e \leq r_u(e) = m_u(\alpha) \leq m_u(1/q) = h_u,$$

这意味着 $r_u(e) \in H_u^+$。根据 **观察** 8.1，$h_u \leq h + q^2(16\Lambda + 1)$，因此每个参考物品都属于

$$S \cup \{h+1, \ldots, \min(m, h + \lceil q^2(16\Lambda + 1)\rceil)\}$$

无论 u 如何，参考物品的总数至多为 $L = |S| + \lceil q^2(16\Lambda + 1)\rceil$。 □

注意，根据 **观察** 8.2，单个 $u \in U$ 的例外捆绑总数也至多为 L。这一观察稍后会派上用场。

定义 8.10。 对于 $u \in U$ 和例外$B_{u,\,j}$，将其兼容性记录 定义为一个多重集

$$R_{u,j} := \Big\{\big(r_u(e), \tilde{v}_u(e)\big) : \; e \in B_{u,j} \cap (S \cup H_u^+)\Big\}.$$

对于 u、$u' \in U$，如果其例外捆绑 $B_{u,\,j}$和 $B_{u',\,j'}$ 满足 $R_{u,\,j} = R = R_{u',\,j'}$，则它们属于同一个兼容类 R。令 $\mathcal{R}$ 表示所有不同兼容性记录组成的集合：

$$\mathcal{R} = \{R_{u,j} : \; u \in U, j \in [n], B_{u,j} \; \textit{exceptional}\}.$$

定义 8.11。 对于每个兼容性记录 $R \in \mathcal{R}$，将其合格接收者集合 定义为

$$U(R) := \{i \in U : \; v_i(r) \geq \alpha \; \textit{for every} \; (r, \alpha) \in R\}.$$

因此，代理人 $i \in U(R_{u,j})$ 是供应商 u 的例外捆绑 $B_{u,j}$ 的合格接收者。注意，如果 $R_{u,j} = \varnothing$，那么 $U(R_{u,j}) = U$，也就是说，每个代理人都有资格获得这样的物品束。

观察 8.4。 固定一个 $u \in U$ 及其例外捆绑 $B_{u,j}$。那么

- $u \in U(R_{u,j})$，即供应商有资格获得自己的最大最小份额捆绑；并且
- 代理人 $i \in U$ 有资格获得 $B_{u,j}$，当且仅当 i 分别关于 $\hat{}\pi^S_{u,i}/\hat{}\pi^+_{u,i}$ 是 S/H^+-相容的。

证明。 根据构造，对于每一对 $(r, \alpha) \in R_{u,j}$，参考物品满足 $r \leq m_u(\alpha)$。因此，$v_u(r) \geq \alpha$，所以根据定义，$u \in U(R_{u,j})$。

接下来，根据定义，$i \in U(R_{u,j})$ 要求

- $v_i(\max(S \cap [m_u(\alpha)])) \geq \alpha$ 对于由 $B_{u,\,j} \cap S$诱导的每个需求 α，以及
- $v_i(m_u(\alpha)) \geq \alpha$ 对于由 $B_{u,\,j} \cap H_u^+$诱导的每个需求 α。

这些正是关于相应配置部分 $\hat{}\pi^S_{u,\,i}$ 和 $\hat{}\pi^+_{u,\,i}$ 的 S/H^+-兼容性条件，该配置部分由 u 为代理人 i建议：

$$\hat{\pi}^S_{u,i} = \{\tilde{v}_u(e) : \; e \in B_{u,j} \cap S\}, \qquad \hat{\pi}^+_{u,i} = \{\tilde{v}_u(e) : \; e \in B_{u,j} \cap H_u^+\}.$$

□

请注意，兼容类 $\mathcal{R}$ 对例外捆绑进行分类，而对于 $R \in \mathcal{R}$，合格接收者集合 $U(R)$ 是代理人的子集。不同于之前引入的 E-类，集合 $U(R)$ 不一定互不相交，不同的兼容性记录甚至可能具有相同的合格接收者集合。这不会成为问题，因为我们将以这样的方式选择供应商 $u_* \in U$：u_* 的每个例外捆绑都有大量合格接收者。

在解释如何选择这样的供应商之前，我们先界定兼容类的数量。

引理 8.4. 每个 $R \in \boldsymbol{R}$ 的大小为 $|R| \le q$，且最多包含 $q-1$ 种不同的参考物品。此外，

$$|\mathcal{R}| \le Q^q \sum_{r=0}^{q-1} \binom{L}{r}\binom{q}{r} \le (2Q)^q L^{q-1}.$$

证明。 固定一个例外捆绑 $B_{u,\,j}$，$R_{u,\,j}$ 中的每一对都对应于$B_{u,\,j} \cap (S \cup H_u^+)$中的一个不同物品。由于这些物品的价值都至少为 $1/q$，且 $v_u(B_{u,\,j}) \le 1$，因此这类物品至多有 q 个，并且$|R_{u,\,j}| \le q$。

接下来，若$|R_{u,\,j}| \le q-1$，则与 $B_{u,\,j}$ 相关联的参考项至多有 $q-1$ 个。假设$|R_{u,\,j}| = q$，那么$B_{u,\,j}$ 中的每个正价值物品的价值都必须恰好为 $1/q$。因此，$B_{u,\,j} \cap S$ 的所有参考项都相同，且$B_{u,\,j} \cap H_u^+$的所有参考项也都相同，所以不同参考项至多有两个，这不超过 $q-1$。

现在，考虑一个兼容性记录 R，其中恰有 r 个不同参考项，$0 \le r \le q-1$。由于可能的参考项总数至多为 L，因此从 $\mathcal{R}$ 中选取参考项放入记录 R 的方式至多有 $\binom{L}{r}$ 种。确定这些参考项后，选择参考项的正计数、使其总和不超过 q 的方式至多有 $\binom{q}{r}$ 种。最后，为每次出现的单个参考项指定一个来自 $\mathcal{Q}$的价值，至多有 Q^q 种选择。对 $0 \le r \le q-1$ 求和，可得

$$|\mathcal{R}| \le Q^q \sum_{r=0}^{q-1} \binom{L}{r}\binom{q}{r}.$$

使用标准的二项式界，我们得到

$$\sum_{r=0}^{q-1} \binom{L}{r}\binom{q}{r} \le L^{q-1} \sum_{r=0}^{q-1} \binom{q}{r} \le 2^q L^{q-1},$$

由此完成证明。 □

引理 8.4 与**观察** 8.4 表明，如果供应商候选者集合U 足够大，我们总能选出一位供应商，使其能够将自己的所有例外捆绑指定给不同的代理人。事实上，如果 $u \in U$ 有一个例外捆绑的合格接收者少于 L 个，那么根据**观察** 8.4 u 他本人属于这个较小的合格接收者集合。同时，所有大小小于L 的可能合格接收者集合的并集至多包含 $(L-1)|\mathcal{R}|$ 个代理人。因此，任何 u_* 不在此并集中的对象，其每个例外捆绑至少有L 个合格接收者。根据**观察** 8.2，u_* 至多有L 个例外捆绑，因此我们可以逐一从相应的合格接收者集合中为它们选择接收者，并且剩余的接收者始终足够。

我们在以下定理中将这一思路形式化，从而确立对供应商 $u_* \in U$的选择，并将其例外捆绑指定给不同的接收者。为了进行后续的尾部补全，假设 U 具有某种优先级顺序将会有所帮助，这样可以保证每位指定接收者的优先级至少与供应商相同。目前，读者可以假设该顺序是任意的。

引理 8.5（供应商选择）。 在 U 上固定任意全优先级序。如果

$$|U| > (L-1)|\mathcal{R}|,$$

那么，存在一个供应商 $u_* \in U$，并将其例外捆绑 $B_{u_*,\,j}$ 分配给不同的接收者 $i(j) \in U$，使得 $i(j) \in U(R_{u_*,\,j})$，并且每个 $i(j)$ 的优先级都至少与 u_* 一样高。特别地，只要满足以下条件，上述大小条件就成立：

$$n \ge 2\phi(2QL)^q.$$

证明。对于每条兼容性记录 $R \in \mathcal{R}$，令 $U_L(R) \subseteq U(R)$ 为 $L-1$ 中优先级最高的代理人，或者在 $U(R)$ U中的所有代理人，如果 $|U(R)| < L-1$。根据**引理** 8.4以及关于 $|U|$ 的假设，

$$\left|\bigcup_{R\in\mathcal{R}} U_L(R)\right| \le (L-1)|\mathcal{R}| < |U|.$$

任取一个代理人 $u_* \in U \setminus \bigcup_{R\in\mathcal{R}} U_L(R)$。任取一个例外物品束 $B_{u_*,j}$，根据观察 8.4，$u_* \in U(R_{u_*,j})$。然而，$u_* \notin U_L(R_{u_*,j})$，因此 $U_L(R_{u_*,j})$ 必须恰好包含 $L-1$ 个代理人，否则 $U_L(R_{u_*,j})) = U(R_{u_*,j})$，从而导致矛盾。此外，每个代理人 $u \in U_L(R_{u_*,j})$ 的优先级都高于 u_*。因此，集合 $U_L(R_{u_*,j}) \cup \{u_*\}$ 恰好包含 L 个优先级至少与 u_*同等高的合格接收者。

现在，根据 **观察** 8.2 u_* 至多有 L 个例外物品束。按顺序处理他的例外物品束。对于每个例外的 $B_{u_*,\ j}$，考虑 $U_L(R_{u_*,\ j}) \cup \{u_*\}$，并将 $B_{u_*,\ j}$ 指定给该集合中此前尚未被指定的任意一个代理人。由于 $|U_L(R_{u_*,\ j}) \cup \{u_*\}| = L$，这样的代理人始终存在，因此 u_* 的每个例外物品束最终都会分配给一个不同的接收者。

最后，根据 **引理** 8.3 可得 $|U| \ge n/2\phi$，而根据 **引理** 8.4 有

$$(L-1)|\mathcal{R}| \le (L-1)\cdot(2Q)^q L^{q-1} < (2QL)^q.$$

因此 $n \ge 2\phi(2\ QL)^q$ 结合 **引理** 8.4 立即推出 $|U| > (L-1)|\mathcal{R}|$。 □

由此可知，对于足够大的 n，我们可以选择供应商 $u_* \in U$ 并构造 S- 和 H^+- 部分的建议档案集合 $\{\hat{}\pi_{u_*,\ i}\}_{i\in N}$，满足 S/H^+-与 **推论** 8.1 的兼容性。

推论 8.2。固定整数 $\Gamma \ge 1$、$q \ge 9$，并在 推论 *8.1* 中选择参数 ε、ν 如下：

$$\varepsilon := \frac{1}{2q^2 C_q\left(\left\lceil Q\cdot\frac{q}{q-1}\right\rceil + 1\right)}, \qquad \nu := \lceil 2q^2 C_q(\theta + \rho_{ES}(q, dn))\rceil.$$

对于足够大的 n，存在一个供应商 $u_* \in U$ 以及将其例外捆绑指定给 U 中不同接收者的方案，使得建议配置部分

$$\hat{\pi}^S_{u_*,i} := \{\tilde{v}_{u_*}(e) :\ e \in B_{u_*,j} \cap S\}, \qquad \hat{\pi}^+_{u_*,i} := \{\tilde{v}_{u_*}(e) :\ e \in B_{u_*,j} \cap H^+_{u_*}\}$$

对于每个具有指定物品束的例外代理人 i $B_{u_*,\ j}$，以及 $\pi^S_{u_*}\hat{}_i = \varnothing = ,\ \pi^+_{u_*}\hat{}_i$，对于每个非例外代理人 i，满足

- S-兼容性：对于每个 $\alpha \in \hat{}\pi^S_{u_*,\ i}$ 都有 $v_i(\max(S \cap [m_{u_*}(\alpha)])) \ge \alpha$；
- H^+-兼容性：对于每个 $\alpha \in \hat{}\pi^+_{u_*,\ i}$ 都有 $v_i(m_{u_*}(\alpha)) \ge \alpha$。

此外，对于 U 上的任意全优先级序，均可选择供应商 u_*，使其每个例外物品束的指定接收者 i 的优先级至少与 u_* 一样高。

证明。由于 C_q 和 Q 仅取决于 q，参数 $\varepsilon > 0$ 是仅取决于 q的常数。根据 **推论** 6.2，$\Lambda = O_\Gamma(\log^2 n)$，因此

$$\theta = q^2(16\Lambda + 1) + q\Lambda = O_{\Gamma,q}(\log^2 n).$$

此外，由 $d \le n$ 可得 ρ_{ES}（q，dn）$= O_q$（对数 n），因此我们的选择给出 $\nu = O_{\Gamma,\ q}$（对数 $^2\ n$）。然后，根据**引理** 7.1，可得

$$|S| \le \left(\left\lceil Q\cdot\frac{q}{q-1}\right\rceil + 1\right)\left(1 + \frac{Q\nu}{\varepsilon}\right) = O_{\Gamma,q}(\log^2 n),$$

这意味着

$$L = |S| + \lceil q^2(16\Lambda + 1)\rceil = O_{\Gamma,q}(\log^2 n).$$

根据**引理** 8.3 和**引理** 8.4，可得

$$|U| \geq \frac{n}{2\phi}, \qquad \text{and} \qquad (L-1)|\mathcal{R}| \leq (2QL)^q = O_{\Gamma,q}(\log^{2q} n) = o(n),$$

并且由于 ϕ 仅取决于 q，对于所有足够大的 n，我们有 $|U| > (L-1)|\mathcal{R}|$。由**引理** 8.5 可知，存在一个供应商 $u_* \in U$ 以及所有例外捆绑B_{u_*}的互不相同的合格接收者 $i(j) \in U$，j 其优先级不低于 u_*。如**观察** 8.4所示，每个指定接收者的合格性恰好意味着 S/H^+-兼容性条件。 □

9 受保护前缀的建议 E-配置

在本节中，我们将证明，对于足够大的 n，对于任意候选对象 $u \in U$，我们总能构造一个建议 E-配置的集合 $\{\hat{}\pi^E_{u,\,i}\}_{i\in N}$，使其满足

$$\sum_{i\in N} \mathcal{P}_i(\hat{\pi}^E_{u,i}, c_s) \leq |E \cap [b_s]|, \qquad \forall (b_s, c_s) \in \mathcal{L}_S. \qquad (\mathrm{E}_{\mathcal{L}_S}\text{-}u)$$

这将补上**推论** 8.1中最后一个缺失的条件，并与**推论** 8.2一起证明，对于由此得到的供应商选择 $u_* \in U$ 和建议集合 $\{\hat{}\pi_{u_*,\,i}\}_{i\in N}$，存在一个集合 $A \subseteq I$，使得对于每个前缀 $0 \leq \ell \leq m$，都有

$$\sum_{i\in A} \mathcal{P}_i(\pi_i, \ell) + \sum_{i\in N\setminus A} \mathcal{P}_i(\hat{\pi}_{u_*,i}, \ell) \leq \min\{\ell, h_{u_*}\}.$$

我们将采用与第 2 节 和 第 4 节类似的方法。我们将使用大小有界的重新划分块，以便为每位代理人 $i \in N$构造一个源捆绑 B_i，它将定义建议配置 $\hat{}\pi^E_{u_*,i}$的 E部分。对于固定的供应商 u_*，我们将为每位代理人 $i \in N$ 创建该供应商的最大最小份额划分$\{B_{u_*,1}, \ldots, B_{u_*,n}\}$ 的块重新划分，然后使用线性规划舍入，从中为几乎所有代理人提取互不相交的源捆绑。至于剩余代理，足够大的 n 将确保每位代理人都还剩下足够多可接受的供应商捆绑，因此我们可以通过贪心方式完成分配。

两个主要区别是：代理人 $B_{i,j}$ 的最大最小份额捆绑 $i \in N$ 大小可能不受限制，而块重新划分依赖于捆绑大小有界这一事实。其次，部分舍入后的头部配置 $\pi_{i,j}$ 无效，因此我们无法使用某些重新划分块（以免给代理人分配其无法接受的源捆绑）。我们将通过构造一个把物品划分为大小有界捆绑的辅助划分来解决第一个问题；对于第二个问题，则采用与第 4 节中类似的块丢弃方法。

9.1 有界头部划分和重新划分块

在整个构造过程中，固定一个供应商 $u_* \in U$，以及将他的所有例外捆绑指定给 U 中不同的接收者，正如 **引理** 8.5 所述。我们记

$$\varphi_* := \varphi_{u_*} \qquad \text{and} \qquad V := N_{\varphi_*},$$

因此 $U \subseteq V$，根据 **引理** 8.3，$|V| \geq |U| \geq n/(2\phi)$。

定义 9.1。对于代理人 $i \in N$，将代表性估值定义为

$$\hat{v}_i(e) := \alpha_{i,s} = \tilde{v}_i(c_s + 1), \qquad \forall e \in E_s,\ s \in [t-1],$$

并将其以加性的方式扩展。令 $\hat{}v_i(e) = 0$，对于 $e \in S$ 以及下文引入的任意虚拟物品。

对于每个 $i \in N$和 $e \in E_s \setminus F$，我们有 $e \geq c_s + 1$，因此 $\hat{}v_i(e) \geq \tilde{v}_i(e)$。此外，根据 引理 8.3，每个 $e \in E$ 都满足 $\hat{}v_{u_*}(e) \geq \tilde{v}_{u_*}(e)$，包括 F中的物品。

这些代表性估值将决定建议配置中 E部分的需求。ˆ 它们不会取代原始估值，特别是，分配的来源捆绑 B_i 不一定满足它所定义的配置 $\hat{\pi}^E_{u_*,\ i}$。

接下来，我们将 $[h]$ 划分为大小至多为 q 的物品束 .

ˆ**观察 9.1**。 设 Ω 为一个由 $qn-h$ 虚拟物品构成的集合，且与 M 不相交，并令 $M := [h] \sqcup \Omega$。对于每个代理人 $i \in N$，都存在 $,1, \ldots, ,n$ 这样一个 ˆM 的划分，使得对于每个$j \in [n]$，$|\ ,j| = q$ 以及每个满足 $v_i(e) \geq 1/q$ 的物品 $e \in B_{i,j} \cap [h]$，都有它属于 ˆ$B_{i,j}$。

因此，如果 $\pi_{i,j}$ 有效，那么 $B_{i,j} \cap [h] \subseteq \hat{B}_{i,j} \cap [h]$；并且对于每个优质代理人 $u \in G$，我们还额外有 $\hat{B}_{u,j} \cap [h] = B_{u,j} \cap [h]$，对所有 $j \in [n]$ 均成立。

证明。 起初，令 $\hat{B}_{i,j} := \{e \in B_{i,j} \cap [h] : v_i(e) \geq 1/q\}$，对每个 $j \in [n]$ 均如此。由于$v_i(B_{i,j}) \leq 1$，显然 $|\hat{B}_{i,j}| \leq q$。

假设我们已按这种方式将 k 个公共头部物品放入辅助捆绑中。现在有 $qn-k$ 个可用物品槽位和 $h-k$ 个未分配的头部物品。由于 $h \leq qn$，我们可以任意将所有剩余的头部物品分配到各个捆绑中，并用虚拟物品 Ω 填充，使每个捆绑的大小恰好为 q。

由于代理人的每个有效 MMS 配置 $\pi_{i,\ j}$ 只包含价值至少为 $1/q$ 的物品，因此ˆ 对应的填充后物品束 $B_{i,\ j}$ 保留了 $B_{i,\ j}$的所有原始物品。因此，对于优质代理人 $u \in G$，由于 $[h]$ 中的每件物品价值都至少为 $1/q$，每个辅助捆绑ˆ$B_{u,\ j}$ 都会先获得 $B_{u,\ j} \cap [h]$ 中的所有物品，然后才填充剩余槽位。

□

虚拟物品很方便，因为它们使我们能够针对每个代理人都恰好使用 n 个非空物品束，且每个物品束的大小至多为 q。它们仅用作简化工具，不会引入任何需求。

ˆ**定义 9.2**。 我们将 M 划分为以下 $t+1$ 类型 M_1、.....、M_t、M_{t+1}：

$$\forall s \in [t-1]: \ M_s := E_s \setminus F, \qquad M_t := S \cup F, \qquad M_{t+1} = \Omega.$$

ˆ ˆ其中一些类型可能为空。对于 $B \subseteq M$，定义其模式

$$p(\hat{B}) := (|\hat{B} \cap M_1|, \ldots, |\hat{B} \cap M_{t+1}|), \qquad |p| := \sum_{s=1}^{t+1} p_s,$$

并令 $P := \{p \in \mathbb{Z}^{t+1}_{\geq 0}: \ 1 \leq |p| \leq q\}$ 包含所有可能的模式。对于 $i \in N$ 和 $p \in P$，定义

$$\lambda_i(p) := |\{j \in [n]: \ p(\hat{B}_{i,j}) = p\}|.$$

特别地，我们有 $\sum_{p \in P} \lambda_i(p) = n$。

与第 4 节类似，这些类型不一定对应于原始估值。不过，我们可以应用有界重划分定理**定理** 2.2，因为该定理仅依赖于每种类型的物品数量、物品束数量及其大小上界。

定理 9.1 (**定理** 2.2 重述)。 对于每一对整数 t、$q \geq 1$，存在一个全局常数 $D_{t+1,\ q} \geq 1$，其仅取决于 t 和 q，使得以下结论成立。

对于固定的供应商 u_* 和每个代理人 $i \in N$，存在一个由 $K_i \leq n$ 块组成的序列

$$\beta_{i,1} = (x_{i,1}, y_{i,1}), \ldots, \beta_{i,K_i} = (x_{i,K_i}, y_{i,K_i}),$$

使得对于每个 *e very* $k \in [K_i]$ 我们有 $|\beta_{i,\ k}| \leq D_{t+1,\ q}$，并且对于每个模式 $p \in P$ 块均满足 y

$$\sum_{k=1}^{K_i} x_{i,k}(p) = \lambda_{u_*}(p), \qquad \textit{and} \qquad \sum_{k=1}^{K_i} y_{i,k}(p) = \lambda_i(p).$$

我们可以将 u_* 的辅助捆绑分组为大小至多为$D_{t+1,\ q}$的不相交的块，使得每个块都可以重新划分为数量相同的捆绑，且其模式来自 i的辅助划分。

我们将从每个非空的 E类中选择一个代表代理人，该类别不同于供应商类 V。我们将选择仅具有少量无效配置的代表元，以便稍后利用**引理** 7.2来限定丢弃的块的数量。

定义 9.3. 对于每个非空类别 N_φ 满足 $\varphi \in \Phi \setminus \varphi_*$，选择一名代表代理人

$$i_\varphi \in \operatorname*{argmin}_{i \in N_\varphi} \theta_i, \qquad n_\varphi := |N_\varphi|.$$

对于每个类别 $\varphi \in \Phi \setminus \varphi_*$，我们将**定理** 9.1 应用于供应商 u_* 的辅助划分 $\{\hat{B}_{u_*,j}\}_{j=1}^n$以及代表代理人 i_φ的辅助划分 $\{\hat{B}_{i,j}\}_{j=1}^n$ 。对于得到的每个块 β，我们将把输出捆绑与定义输出模式的相应辅助捆绑 $B_{i_\varphi,j}$ 关联起来。请注意，每个 $j \in [n]$ 只会使用一次，因为对于每个 $p \in P$，模式为 p的产出物品束总数恰好为 $\lambda_{i_\varphi}(p)$。

定义 9.4. 对于每个 $\varphi \in \Phi \setminus \varphi_*$，令 $\mathcal{B}(\varphi)$ 包含所有满足以下条件的块 $\beta = \beta_{i_\varphi,k}$ ：块 β不会产生物品束$B_{i_\varphi,j}$ ，使得配置 $\pi_{i_\varphi,j}$ 无效。将该集合记为

$$\mathcal{B} = \bigsqcup_{\varphi \in \Phi \setminus \varphi_*} \mathcal{B}(\varphi).$$

每个块 $\beta \in \mathcal{B}$ 都与一个相应的签名类以及该类中的相应索引相关联，即当 $\varphi \neq \varphi'$ 或 $k \neq k'$ 时，我们将 $\beta = \beta_{i_\varphi,\,k} = (x, y)$ 和 $\beta' = \beta_{i_{\varphi'},\,k'} = (x', y')$ 视为不同的块，即使 $x = x'$ 和 $y = y'$。

观察 9.2。 对于每个 $\varphi \in \Phi \setminus \varphi_*$、块 $\beta = (x_{i_\varphi,\,k}, y_{i_\varphi,\,k})$ 和模式 $p \in P$，令 $\lambda_\beta(p) := x_{i_\varphi,\,k}(p)$。那么，对于每个非空类别 N_φ、$\varphi \neq \varphi_*$ 以及每个模式 $p \in P$，

$$\sum_{\beta \in \mathcal{B}(\varphi)} \lambda_\beta(p) \leq \lambda_{u_*}(p).$$

此外，还有

$$n - D_{t+1,q}\theta_{i_\varphi} \leq \sum_{\beta \in \mathcal{B}(\varphi)} |\beta| \leq n, \quad \textit{and} \quad \frac{1}{n} \sum_{\varphi \in \Phi \setminus \varphi_*} n_\varphi \cdot \theta_{i_\varphi} \leq \theta.$$

证明。 最初，在丢弃“无效”块之前，**定理** 9.1 生成了一个集合，其中恰好使用了 $\lambda_{u_*}(p)$ 个模式 $p \in P$ 副本，并且所有块的总大小恰好为 n。

由于每个输出辅助捆绑恰好属于一个块，因此至多有 θ_{i_φ} 个块会从 $\mathcal{B}(\varphi)$ 中被丢弃。这些块的大小均至多为 $D_{t+1,q}$，因此丢弃这些块至多会移除 $D_{t+1,q}\theta_{i_\varphi}$ 个输出捆绑。这就给出了相应的上界。

现在，根据 i_φ 的选取，有

$$\theta_{i_\varphi} \leq \frac{1}{n_\varphi} \sum_{i \in N_\varphi} \theta_i.$$

对.....求和　　所有非供应商类并应用**引理** 7.2即可得到所需上界。

□

如同第 2 节中一样，每个剩余块定义一条重新划分规则，而同一规则的多个副本可以通过不同的供应商物品，同时实现相应的输出模式。由此产生的输出捆绑可能不同于供应商实际的最大最小份额捆绑。

9.2 通过线性规划协调重新划分

下一步是协调不同 E类别之间保留的重新划分规则。如同第 2 节中一样，我们保留每种供应商捆绑模式的一部分，以便之后分配舍入后的线性规划解未覆盖的代理人。定义

$$\eta := \frac{n - d + |V|}{n},$$

$n - d$ 项反映了这样一个事实：虽然每个 MMS 划分中都有 n 个物品束，但只有 d 个剩余代理人。其成立

$$1 - \eta = \frac{d - |V|}{n} \qquad \text{and} \qquad \eta \geq \frac{|V|}{n} \geq \frac{1}{2\phi}.$$

对于每个块 $\beta \in \mathcal{B}$，我们都有一个变量 $z_\beta \geq 0$，用于统计重新划分规则 β的实际副本数量。我们考虑与 第 2 节中完全相同的线性规划。

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & \sum_{\beta \in \mathcal{B}} |\beta| \cdot z_\beta \\ \text{subject to} \quad & \sum_{\beta \in \mathcal{B}} \lambda_\beta(p) \cdot z_\beta \leq (1-\eta)\lambda_{u_*}(p), && \forall p \in P; \\ & \sum_{\beta \in \mathcal{B}(\varphi)} |\beta| \cdot z_\beta \leq n_\varphi, && \forall \varphi \in \Phi \setminus \varphi_*; \\ & z_\beta \geq 0, && \forall \beta \in \mathcal{B}. \end{aligned} \tag{LP}$$

请注意，(线性规划) 的最优值不再需要是 $d - |V|$，因为我们之前舍弃了某些块。尽管如此，基本上与 **引理** 2.3 相同的证明仍然保证了一个整数解 $\hat{z}$ 的存在，该解可以分配几乎所有非供应商类代理。具体而言，以下引理直接由 **引理** 2.3的证明推出。

引理 9.1。 存在一个整数可行解 $\hat{z}$，使其满足 *(线性规划)*

$$0 \leq d - |V| - \sum_{\beta \in \mathcal{B}} |\beta| \cdot \hat{z}_\beta \leq D_{t+1,q}(\theta + |P| + |\Phi| - 1).$$

证明。 对于 $\varphi \in \Phi \setminus \varphi_*$ 和 $\beta \in \mathcal{B}(\varphi)$，令 $z^0_\beta = n_\varphi / n$。根据 **观察** 9.2， z^0 是 (线性规划) 的一个可行解，并且

$$\sum_{\beta \in \mathcal{B}} |\beta| \cdot z^0_\beta \geq d - |V| - \frac{D_{t+1,q}}{n} \sum_{\varphi \in \Phi \setminus \varphi_*} n_\varphi \theta_{i_\varphi} \geq d - |V| - D_{t+1,q}\theta.$$

根据**引理** 2.3，(LP) 的最优基本可行解至多有 $|P| + |\Phi| - 1$ 个正坐标。将该最优解向下舍入为整数值，目标函数最多损失 $D_{t+1,\ q}(|P| +|\Phi| - 1)$。引理得证。 □

下一步是将这些规则落实为相应代理人的实际源捆绑。不过，在描述这一落实过程之前，我们需要明确哪些供应商捆绑必须保持完整。具体而言，对于受保护前缀条件，我们希望保留与 F 相交的两个 物品束，同时保留每个例外捆绑，以便将它们提供给例外代理人。

定义 9.5。 对于拥有 *MMS* 划分 $\{B_{u_*,\ 1}、\ldots\ldots、B_{u_*,\ n}\}$ 的供应商 u_*， 定义

$$\mathcal{J} := \{j \in [n] : \ B_{u_*,j} \ \textit{exceptional, or} \ B_{u_*,j} \cap F \neq \varnothing\}.$$

称$B_{u_*,\ j}$ 及其对应的辅助捆绑为 $\hat{B}_{u_*,\ j}$ 干净，如果 $j \notin \mathcal{J}$。根据 观察 *8.2*，

$$|\mathcal{J}| \leq L + |F|.$$

根据定义，每个干净供应商捆绑都与 $M_t = S \cup F$ 不相交。

推论 9.1. 存在一个互不相交的源捆绑集合 $J \subseteq N \setminus V$*of* $B_i \subseteq E \setminus F, i \in J$，以及一个完整供应商捆绑集合 $Y \subseteq [n]$ *of*，使得

- *for every* $i \in J$ *it holds* $|B_i| \le q$ *and* $\hat{v}_i(B_i) \ge 1 - 2/q$;
- 我们有 $|J| = d - |V| - \hat{Z}$ 其中

$$0 \le \hat{Z} \le D_{t+1,q}(\theta + |P| + |\Phi| - 1 + L + |F|);$$

- 完整供应商捆绑满足 $|Y| = n - |J| = n - d + |V| + \hat{Z}$，并且 $J \subseteq Y$ 和

$$\bigcup_{i \in J} B_i = \bigcup_{j \in [n] \setminus Y} (B_{u_*,j} \cap [h]).$$

此外，对于每个 $p \in P$，模式为 p 的完整辅助供应者捆绑数量为

$$|\{j \in Y : p(\hat{B}_{u_*,j}) = p\}| \ge \eta \cdot \lambda_{u_*}(p).$$

证明。 取引理 **9.1**. 中的整数解 $\hat{z}$ 。按照 **引理** 9.1. **推论** 2.2中所述，我们可以为每个选定的区块副本选择相应的互不相交的辅助供应者捆绑集合。

与**推论** 4.3类似，我们丢弃每个包含来自$\mathcal{J}$的供应商捆绑的选定副本，这至多会移除 $|\mathcal{J}|$ 个选定的区块副本。由于每个副本的大小至多为 $D_{t+1,q}$，剩余区块所覆盖的供应商类 V 之外的代理人数量恰为 $d - |V| - \hat{Z}$，其中

$$0 \le \hat{Z} \le D_{t+1,q}(\theta + |P| + |\Phi| - 1 + L + |F|).$$

这将使我们能够为 $|J| = d - |V| - \hat{Z}$ 非供应者类别代理人提供一个来源捆绑。取一个剩余的区块副本 $\beta \in \mathcal{B}(\varphi)$，对于 $\varphi \in \Phi \setminus \varphi_*$，相应的供应商捆绑与 M_t 不相交。因此，通过实现块 β 得到的每个类型为 p 的捆绑都必须满足 $p_t = 0$，对每个 $p \in P$ 均如此。

使用**推论** 2.1 中的保类型构造，将块 β 中选定的辅助供应者捆绑重新划分为相应的输出辅助捆绑，然后从每个捆绑中移除所有虚拟物品。由此，我们得到实际源捆绑 $B_i \subseteq E \setminus F$，每个捆绑的大小至多为 q，我们可以将它们同时分配给 N_φ中的不同代理人。现在我们将证明，每个源捆绑的代表值至少为 $1 - 2/q$。

考虑 $\varphi \in \Phi \setminus \varphi_*$ 的代表元 $i_\varphi \in N_\varphi$，并令 $B_{i_\varphi,j}$ 为其对应于一个有效配置 $\pi_{i_\varphi,j}$ 的最大最小份额捆绑$\hat{}$。令$B_{i_\varphi,j}$ 为根据**观察** 9.1得到的相应辅助捆绑，其输出模式由选定的块 β 指定。于是，根据**观察** 9.1， $B_{i_\varphi,j} \cap [h] \subseteq \hat{B}_{i_\varphi,j}$。此外，如果 $p = p(\hat{B}_{i_\varphi,j})$，那么 $p_t = 0$，因此 $B_{i_\varphi,j} \cap [h]$ 的所有物品都位于 $S \cup F$ 之外。对于每个这样的 $e \in E_s \setminus F$，

$$\alpha_{i_\varphi,s} \ge \tilde{v}_{i_\varphi}(e) \ge 1/q,$$

因此 $\alpha_{i_\varphi,\ s} = \varphi(s)$ 及其代表需求由类别 N_φ 中的每个代理人共享，即对于所有 $i \in N_\varphi$，$_s \ge \varphi(s)$。由此可知，对于来源捆绑 B_i，在实现此模式 $p = p(\hat{B}_{i_\varphi,\ j})$ 并移除虚拟物品后，

$$\hat{v}_i(B_i) = \sum_{s=1}^{t-1} p_s \cdot \alpha_{i,s} \ge \sum_{s=1}^{t-1} p_s \cdot \varphi(s) \ge \tilde{v}_{i_\varphi}(B_{i_\varphi,j} \cap [h]) \ge \left(1 - \frac{1}{q}\right)^2 \ge 1 - \frac{2}{q}.$$

我们使用 f 证明配置 $\pi_{i_\varphi,\ j}$ 有效，并估计舍入后的高需求 s.

每个未被丢弃的选定块都会将相应供应商辅助捆绑的整个集合重新划分为大小完全相同的集合。移除虚拟物品后，每个生成的物品束都只包含来自与该块对应的原始供应商捆绑的公共头部 $[h]$ 中的物品。因此，

$$\bigcup_{i\in J} B_i = \bigcup_{j\in[n]\setminus Y} (B_{u_*,j} \cap [h]),$$

完整供应商捆绑的数量恰好为 $|Y| = n - d + |V| + \hat{Z}$。根据构造，实现的区块均未使用来自 $\mathcal{J}$ 的任何物品束。

最后，在丢弃区块副本之前，每种供应商模式中至少有 η 的部分 p 保持完整。丢弃区块只会增加未使用捆绑的数量，从而完成证明。 □

9.3 完成来源捆绑分配

$\hat{}$应用**推论** 9.1后，仅有 Z 名代理人仍未被分配 V 来源捆绑。与第 2 节一样，我们将从完整的供应商 MMS 捆绑池中，贪心地为他们提供可接受捆绑。

我们首先证明，对于每个代理人 $i \in N$ 而言，供应商的 MMS 划分中有许多辅助捆绑相对于代表性估值 $\hat{v}_i$ 是可接受的。

引理 9.2。 对于每个代理人 $i \in N$，令 g_i 表示相对于其代表性估值 $\hat{v}_i$ 对 i 可接受的辅助供应者捆绑数量：

$$g_i := \left|\left\{j \in [n] : \hat{v}_i(\hat{B}_{u_*,j} \setminus M_t) \geq 1 - 2/q\right\}\right|.$$

那么，必有

$$g_i \geq \frac{n/q^2 - |M_t|}{q - (1 - 2/q)}.$$

特别地，若 $n \geq 2q^2|M_t|$，则 $g_i \geq n/(2q^3)$。

证明。 由于对每一个 $i \in N$ 以及每一个 $e \in E_s \setminus F$ 我们有 $\hat{v}_i(e) \geq \tilde{v}_i(e)$ ，且虚拟物品的代表值为 0，**观察** 9.1 与**观察** 7.1 给出

$$\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_i(\hat{B}_{u_*,j} \setminus M_t) = \hat{v}_i(E \setminus F) \geq \tilde{v}_i(E \setminus F) \geq \tilde{v}_i([h]) - |M_t| \geq \left(1 - \frac{1}{q}\right)^2 n - |M_t|.$$

另一方面，每个辅助捆绑有 q 个物品，每个物品的代表值至多为 1，因此每个求和项至多为 q。由于任何未被 g_i 计入的求和项都小于 $1 - 2/q$，

$$\left(1 - \frac{1}{q}\right)^2 n - |M_t| \leq \sum_{j=1}^{n} \hat{v}_i(\hat{B}_{u_*,j} \setminus M_t) \leq g_i q + (n - g_i)\left(1 - \frac{2}{q}\right).$$

引理由此得证。 □

注意，对每一个 $i \in N$，接受条件在 **引理** 9.2 中仅依赖于辅助供应商捆绑的模式：

$$\hat{v}_i(\hat{B}_{u_*,j} \setminus M_t) = \sum_{s=1}^{t-1} p_s(\hat{B}_{u_*,j}) \cdot \alpha_{i,s}.$$

因此，**推论 9.1** 至少保留 ηg_i 为每位代理人提供的可接受的供应商捆绑包 $i \in N$.

请注意，其中一些物品束可能仍属于 $\mathcal{J}$。因此，最多移除 $L + |F|$个物品束后，我们便可为每位代理人获得一组干净的供应方 MMS 捆束。这使我们能够在 n 足够大时，完整构造所建议的 E-配置。

定理 9.2。假设

$$n \geq 4\phi q^3 D_{t+1,q}(\theta + |P| + |\Phi| - 1 + 2(L + |F|)).$$

那么，推论 ***9.1*** 中的来源捆绑可扩展为一个由两两不相交的来源捆绑组成的集合 $\{B_i\}_{i\in N}$，其中 $B_i \subseteq [h]$ 对所有 $i \in N$，满足

- 每个 例外接收者 $i \in N$ （其指定捆绑为 B_{u_*}），j 有 $B_i = B_{u_*,j} \cap [h$ $];$
- 每个非例外接收者 $i \in N$ 都有 $B_i \subseteq E$, $|B_i| \leq q$ 且 $\hat{v}_i(B_i) \geq 1 - 2/q$。

此外，如果我们将建议配置 $\hat{\pi}^E_{u_*,i}$ 针对 $i \in N$ 的 E部分定义为

- $\hat{\pi}^E_{u_*,i} = \{\tilde{v}_{u_*}(e) : e \in B_{u_*,j} \cap E\}$ 若 i 是指定的例外捆绑 $B_{u_*,j}$;
- $\hat{\pi}^E_{u_*,i} = \{\hat{v}_i(e) : e \in B_i, \hat{v}_i(e) > 0\}$（若 i 是非例外代理，

并根据$\hat{}$ $\pi^S_{u_*i}$ $\pi^+_{u_*i}$ 8 4, $|\pi_{u_*i}| \leq$ ，以及$\hat{}$，定义*Definition* 。则每个建议配置都满足$\hat{}$，，每个非例外代理都有($\hat{}$，)，并且集合 $\{\hat{}$，$\}$ 满足

$$\sum_{i\in N} \mathcal{P}_i(\hat{\pi}^E_{u_*,i}, c_s) \leq |E \cap [b_s]|, \qquad \forall (b_s, c_s) \in \mathcal{L}_S. \qquad (\mathrm{E}_{\mathcal{L}_S}\text{-}u)$$

证明。 首先，我们将完成 V之外的剩余代理。由于 $|M_t| = |S| + |F| \leq L + |F|$， n 的上界满足**引理** 9.2的要求，因此每个代理至少接受$n/(2q^3)$ 个辅助供应者捆绑。 **推论** 9.1 保证每个模式至少有 η 的部分保持完整。因此，在丢弃来自 $\mathcal{J}$的物品束后， V之外的每个剩余代理至少拥有

$$\eta \cdot \frac{n}{2q^3} - (L + |F|) \geq \frac{n}{4\phi q^3} - (L + |F|)$$

可接受的干净供应者捆绑，根据 n的上界，其至少为

$$D_{t+1,q}(\theta + |P| + |\Phi| - 1 + L + |F|) \geq \hat{Z}.$$

$\hat{}$ 因此，我们可以完成 Z 剩余代理人在外部 V 的分配，贪心地为每个代理人分配一个不同的可接受干净供应者捆绑$B_{u_*,j}$ 并取 $B_i := B_{u_*,j} \cap [h]$。由于$B_{u_*,j}$ 是干净的，其头部部分完全位于 $E \setminus F$中，并且根据**引理** 9.2，其代表值至少为 $1 - 2/q$。

接下来，我们考虑 V中的代理人。在前一步之后，恰好有 $n - d + |V|$ 个供应商捆绑保持完整，其中包括对应于$\mathcal{J}$的捆绑。对于每个例外代理人 $i \in V$ 及其指定捆绑 $B_{u_*,j}$，令 $B_i := B_{u_*,j} \cap [h]$ 并将其分配给 i。然后，为每个剩余代理人 $i \in V$分配一个不同的剩余非例外捆绑 $B_{u_*,j}$，再次令 $B_i :=B_{u_*,j} \cap [h]$。注意，在这一构造中，我们保留 $n - d$ 个供应商捆绑不予使用。

首先，令 $i \in V$ 为非例外的，并接收和获得分配$B_{u_*,j}$。我们取 $B_i := B_{u_*,j} \cap [h]$则必有 $B_i \subseteq E$ 且$v_{u_*}(B_i) \geq 1 - 1/q$。由于 V 中的代理人具有与 u_*相同的代表需求，根据**引理**8.3

$$\hat{v}_i(B_i) = \hat{v}_{u_*}(B_i) \geq \tilde{v}_{u_*}(B_i) \geq \left(1 - \frac{1}{q}\right) v_{u_*}(B_i) \geq \left(1 - \frac{1}{q}\right)^2 \geq 1 - \frac{2}{q}.$$

所有源捆绑两两不相交，因为我们在块重新划分中使用了供应商捆绑的不相交集合，而每个集合都属于 $[h]$。

现在，考虑定理陈述中定义的建议配置 $\{\hat{\pi}_{u_*,i}\}_{i\in N}$。每个非例外的 i 对来源捆绑中的每件物品，至多有一个正需求，

因此 $|\hat{\pi}_{u_*,i}| \le |B_i| \le q$ 和 $v(\hat{\pi}_{u_*,i}) = \hat{v}_i(B_i) \ge 1 - 2/q$。至于拥有指定捆绑$B_{u_*,j}$的例外 i，其所有建议部分合在一起构成

$$\hat{\pi}_{u_*,i} = \{\tilde{v}_{u_*}(e) : e \in B_{u_*,j} \cap [h_{u_*}]\}.$$

此配置中的每个原始物品的价值都至少为 $1/q$，而 $v_{u_*}(B_{u_*,j}) \le 1$。因此，完整建议配置也满足 $|\hat{\pi}_{u_*,i}| \le q$。

最后，我们将证明这些建议配置满足受保护前缀不等式。根据构造，每个建议的 E-需求都有一个不同的来源物品 $e \in E$。假设$e \in E_s$。如果 i 不是例外，那么它的需求为

$$\alpha := \hat{v}_i(e) = \alpha_{i,s} > 0 \quad \Longrightarrow \quad m_i(\alpha) \ge c_s + 1.$$

如果 i 是例外，那么 e 的需求为 $\alpha := \tilde{v}_{u_*}(e)$。由于 $i \in V$，**引理** 8.3 给出$\alpha \le \alpha_{u_*,s} = \alpha_{i,s}$，并且再次有 $m_i(\alpha) \ge c_s + 1$。

现在，对于 $r < t$，固定一个受保护对 (b_r, c_r)。在前缀 c_r 处计数的需求必须来源于某个满足 $s < r$ 的 E_s 中的物品。由于所有来源物品互不相同，

$$\sum_{i \in N} \mathcal{P}_i(\hat{\pi}^E_{u_*,i}, c_r) \le \sum_{s<r} |E_s| = |E \cap [b_r]|.$$

对于最后一对 $(b_t, c_t) = (h, m)$，至多有 $|E|$ 个建议的 E-需求，每个需求都对应于 E 中不同的物品。因此，

$$\sum_{i \in N} \mathcal{P}_i(\hat{\pi}^E_{u_*,i}, m) \le |E| = |E \cap [h]|.$$

这证明了所有受保护前缀条件。 □

请注意，E部分 $\hat{\pi}^E_{u_*,i}$ 在**定理**9.2 中建议的部分，可能包含价值低于 $1/q$ 的代理人 i的需求。这仍然是允许的，因为**定理**8.1 仅要求从$\mathcal{Q}$中选取需求，且仅限于建议的 S部分。

现在，对于固定的 Γ, q，所有量 $t, |P|, |\Phi|, D_{t+1,q}$都是 Γ, q 的有界常数，而所有量 $\theta, L, |F|$ 都是 $O_{\Gamma,q}(\log^2 n)$。因此，当 n 足够大时，定理 9.2 的要求成立。我们将在附录 C 中展示其对 Γ, q 的确切依赖关系。

我们以以下推论结束本节。

推论 9.2 (供应商头部的可行性)。选择 ε，ν 在 推论 8.2中。对于足够大的 n，对于 U上的任意全优先级序，都存在

- 一位供应商 $u_* \in U$，以及将其例外捆绑指定给 U中不同接收者的方式，且优先级至少与 u_* 相同；
- 一个大小至多为 q的建议头部配置集合$\{\hat{\pi}_{u_*,i}\}_{i \in N}$；并且
- 一个集合 $A \subseteq I$，其中包含 $|N \setminus A| \le \nu/q^2$，

使得对于每个前缀 $0 \le \ell \le m$，都有

$$\sum_{i \in A} \mathcal{P}_i(\pi_i, \ell) + \sum_{i \in N \setminus A} \mathcal{P}_i(\hat{\pi}_{u_*,i}, \ell) \le \min\{\ell, h_{u_*}\}.$$

因此，这些配置可以使用 $[h_{u_*}]$中的不同物品同时得到满足，其中的 E部分、S部分和剩余头部部分分别在 E、S和 $H^+_{u_*}$ 中得到满足。

此外，每个 $i \in A$ 都有 $v\ (\pi_i)\ \geq 1-2/q$，每个非例外代理人 $i \in N \setminus A$ 都有 $v\ (\hat{}\pi_{u_*,\ i})\ \geq 1-2/q$；并且每个具有指定供应商捆绑包$B_{u_*,\ j}$ 的例外代理人 $i \in N \setminus\ A$ 满足

$$v(\hat{\pi}_{u_*,i}) \geq \left(1-\frac{1}{q}\right)\left(1-\frac{1}{2q^2}-T_{u_*,j}\right), \quad where \quad T_{u_*,j} := v_{u_*}(B_{u_*,j} \setminus [h_{u_*}]).$$

特别是，对于这些代理人 $i \in N \setminus A$，$\hat{}\pi_{u_*}$的相应缺口 满足$\hat{}\pi_{u_*,\ i}$

$$\left(1-\frac{2}{q}-v(\hat{\pi}_{u_*,i})\right)_+ \leq \left(T_{u_*,j}-\frac{1}{q}\right)_+.$$

证明。 我们应用 **推论** 8.2，并遵循给定的全优先级序。我们得到一个供应商u_* 和 u_*的例外捆绑的指定接收者，它们满足 S-和 H^+-兼容条件。随后，对于充分大的 n，**定理** 9.2 给出所建议的 E-配置$\{\hat{}\pi^{E}_{u_*,\ i}\}_{i\in N}$，同时保留每个例外代理人 i的部分$\hat{}\pi^{S}_{u_*,\ i}$ 和$\hat{}\pi^{+}_{u_*,\ i}$。这些配置的大小至多为 q，并满足受保护前缀条件

$$\sum_{i\in N} \mathcal{P}_i(\hat{\pi}^{E}_{u_*,i}, c_s) \leq |E \cap [b_s]|, \qquad \forall (b_s,c_s) \in \mathcal{L}_S. \qquad (\mathrm{E}_{\mathcal{L}_S}\text{-}u)$$

因此，我们可以将**推论** 8.1 应用于集合$\{\hat{}\pi_{u_*,\ i}\}_{i\in N}$。我们得到一个集合 $A \subseteq I$，使得 $|N \setminus A| \leq \nu/q^2$，并且对每个前缀 $0 \leq \ell \leq m$，都有

$$\sum_{i\in A} \mathcal{P}_i(\pi_i,\ell) + \sum_{i\in N\setminus A} \mathcal{P}_i(\hat{\pi}_{u_*,i},\ell) \leq \min\{\ell, h_{u_*}\}.$$

对于每个保留其旧配置 π_i 的代理人 $i \in A$，**推论** 7.2 保证 $v(\pi_i)\ \geq 1-2/q$。对于每个$\setminus A$ 不属于例外代理人的代理人 $i \in N$，**定理** 9.2 确保 $v(\hat{}\pi_{u_*,i})\ \geq 1-2/q$。

考虑某个例外代理人 i，他被指定获得供应商的物品束 $B_{u_*,j}$。根据**推论** 6.2，由于供应商是从优质代理人中选出的 G，因此必有

$$v_{u_*}(B_{u_*,j}) \geq 1-\frac{1}{2q^2}.$$

因此，

$$v(\hat{\pi}_{u_*,i}) = \tilde{v}_{u_*}(B_{u_*,j}\cap[h_{u_*}]) \geq \left(1-\frac{1}{q}\right) v_{u_*}(B_{u_*,j}\cap[h_{u_*}]) \geq \left(1-\frac{1}{q}\right)\left(1-\frac{1}{2q^2}-T_{u_*,j}\right)$$

其中 $T_{u_*,j} := v_{u_*}(B_{u_*,j} \setminus [h_{u_*}])$。现在，注意到如果 $T_{u_*,j} \leq 1/q$，那么上述不等式可保证

$$v(\hat{\pi}_{u_*,i}) \geq \left(1-\frac{1}{q}\right)\left(1-\frac{1}{2q^2}-\frac{1}{q}\right) > 1-\frac{2}{q}.$$

另一方面，如果 $T_{u_*,j} \geq 1/q$，则有

$$v(\hat{\pi}_{u_*,i}) + T_{u_*,j} - \frac{1}{q} \geq 1-\frac{2}{q}+\frac{1}{q^2}-\frac{1-1/q}{2q^2} > 1-\frac{2}{q}.$$

这些不等式给出了缺失价值的上界，从而完成了证明。 □

10 尾部分配与证明的完成 f

推论 9.2 表明，对于足够大的 n，我们可以选择一个供应商 $u_* \in U$，设定$A \subseteq I$ 和建议配置 $\{\hat{}\pi_{u_*,\ i}\}_{i\in N}$，使得对于每个前缀 $0 \leq \ell \leq m$，都有

$$\sum_{i\in A} \mathcal{P}_i(\pi_i,\ell) + \sum_{i\in N\setminus A} \mathcal{P}_i(\hat{\pi}_{u_*,i},\ell) \leq \min\{\ell, h_{u_*}\}.$$

定义 10.1。 对于每个代理人 $i \in N$，定义已分配的头部配置

$$\pi_i^* := \begin{cases} \pi_i, & i \in A; \\ \hat{\pi}_{u_*,i}, & i \in N \setminus A. \end{cases}$$

因此，对于每个前缀 $0 \le \ell \le m$，

$$\sum_{i \in N} \mathcal{P}_i(\pi_i^*, \ell) \le \min\{\ell, h_{u_*}\}.$$

利用**引理**3.1，这证明我们可以在供应方头部 $[h_{u_*}]$中同时满足所有这些配置。每个代理人 $i \in A$ 都能确保 $v(\pi_i^*) \ge 1 - 2/q$。然而，并非来自 $N \setminus A$ 的每个代理人都能确保获得可接受的建议头部配置 $\hat{}\pi_{u_*,\,i}$；特别是，**推论**9.2 仅对非例外代理人 $i \in N \setminus A$保证这一点。不过，对于每个例外代理人，我们都能得到其建议配置相对于供应方尾部价值的缺口上界。

定义 10.2。令 $U \ni u_*$ 为来自引理*8.3*的供应商候选者集合，并令$J \subseteq (N \setminus A) \cap U$ 为所有未获得可接受配置的例外代理人组成的集合：

$$J := \{i \in (N \setminus A) \cap U : \; v(\pi_i^*) < 1 - 2/q\}.$$

注意，根据推论*9.2*的构造，每个这样的代理人必定是例外代理人。对于每个 $i = i(j)$ ***{v11}***，我们关联一个相应的例外捆绑 $B_{u_*,\,j}$。

D定义 10.3。 在本节中，我们将头部配置 π 的缺口度量为

$$\Delta(\pi) := (1 - 1/q - v(\pi))_+.$$

观察 10.1。对于每个 $i = i(j) \in J$ 均有

$$\Delta(\pi_i^*) \le T_{u_*,j} \qquad where \qquad T_{u_*,j} = v_{u_*}(B_{u_*,j} \setminus [h_{u_*}]).$$

由此立即可得

$$\sum_{i \in J} \Delta(\pi_i^*) \le T_{u_*} =: v_{u_*}(M \setminus [h_{u_*}]).$$

证明。 根据**推论** 9.2，对于每个指定捆绑为 B_{u_*} 的例外代理人 $i\,,\,j$

$$\left(1 - \frac{2}{q} - v(\hat{\pi}_{u_*,i})\right)_+ \le \left(T_{u_*,j} - \frac{1}{q}\right)_+ .$$

对于 $i = i(j) \in J$ 我们有 $1 - 2/q - v(\pi_i^*) > 0$，根据**推论** 9.2 这迫使 $T_{u_*,\,j} > 1/q$ 并且

$$\Delta(\pi_i^*) - \frac{1}{q} = 1 - \frac{2}{q} - v(\pi_i^*) \le T_{u_*,j} - \frac{1}{q}.$$

该观察由 $\sum_{i=i(j) \in J} T_{u_*,j} \le T_{u_*}$ 得出。 □

注意，只有代理人 $i \in J$缺少价值 $1 - 2/q$。对于这些代理人中的每一个，我们将设计一个适当的尾部配置 ψ_i，如 第 5 节中所述；对于其他每个代理人，则提供一个空的尾部配置，从而对于每个 $i \in N$ 都有 $v(\pi_i^*) + v(\psi_i) \ge 1 - 2/q$。我们将假设 $T_{u_*} > 0$，否则 $J = \varnothing$。

10.1 供应商选择以进行尾部补全

对于每个代理人 $i \in N$，记 $T_i := v_i(M \setminus [h_i])$，其中 $h_i = |\{e \in M : \ v_i(e) \geq 1/q\}|$。回想一下，在 第 5 节中，我们同样需要补足尾部；具有配置 i 的代理人 π 试图通过获取 $\Delta(\pi)$ 来弥补其缺口，即获取每个尾部物品的 $\tau_i := \tau_i(\pi)$ 份额，其中

$$\tau_i(\pi) := \begin{cases} \Delta(\pi)/T_i, & \pi \neq \perp \text{ and } T_i > 0; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

在我们的先前工作中 [FG26], ，我们使用了与第 5 节类似的尾部补全。具体而言，我们通过取每个长度大约为 $1/\tau_i$的尾部分段中的最后一个物品，构造了一个尾部配置。这样做的成本至多为一个尾部物品的价值，而该价值至多为 $1/q$。第 5 节取每个分段中的第一个物品；由于当时有更强的松弛性保证，这在该情形下是允许的，因此不会额外损失 $1/q$ 。

我们希望在公共尾部$\{h_{u_*}+1, \ldots\ldots, m\}$上重复这一构造。然而， h_{u_*} 之后的某个物品对于某个代理人 $i \in J$而言仍可能是高价值物品，因此其价值大于 $1/q$。所以，直接使用旧构造可能会损失超过 $1/q$ 的总价值。

我们希望构造需求至多为 ψ_i 的尾部配置 $1/q$。这样，从尾部配置的角度来看，所有价值超过 $1/q$ 的物品本质上都是相同的。这就给出了以下想法，该想法用于 [FG26]。为了将损失控制在 $1/q$，我们将所有头部物品的价值上限设为 $1/q$，仅用于尾部补全步骤。具体而言，对于每个代理人$i \in N$ 和物品 $e \in M$，定义估值函数

$$\overline{v}_i(e) := \min\{v_i(e), 1/q\},$$

并以加性的方式扩展。我们将根据截断估值 v_i，基于物品价值构造尾部需求。请注意，头部配置、断点和前缀负载的所有定义仍然基于原始的未截断估值 v_i。

注意，对于每个 $i \in N$，都有

$$\overline{v}_i(M) = \sum_{e=1}^{m} \min\{v_i(e), 1/q\} = \frac{h_i}{q} + T_i.$$

这是物品 M 对代理人 i 的总封顶价值，理论上可用于其尾部配置；然而，在我们的情形中，我们只能使用公共尾部中的物品 $\{h_{u_*}+1、\ldots\ldots、 m\}$。根据 h_i 和 h_{u_*}，公共尾部可能包含代理人 i 的一些高价值物品，也可能不包含代理人 i 的某些尾部物品。某种意义上，价值 $h_i/q + T_i$ 反映了可用的“尾部补全预算”，使我们能够比较这两种情形。

与此同时，对于每个代理人 $i \in N$，前 h_{u_*} 个物品的封顶价值至多为 h_{u_*}/q。因此， i 的尾部补全预算，即公共尾部的封顶价值，至少为

$$\sum_{e > h_{u_*}} \overline{v}_i(e) = \overline{v}_i(M) - \overline{v}_i(\{1, \ldots, h_{u_*}\}) \geq \frac{h_i}{q} + T_i - \frac{h_{u_*}}{q}.$$

根据 **观察结果** 10.1，代理人的总缺口 $i \in J$ 满足 $\sum_{i \in J} \Delta(\pi_i^*) \leq T_{u_*}$。因此，为了保证每个代理人 $i \in J$ 都有足够大的尾部补全预算来弥补整个缺口，只需确保他对公共尾部 $\{h_{u_*}+1, \ldots, m\}$ 的价值至少为 T_{u_*}。特别地，当以下条件成立时即可保证这一点：

$$\frac{h_i}{q} + T_i \geq \frac{h_{u_*}}{q} + T_{u_*}.$$

这个不等式指定了我们在 U 上的**推论**9.2中，我们赋予更高优先级 $i \in U$具有更大的$v_i(M) = h_i/q + T_i$。两者**引理**8.5和**推论**9.2均适用于

任意全优先级序。因此，我们得到相应的供应商 $u_* \in U$、其所有例外捆绑的指定，以及已分配的头部配置 $\{\pi_i^*\}_{i\in N}$。上述所有保证均适用于这些选择。现在，每个例外代理人 $i \in J$ 的优先级至少与 u_*一样高，因此满足

$$\overline{v}_i(\{h_{u_*}+1,\dots,m\}) \geq \frac{h_i}{q} + T_i - \frac{h_{u_*}}{q} \geq T_{u_*}.$$

因此，为了弥补代理人 $i \in J$ 的缺口 $\Delta(\pi_i^*) > 0$，他不必为每件公共尾部物品选取 τ_i 的比例，而可以选取 $\tau_{i,*}$ 的比例，其中

$$\tau_{i,*} := \begin{cases} \Delta(\pi_i^*)/T_{u_*}, & i \in J; \\ 0, & i \notin J. \end{cases}$$

事实上，上述推导意味着

$$\sum_{e>h_{u_*}} \tau_{i,*} \cdot \overline{v}_i(e) \geq \tau_{i,*} \cdot T_{u_*} = \Delta(\pi_i^*).$$

此外，**观察** 10.1 保证了

$$\sum_{i\in J} \tau_{i,*} = \sum_{i\in J} \frac{\Delta(\pi_i^*)}{T_{u_*}} \leq 1,$$

因此，所有代理人 $i \in J$ 的分数选择都包含在公共尾部中。

为保持 论文的自包含性，我们重复 [FG26]中的尾部补全证明。

引理 10.1. 设 $\Pi_N := \{\pi_i^*\}_{i\in N}$。存在一个尾部配置集合 $\Psi_N := \{\psi_i\}_{i\in N}$，其中代理人 i被分配了 ψ_i，使得

$$\forall 0 \leq \ell \leq m: \ \mathcal{P}(\Pi_N, \ell) + \mathcal{P}(\Psi_N, \ell) \leq \ell$$

并且 $v(\pi_i^*) + v(\psi_i) \geq 1 - 2/q$ 对每个 $i \in N$都成立。

证明。 根据假设， $T_{u_*} > 0$。考虑 $i \in N$；如果 $\tau_{i,*} = 0$，也取 $\psi_i = \varnothing$。由于对于 $i \in J$，我们有 $\Delta(\pi_i^*) > 1/q$，因此 $\tau_{i,*} > 0$, $\tau_{i,*} = 0$ 意味着 $i \notin J$。所以，剩下的工作是为 $i \in J$ 构造尾部配置，使得 $\tau_{i,*} > 0$。

将公共尾部 $\{h_{u_*}+1,\dots,m\}$ 划分为长度约为 $1/\tau_{i,*}$ 的分段，并在每个分段中，将最后一个物品的封顶 价值 v_i加到 ψ_i上：对于每个 $t = 1,\dots,\lfloor \tau_{i,*} \cdot (m - h_{u_*}) \rfloor$，我们将 $v_i(e_{i,t})$ 加到 ψ_i 上（只要结果为正），其中

$$e_{i,t} = h_{u_*} + \left\lceil \frac{t}{\tau_{i,*}} \right\rceil.$$

我们可以用以下等价方式表示这个构造。对于 $1 \leq k \leq m - h_{u_*}$，令 $\sigma_{i,k} := v_i(h_{u_*} + k)$。我们还设 $\sigma_{i,m-h_{u_*}+1} = 0$。然后，对于每个 $k \in [m - h_{u_*}]$，我们恰好添加

$$\lfloor \tau_{i,*} \cdot k \rfloor - \lfloor \tau_{i,*} \cdot (k-1) \rfloor$$

将 $\sigma_{i,k}$ 个副本添加到配置 ψ_i （如果其为正）。这样，前 k 个公共尾部物品至多包含 $\lfloor \tau_{i,*} \cdot k \rfloor$ 个来自 ψ_i 的选中的物品。因此，

$$\begin{aligned} v(\psi_i) = \sum_{k=1}^{m-h_{u_*}} \sigma_{i,k} \cdot \Big(\lfloor \tau_{i,*} \cdot k \rfloor - \lfloor \tau_{i,*} \cdot (k-1) \rfloor \Big) &= \sum_{k=1}^{m-h_{u_*}} \lfloor \tau_{i,*} \cdot k \rfloor \cdot \Big(\sigma_{i,k} - \sigma_{i,k+1} \Big) \\ &\geq \sum_{k=1}^{m-h_{u_*}} (\tau_{i,*} k - 1) \cdot \Big(\sigma_{i,k} - \sigma_{i,k+1} \Big) = \tau_{i,*} \sum_{k=1}^{m-h_{u_*}} \sigma_{i,k} - \sigma_{i,1}. \end{aligned}$$

由于 $\tau_{i,*} > 0$ 意味着 $i \in J$，我们有 $h_i/q + T_i \geq h_{u_*}/q + T_{u_*}$ 并且

$$\tau_{i,*} \sum_{k=1}^{m-h_{u_*}} \sigma_{i,k} = \tau_{i,*} \cdot \overline{v}_i(\{h_{u_*}+1, \ldots, m\}) \geq \tau_{i,*} \cdot T_{u_*} = \Delta(\pi_i^*),$$

因此，利用 $\sigma_{i,1} = v_i(h_{u_*}+1) \leq 1/q$，以及序列是非递增的这一事实，

$$v(\psi_i) \geq \Delta(\pi_i^*) - \sigma_{i,1} \geq \Delta(\pi_i^*) - 1/q.$$

由于 $\Delta(\pi_i^*) = (1 - 1/q - v(\pi_i^*))_+$，我们得到 $v(\pi_i^*) + v(\psi_i) \geq 1 - 2/q$。

还需要对由 $\Psi_N = \{\psi_i\}_{i \in N}$ 产生的额外前缀负载给出上界。对于每个$0 \leq \ell \leq h_{u_*}$，我们都有 $\mathcal{P}_i(\psi_i, \ell) = 0$，对于每个代理人 $i \in N$ 都成立。当 $\ell > h_{u_*}$ 时，在前 $k = \ell - h_{u_*}$ 个公共尾部物品中，从 ψ_i 选中的物品数量至多为 $\lfloor \tau_{i,*} \cdot k \rfloor \leq \tau_{i,*} \cdot k$。此外，由于 $\sigma_{i,k} = v_i(h_{u_*}+k) \leq v_i(h_{u_*}+k)$，每个非零的选中尾部需求都满足 $m_i(\sigma_{i,k}) \geq h_{u_*}+k$。因此，只有来源于至多为 ℓ 的物品的需求才能对 ℓ 处的前缀负载做出贡献，而尾部配置 Ψ_N 在前缀 ℓ 处产生的额外负载为

$$\mathcal{P}(\Psi_N, \ell) = \sum_{i \in N} \mathcal{P}_i(\psi_i, \ell) \leq \sum_{i \in N} \tau_{i,*} \cdot (\ell - h_{u_*})_+ = (\ell - h_{u_*})_+ \sum_{i \in J} \frac{\Delta(\pi_i^*)}{T_{u_*}} \leq (\ell - h_{u_*})_+.$$

根据**推论**9.2，中的所有需求 Π_N 都可以由下列集合中的不同物品同时满足：$\{1, \ldots, h_{u_*}\}$，因此有

$$\mathcal{P}(\Pi_N, \ell) \leq \min\{\ell, h_{u_*}\}.$$

对每个 $0 \leq \ell \leq m$ 都成立。因此，

$$\mathcal{P}(\Pi_N, \ell) + \mathcal{P}(\Psi_N, \ell) \leq \min\{\ell, h_{u_*}\} + (\ell - h_{u_*})_+ = \ell$$

对每个 $0 \leq \ell \leq m$ 都成立，正如所需。 □

10.2 完成证明

有了**引理**10.1 之后，我们终于可以证明**定理**6.4。

定理*定理6.4*的证明。取整数 $\Gamma \geq 1$ 和 $q \geq 9$，并取 n 足够大，使得所有先前的构造都能成立。对于每个供应商候选者 $u \in U$，我们赋予 u 更高的优先级，当封顶价值总和

$$\overline{v}_u(M) = \frac{h_u}{q} + T_u$$

较大，平局时任意打破。按照 **推论** 9.2 中的这一优先级顺序进行处理，得到供应商 u_*、将其例外捆绑指定给相应接收者的方式，以及已分配的头部配置 $\Pi_N = \{\pi_i^*\}_{i \in N}$。

若 $J = \varnothing$，则每个已分配的头部配置的价值都至少为 $1 - 2/q$，因此令尾部配置为$\psi_i = \varnothing$ 对所有 $i \in N$。否则，根据 **观察** 10.1 $T_{u_*} > 0$，我们可以应用 **引理** 10.1。无论哪种情况，我们都能得到一个由尾部配置组成的集合 $\Psi_N = \{\psi_i\}_{i \in N}$，使得对于每个 $0 \leq \ell \leq m$，

$$\mathcal{P}(\Pi_N, \ell) + \mathcal{P}(\Psi_N, \ell) \leq \ell,$$

且对于每个 $i \in N$ 均有 $v(\pi_i^*) + v(\psi_i) \geq 1 - 2/q$。因此，将 **引理** 3.1 应用于联合画像集合 $\{\pi_i^* \uplus \psi_i\}_{i \in N}$，我们可以使用 M中的不同物品同时满足所有这些画像。任意分配所有未使用物品。这就得到了一个 $\{B_i\}_{i \in N}$的分配 M，使得对于每个 $v_i(B_i) \geq 1 - 2/q$ 均有 $i \in N$。

所有结论对于足够大的 n 均成立，且只取决于 Γ，q。在 附录 C(**定理** C.3) 中，我们证明了特定选择

$$n(\Gamma, q) = 2^{4q^2 \log^2(2q)}(\log^{2q}(2\Gamma))$$

即可。这就完成了**定理**6.4的证明。要恢复原来的**定理**6.2，将此分配与**引理**6.3中头部贫乏代理人的分配结合起来。两种分配使用的是互不相交的物品集合，因此组合后的分配是有效的。□

参考文献

[AAB+23] Georgios Amanatidis、Haris Aziz、Georgios Birmpas、Aris Filos-Ratsikas、Bo Li、Herv´e Moulin、Alexandros A. Voudouris 和 Xiaowei Wu。不可分物品的公平分配：最新进展与开放问题。人工智能，322:103965，2023年。[AGST24] Hannaneh Akrami、Jugal Garg、Eklavya Sharma 和 Setareh Taki。改进最大最小份额的近似保证。载于第*25*届*ACM*经济与计算会议论文集，EC '24，第198页，美国纽约州纽约市，2024年。计算机协会。[ALMW22] Haris Aziz、Bo Li、Herv´e Moulin 和 Xiaowei Wu。不可分物品的算法公平分配：综述与新问题。*SIGecom Exch.*，20(1):24–40，2022年11月。[BEF22] Moshe Babaioff、Tomer Ezra 和 Uriel Feige。论两全其美的公平份额分配。载于第*18*届网络与互联网经济国际会议论文集，WINE'22，第237–255页，Cham，2022年。施普林格。[BL16] Sylvain Bouveret 和 Michel Lemaˆıtre。使用标准尺度刻画不可分物品公平分配中的冲突。自主代理人与多代理系统，30:259–290，2016年。[BNTC21] Moshe Babaioff、Noam Nisan 和 Inbal Talgam-Cohen。具有不可分物品和一般预算的竞争均衡。运筹学数学，46(1):382–403，2021年。[BT96] Steven J. Brams 和 Alan D. Taylor。公平分配：从切蛋糕到争议解决。剑桥大学出版社，1996年。[Bud11] Eric Budish。组合分配问题：来自等收入的近似竞争均衡。政治经济学杂志，119(6):1061–1103，2011年。[CLO15] David A. Cox、John Little 和 Donal O'Shea。理想、簇与算法：计算代数几何与交换代数导论。数学本科教材。施普林格，Cham，第四版，2015年。[Dic13] Leonard Eugene Dickson。具有 n 个不同素因子的奇完全数和本原丰数的有限性。美国数学杂志，35(4):413–422，1913年。[EG26a] Tomer Ezra 和 Tamar Garbuz。几乎所有代理人的公平份额分配。*CoRR*，abs/2609.33234，2026年。

[EG26b] Tomer Ezra 和 Tamar Garbuz。最大最小份额分配的不可能性界限改进。CoRR, abs/2609.15085，2026年。[FG26] Uriel Feige 和 Vadim Grinberg。具有较小代理人冗余的近似最大最小份额分配。CoRR，abs/2611.05360，2026年。[FN22] Uriel Feige 和 Alexey Norkin。将不可分物品改进分配给三个代理人的最大最小公平分配。CoRR, abs/2205.05363，2022年。[FST21] Uriel Feige、Ariel Sapir 和 Laliv Tauber。最大最小份额公平分配的一个紧负例。载于第17届网络与互联网经济国际会议论文集，WINE'21，第355–372页，Cham，2021年。施普林格。[GHS+22] Mohammad Ghodsi、Mohammad Taghi Hajiaghayi、Masoud Seddighin、Saeed Sed- dighin 和 Hadi Yami。不可分物品的公平分配：超越加性估值。人工智能，303(C)，2022年。[HZ25] Xin Huang 和 Shengwei Zhou。一个用于最大最小份额分配 7/9近似的全多项式时间近似方案。CoRR, abs/2511.13056，2025年。[KMT21] Rucha Kulkarni、Ruta Mehta 和 Setareh Taki。关于不可分混合物品中最大最小份额的多项式时间近似方案。载于AAAI人工智能会议论文集，第35卷，第5523–5530页，2021年。[KPW18] David Kurokawa、Ariel D. Procaccia 和 Junxing Wang。足够公平：保证近似最大最小份额。《ACM期刊》，65(2)，2018年2月。[LLN06] Benny Lehmann、Daniel J. Lehmann 和 Noam Nisan。具有递减边际效用的组合拍卖。《博弈与经济行为》，55(2):270–296，2006年。[NR20] Trung Thanh Nguyen 和 J¨org Rothe。公平且有效分配的近似帕累托集：少量代理类型或少量资源类型。载于 Christian Bessiere 编，第29届国际人工智能联合会议论文集，IJCAI-20，第290–296页。国际人工智能联合会议组织，7月，2020年。主会场。[Onn10] Shmuel Onn。非线性离散优化：算法理论。苏黎世高级数学讲义。欧洲数学会出版社，Z¨urich，2010年。[Sch03] Alexander Schrijver。组合优化：多面体与效率，《算法与组合数学》第24卷。施普林格，柏林、海德堡，2003年。[Sch26] Christoph Schwerdtfeger。四个代理人始终存在五取一最大最小份额分配。CoRR，abs/2607.18139，2026年。

分数剖面舍入定理的证明

定理 A.1 (**定理** 5.2重述）。设 Π 为共享头部配置集，使得 $|\pi| \leq h$对于某个整数 $h \geq 1$成立。对于每个 $i \in N$，令 (x_i, Π) 为分数配置，记 $x = \{x_i\}_{i \in N}$。

存在一个集合 $y = \{y_i\}_{i\in N}$，其中包含整数头部配置 $(y_i,\ \Pi)$，使得对于每个 $i,\ \pi$，都有 $y_i(\pi) \in \{0,\ 1\}$，并且 $y_i(\pi) = 1$ 仅当 $\pi \neq \perp$ 时，$x_i(\pi) > 0$，且

$$\begin{aligned}
&\mathcal{H}(y,\Pi,\ell) \le \mathcal{H}(x,\Pi,\ell), \qquad \forall 0 \le \ell \le m,\\
&\tau(y,\Pi) \le \tau(x,\Pi),\\
&\mathcal{I}(y,\Pi) \le \mathcal{I}(x,\Pi),\\
&\mathcal{I}(y,\Pi) \ge \mathcal{I}(x,\Pi) - \rho(h,X),
\end{aligned}$$

其中 $X = |\{(i,\pi):\ \ 0 < x_i(\pi) < 1\}|$ 以及

$$\rho(h,X) := 8 + 4\log\max\{1,X\}\cdot(1+\ln h + \ln\max\{1,X\}).$$

证明。如果 $X = 0$, x 已经是整数，则可取 $y = x$。以下假设 $X \ge 2$。我们将把初始的分数配置 x（我们将其称为"解"）舍入为一个整数y。舍入算法将分阶段运行，每个阶段 k 都从当前解 x^k 开始并得到 x^{k+1}。在 x^{k+1} 中，凡是对应于某个配置 $\pi \neq \perp$且达到 0 或 1 的条目，都会在后续阶段中固定。在整个阶段中，对于每个$i \in N$，我们保持 $x_i^k(\pi) \ge 0$ 对所有 $\pi \in \Pi$均成立，并且 $\sum_{\pi\in\Pi} x_i^k(\pi) = 1$。令 $\mathbf{X}_k := \{(i,\pi):\ \ 0 < x_i^k(\pi) < 1\}$ 为阶段 k开始时 x^k 中的严格分数条目集合，并令 $X_k := |\mathbf{X}_k|$。初始时，我们从 $x^1 := x$ 和 $X_1 := X$开始。

假设 $X_k > 16$。在将 x^k 中的一些条目舍入为 0 或 1 之前，我们会在每个前缀 $0 \le \ell \le m$ 中增加额外的松弛量，以吸收舍入可能导致的前缀负载增加。记

$$p_k := \frac{4(1+\ln(hX_k))}{X_k}.$$

我们按如下方式构造一个**中间解**$\hat{}x^k$。对于每个 $(i,\pi) \in \mathcal{X}_k$，其中 $\pi \neq \perp$，我们将 $\min\{x_i^k(\pi)\ p_k\}$ 权重从 $x_i^k(\pi)$ 转移到 $x_i^k(\perp)$。也就是说，

$$\forall (i,\pi)\in\mathcal{X}_k, \pi\neq\perp:\ \hat{x}_i^k(\pi) = x_i^k(\pi) - \min\{x_i^k(\pi),p_k\},\quad \hat{x}_i^k(\perp) = x_i^k(\perp) + \sum_{\substack{(i,\pi)\in\mathcal{X}_k\\ \pi\neq\perp}} \min\{x_i^k(\pi),p_k\}.$$

令 $\hat{}\mathcal{X}_k = \{(i,\pi):\ 0 < \hat{}x_i^k(\pi) < 1\}$ 为 $\hat{}x^k$ 中的严格分数条目。若 $\hat{}\mathcal{X}_k = \varnothing$，则 $\hat{}x^k$ 的所有条目都是整数。然后我们令 $x^{k+1} = \hat{}x^k$，并进入下一阶段。

若 $\hat{}\mathcal{X}_k \neq \varnothing$，则每个满足 $\pi \neq \perp$ 的对 $(i,\pi) \in \hat{}\mathcal{X}_k$ 都满足 $x_i^k(\pi) > p_k$，且在转移到 $\hat{}x^k$ 时恰好损失了 p_k。对于满足 $\pi \neq \perp$ 的 $(i,\pi) \in \hat{}\mathcal{X}_k$，我们列出 i 对所有需求 $\alpha \in \pi$ 的全部断点，并将它们合并成一个多重集 $\mathcal{M}_k$:

$$\mathcal{M}_k := \biguplus_{\substack{(i,\pi)\in\hat{\mathcal{X}}_k\\ \pi\neq\perp}} \{m_i(\alpha) : \alpha \in \pi\}.$$

引理 A.1。有 $I(\hat{}x^k,\Pi) \ge I(x^k,\Pi) - p_kX_k$ 以及 $\tau(\hat{}x^k,\Pi) \le \tau(x^k,\Pi)$。此外，

$$\forall 0 \le \ell \le m: \qquad \mathcal{H}(\hat{x}^k,\Pi,\ell) + p_k\mathcal{P}_k(\ell) \le \mathcal{H}(x^k,\Pi,\ell),$$

其中对于每个 $-1 \le \ell \le m$,

$$\mathcal{P}_k(\ell) = \sum_{(i,\pi)\in\hat{\mathcal{X}}_k} \mathcal{P}_i(\pi,\ell)$$

是总计 M_k 中不超过 ℓ 的断点数量，其中约定 $P_k(-1) = 0$.

证明。由于 x^k 中的每个非-$\perp$ 项最多损失 p_k，上界 $\mathcal{I}(\hat{}x^k,\ \Pi) \geq \mathcal{I}(x^k,\ \Pi) - p_k X_k$ 为i即时。同样，将权重移至 $\perp$ 只会降低前缀负载，因此 $\tau(\hat{}x^k,\ \Pi) \leq \tau(x^k,\ \Pi)$。最后，根据$\hat{}x^k$的构造，对于每个 $0 \leq \ell \leq m$，我们都有

$$\mathcal{H}(x^k, \Pi, \ell) - \mathcal{H}(\hat{x}^k, \Pi, \ell) = \sum_{i \in N} \sum_{\pi \neq \perp} \Big(x_i^k(\pi) - \hat{x}_i^k(\pi)\Big) \cdot \mathcal{P}_i(\pi, \ell) \geq \sum_{(i,\pi) \in \hat{\mathcal{X}}_k} p_k \cdot \mathcal{P}_i(\pi, \ell),$$

根据定义，这恰好是 $p_k \cdot \mathcal{P}_k(\ell)$。 □

接下来，我们将创建一个小的**头部检查点**集合，即一组前缀 ℓ，无论舍入过程中发生什么，我们都希望它们满足不等式$\mathcal{H}(x^{k+1},\ \Pi,\ \ell) \leq \mathcal{H}(x^k,\ \Pi,\ \ell)$。具体做法如下。首先，按非递减顺序对$\mathcal{M}_k$ 中的所有断点排序，并令m_{i_j} 表示$\mathcal{M}_k$中的第 j个断点。对于每个 $1 \leq j \leq |\mathcal{M}_k|$，我们将权重$1/j$ 与一个断点m_{i_j}关联起来。我们从一个虚拟检查点 $t = -1$开始。然后，找到最小的前缀 $\ell \in \{0,\ .....,\ m\}$，使得 $\ell > t$，且$\mathcal{M}_k$ 中位于 $t+1$和 ℓ之间的断点总权重大于 p_k。也就是说，$\ell > t$ 是满足条件的最小值

$$\sum_{j=\mathcal{P}_k(t)+1}^{\mathcal{P}_k(\ell)} \frac{1}{j} > p_k.$$

我们在 ℓ处设置一个检查点，将 t 增加到 ℓ，并重复此过程，直到不存在这样的 $\ell > t$。我们将得到的检查点集合记为 $\mathcal{L}_k$ （不包括 -1）。

引理 A.2. 阶段 k 的检查点总数为 $|\mathcal{L}_k| \leq X_k/4$。此外，对于任意满足以下条件的解 z：对所有满足 (i, π) 使得 $\hat{}x_i^k(\pi) \in \{0,1\}$ 的情况，均有 $z_i(\pi) = \hat{}x_i^k(\pi)$，以下结论成立。

假设对于每个 $\ell_k \in \mathcal{L}_k$，都有 $\mathcal{H}(z, \Pi, \ell_k) \leq \mathcal{H}(\hat{}x^k, \Pi, \ell_k)$。那么，对于每个 $0 \leq \ell \leq m$，

$$\mathcal{H}(z, \Pi, \ell) \leq \mathcal{H}(\hat{x}^k, \Pi, \ell) + p_k \mathcal{P}_k(\ell).$$

证明。若 $\mathcal{M}_k = \varnothing$，取 $\mathcal{L}_k = \varnothing$，则所有 $(i, \pi) \in \hat{}\mathcal{X}_k$ 在任何前缀 ℓ 上都没有断点，此时引理显然成立。以下假设 $\mathcal{M}_k \neq \varnothing$，因此 $\mathcal{P}_k(m) \geq 1$。我们先讨论检查点的数量。根据 $\mathcal{L}_k$ 的构造，我们有

$$|\mathcal{L}_k| \cdot p_k \leq \sum_{j=1}^{\mathcal{P}_k(m)} \frac{1}{j} \leq 1 + \ln \mathcal{P}_k(m) \quad \Longrightarrow \quad |\mathcal{L}_k| \leq \frac{1 + \ln \mathcal{P}_k(m)}{p_k}.$$

根据假设，每个配置 $\pi \in \Pi - \perp$ 都有 $|\pi| \leq h$。此外，每个坐标（$i,\ \pi$）$\in \hat{}\mathcal{X}_k$以及 $\pi \neq \perp$ 在解 x^k 中也严格是分数形式。因此

$$\mathcal{P}_k(m) = |\mathcal{M}_k| = \sum_{\substack{(i,\pi) \in \hat{\mathcal{X}}_k \\ \pi \neq \perp}} |\pi| \leq \sum_{\substack{(i,\pi) \in \mathcal{X}_k \\ \pi \neq \perp}} |\pi| \leq h X_k,$$

并代入 $p_k = (1/X_k) \cdot 4(1 + \ln(hX_k))$ 的定义，我们得到

$$|\mathcal{L}_k| \leq \frac{1 + \ln \mathcal{P}_k(m)}{p_k} \leq \frac{X_k(1 + \ln(hX_k))}{4(1 + \ln(hX_k))} = \frac{X_k}{4}.$$

接下来，对于 $0 \leq \ell \leq m$，令 $\ell_k \in \mathcal{L}_k$ 为早于 ℓ 的最大检查点，即满足 $\ell_k \leq \ell$（若不存在，则令集合 $\ell_k = -1$）。由于在 $\hat{}\mathcal{X}_k$ 之外的所有坐标上，z 与 $\hat{}x^k$ 一致，因此有

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(z, \Pi, \ell) - \mathcal{H}(\hat{x}^k, \Pi, \ell) = \mathcal{H}(z, \Pi, \ell_k) - \mathcal{H}(\hat{x}^k, \Pi, \ell_k) \\ + \sum_{(i,\pi) \in \hat{\mathcal{X}}_k} \Big(z_i(\pi) - \hat{x}_i^k(\pi)\Big) \cdot \Big(\mathcal{P}_i(\pi, \ell) - \mathcal{P}_i(\pi, \ell_k)\Big).\end{aligned}$$

根据假设，$\mathcal{H}(z,\ \Pi,\ \ell_k) \leq \mathcal{H}(\hat{}x^k,\ \Pi,\ \ell_k)$。由于 $z_i(\pi)$ 和 $\hat{}x_i^k(\pi)$ 均属于 $[0,1],$，因此有

$$\mathcal{H}(z,\Pi,\ell) - \mathcal{H}(\hat{x}^k,\Pi,\ell) \leq \sum_{(i,\pi)\in\hat{\mathcal{X}}_k} |z_i(\pi) - \hat{x}_i^k(\pi)| \cdot \Big(\mathcal{P}_i(\pi,\ell) - \mathcal{P}_i(\pi,\ell_k)\Big)$$
$$\leq \sum_{(i,\pi)\in\hat{\mathcal{X}}_k} \Big(\mathcal{P}_i(\pi,\ell) - \mathcal{P}_i(\pi,\ell_k)\Big) = \mathcal{P}_k(\ell) - \mathcal{P}_k(\ell_k).$$

如果 $\ell_k = \ell$ 那么 $\mathcal{P}_k(\ell) - \mathcal{P}_k(\ell_k) = 0$，结论即得。否则，根据$\mathcal{L}_k$ 的构造，我们有

$$\sum_{j=\mathcal{P}_k(\ell_k)+1}^{\mathcal{P}_k(\ell)} \frac{1}{j} \leq p_k.$$

当 $\mathcal{P}_k(\ell) > 0$时，上述每一项都至少为 $1/\mathcal{P}_k(\ell)$，因此

$$\frac{\mathcal{P}_k(\ell) - \mathcal{P}_k(\ell_k)}{\mathcal{P}_k(\ell)} \leq \sum_{j=\mathcal{P}_k(\ell_k)+1}^{\mathcal{P}_k(\ell)} \frac{1}{j} \leq p_k \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{P}_k(\ell) - \mathcal{P}_k(\ell_k) \leq p_k\mathcal{P}_k(\ell).$$

我们得出 $\mathcal{H}(z,\Pi,\ell) - \mathcal{H}(\hat{}x^k,\Pi,\ell) \leq p_k\mathcal{P}_k(\ell)$，由此证明完毕 . □

由**引理**A.1 和**引理**A.2 可知，要在每个前缀 $0 \leq \ell \leq m$ 的阶段 k保留前缀负载约束，只需保留检查点前缀$\mathcal{L}_k$。

现在，我们将构造一个约束数量相对较少的辅助多面体 (P)，并将解 $\hat{}x^k$ 部分舍入到它的某个极点，即某个 z^*，使其满足**引理**A.2。多面体 (P) 由以下约束定义。

$$\begin{aligned}
&\sum_{\pi\in\Pi} z_i(\pi) = 1, && \forall i \in N,\\
&z_i(\pi) = \hat{x}_i^k(\pi), && \forall (i,\pi) : \hat{x}_i^k(\pi) \in \{0,1\},\\
&\tau(z,\Pi) \leq \tau(\hat{x}^k,\Pi), &&\\
&\mathcal{H}(z,\Pi,\ell_k) \leq \mathcal{H}(\hat{x}^k,\Pi,\ell_k), && \forall \ell_k \in \mathcal{L}_k,\\
&0 \leq z_i(\pi) \leq 1, && \forall i \in N, \pi \in \Pi.
\end{aligned} \tag{P}$$

显然， $z = \hat{}x^k$ 对于 (P) 是可行的。我们选择一个使下式最大化的极点 z^*

$$\mathcal{I}(z^*,\Pi) = \sum_{i\in N}\sum_{\pi\neq\perp} z_i^*(\pi).$$

这样的极点必定存在，因为 (P) 非空且紧致，即有界且闭。于是，由极大性，$\mathcal{I}(z^*,\ \Pi) \geq \mathcal{I}(\hat{}x^k,\ \Pi)$。

引理 A.3. 设 z^* 是多面体(P)的一个极点。那么， z^* 中的严格分数条目数量至多为 $X_k/2 + 2$。

证明。 设 $Z^* := |\{(i,\ \pi) :\ 0 < z_i^*(\pi) < 1\}|$ 为 z^*中严格分数坐标的总数。注意，若对于某个 $i \in N$，有 $0 < z_i^*(\pi') < 1$，且某个 $\pi' \in \Pi$满足该条件，则必定存在另一个$\pi'' \in \Pi$，使得 $0 < z_i^*(\pi'') < 1$，因为 $\sum_{\pi\in\Pi} z_i^*(\pi) = 1$。因此，满足某个 $\pi \in \Pi$使 $0 < z_i^*(\pi) < 1$ 的不同代理人 $i \in N$至多有 $Z^*/2$ 个；对于剩余代理人， $z_i^*(\pi) \in \{0,\ 1\}$对每个坐标 $(i,\ \pi)$ 都成立。

假设 $Z^* > X_k/2 + 2$。将多面体 (P) 的方程矩阵限制在满足 $0 < z_i^*(\pi) < 1$ 的条目 $(i,\ \pi)$ 上，它是一个含有 Z^* 个变量的方程组。它至多包含 $Z^*/2$ 个形如 $\sum_{\pi\in\Pi} z_i^*(\pi) = 1$ 的约束，其中 $i \in N$。我们还有一个额外约束

在 $\tau(z^*,\ \Pi)$ 上，而对于 $\mathcal{H}(z^*,\ \Pi,\ \ell_k)$ 且满足 $\ell_k \in \mathcal{L}_k$ 的约束数量，根据**引理** A.2 为 $|\mathcal{L}_k| \le X_k/4$。因此，若 $Z^* > X_k/2+2$，该限制中的约束总数至多为

$$\frac{Z^*}{2} + 1 + |\mathcal{L}_k| \le \frac{Z^*}{2} + \frac{4+X_k}{4} < \frac{Z^*}{2} + \frac{2Z^*}{4} = Z^*.$$

因此，受限矩阵的秩小于 Z^*，这意味着存在一个支撑于 z^* 的严格分数条目上的非零解，并且该解保留所有约束。所有这些条目都严格介于 0 和 1 之间，因此，沿两个方向进行小幅扰动仍会使 z^* 位于多面体内。这与 z^*的极性矛盾。引理得证。

□

取这个极点 z^* （P）中的，并令 $x^{k+1} = z^*$。根据 **引理** A.1 和 **引理** A.2，

$$\forall 0 \le \ell \le m:\ \mathcal{H}(x^{k+1}, \Pi, \ell) \le \mathcal{H}(x^k, \Pi, \ell), \qquad \text{and} \qquad \tau(x^{k+1}, \Pi) \le \tau(x^k, \Pi),$$

以及

$$\mathcal{I}(x^k, \Pi) - \mathcal{I}(x^{k+1}, \Pi) \le p_k X_k = 4(1 + \ln(hX_k)).$$

根据 **引理** A.3，$X_{k+1} \le X_k/2 + 2$，因此根据 k 的归纳法，对于每个 $k \ge 1$ 都成立：

$$X_k \le 4 + (X-4)\cdot 2^{-(k-1)}.$$

那么，如果在阶段 $K+1$ 我们有 $X_{K+1} \le 16$，则必有 $K \le \log X$。在该阶段，解x^{K+1} 至多有 16 个严格分数坐标，因此至多有 8 个代理人具有严格分数坐标。我们按如下方式创建一个新解 y：对于每个满足$0 < x_i^{K+1}(\pi) < 1$ 且对某个 $\pi \in \Pi$成立的 $i \in N$，令 $y_i(\perp) = 1$，即舍弃这些代理人。对于其他每个代理人 $i \in N$，令 $y_i(\pi) = x_i^{K+1}(\pi)$，对所有 $\pi \in \Pi$均如此。显然，y 是整数解，每个头部/尾部负载都只会减少，并且

$$\mathcal{I}(y, \Pi) \ge \mathcal{I}(x^{K+1}, \Pi) - 8.$$

Su汇总所有阶段中$\mathcal{I}(x^k,\ \Pi)$的损失，我们得到（利用 $X_k \le X$ ）

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(x, \Pi) - \mathcal{I}(y, \Pi) \le 8 + \sum_{k=1}^{K}\Big(\mathcal{I}(x^k, \Pi) - \mathcal{I}(x^{k+1}, \Pi)\Big) &\le 8 + 4\sum_{k=1}^{K}(1 + \ln(hX_k)) \\ &\le 8 + 4\log X \cdot (1 + \ln(hX)) = \rho(h, X).\end{aligned}$$

为确保$\mathcal{I}(y,\ \Pi)\ \le \mathcal{I}(x,\ \Pi)$，如果$\mathcal{I}(y,\ \Pi)\ > \mathcal{I}(x,\ \Pi)$，我们保留任意 $\lfloor \mathcal{I}(x,\ \Pi) \rfloor$ 个由 y分配的代理人，并将 $\perp$ 给予其余代理人。移除代理人可保持前缀负载约束，且我们仍至少有$\mathcal{I}(x,\ \Pi)\ -1$ 个入选代理人。最后，根据构造，代理人 $i \in N$满足$y_i(\pi) = 1$ 且对应某个 $\pi \ne \perp$，必定曾满足 $x_i(\pi) > 0$。证明至此完成。

□

定理 A.2 (**定理** 3.2、**定理** 7.1 重述)。对于一个划分 $[h] = E \sqcup S$（假设 $h = m$，除非另有说明），设 Π 为一个共享头部配置集，其 E/S-分解定义良好，并且对于每个 $\pi \in \Pi \setminus \perp$，存在某个整数 $|\pi| \le q$，使得 $q \ge 1$。对于每个$i \in N$，令$(x_i,\ \Pi)$为一个分数配置，记 $x = \{x_i\}_{i \in N}$。

存在一个由整数头部配置组成的集合 $y = \{y_i\}_{i \in N}$（y_i, Π），使得对于每个 i, π，我们都有 y_i（π）$\in \{0,1\}$，并且 y_i（π）$= 1$ 仅当 x_i（π）> 0 时成立，且

$$\begin{aligned}&\mathcal{H}^E(y, \Pi, \ell) \le \mathcal{H}^E(x, \Pi, \ell), && \forall 0 \le \ell \le m, \\ &\mathcal{H}^S(y, \Pi, \ell) \le \mathcal{H}^S(x, \Pi, \ell), && \forall 0 \le \ell \le m, \\ &\mathcal{I}(y, \Pi) \ge \mathcal{I}(x, \Pi) - \rho_{ES}(q, X), &&\end{aligned}$$

其中，对于 $X = |\{(i, \pi):\ 0 < x_i(\pi) < 1\}|$

$$\rho_{ES}(q, X) = 8q \log \max\{1, X\}.$$

证明。该定理的证明是对定理 A.1 的直接扩展，结构也与之类似。我们从一个解 $x^1 = x$ 开始，并在多个阶段中将其舍入为整数 y；当当前解 x^k 中非 $\perp$ 项达到 0 或 1 时，将其固定，并对每个 $i \in N$ 保持 $x_i^k(\pi) \geq 0$ 对所有 $\pi \in \Pi$ 均成立，且 $\sum_{\pi \in \Pi} x_i^k(\pi) = 1$。两个关键区别在于：1）我们保留两个首部负载族；2）我们利用 $|\pi| \leq q$ 的上界，使每个阶段的常数损失至多为 $8q$，从而得到总损失 $O(q \log X)$。大部分情况下，我们会使证明自成一体，仅略微引用定理 A.1 的证明。

再次，令 $\mathcal{X}_k := \{(i, \pi) : 0 < x_i^k(\pi) < 1\}$ 为 x^k 的严格分数条目，并令 $X_k := |\mathcal{X}_k|$，其中 $x^1 = x$ 和 $X_1 = X$。若 $X = 0$，则取 $y = x$；否则取 $X \geq 2$。

假设 $X_k > 0$。如 **定理** A.1中所述，我们构造一个中间解 $\hat{}x^k$。对于部分 $R \in \{E, S\}$ 和配置 $\pi \in \Pi$，其中 $\pi^R \neq \varnothing$，令

$$b_i^R(\pi) := \min_{\alpha \in \pi^R} m_i(\alpha)$$

为代理人 i 在子配置 π^R 中最早的断点。我们执行以下操作，先对 $R = E$，然后对 $R = S$。我们将所有满足 $\pi \neq \perp$ 且 $\pi^R \neq \varnothing$ 的对 $(i, \pi) \in \mathbf{X}_k$ 按照 $b_i^R(\pi)$ 以非递减顺序排序。然后，从第一个对开始，不断将权重$x_i^k(\pi)$ 转移到 $x_i^k(\perp)$，直到转移的总权重达到 $4q$，或该排序列表中所有非$\perp$ 权重均被设为 0。除最后一次转移可能例外外，每次转移都会完全耗尽相应的坐标 $x_i^k(\pi)$。完成对 $R = E$ 的操作后，对经过 $R = E$ 所得的解中的 $R = S$ 应用完全相同的过程。我们将所得解记为 $\hat{}x^k$，并令 $\hat{}\mathbf{X}_k := \{(i, \pi) : 0 < \hat{}x_i^k(\pi) < 1\}$，以及 $\hat{} X_k := |\hat{}\mathbf{X}_k|$。

与 **定理** A.1 的证明中一样，对于每个 $R \in \{E, S\}$ 以及每个 $(i, \pi) \in \hat{}\mathcal{X}_k$，我们列出每个对所有需求 $\alpha \in \pi^R$ 的断点 $m_i(\alpha)$，并将它们合并为一个多重集 $\mathcal{M}_k^R$：

$$\mathcal{M}_k^R := \biguplus_{\substack{(i,\pi) \in \hat{\mathcal{X}}_k \\ \pi \neq \perp}} \{m_i(\alpha) : \alpha \in \pi^R\}.$$

与之前一样，对于 $-1 \leq \ell \leq m$，我们用

$$\mathcal{P}_k^R(\ell) = \sum_{(i,\pi) \in \hat{\mathcal{X}}_k} \mathcal{P}_i(\pi^R, \ell)$$

表示 $\mathcal{M}_k^R$ 中不大于 ℓ 的断点总数，其中 $\mathcal{P}_k^R(-1) = 0$。

引理 A.4. 对于每个前缀$0 \leq \ell \leq m$ 和每个部分 $R \in \{E, S\}$，均有 $I(\hat{}x^k, \Pi) \geq I(x^k, \Pi) - 8q$，且 $H^R(\hat{}x^k, \Pi, \ell) \leq H^R(x^k, \Pi, \ell)$。此外，若 $P_k^R(\ell) > 0$，则

$$\mathcal{H}^R(\hat{x}^k, \Pi, \ell) + 4q \leq \mathcal{H}^R(x^k, \Pi, \ell).$$

证明。除了关于头部前缀负载的最后一个上界外，其余所有结论都显而易见。固定 $R \in \{E, S\}$。

设 ℓ 是一个前缀，使得 $\mathrm{P}_k^R(\ell) > 0$。那么，存在 $(i_*, \pi_*) \in \hat{}\mathbf{X}_k$，使得 $\mathrm{P}_{i*}(\pi_*^R, \ell) > 0$，且 π_*^R 的最早断点满足 $b_{i*}^R(\pi_*) \leq \ell$。由于 $\hat{}x_{i*}^k(\pi_*) > 0$，我们必有 $x_{i*}^k(\pi_*) > 0$，并且每一对 $(i, \pi) \in \mathbf{X}_k$（其正权重被转移至 $\perp$ 中，关于 R-部分）都必须出现在 (i_*, π_*) 之前（或终止于 (i_*, π_*)）。于是，对于每一对这样的 (i, π)，都有 $b_i^R(\pi) \leq b_{i*}^R(\pi_*) \leq \ell$，因此 $\mathrm{P}_i(\pi^R, \ell) \geq 1$。

由于 $\hat{}x_{i*}^k(\pi_*) > 0$，$R$-转移在将所有权重归零之前停止，并且恰好有 $4q$ 总权重被转移到 $\perp$。正如我们刚刚证明的那样，该权重的每个单位都使R-负载至少减少了 1。因此，R-转移使该负载至少减少了 $4q$，而另一个转移只会使其进一步减少。于是，

$$\mathcal{H}^R(x^k, \Pi, \ell) - \mathcal{H}^R(\hat{x}^k, \Pi, \ell) = \sum_{i \in N} \sum_{\pi \neq \perp} \left(x_i^k(\pi) - \hat{x}_i^k(\pi)\right) \cdot \mathcal{P}_i(\pi^R, \ell) \geq 4q.$$

□

如**定理** A.1中所述，对于 $R \in \{E,\ S\}$，我们构造**头部检查点**。我们不使用调和检查点，而是利用有界轮廓大小来选取间距均匀的断点。

对于 $R \in \{E,\ S\}$，将 $\mathcal{M}_k^R$ 按非递减顺序排序，然后从 $\mathcal{M}_k^R$ 中每隔 $4q$ 个选择一个断点作为头部检查点。令 $\mathcal{L}_k^R$ 为所选检查点的集合。

引理 A.5。 阶段 k 的头部检查点总数满足

$$|\mathcal{L}_k^E| + |\mathcal{L}_k^S| \le \frac{X_k}{4}.$$

此外，对于任意满足以下条件的解 z：对于所有满足 $\hat{x}_i^k(\pi) \in \{0,1\}$ 的 (i,π)，$z_i(\pi) = \hat{x}_i^k(\pi)$，以下结论成立。假设对于每个 $R \in \{E,S\}$ 以及每个 $\ell_k^R \in L_k^R$，都有 $H^R(z,\Pi,\ell_k^R) \le H^R(\hat{x}^k,\Pi,\ell_k^R)$。那么，对于每个 $R \in \{E,S\}$，以及每个前缀 $0 \le \ell \le m$，

$$\mathcal{H}^R(z,\Pi,\ell) \le \mathcal{H}^R(\hat{x}^k,\Pi,\ell) + 4q\mathbb{1}\{\mathcal{P}_k^R(\ell) > 0\}.$$

证明。 这与先前的**引理** A.2 类似。根据构造，每个分数非整⊥坐标在 $\hat{x}^k$ 中原本也是分数的 x^k，而新产生的 ⊥坐标不产生断点。因此，利用假设 $|\pi| \le q$ 对于 $\pi \in \Pi$，我们有

$$|\mathcal{M}_k^E| + |\mathcal{M}_k^S| = \sum_{\substack{(i,\pi)\in\hat{\mathcal{X}}_k \\ \pi\neq\perp}} (|\pi^E| + |\pi^S|) \le qX_k \quad \Longrightarrow \quad |\mathcal{L}_k^E| + |\mathcal{L}_k^S| \le \frac{|\mathcal{M}_k^E| + |\mathcal{M}_k^S|}{4q} \le \frac{X_k}{4}.$$

接下来，固定 $R \in \{E,\ S\}$ 并令 $0 \le \ell \le m$。若 $\mathcal{P}_k^R(\ell) = 0$，$\hat{x}^k$ 中的每个分数项对 $\mathcal{H}^R(\hat{x}^k,\ \Pi,\ \ell)$ 的贡献均为 0。由于 z 在 $\hat{x}^k$ 以外的所有坐标上都与 $\hat{x}^k$ 重合，因此必有 $\mathcal{H}^R(z,\ \Pi,\ \ell) = \mathcal{H}^R(\hat{x}^k,\ \Pi,\ \ell)$。

若 $\mathcal{P}_k^R(\ell) > 0$，令 $\ell_k^R \in \mathcal{L}_k^R$ 为先于 ℓ 且满足 $\ell_k^R \le \ell$ (集合$\ell_k^R = -1$ 的最大检查点（若不存在，则.....）。与**引理** A.2 中的完全相同的推理可得

$$\mathcal{H}^R(z,\Pi,\ell) - \mathcal{H}^R(\hat{x}^k,\Pi,\ell) \le \mathcal{P}_k^R(\ell) - \mathcal{P}_k^R(\ell_k^R).$$

若 $\ell_k^R = \ell$，$\mathcal{P}_k^R(\ell) - \mathcal{P}_k^R(\ell_k^R) = 0$，则结论成立。否则，根据 $\mathcal{L}_k^R$ 的构造，$\mathcal{M}_k^R$ 在 $(\ell_k^R,\ \ell]$ 中至多有 $4q$ 个断点。因此，$\mathcal{P}_k^R(\ell) - \mathcal{P}_k^R(\ell_k^R) \le 4q$，引理得证。 □

由**引理** A.4 和**引理** A.5 可知，为了在每个前缀 $0 \le \ell \le m$ 的阶段 k保留所有负载约束，只需对每个 $R \in \{E,\ S\}$ 仅在头部检查点 $\mathcal{H}^R$ 保留关于 $\mathcal{L}_k^R$的约束。

与**定理** 5.2类似，我们构造一个多面体 (P)：

$$\begin{aligned}
&\sum_{\pi\in\Pi} z_i(\pi) = 1, && \forall i \in N,\\
&z_i(\pi) = \hat{x}_i^k(\pi), && \forall (i,\pi) : \hat{x}_i^k(\pi) \in \{0,1\},\\
&\mathcal{H}^E(z,\Pi,\ell_k^E) \le \mathcal{H}^E(\hat{x}^k,\Pi,\ell_k^E), && \forall \ell_k^E \in \mathcal{L}_k^E,\\
&\mathcal{H}^S(z,\Pi,\ell_k^S) \le \mathcal{H}^S(\hat{x}^k,\Pi,\ell_k^S), && \forall \ell_k^S \in \mathcal{L}_k^S,\\
&0 \le z_i(\pi) \le 1, && \forall i \in N, \pi \in \Pi.
\end{aligned} \tag{P}$$

Clea因此，$z = \hat{x}^k$ 对于 (P) 是可行的。我们选择 (P) 的一个极点 z^*，使其最大化 g

$$\mathcal{I}(z^*,\Pi) = \sum_{i\in N}\sum_{\pi\neq\perp} z_i^*(\pi).$$

它确实存在，因为 (P) 非空且紧致。根据极大性，$\mathcal{I}(z^*,\ \Pi) \ge \mathcal{I}(\hat{x}^k,\ \Pi)$。

引理 A.6. 设 z^* 是多面体(P)的一个极点。那么， z^* 中的严格分数条目数至多为 $X_k/2$。

证明。 证明过程与 **引理** A.3 的证明完全类似。如果 Z^* 是 z^* 中严格分数坐标的总数，那么具有分数 $z_i^*(\pi)$ 的不同代理人 $i \in N$ 最多有 $Z^*/2$ 个，其中 $\pi \in \Pi$。

假设 $Z^* > X_k/2$ ，并将 (P) 的方程矩阵限制在 z^* 的分数条目上。共有 Z^* 个变量，至多有 $Z^*/2$ 个形如 $\sum_{\pi\in\Pi} z_i(\pi) = 1$ （其中$i \in N$）的约束，以及至多有 $|\mathcal{L}_k^E| + |\mathcal{L}_k^S| \le X_k/4$ 个负载约束。因此，该限制中的约束数量为

$$\frac{Z^*}{2} + \frac{X_k}{4} < Z^*,$$

其中我们用到了 $Z^* > X_k/2$。与 **引理** A.3 中一样，这与 z^* 的极性相矛盾。 □

我们取 (P) 的这个极点 z^* ，并令 $x^{k+1} = z^*$。由上述引理可知$X_{k+1} \le X_k/2$, $\mathcal{I}(x^{k+1}, \Pi) \ge \mathcal{I}(x^k, \Pi) - 8q$; 并且对每个 $R \in \{E, S\}$，对所有满足 $\mathcal{H}^R(x^{k+1}, \Pi, \ell) \le \mathcal{H}^R(x^k, \Pi, \ell)$ 的 $0 \le \ell \le m$。

We 重复这一过程，直到在某个阶段 $K+1$ 我们有 $X_{K+1} = 0$。对于这个 K，

$$\begin{aligned}
&\mathcal{I}(x^{K+1}, \Pi) \ge \mathcal{I}(x^1, \Pi) - 8qK,\\
&\mathcal{H}^E(x^{K+1}, \Pi, \ell) \le \mathcal{H}^E(x^1, \Pi, \ell), \quad \forall 0 \le \ell \le m,\\
&\mathcal{H}^S(x^{K+1}, \Pi, \ell) \le \mathcal{H}^S(x^1, \Pi, \ell), \quad \forall 0 \le \ell \le m.
\end{aligned}$$

由于最后一个阶段 K 以

$$2 \le X_K \le X \cdot 2^{-(K-1)},$$

我们有 $K \le \log X$。取 $y := x^{K+1}$，解 y是整数，并且 $\mathcal{I}(y, \Pi) \ge \mathcal{I}(x, \Pi) - 8q \log X$。根据构造，对于某个 $\pi \ne \perp$ ，满足 $y_i(\pi) = 1$ 的代理人 $i \in N$ 必定曾有 $x_i(\pi) > 0$。 □

B 供应商相关定理的证明

定理 B.1 (**定理** 4.1 重述)。 对于每一对整数 t、Q、$q \ge 1$，都存在一个全局常数 $C_{t,\,Q,\,q} \ge 1$，它仅取决于 t、Q、q，使得以下结论成立。

令 $I \subseteq N$ 和 $\{\pi_i\}_{i\in I}$ 由*推论 3.2*得到。对于每个 $i \in I$，固定一个 S-证书 $\{S_i\}_{i\in I}$，并令受保护的 E-前缀数量为 $|\mathcal{L}_S| = t$。固定一个供应商 u_*，并且对于每个代理人 $i \in N$，固定一个对应的建议配置 $\hat{}\pi_{u_*,\,i} = \hat{}\pi^E_{u_*,\,i} \uplus \hat{}\pi^S_{u_*,\,i}$，其对应于一个划分 $[h] = E \sqcup S$（其中我们假设 $h = m$，除非另有说明）。

假设对于每个 $i \in N$、$|\hat{}\pi_{u_*,\,i}| \le q$，每个 S-需求 $\alpha \in \hat{}\pi^S_{u_*,\,i}$ 都属于 $\mathcal{Q}$，$|\mathcal{Q}| = Q$，并且

$$\sum_{i\in N} \mathcal{P}_i(\hat{\pi}^E_{u_*,i}, c_s) \le |E \cap [b_s]|, \qquad \forall (b_s, c_s) \in \mathcal{L}_S; \qquad (\mathrm{E}_{\mathcal{L}_S}\text{-}u)$$

$$\sum_{i\in N} \mathcal{P}_{u_*}(\hat{\pi}^S_{u_*,i}, m_{u_*}(\alpha)) \le |S \cap [m_{u_*}(\alpha)]|, \qquad \forall \alpha \in \mathcal{Q}. \qquad (\mathrm{S}*\text{-}u)$$

那么存在 $A \subseteq I$ 使得 $|N \setminus A| \le C_{t,\,Q,\,q}\,(|N| - |I|)$ 以及

$$\sum_{i\in A} \mathcal{P}_i(\pi^E_i, c_s) + \sum_{i\in N\setminus A} \mathcal{P}_i(\hat{\pi}^E_{u_*,i}, c_s) \le |E \cap [b_s]|, \qquad \forall (b_s, c_s) \in \mathcal{L}_S; \qquad (\mathrm{E}_{\mathcal{L}_S})$$

$$\sum_{i\in A} |S_i \cap [m_{u_*}(\alpha)]| + \sum_{i\in N\setminus A} \mathcal{P}_{u_*}(\hat{\pi}^S_{u_*,i}, m_{u_*}(\alpha)) \le |S \cap [m_{u_*}(\alpha)]|, \qquad \forall \alpha \in \mathcal{Q}. \qquad (\mathrm{S}*)$$

特别地，

$$\sum_{i\in N\setminus A} |\hat{\pi}_{u_*,i}| \le qC_{t,Q,q}(|N| - |I|),$$

证明。 证明该定理的关键思想在于：尽管代理人的数量 $d = |N|$及其断点相当大，但实际可能的**负载配置**在约束（E$\mathcal{L}_s$）和（S$*$）下的数量要小得多，即仅为常数个。

按递增顺序写出$\mathcal{L}_S = \{(b_s, c_s) : s \in [t]\}$，并将高需求枚举为$\mathcal{Q} = \{\alpha_1 > \ldots > \alpha_Q\}$，使得 $m_{u_*}(\alpha_1) \leq \ldots \leq m_{u_*}(\alpha_Q)$。对于每个 $i \in I$，其**旧负载配置**是一个长度为 $t+Q$ 的向量 p_i，形式如下：

$$p_i := \Big\{\mathcal{P}_i(\pi_i^E, c_1), \ldots, \mathcal{P}_i(\pi_i^E, c_t), |S_i \cap [m_{u_*}(\alpha_1)]|, \ldots, |S_i \cap [m_{u_*}(\alpha_Q)]|\Big\}.$$

类似地，对于每个 $i \in N$，将**建议负载配置** 定义为

$$p_{u_*,i} := \Big\{\mathcal{P}_i(\hat{\pi}^E_{u_*,i}, c_1), \ldots, \mathcal{P}_i(\hat{\pi}^E_{u_*,i}, c_t), \mathcal{P}_{u_*}(\hat{\pi}^S_{u_*,i}, m_{u_*}(\alpha_1)), \ldots, \mathcal{P}_{u_*}(\hat{\pi}^S_{u_*,i}, m_{u_*}(\alpha_Q))\Big\}.$$

前 t 个坐标记录受保护个坐标记录从 S中物品的使用情况：对于旧配置 π_i，我们统计证书占用的物品 S_i；对于建议配置 $\hat{\pi}_{u_*,\,i}$ 我们统计其在供应商断点处的 S需求。这些正是出现在式 (E$\mathcal{L}_s$) 和 (S$*$) 中的贡献。

我们将前 t 个坐标称为 E-块，将最后的 Q 个坐标称为 S-块。注意，在每个负载配置中，每个块内的坐标都是非递减的。此外，这些块的最后两个坐标之和至多为 q。事实上，

$$\mathcal{P}_i(\pi_i^E, c_t) + |S_i \cap [m_{u_*}(\alpha_Q)]| \leq |\pi_i^E| + |\pi_i^S| = |\pi_i| \leq q$$

对于代理人 $i \in I$的旧配置 p_i，以及

$$\mathcal{P}_i(\hat{\pi}^E_{u_*,i}, c_t) + \mathcal{P}_{u_*}(\hat{\pi}^S_{u_*,i}, m_{u_*}(\alpha_Q)) \leq |\hat{\pi}^E_{u_*,i}| + |\hat{\pi}^S_{u_*,i}| \leq |\hat{\pi}_{u_*,i}| \leq q$$

对于建议 配置 $p_{u_*,\,i}$ 代理人 $i \in N$的配置。因此，所有配置都属于有限 set

$$P := \left\{ p \in \mathbb{Z}^{t+Q}_{\geq 0} : \begin{array}{l} p_1 \leq \ldots \leq p_t; \\ p_{t+1} \leq \ldots \leq p_{t+Q}; \\ p_t + p_{t+Q} \leq q; \end{array} \right\}.$$

集合 P 仅取决于 t，Q，q。特别是，它不取决于代理人 N的数量，也不取决于受保护前缀的位置。我们还将定义**负载容量**向量

$$\mathcal{C} := \Big\{|E \cap [b_1], \ldots, |E \cap [b_t]|, |S \cap [m_{u_*}(\alpha_1)]|, \ldots, |S \cap [m_{u_*}(\alpha_Q)]|\Big\}.$$

对于不相交集合 $A \subseteq I$ 和 $J \subseteq N$，我们考虑**累积负载**向量

$$\mathcal{P}(A, J) := \sum_{i \in A} p_i + \sum_{j \in J} p_{u_*,j}.$$

因此，A 由代理人组成，i 这些代理人保留其旧配置，π_i而 J 由代理人组成，j 这些代理人将使用其建议配置 $\hat{\pi}_{u_*,\,j}$。如果$\mathcal{P}(A,\ J) \leq \mathcal{C}$，且不等式逐分量成立，我们就称一对 $(A,\ J)$ 可行。推论 3.2 以及证书的不相交性 S_i 对于 $i \in I$ 保证了我们

$$\mathcal{P}(I, \varnothing) \leq \mathcal{C},$$

根据定理的假设，建议配置$\{\hat{\pi}_{u_*,j}\}_{j \in N}$ 满足

$$\mathcal{P}(\varnothing, N) \leq \mathcal{C}.$$

因此，我们有两个可行对：初始对（I，$\varnothing$）和建议对（$\varnothing$，N）。我们将从初始对（I，$\varnothing$）向（$\varnothing$，N）移动，得到（A，J），使得 $A \sqcup J = N$，同时对于每个最初未分配的代理人 $j \in N \setminus I$，只交换代理人的常数数量的配置 I。

我们以迭代方式进行。在迭代 $k \geq 1$ 开始时，我们有不相交集合 $A^k \subseteq I$ 和 $J^k \subseteq N$，满足 $\mathcal{P}(A^k,\ J^k) \leq \mathcal{C}$。初始情况下，$A^1 = I$ 和 $J^1 = \varnothing$。请注意，虽然 A^k 仅包含来自 I 的最初已分配代理人，但集合 J^k 可以同时包含未分配代理人 $j \in N \setminus I$（这些代理人从供应商处获得了新配置），以及已分配代理人 $i \in I$（这些代理人将其旧配置 π_i 换成了供应商建议的 $\hat{\pi}_{u_*,\ i}$）。因此，在每次迭代 $I \subseteq A^k \sqcup J^k$ 中，$A^k \sqcup J^k$ 之外的每个代理人此前都未被分配。

假设 $A^k \sqcup J^k \neq N$。我们选择某个未分配代理 $j \in N \setminus (A^k \sqcup J^k)$。我们希望为代理 j 分配配置 $\hat{\pi}_{u_*,\ j}$ 并将 j 纳入下一个可行对中，同时可以将一些旧配置替换为相应的建议。注意，可行替换始终存在：将 A^k 中的每个代理的配置进行替换，并加入 j，然后

$$\mathcal{P}(\varnothing, J^k \sqcup A^k \sqcup \{j\}) \leq \mathcal{P}(\varnothing, N) \leq \mathcal{C}.$$

然而，这样的 替换可能会替换过多配置。我们需要一个大小仅为常数的 .

引理 B.1。 对于某个全局常数 $C_{t,\ Q,\ q}$，存在 $A' \subseteq A^k$，使得 $|A'| + 1 \leq C_{t,\ Q,\ q}$ 一个 d

$$\mathcal{P}(A^k \setminus A', J^k \sqcup A' \sqcup \{j\}) \leq \max\Big\{\mathcal{P}(A^k, J^k), \mathcal{P}(\varnothing, J^k \sqcup A^k \sqcup \{j\})\Big\} \leq \mathcal{C},$$

其中，最大值是逐分量取得的。

证明。 将代理人 i 的旧配置替换为建议配置，会使总负载变化 $p_{u_*,\ i} - p_i$。我们将每次替换按一对 $(p,\ p_*) \in P \times P$ 编索引。定义向量 $x \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{P \times P}$，其中坐标 $x_{p,\ p*}$ 统计我们进行切换时，旧配置为 p 且建议配置为 p_* 的代理人数。对于任意一个我们希望添加的建议配置 $\sigma \in P$，定义

$$z(\sigma, x) := \sigma + \sum_{(p,p_*) \in P \times P} x_{p,p_*} \cdot (p_* - p), \qquad \text{and} \qquad z_+(\sigma, x) := (z(\sigma, x))_+,$$

其中 $(\cdot)_+ = \max\{0,\ \cdot\}$ 按逐分量取值。这里，$z(\sigma,\ x)$ 表示添加一名建议配置为 σ 的未分配代理人，并按照 x 执行替换后的总负载变化。向量 $z_+(\sigma,\ x)$ 仅记录负载的正向增量。之所以记录负载增量，是因为仅减少交换次数并不一定能保持负载约束，而控制 $z_+(\sigma,\ x)$ 可确保新的替换是可行的。

现在，考虑一个抽象集合

$$\mathcal{X}_\sigma(t, Q, q) := \Big\{(x, z_+(\sigma, x)) :\ x \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{P \times P}\Big\}.$$

它是 $\mathbb{Z}_{\geq 0}^{|P|^2+t+Q}$ 的子集，且仅取决于 $t,\ Q,\ q,\ \sigma$。在第 k 次迭代时，我们有一对 $(A^k,\ J^k)$，并希望添加一个尚未分配配置、建议配置为 $p_{u_*,\ j}$ 的 j。对于 $\sigma = p_{u_*,\ j}$，这相当于取某个元素 $(x,\ z_+(\sigma,\ x)) \in \mathcal{X}_\sigma(t,\ Q,\ q)$，并根据 x 将一些代理人的旧配置替换为建议配置，同时使总负载增加 $z_+(\sigma,\ x)$。

先前的“完全交换”，即交换 A^k 中每个代理人的配置并得到一对 $(\varnothing,\ J^k \sqcup A^k \sqcup \{j\})$，对应于以下元素 $(x^*,\ z_+(\sigma,\ x^*)) \in \mathcal{X}_\sigma(t,\ Q,\ q)$，其中 $\sigma = p_{u_*,\ j}$：

$$\forall (p, p_*) \in P \times P :\quad x^*_{p,p_*} = |\{i \in A^k :\ p_i = p \text{ and } p_{u_*,i} = p_*\}|,$$

负载增加量

$$z(\sigma, x^*) = p_{u_*,j} + \sum_{i \in A^k} (p_{u_*,i} - p_i) = \mathcal{P}(\varnothing, J^k \sqcup A^k \sqcup \{j\}) - \mathcal{P}(A^k, J^k).$$

因此，对于 $z^*_+ := (\mathcal{P}(\varnothing, J^k \sqcup A^k \sqcup \{j\}) - \mathcal{P}(A^k, J^k))_+$，我们有 $(x^*, z^*_+) \in \mathcal{X}_\sigma(t, Q, q)$。遗憾的是，替换 (x^*, z^*_+) 可能会交换过多配置，也就是说，总和

$$1 + \sum_{p,p_*} x^*_{p,p_*} = 1 + \sum_{i \in A^k} 1 = 1 + |A^k|$$

可能没有上界，因此我们需要选择不同的替换。具体而言，我们需要找到一个元素 $(x, z_+(\sigma, x)) \in \mathcal{X}_\sigma(t, Q, q)$，使其满足：1） x 与我们的特定实例相匹配，即集合 A^k 和 J^k；2）新增负载 $z_+(\sigma, x)$ 符合 $\mathcal{C}$-上界；3）执行的交换总数 $\sum_{p,p_*} x_{p,p_*}$ 为常数。迪克森引理说明，这样的元素必然存在。

引理 B.2 ([Dic13, CLO15])。对于 $K \geq 1$，$\mathbb{Z}_{\geq 0}^K$ 的每个子集都只有有限多个按分量极小的元素，并且该子集中的每个元素都支配某个极小元。

为完整起见，下面给出 **引理** B.2的简短证明（**引理** B.3 ）.

由于 $\mathbf{X}_\sigma(t, Q, q) \subseteq \mathbb{Z}_{\geq 0}^{|P|^2+t+Q}$，根据引理 B.2，集合 $\mathbf{X}_\sigma(t, Q, q)$ 只有有限多个按分量极小的元素，设它们为 $\mathbf{E}_\sigma$。由于 $\mathbf{X}_\sigma(t, Q, q)$ 仅取决于 t, Q, q, σ，且根据定义，每种可能的配置 $\sigma \in P$ 仅取决于 t, Q, q，因此极小元的数量 $|\mathbf{E}_\sigma|$，以及每个极小元的坐标 $(\hat{x}, \hat{z}_+) \in \mathbf{E}_\sigma$ 和总和 $\sum_{p,p_*} \hat{x}_{p,p_*}$，也都受某个关于 t, Q, q 的函数所界定（否则我们就会得到一个无限的极小元序列）。我们取

$$C_{t,Q,q} := \max_{\sigma \in P} \max_{(\hat{x}, \hat{z}_+) \in \mathcal{E}_\sigma} \left(1 + \sum_{p,p_*} \hat{x}_{p,p_*}\right),$$

这是一个只取决于 t、Q、q 的常数（额外增加的 1 计入了新加入的代理人）。那么，对于每个极小元 $(\hat{x}, \hat{z}_+) \in \mathcal{E}_\sigma$，我们都有 $1 + \sum_{p,p_*} \hat{x}_{p,p_*} \leq C_{t,Q,q}$。

现在，取我们之前考虑过的元素 $(x^*, z_+^*) \in \mathbf{X}_\sigma(t, Q, q)$，它对应于替换 $(A^k, J^k) \to (\varnothing, J^k \sqcup A^k \sqcup \{j\})$。根据引理 B.2，存在一个极小元 $(\hat{x}, \hat{z}_+) \in \mathbf{E}_\sigma \subseteq \mathbf{X}_\sigma(t, Q, q)$，使得 $(\hat{x}, \hat{z}_+) \leq (x^*, z_+^*)$ 逐分量成立，并且 $1 + \sum_{p,p_*} \hat{x}_{p,p_*} \leq C_{t,Q,q}$。由于 $\hat{x} \leq x^*$，对于每个替换对 $(p, p_*) \in P \times P$，我们都有 $\hat{x}_{p,p_*} \leq x^*_{p,p_*}$。换言之，如果 $\hat{x}$ 将一个旧配置（配置为 p）交换为一个建议配置（配置为 p_*），则它只能交换来自 A^k 的代理人配置（因为零仍然是零），并且对于该交换配置对，它所能交换的配置数量不能超过 A^k 中相应代理人的数量。于是，对于每个 $(p, p_*) \in P \times P$，存在一个子集 $A' \subseteq A^k$，其中恰好包含 x_{p,p_*} 个具有交换配置 (p, p_*) 的 A^k 代理人，并且

$$1 + |A'| = 1 + \sum_{p,p_*} \hat{x}_{p,p_*} \leq C_{t,Q,q}.$$

与此同时，这次替换增加的总负载 $\hat{z}_+$ 满足

$$\hat{z}_+ \leq z_+^* = (\mathcal{P}(\varnothing, J^k \sqcup A^k \sqcup \{j\}) - \mathcal{P}(A^k, J^k))_+.$$

因此，将代理人 A' 的旧配置替换为建议的配置，并加入未分配代理 j 后，总负载满足

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(A^k \setminus A', J^k \sqcup A' \sqcup \{j\}) &= \mathcal{P}(A^k, J^k) + z(\sigma, \hat{x}) \leq \mathcal{P}(A^k, J^k) + \hat{z}_+ \\ &\leq \mathcal{P}(A^k, J^k) + z_+^* = \mathcal{P}(A^k, J^k) + (\mathcal{P}(\varnothing, J^k \sqcup A^k \sqcup \{j\}) - \mathcal{P}(A^k, J^k))_+ \\ &= \max\left\{\mathcal{P}(A^k, J^k), \mathcal{P}(\varnothing, J^k \sqcup A^k \sqcup \{j\})\right\} \leq \mathcal{C}.\end{aligned}$$

□

回到**定理** B.1的证明，现在我们可以明确描述替换过程的每一次迭代。在第 k 次迭代中，从满足 $A^k \sqcup J^k \neq N$ 的一对 (A^k, J^k) 开始，我们选择一个未分配代理人 $j \in N \setminus (A^k \sqcup J^k)$ 并应用**引理** B.1。由此得到一个子集 $A' \subseteq A^k$，满足 $|A'| + 1 \leq C_{t,Q,q}$，且 $\mathcal{P}(A^k \setminus A', J^k \sqcup A' \sqcup \{j\}) \leq \mathcal{C}$。

定义新的集合 $A^{k+1} := A^k \setminus A'$ 和 $J^{k+1} := J^k \sqcup A' \sqcup \{j\}$，这两个集合互不相交。$i \in A'$ 中的每位代理人都切换到相应的建议配置 $\hat{\pi}_{u_*,i}$，而此前未分配的

代理人 j 获得配置 $\hat{}\pi_{u_*,j}$。由于 $A^{k+1} \sqcup J^{k+1} = A^k \sqcup J^k \sqcup \{j\}$，获得配置的代理人数增加了 **1**，而 $\mathcal{P}(A^{k+1}, J^{k+1}) \leq \mathcal{C}$。同时，本次迭代中获得建议配置的代理人数量（包括 $i \in I$ 将旧配置 π_i 换成建议配置 $\hat{}\pi_{u_*,i}$的代理人，或获得 $\hat{}\pi_{u_*,j}$的代理人 j）至多为 $C_{t,Q,q}$，因此 $|J^{k+1}| - |J^k| \leq C_{t,Q,q}$。

经过恰好 $|N| - |I|$ 次迭代后，每个代理人 $i \in N$ 都会被分配到某个配置。对于最终的不相交集合 $A \subseteq I$ 和 $J \subseteq N$，有 $A \sqcup J = N$ 和

$$|N \setminus A| = |J| = \sum_{k=1}^{|N|-|I|} (|J^{k+1}| - |J^k|) \leq C_{t,Q,q}(|N| - |I|), \qquad \text{as well as} \qquad \mathcal{P}(A, J) \leq \mathcal{C}.$$

E展开不等式 $\mathcal{P}(A, J) \leq \mathcal{C}$恰好得到条件 (E$\mathcal{L}_S$) 和 (S$*$) . □

引理 B.3 (迪克森引理的简短证明，[Dic13，CLO15])。对于 $K \geq 1$，$\mathbb{Z}_{\geq 0}^K$的每个子集都只有有限多个逐分量极小元素，并且该子集中的每个元素都支配某个极小元。

证明。设 $S \subseteq \mathbb{Z}_{\geq 0}^K$。元素 $y \in S$ 是极小元，当且仅当不存在满足 $x \leq y$ 的 $x \in S - \{y\}$。

众所周知，每个由非负整数组成的无限序列都含有一个无限的非递减子序列。因此，每个无限序列 $x^1, x^2, \ldots \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^K$ 都含有一个在每个坐标上均非递减的无限子序列：先选取一个在第一个坐标上非递减的无限子序列，再从中选取一个在第二个坐标上非递减的无限子序列，依此类推，直到第 K 个坐标。由此得到一个无限子序列 $x^{i_1} \leq x^{i_2} \leq \ldots \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^K$。

假设 S 有无穷多个逐分量极小元素。取一个由互不相同的极小元素组成的无限序列。于是，我们可以得到它的一个无限子序列，使其在每个坐标上都非递减。该子序列因而包含两个不同的极小元素x，$y \in S$ 满足 $x \leq y$，这是不可能的。因此，S 必定只有有限多个极小元素。

接下来，固定 $x \in S$ 并考虑 $S_x := \{y \in S : y \leq x\}$。这个集合非空（$x \in S_x$）且有限，因为 $y \in S_x$ 的每个坐标都是介于 **0** 和 x对应坐标之间的整数，且共有 K 个坐标。选取使 $\sum_{k=1}^K y_k$最小的 $y \in S_x$。如果某个 $z \in S - \{y\}$满足 $z \leq y$，那么 $z \leq x$ 且 $z \in S_x$。此外，z 的每个坐标都不大于 y对应的坐标，且至少有一个坐标严格小于。因此，$\sum_{k=1}^K z_k < \sum_{k=1}^K y_k$，从而产生矛盾。故 y 是 S中的极小元，且 $y \leq x$。引理得证。 □

C 常数估计

定理 C.1. 对于整数 t，Q，$q \geq 1$，常数 $C_{t,\,Q,\,q}$ 在 定理 *B.1* 中可以取为

$$C_{t,Q,q} = \binom{t+Q+q}{q}^2 (t+Q+1)q^{t+Q}.$$

证明。回顾所有可能负载配置的集合 P：

$$P := \left\{ p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{t+Q} : \begin{array}{l} p_1 \leq \ldots \leq p_t; \\ p_{t+1} \leq \ldots \leq p_{t+Q}; \\ p_t + p_{t+Q} \leq q; \end{array} \right\}.$$

分别对 $p \in P$ 中每个块内相邻坐标求差，得到一列和至多为 q 的 $t+Q$ 非负整数。因此，利用隔板法，

$$|P| = \binom{t+Q+q}{q}.$$

回想一下，对于固定的配置 $\sigma \in P$，集合 $\mathcal{X}_\sigma(t, Q, q) \subseteq \mathbb{Z}_{\geq 0}^{|P|^2+t+Q}$ 包含所有满足 $x \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{P\times P}$ 且满足条件的对 $(x, z_+(\sigma, x))$，其中

$$z_+(\sigma, x) := (z(\sigma, x))_+ \qquad \text{where} \qquad z(\sigma, x) := \sigma + \sum_{(p,p_*)\in P\times P} x_{p,p_*} \cdot (p_* - p).$$

要证明该定理，只需证明每个极小元（$\hat{x}$，$\hat{z}_+$）都满足 $\mathcal{X}_\sigma(t,\ Q,\ q)$

$$1 + \sum_{(p,p_*)\in P\times P} \hat{x}_{p,p_*} \leq \binom{t+Q+q}{q}^2 (t+Q+1)q^{t+Q}.$$

虽然迪克森引理说明左侧的和有一个上界，但它无法提供我们所需的显式上界。为了得到一个显式常数，我们将把在 $\mathcal{X}_\sigma(t,\ Q,\ q)$ 中寻找极小元的问题，重新表述为寻找某个线性规划的最小基本可行解的问题。这样，$(\hat{x},\ \hat{z}_+)$ 的极小性将意味着相应解的范数必须有上界，而该上界可由线性规划本身显式计算得到。我们将使用以下关于不可分解核向量的结果。

定理 C.2 （[Onn10], 引理 3.20）。 设 M 是一个秩为r 的整数矩阵，具有 k 列。定义

$$\Delta(M) := \max\{|\det M'| :\ M' \textit{ is a square submatrix of } M\}.$$

假设某个 $v \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^k$, $v \neq 0$ 满足 $Mv = 0$ 且是不可分解的，这意味着：如果存在某个 $u \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^k$ 使得 $0 \leq u \leq v$，同时还满足 $Mu = 0$，那么 $u = 0$ 或 $u = v$。于是

$$\|v\|_1 \leq (k - r)(r + 1)\Delta(M).$$

我们将定义一个特定的矩阵 M，其具有 $k \leq |P|^2 + t + Q$ 列和秩 $r = t + Q$，满足 $\Delta(M) \leq q^{t+Q}$。然后，我们将证明，$\mathcal{X}_\sigma(t,\ Q,\ q)$ 的每个极小元都对应于 M的某个不可分解核向量，从而可以使用**定理**C.2的上界。

固定极小元（$\hat{x},\ \hat{z}_+$）$\in \mathcal{X}_\sigma(t,\ Q,\ q)$。首先注意，对于每个 $p \in P$，我们都有 $\hat{x}_{p,\ p} = 0$，否则我们可以移除每个恒等替换 $p \to p$，同时保持 $\hat{z}_+$ 不变，从而得到一个更小的元。回忆 $\hat{z}_+ =(\hat{z})_+$，其中

$$\hat{z} = z(\sigma, \hat{x}) = \sigma + \sum_{p\neq p_*} \hat{x}_{p,p_*} \cdot (p_* - p).$$

对于每一对 $p \neq p_* \in P$，定义长度为 $t+Q$的向量 $a_{p,\ p_*} = p_* - p$ 和 $a_0 = \sigma$。向量$a_{p,\ p_*}$ 记录了将旧配置 p 替换为建议配置 p_*所导致的负载变化，而a_0 记录了添加具有 σ的代理人所导致的额外负载。此外，对于每个 $s \in [t + Q]$，令e_s 为 s阶标准基向量，并定义

$$b_s := \begin{cases} -e_s, & \hat{z}_s > 0; \\ e_s, & \hat{z}_s \leq 0; \end{cases} \qquad \text{then} \qquad \sum_{s=1}^{t+Q} |\hat{z}_s| \cdot b_s = -\hat{z}.$$

这些附加列使我们能够将替换表示为一个核向量，使总负载之和按坐标平衡为 0。

定义 以下矩阵 M_0，其包含 $k = |P|(|P| - 1) + t + Q + 1$ 列，以及向量 v as

$$M_0 = [\{a_{p,p_*}\}_{p\neq p_*}, a_0, b_1, \ldots, b_{t+Q}], \qquad v = [\{\hat{x}_{p,p_*}\}_{p\neq p_*}, 1, |\hat{z}_1|, \ldots, |\hat{z}_{t+Q}|]^T.$$

根据构造，v 非零且 $M_0 v = 0$，并且 M_0 的秩为 $r = t + Q$.

引理 C.1. 向量 v 关于 M_0 （根据定理 *C.2*）不可分解。

证明。反设 $v = v' + v''$，其中 v'，$v'' \neq 0$ 均为满足 $M_0 v' = 0 = M_0 v''$ 的非负整数向量。我们将通过给出一对 $(\tilde{x},\ \tilde{z}_+) \in \mathcal{X}_\sigma(t,\ Q,\ q)$，证明它严格小于 $(\hat{}x,\ \hat{}z_+)$，从而与 $(\hat{}x,\ \hat{}z_+)$ 的极小性矛盾。

注意，t he a_0 坐标恰好在 v', v'' 中的一个取值为 1。不失一般性 ，

$$v' = (x', 1, y'), \qquad \text{and} \qquad v'' = (x'', 0, y'').$$

扩展 x', x'' 使其取值从 0 到 (p, p)，$p \in P$。现在，$x' + x'' = \hat{}x$ 和 $y' + y'' = (\lceil \hat{}z_1 |, \ldots, \lceil \hat{}z_{t+Q} \rfloor)$。定义 e

$$z' := \sigma + \sum_{p \neq p_*} x'_{p,p_*} \cdot (p_* - p).$$

写作 $z'_+ = (z')_+$，我们有，$(x', z'_+) \in \mathcal{X}_\sigma(t, Q, q)$。由于 $M_0 v' = 0$，因此 $z' = -\sum_{s=1}^{t+Q} y'_s \cdot b_s$，所以对于每个 $s \in [t+Q]$，

$$z'_s = \begin{cases} y'_s, & \hat{z}_s > 0; \\ -y'_s, & \hat{z}_s \leq 0. \end{cases}$$

于是，$0 \leq y'_s \leq \lceil \hat{}z_s |$ 和 $z'_+ \leq \hat{}z_+$，因此 $(x', z'_+) \leq (\hat{}x, \hat{}z_+)$。

我们断言，$x'' \neq 0$。事实上，否则 v'' 只会在对应于 b_1、.....、b_{t+Q}的坐标处非零。由于它们线性无关，再结合 $M_0 v'' = 0$，这将意味着 $v'' = 0$，从而与初始假设矛盾。

因此，$x' = \hat{}x - x''$ 至少在一个坐标上严格小于$\hat{}x$。所以，$(x',\ z'_+)$ 是 $\mathcal{X}_\sigma(t,\ Q,\ q)$ 中的一个元素，并且严格小于 $(\hat{}x,\ \hat{}z_+)$，这与 $(\hat{}x,\ \hat{}z_+)$ 的极小性矛盾。 □

现在我们将 M_0 变换为一个子矩阵行列式有界的矩阵。定义一个可逆矩阵 L，使得对于任意向量 u，

$$Lu = (u_1, u_2 - u_1, \ldots, u_t - u_{t-1}, u_{t+1}, u_{t+2} - u_{t+1}, \ldots, u_{t+Q} - u_{t+Q-1}),$$

并令 $M = LM_0$。M的秩仍然是 $t+Q$，且 ker M =ker M_0。因此，向量 v相对于矩阵 M 仍然是不可分解的。

引理 C.2. 对于任意方形子矩阵 M'*of* M，都有 |行列式 $M'| \leq q^{t+Q}$。

证明。令 $e_0 := 0 \in \mathbb{R}^{t+Q}$。我们将形如 $e_i - e_{i'}$ for $0 \leq i, i' \leq t+Q$ 的向量称为初等交换。我们将证明，矩阵 M 的每一列都是 q 个初等交换之和（允许为零），由此可将 M 的子矩阵 M' 的任意 det M'表示为至多 q^{t+Q} 个全幺模矩阵的行列式之和。

N注意，对于每个 $p \in P$，向量 Lp 的坐标都是非负整数，并且

$$\sum_{s=1}^{t+Q} (Lp)_s = p_t + p_{t+Q} \leq q,$$

因此，我们可以选择（允许重复）指标 $i_1, \ldots, i_q \in \{0, 1, \ldots, t+Q\}$ 使得

$$Lp = \sum_{j=1}^{q} e_{i_j}.$$

根据定义 对于每个 $(p,\ p_*) \in P \times P$，我们有 $La_{p,\ p_*} = Lp_* - Lp$。因此，表示 g

$$Lp = \sum_{j=1}^{q} e_{i_j} \qquad \text{and} \qquad Lp_* = \sum_{j=1}^{q} e_{i^*_j},$$

对于某些 $\{i_1, \ldots\ldots, i_q\}$ 和 $\{i_1^*, \ldots\ldots, i_q^*\}$，分别可得

$$La_{p,p_*} = \sum_{j=1}^{q} (e_{i_j^*} - e_{i_j}),$$

并且对某些 $\{i_1^\sigma, \ldots, i_q^\sigma\}$，$La_0 = L\sigma = \sum_{j=1}^{q} (e_{i_j^\sigma} - e_0)$。最后，对于每个 $s \in [t+Q]$、$Lb_s = \pm Le_s$，根据 L 的定义，

$$Le_s = \begin{cases} e_s - e_{s+1}, & s \notin \{t, t+Q\}, \\ e_s - e_0, & s \in \{t, t+Q\}. \end{cases}$$

因此，通过补上零次交换，$\pm Le_s$ 也可以表示为 q 次初等交换。

接下来，考虑一个由非零初等交换组成的集合 $e_i - e_{i'}$。在 $\{0, 1, \ldots, t+Q\}$ 上构造一个有向图，其中对每个初等交换 $e_i - e_{i'}$，我们画一条有向边（$i' \to i$）。删除对应于顶点 0 的行后，该图的有向关联矩阵恰好以 $e_i - e_{i'}$ 为列。将这些初等交换限制在一组共同的坐标上，相当于删除更多的矩阵行。由于有向关联矩阵是全幺模的（见 [Sch03], 定理 13.9），以此方式得到的每个方阵的行列式都属于 $\{-1, 0, 1\}$。若某一列为零，结论仍然成立。

现在，令 M' 为 M 中大小为 $\ell \le t+Q$ 的方形子矩阵。根据上述初等交换分解，M' 的 $i \in [\ell]$ 列可以写成

$$c_i := \sum_{j=1}^{q} c_{i,j},$$

wher其中，每个 $c_{i,\ j}$ 都是将初等交换限制到 M' 的行所得的结果。因此，

$$\det M' = \sum_{(j_1,\ldots,j_\ell) \in [q]^\ell} \det[c_{1,j_1}, \ldots, c_{\ell,j_\ell}].$$

如前所述，每个求和项 $\det[c_{1,j_1}, \ldots, c_{\ell,j_\ell}]$ 都属于 $\{-1, 0, 1\}$。由于共有 q^ℓ 个求和项，根据三角不等式可得 $|\det M'| \le q^\ell \le q^{t+Q}$，如 desired。 □

因此，$\Delta(M) \le q^{t+Q}$，并将**定理** C.2 应用于 M 和 v，我们得到对于 $(\hat{x}, \hat{z})$，有

$$1 + \sum_{(p,p_*) \in P \times P} \hat{x}_{p,p_*} \le \|v\|_1 \le (k-r)(r+1)\Delta(M)$$
$$\le |P|^2 (t+Q+1) q^{t+Q} = \binom{t+Q+q}{q}^2 (t+Q+1) q^{t+Q}.$$

该上界对每个 $\sigma \in P$ 以及 $\mathcal{X}_\sigma(t, Q, q)$ 的每个极小元都成立。 □

推论 **C.1.** 对于整数 t、$q \ge 1$，常数 $D_{t,\ q}$ 在定理 *2.2* 中可取为

$$D_{t,q} = \left(\binom{t+q}{q} - 1 \right) (t+2) q^t.$$

证明。回顾一下，集合 $\mathcal{B}(t, q)$ 由重新划分块 $\beta = (x, y) \in \mathbb{Z}_{\ge 0}^P \times \mathbb{Z}_{\ge 0}^P$ 组成，其中 $P = \{p \in \mathbb{Z}_{\ge 0}^t : 1 \le |p| \le q\}$、$|P| = \binom{t+q}{q} - 1$，且 β 满足

$$\sum_{p \in P} x(p) = \sum_{p \in P} y(p) \ge 1, \qquad \sum_{p \in P} x(p) \cdot p = \sum_{p \in P} y(p) \cdot p.$$

要证明该命题，只需证明每个极小元 $\hat{\beta} = (\hat{x}, \hat{y}) \in \mathcal{B}(t, q)$ 都满足

$$|\hat{\beta}| = \sum_{p \in P} \hat{x}(p) \le |P| \cdot (t+2) \cdot q^t.$$

固定一个按分量极小元素 $\hat{} \beta = (\hat{} x, \hat{} y) \in \mathcal{B}(t, q)$。对于每个 $p \in P$，定义列 $a_p := (1, p) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{t+1}$。其第一个坐标对应块中的物品束数量，其余坐标对应每种类型的物品数量。令

$$M := [\{a_p\}_{p \in P}, \{-a_p\}_{p \in P}], \quad \text{and} \quad v := (\hat{x}, \hat{y})^T.$$

通过构造，M 有 $k = 2|P|$ 列，秩为 $r \leq t + 1$，并且成立

$$Mv = 0 \quad \text{and} \quad \|v\|_1 = 2|\hat{\beta}|.$$

我们首先证明 v 关于 M 是不可分解的，定义见 **定理** C.2。假设 $u = (x', y') \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^P \times \mathbb{Z}_{\geq 0}^P$ 满足 $0 \neq u \leq v$ 且 $Mu = 0$。那么，第一行蕴含

$$\sum_{p \in P} x'(p) = \sum_{p \in P} y'(p).$$

注意到，这个和至少为 1，否则 $u = 0$。$Mu = 0$ 的其余各行蕴含

$$\sum_{p \in P} x'(p) \cdot p = \sum_{p \in P} y'(p) \cdot p.$$

因此，$(x', y') \in \mathcal{B}(t, q)$，而 $(x', y') \leq (\hat{} x, \hat{} y)$，这与 $(\hat{} x, \hat{} y)$ 的极小性矛盾。因此，只能有 $u = v$，即 v 是不可分解的。

接下来我们证明 $\Delta(M) \leq q^t$，类似于 **引理** C.2，我们将利用行列式关于各列是多重线性的这一事实，将其化简为一个简单的列集合。

令 $e_1, \ldots, e_t$ 为标准基向量，并定义辅助列

$$b_0 := (1, 0) \qquad \text{and} \qquad \forall s \in [t] : \ b_s = (1, q \cdot e_s).$$

由于 $|p| \leq q$，我们可以将每一列 a_p 表示为

$$a_p = \left(1 - \frac{|p|}{q}\right) b_0 + \sum_{s=1}^{t} \frac{p_s}{q} \cdot b_s.$$

注意，$b_0, b_1, \ldots, b_t$ 前面的所有系数均非负，且总和为 1，因此这是一个凸组合。

现在，考虑 M 的一个任意 ℓ 阶方形子矩阵 M'。不失一般性，我们可以假设其各列是列 a_p 的限制。然后，将上文中 a_p 的表达式代入并展开行列式，可将 $\det M'$ 表示为一组行列式的凸组合，其中这些行列式的列是 $b_0, b_1, \ldots, b_t$ 在完全相同的行集合上的限制。因此，要给 $\det M'$ 求上界，只需给关于辅助列的行列式求上界。

首先，考虑 M 缺少第一行的情形。此时，每个受限列要么为 0，要么是标准基向量的 q 倍。因此，行列式要么为 0，要么为 $\pm q\ell$，其绝对值至多为 q^t。

接下来，假设存在 M 的第一行。我们将其移到最上方，并将其他每一行都除以 q。由此得到由 ℓ 列组成的集合，其形式为

$$(1, 0), \quad (1, e_1), \quad \ldots \quad (1, e_{\ell-1}).$$

如果其中两列相同，则行列式为 0。否则，所有 ℓ 类型的列都存在。因此，从每一列中减去 (1,0) 列，得到一个行列式为 1 的矩阵。于是，原子矩阵行列式的绝对值为 $q^{\ell-1} \leq q^t$。

由此可得 $|\text{行列式 } M'| \leq q^t$ 是一个凸组合，这证明了 $\Delta(M) \leq q^t$。应用**定理** C.2于 M 和 v 可得

$$2|\hat{\beta}| = \|v\|_1 \leq (k - r)(r + 1)\Delta(M) \leq 2|P|(t + 2)q^t.$$

除以 2 后，我们得到所需上界。 □

注 C.1。 在 第 9 节中，我们有一个常数 $D_{t+1,\,q}$对于 $t \le t_0 := \lceil Q\cdot \frac{q}{q-1}\rceil + 1$。令 $s := t_0 + Q$，那么我们在 C_q 第 8 节（使用定理 C.1）中选取的常数为

$$C_q = \binom{s+q}{q}^2 (s+1)q^s.$$

由于 $Q \ge 2$ 在我们的设定中， $t+1 \le s-1$ 且 $t+3 \le s+1$。因此，推论C.1 给出

$$D_{t+1,q} \le \left(\binom{t+1+q}{q} - 1\right)(t+3)q^{t+1} \le \binom{s+q}{q}(s+1)q^s \le C_q.$$

定理 C.3 。 对于整数 $\Gamma \ge 1$ 和 $q \ge 9$，定理 $n(\Gamma,\ q)$ 中的价值定理6.4 可以取 n

$$n(\Gamma, q) := 2^{4q^2\log^2(2q)}(\log(2\Gamma))^{2q}.$$

证明。 回顾精确定义

$$Q = 1 + \left\lceil \frac{\ln q}{-\ln(1-1/q)} \right\rceil, \qquad t_0 = \left\lceil Q\cdot\frac{q}{q-1}\right\rceil + 1.$$

我们采用以下约定会很方便:

$$s := t_0 + Q, \qquad \ell := \log(2q), \qquad H := 2^{q\ell^2}.$$

由于 $q \ge 9$，我们有 $\ell \ge 4$。根据**定理**C.1，取

$$C_q = \binom{s+q}{q}^2 (s+1)q^s,$$

并选择 $D := D_{t+1,\,q}$ 根据**推论**C.1。根据注 C.1， $D \le C_q$ 对于 $t \le t_0$。首先，我们断言 $qC_q \le H^{3/2}$。事实上，凸性意味着

$$-\ln(1-1/q) \ge \frac{1}{q-1/2} \quad\Longrightarrow\quad Q \le 2 + \left(q - \frac{1}{2}\right)\ln q,$$

根据 t_0 和 s的定义，

$$s \le 2q\ln q + 6 + \frac{\ln q + 4}{2(q-1)} \le 2q\ln q + 7.$$

对于 $q \ge 9$，我们有 $\ln q \le q/4$，因此 $s \le (7/5)q(\ell-1) + 7$，这意味着

$$s + q \le \frac{q^2}{2} + q + 7 \le \frac{7}{10}q^2.$$

使用标准二项式估计，我们有

$$\binom{s+q}{q} \le \left(\frac{e(s+q)}{q}\right)^q \le (2q)^q.$$

由于 $s+1 \le q^2$，我们得到

$$\log(qC_q) = (s+1)\log q + \log(s+1) + 2\log\binom{s+q}{q} \le \frac{7}{5}q(\ell-1)^2 + 2q\ell + 10(\ell-1).$$

将两边除以 q 并使用 $q \geq 9$，得到

$$\frac{\log(qC_q)}{q} \leq \frac{7}{5}\ell^2 + \frac{14}{45}\ell + \frac{13}{45} \leq \frac{3}{2}\ell^2,$$

其中我们使用了 $\ell \geq 4$。这证明了 $qC_q \leq H^{3/2}$。

根据我们对参数的选择，我们有

$$Q, t_0 \leq q^2, \quad D \leq \frac{H^{3/2}}{q}, \quad |P| \leq H^{1/4}, \quad |\Phi| \leq \phi \leq H^{1/2}, \quad (2Q)^q \leq H^{1/2}.$$

事实上，根据 P 和 ϕ 的定义（见 第 9 节），并使用 $s \leq 2q\ell$

$$|P| \leq \binom{s+q}{q} \leq 2^{q\ell} \leq H^{1/4}, \qquad \text{and} \qquad \phi = \binom{t_0 - 1 + Q}{Q} \leq 2^{s-1} \leq H^{1/2}.$$

最后，

$$(2Q)^q \leq (2q^2)^q = 2^{q(2\ell-1)} \leq H^{1/2}.$$

现在，选择 **推论** 8.2中的参数：

$$\varepsilon = \frac{1}{2q^2 C_q t_0}, \qquad \nu = \left\lceil 2q^2 C_q \Big(\theta + \rho_{ES}(q, dn)\Big) \right\rceil.$$

我们需要确保

- 针对头部贫乏代理人的分配 **推论** 6.2,

$$n \geq \max\left\{q^2(16\Lambda + 1),\, 8q^4\Lambda(16\Lambda + 1) + 2q\right\};$$

- 针对供应商选择**引理** 8.5,

$$n \geq 2\phi(2QL)^q;$$

- 针对建议配置的补全 **定理** 9.2,

$$n \geq 4\phi q^3 D\Big(\theta + |\mathcal{P}| + |\Phi| - 1 + 2(L + |F|)\Big).$$

注意，第 9 节中的条件 $n \geq 2q^2|S \cup F|$ 由 第 9 节 可由后者推出，因为 $|S \cup F| \leq L + |F|$。

定义

$$Y := 1 + \log\Big((\Gamma + 1)(n + 1)\Big).$$

根据 Λ在 **推论** 6.2 中的上界以及 ρ的定义，

$$\Lambda \leq 2\rho(\Gamma n, (\Gamma + 1)n) \leq 32Y^2.$$

此外，

$$\rho_{ES}(q, dn) \leq 16q \log n, \qquad \theta = q^2(16\Lambda + 1) + q\Lambda,$$

这意味着

$$\theta + \rho_{ES}(q, dn) \leq \Big(32(16q^2 + q) + q^2 + 16q\Big)Y^2 \leq 2^{10}q^2Y^2.$$

根据 ν 的定义，

$$\nu \leq 2^{12}q^4 C_q Y^2.$$

现在，回想一下，在我们的构造中，

$$|S| \leq t_0\left(1 + \frac{Q\nu}{\varepsilon}\right), \qquad |F| \leq t_0\nu, \qquad L = |S| + \left\lceil q^2(16\Lambda + 1) \right\rceil.$$

代入上述估计可得

$$L+|F| \le t_0\left(1+\frac{Q\nu}{\varepsilon}\right)+t_0\nu+q^2(16\Lambda+1)+1 \le 2^{15}q^6Qt_0^2C_q^2Y^2 = 2^{15}q^4Qt_0^2(qC_q)^2Y^2.$$

接下来，由于 $Q,\ t_0 \le q^2$，以及 $q\ell \ge 36$,

$$2^{15}q^4Qt_0^2 \le 2^{15}q^{10} \le (2q)^{12} \le H^{1/2} \qquad \Longrightarrow \qquad L+|F| \le H^{7/2}Y^2.$$

现在可以直接给出 n 的所有要求的上界。首先，对于 **引理** 6.3,

$$\max\left\{q^2(16\Lambda+1),\ 8q^4\Lambda(16\Lambda+1)+2q\right\} \le 2^{18}q^4Y^4 \le HY^4.$$

接下来，代入前面的估计，并注意到 $\theta \le HY^2$，得到

$$\theta+|P|+|\Phi|-1+2(L+|F|) \le 5H^{7/2}Y^2 \le H^4Y^2.$$

因此，在 **定理** 9.2

$$4\phi q^3D\Big(\theta+|\mathcal{P}|+|\Phi|-1+2(L+|F|)\Big) \le 4H^{1/2}q^3\frac{H^{3/2}}{q}H^4Y^2 = 4q^2H^6Y^2 \le H^7Y^2.$$

最后，对于**推论** 8.2 可得

$$2\phi(2QL)^q \le 2H^{1/2}H^{1/2}\Big(H^{7/2}Y^2\Big)^q \le H^{(7/2)q+2}Y^{2q}.$$

因为 $q \ge 9$ 并且 $Y \ge 1$，只需让 n 满足最后一个条件即可。因此，我们需要

$$n \ge H^{(7/2)q+2}\left(1+\log((\Gamma+1)(n+1))\right)^{2q}.$$

现在，定义

$$b := \log(2\Gamma) \ge 1, \qquad n_0 := 2^{4q^2\ell^2}b^{2q}.$$

我们将证明每个 $n \ge n_0$ 都满足上述不等式。在 $n = n_0$处，利用 $\Gamma+1 \le 2\Gamma$ 和$n_0+1 \le 2n_0$，将此值代入 $Y = Y(n)$ 得到

$$Y(n_0) \le 2+b+4q^2\ell^2+2q\log b \le b\Big(4q^2\ell^2+2q+3\Big) \le 8q^2\ell^2b.$$

对于 $\ell \ge 4$，我们有 $\log\ell \le \ell/2$，因此

$$\log(8q^2\ell^2) = 1+2\ell+2\log\ell \le 1+3\ell \le \frac{7}{2}\ell,$$

这意味着对于 $q \ge 9$ 和 $\ell \ge 4$，有

$$\log\left(H^{(7/2)q+2}Y(n_0)^{2q}\right) \le \left(\frac{7}{2}q^2+2q\right)\ell^2+7q\ell+2q\log b \le 4q^2\ell^2+2q\log b = \log n_0,$$

正如所需。最后，函数

$$\frac{n}{Y(n)^{2q}}$$

当 $Y(n) > 2q/\ln 2$ 时，它递增。对于每个 $n \ge n_0$，我们有

$$Y(n) \ge 4q^2\ell^2 > \frac{2q}{\ln 2}.$$

因此，该上界对每个 $n \ge n_0$ 都成立，证明至此完成。 □