arXiv:2611.33052v1 [cs.GT] 24 Nov 2026

$(1-\varepsilon)$-最大最小份额分配

Zehan Lin Shengxin Liu 澳门大学 深圳哈尔滨工业大学
yc47490@um.edu.mo sxliu@hit.edu.cn

BiaoshuaiTao Xiaowei Wu 上海交通大学 澳门大学
bstao@sjtu.edu.cn xiaoweiwu@um.edu.mo

张宇豪 上海交通大学
zhang_yuhao@sjtu.edu.cn

摘要

我们研究将 m 件不可分割物品以加性估值分配给 n 位代理人的最大最小份额（MMS）分配。我们证明，对于物品和家务两种情形，最优 MMS 近似因子均会随着 n 增大而趋近于 1。具体而言，对于任意固定的 $\varepsilon \in (0,1)$、充分大的 n以及任意 m，我们给出多项式时间算法，分别计算物品的 $(1-\varepsilon)$-MMS 分配和家务的 $(1+\varepsilon)$-MMS 分配。此外，这两种算法都可以通过多项式数量的捆绑比较来实现。

并行工作说明： 2026年11月23日，Biaoshuai Tao 将我们证明 Feige 和 Grinberg 的物品渐近 MMS 猜想一事告知了 Uriel Feige [FG26]。随后，Feige 告知我们，Grinberg 和他已独立证明了同一猜想。两个团队商定于2026年11月24日将论文提交至 arXiv，此前不交换稿件或证明细节。我们将在修订版中引用他们的论文并比较研究结果。

1 引言

我们研究公平分配，这一领域可追溯至 Steinhaus 关于切蛋糕问题的研究 [Ste48]。我们的目标是公平地在 m 代理人之间分配不可分割物品 n 。在物品情形中，每位代理人都有非负加性估值；而在家务情形中，每位代理人都有非负加性成本。两种标准方法用于形式化公平性。基于嫉妒的概念会比较代理人各自的物品束。例如，无嫉妒性（EF） [Fol66] 要求没有代理人会更愿意得到另一位代理人的物品束，而非自己的物品束。基于份额的概念则会将每位代理人的物品束与个人基准进行比较。在比例性（PROP） [Ste48], 下，每位代理人获得的物品总价值至少应达到 $1/n$ ，或者承担的家务总成本至多为 $1/n$ 。即使采用任意固定的乘法松弛，不可分割性也可能使这两种保证都无法实现。这促使人们考虑诸如至多一件物品的无嫉妒性等松弛方式

（EF1） [LMMS04、Bud11], 至多移除任意一件物品后的无嫉妒性（EFX） [CKM+19]、至多一件物品的比例性（PROP1） [CFS17],以及最大最小份额（MMS） [Bud11]。

本文聚焦于最大最小份额（MMS），这是一种放宽比例性的基于份额的概念。每位代理人都设想将所有物品划分为 n 若干物品束，并获得自己最不喜欢的物品束。她的MMS基准是她通过自行选择划分所能保证的最佳结果。MMS 分配会为每位代理人提供一个价值至少达到其基准的物品束。不幸的是，即使是这种放宽，在仅有三位代理人时也可能失败。Kurokawa、Procaccia和Wang [KPW18] 构造了一个不存在MMS 分配的物品实例，而Aziz、Rauchecker、Schryen和Walsh [ARSW17]则给出了一个关于家务的反例。这些反例促使人们对MMS采用乘法松弛。对于物品而言，如果每位代理人获得的物品束价值至少为其MMS的 α，则称该分配为 α -MMS，其中 $\alpha \in [0,1]$。对于所有 n 都成立的最佳已知保证是 $7/9$-MMS，由Huang和Zhou [HZ26]给出。对于家务而言，如果每位代理人承担的成本至多为其MMS的 α，则称该分配为α -MMS，其中 $\alpha \geq 1$。对于所有 n 都成立的最佳已知保证是 $13/11$-MMS，由Huang和Segal-Halevi [HS23]。

对于 n 代理人，我们能够保证的最佳最大最小份额近似因子究竟有多接近 1？对于三个代理人，Feige、Sapir 和 Tauber [FST21]给出了一个物品实例，其中任何分配都会使某个代理人获得至多其最大最小份额的 $39/40$；还给出了一个家务实例，其中任何分配都会使某个代理人的成本至少达到其最大最小份额的 $44/43$。对于四个代理人，Ezra 和 Garbuz [EG26b] 给出了相应的不可能性界：物品为 $20/21$，家务为 $31/30$。然而，这些构造仅在 n 取较小值时，才能建立与 1 之间的常数间隔。对于足够大的 n，他们证明，物品的最佳因子至多为 $1-c/(\log n)^2$，而家务的最佳因子至少为 $1+c/(\log n)^2$，其中 $c>0$为绝对常数。这些界会随着 n 增大而趋近于 1，从而引出了以下问题。

“当 n 增大时，最优最大最小份额近似因子是否会收敛到 1？”

对于物品，Feige 和 Grinberg [FG26] 证明了，对于任意固定的 $\delta > 0$ 和 $\varepsilon \in (0,1)$ 以及足够大的 n，可以从至少 n 名代理人的群体中选出 $(1+\delta)n$ 名代理人，并为每位入选代理人分配至少 $(1-\varepsilon)$ 倍于其 n-代理人最大最小份额的物品。他们猜想，对于任意固定的 $\varepsilon \in (0,1)$和足够大的 n，对于任意数量的物品，都存在一个 $(1-\varepsilon)$-最大最小份额分配。

1.1 我们的结果

我们对物品和家务都给出了肯定回答，并证明了 Feige 和 Grinberg 猜想。

主要结果（定理 3.1 和 C.1）。对于任意固定的 $\varepsilon \in (0,1)$、所有足够大的n以及任意数量的物品，我们都能在多项式时间内计算出物品的一个 $(1-\varepsilon)$-最大最小份额分配，以及家务的一个$(1+\varepsilon)$-最大最小份额分配。

我们还量化了最优 MMS 近似因子收敛至 1 的速度。[1] 如果 α_n^*和 ρ_n^* 分别表示在所有物品和家务数量下，对 n 代理人所能保证的最佳 MMS 近似因子，我们的结果（见附录D）给出

$$1-\alpha_n^* = O\left(\left(\frac{\log\log n}{\log n}\right)^{1/8}\right) \qquad \text{and} \qquad \rho_n^* - 1 = O\left(\left(\frac{\log\log n}{\log n}\right)^{1/24}\right).$$

[1]请注意，多项式运行时间界取决于固定参数 ε，而下文的收敛速率则量化了保证的近似误差如何随 n 变化。

基于比较的算法。我们针对物品和家务的算法也可以仅通过物品束比较来实现。大多数现有的最大化最小份额算法依赖于物品的数值价值或成本 [KPW18、GT21], ，其中包括为物品实现 7/9-MMS 的算法 [HZ26] ，以及为家务实现 13/11-MMS 的算法 [HS23]。相较之下，基于比较的查询模型只询问代理人更喜欢两个物品束中的哪一个。在此模型中，先前的工作为物品实现了 PROP1 和 1/2-MMS [BLL+24], 并为家务实现了 $(13/11+\varepsilon)$-MMS [LLTZ27]。受先前工作的启发，我们将 MMS 保证扩展到这一查询模型。我们证明，对于每个固定的 $\varepsilon \in (0, 1)$、所有充分大的 n 以及任意 m 件物品，我们可以在多项式时间内，使用 $O(n^2 \log m/\varepsilon + n^8/\varepsilon^6)$ 次物品束比较，为物品计算一个 $(1-\varepsilon)$-MMS 分配，并为家务计算一个 $(1+\varepsilon)$-MMS 分配。

对于固定的 ε 且足够大的 n，该查询上界与计算近似最大化最小份额分配的$\Omega(\log m)$ 比较次数下界 [BLL+24]相匹配。更广泛地说，我们的结果揭示了有限序数信息的力量，表明多项式数量的物品束比较足以达到利用完整数值估值和成本所能实现的渐近最优最大最小份额保证。

1.2 技术概述

我们描述适用于物品的算法。按照这一研究方向中的标准做法，我们假设该实例满足 IDO（意味着所有代理人共享相同的物品排序，即对于每个代理人 i，都有 $v_i(e_1) \geq \cdots \geq v_i(e_m)$），并且每个代理人都将物品划分为 n 个价值为 1 的物品束。对于足够大的 n，我们的目标是为每个代理人分配一个价值至少为 $1-\varepsilon$的不可分割捆绑。从分数角度看，为每个代理人分配每件物品的 $1/n$ 份额，已经能为所有人带来价值 1；但这种统一的分数分配对于如何分配不可分物品几乎没有指导意义。为弥合这一差距，我们仿照 Bansal 和 Sviridenko 关于最大化最小分配的工作，构造一个配置线性规划 [BS06]。在该线性规划中，每个代理人将单位分数权重分配到一个多项式规模的候选捆绑列表上，这些候选捆绑对其而言的价值都接近 1，其中包括其 MMS 划分中的 n 个物品束。由于前缀 $\{e_1, \ldots, e_j\}$中的每件物品对每个代理人的价值都至少与 e_j 相同，因此我们可以将包含第 j件物品的捆绑放宽为对前 j 个位置中的任意物品的请求。根据霍尔定理，只要对于每个 j，前 j 个位置中至多包含 j个请求，就可以将一组整数请求匹配到互不相同的物品。Ezra 和 Garbuz [EG26a] 以及 Feige 和 Grinberg [FG26]也采用了类似的有序请求。

有了这一松弛，我们求解一个线性规划，使缩放因子 λ 最小，并满足如下约束：长度为 j的每个前缀中的总分数需求至多为 $\lambda \cdot j$。在代理人的 n 个划分捆绑中的每个捆绑上赋予权重$1/n$ ，即可证明 $\lambda = 1$ 始终可行。若 λ的值严格更小，例如 $\lambda = 0.9$，则分数解会使每个前缀至少有 $1-\lambda$ 的部分未被使用。我们的分析根据总松弛量 $n(1-\lambda)$ 分为两种情形。令 $R = C \cdot \log^2 n$，其中 C 是某个足够大的常数。当 $n(1-\lambda) \geq R$时，我们采用Feige和Grinberg的舍入论证 [FG26]。在每个舍入步长中跟踪已选前缀后，我们将分数解舍入为一个单一的整数候选捆绑，适用于除 $O(\log^2 n)$个代理人之外的所有代理人。随后，我们将他们的请求匹配到互不相同的物品，同时仍使每个前缀至少有 $1-\lambda$ 的部分空闲。由于该实例是IDO，这些未使用前缀槽位中的剩余物品对每个代理人的价值至少为 $n(1-\lambda)$，这足以让其余 $O(\log^2 n)$个代理人通过贪心方式获得物品。

当松弛量 $n(1-\lambda)$较小时，最优线性规划的价值接近 1，而线性规划对偶性提供了结构性助力。具体而言，对偶线性规划为物品赋予价格。利用这些对偶价格，我们找出一段由个体价值较高的物品构成的公共前缀 M_1，并令 M_2 表示其余物品。对于几乎所有代理人（我们称之为普通代理人）， M_1 中的每件物品价值至少为 $\Omega(\varepsilon)$，而 M_2 中的所有物品合计仅贡献 n 的多对数级价值。由于普通代理人的划分中每个捆绑的价值均为 1，因此其中至多只能包含 M_1中的 $O(1/\varepsilon)$件物品。这种稀疏性

至关重要：它使我们能够将 M_1 中物品的价值向下舍入为较小的离散步长（定义为d_1 第 3.4节中的步长），且每个捆绑因此产生的损失都可以忽略不计。

为了协调普通代理人之间的分配，我们将 M_1 划分为 O个区间，并在每个区间内指定一小组位置，称为检查点。随后，我们将舍入值在所有检查点处都一致的普通代理人归为一组，这样一名代表就可以为整个组提供物品束。特别是，每当代表请求一个位于两个检查点之间的物品时，公共 IDO 顺序都能确保该组的每位成员对前一个检查点的价值至少与代表对所请求物品的价值一样高，误差不超过 d_1。此外，在任意给定区间内，大多数代理人对该区间中所有物品赋予完全相同的舍入价值，因此他们对位置没有偏好，可以接受其中的任意物品。

最后，我们利用 M_1 和 M_2构造整数分配。对于普通代理人，我们选取仅使用 M_1 中的物品且价值已经接近 1 的代表性物品束，并从单个参考划分中加入少量物品束，以平衡各区间的总需求。同时，我们限制每个区间内需要较早位置的请求数量，从而确保前缀容量得到满足；这样，通过再次应用 Hall匹配定理，我们就能用M_1 中的不同物品满足所有请求。随后，我们将 M_2 中剩余的物品用于最后两项任务：当参考物品束需要超过 M_1的额外价值时将其补充完整，以及服务那些在 M_1之外赋予较高价值的非普通代理人。

1.3 相关工作

由于关于公平分配的文献浩如烟海，以下我们仅关注与本文最密切相关的工作。如需更全面的综述，请参阅近期的调查 [ALMW22、AAB+23]。

物品的MMS分配。由于MMS分配不一定存在，众多研究持续改进了物品的近似保证，最初从 $2/3$-MMS [PW14、AMNS17、KPW18、GMT19、BK20] 开始，随后推进到 $3/4$-MMS [GHS+18]，再到 $3/4 + \Omega(1/n)$ [GT21、AGST23]。后续工作通过 $3/4 + 3/3836$ [AG24] 和$10/13$ [HKSS26], 突破了 $3/4$ 这一界限，目前最先进的成果是Huang和Zhou [HZ26]建立的一个强多项式时间 $7/9$-MMS算法。对于足够大的 n，Ezra和Garbuz [EG26a] 证明，每个代理人都可以获得其MMS基准，该基准使用由 $n + O(\sqrt{n}\log n)$个物品束定义。在不可能性方面，除上述较小的n 界限外，Feige、Sapir和Tauber [FST21]证明，对于每个 $n \geq 4$，其与精确MMS之间的差距至少为 $1/n^4$；Ezra和Garbuz [EG26b]进一步将其加强为：对于较大的 n，差距为$\Omega(1/(\log n)^2)$。

家务的MMS分配。对于家务问题，一系列平行的研究工作将近似保证从（$2-1/n$）-MMS [ARSW17] 提升到了 $4/3$-MMS [BK20] 和 $11/9$-MMS [HL21]。目前最先进的结果归功于Huang和Segal-Halevi [HS23], , 他们证明了 $13/11$-MMS分配的存在性。对于足够大的 n，Lin、Wu和Zhou [LWZ26] 获得了一种事前PROP彩票，其中每个实现的分配都可以通过丢弃至多 o（n）项家务而成为MMS分配。在否定方面，除了引言中Feige、Sapir和Tauber [FST21] 以及Ezra和Garbuz [EG26b] 关于小n 界的结果外，后者还证明，对于较大的 n，最优因子至少为$1 + \Omega(1/(\log n)^2)$ 。

有限信息下的公平分配。 一些研究工作探讨了在无法完整获取参与者的估值时如何进行公平分配。在仅有单个物品的序数排名的情况下，最大最小份额的最佳近似阶数为 $1/\log n$ 对于物品 [ABM16、HS21], , 而 Aziz、Li 和 Wu [ALW24] 为家务实现了 $5/3$-最大最小份额。对于任意固定的 n，物品和

家务的 EF1分配均可使用 $O(\log m)$ 捆绑比较 [LLTZ26]计算。除了上文讨论的基于比较的最大最小份额结果 [BLL+24、 LLTZ27], , 先前的研究还探讨了使用价值查询进行公平分配 [PR20a、 OPS21、 DI26], 并分析了其通信复杂度 [PR20b、 Fei25]。

2 预备知识

下文中，我们将分析重点放在物品的情形。家务的情形见附录 C。我们研究如何将一组 M 个不可分物品公平分配给一组 $N = [n]$ 个代理人，其中 $[k] = \{1, \ldots, k\}$，对任意正整数 k 均成立。我们将任意子集 $S \subseteq M$称为一个捆绑。每个代理人 $i \in N$ 都有一个非负加性估值 v_i: $2^M \to \mathbb{R}_{\geq 0}$。对于单个物品 $e \in M$，我们用 $v_i(e)$ 表示 $v_i(\{e\})$，因此对于每个捆绑 $S \subseteq M$，都有 $v_i(S) = \sum_{e \in S} v_i(e)$。一个实例记为 $\mathrm{I} = (N, M, \mathbf{v})$，其中 $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ 是估值配置。对于任意 $M' \subseteq M$和正整数 k，我们用 $\pi_k(M')$ 表示 k 元有序划分 $\mathrm{P} = (P_1, \ldots, P_k)$ 的集合，其中划分对象为 M'。分配是一个有序的 n 划分 $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$，将捆绑 X_i 分配给每个代理人 $i \in N$。

定义 2.1 （最大最小份额）： 对于每位代理人 $i \in N$，其最大最小份额 （MMS）定义为

$$\mu_i = \max_{\mathbf{P} \in \pi_n(M)} \left\{ \min_{j \in [n]} \{v_i(P_j)\} \right\}.$$

对于 $\alpha \in [0, 1]$，如果分配$\mathbf{X}$ 满足 α-*MMS*条件，即对所有 $i \in N$均有 $v_i(X_i) \geq \alpha \cdot \mu_i$，则称其为 α-*MMS*分配；如果满足 $\alpha = 1$，则称其为*MMS*分配。

任何达到 μ_i 的划分 $\mathrm{P}^i \in \pi_n(M)$ 都称为代理人 i 的 MMS 划分。当 $m < n$ 时，对于所有 $i \in N$ 均有 $\mu_i = 0$，且每种分配都是 MMS 分配。因此，我们将注意力限制在满足 $m \geq n$ 的实例上，并且在全文分析中假设 n 足够大。遵循 Akrami、Garg、Sharma 和 Taki [AGST23], 的做法，如果每位代理人 $i \in N$ 都存在一个 MMS 划分 $\mathrm{P}^i = (P_1^i, \ldots, P_n^i)$，满足对于所有 $j \in [n]$均有 $v_i(P_j^i) = 1$，则称该实例为归一化实例。在任何归一化实例中，每位代理人 $i \in N$ 的总价值为 $v_i(M) = n$，最大最小份额为 $\mu_i = 1$。如果物品可以编号为 $e_1, \ldots, e_m$，使得对于每个 $i \in N$，均有 $v_i(e_1) \geq \cdots \geq v_i(e_m)$，则称该实例为同序（IDO）实例。标准归约为每个有序物品 e_j 赋予每位代理人单元素价值中第 j 大的价值，并将分配映射回原始物品，且不损失价值 [BL16, BK20]。

引理 2.2。 *我们可以在多项式时间内将任意物品实例 I 归约为一个 IDO 实例 I'，并将 I' 的任意 α-MMS 分配映射回 I 的一个 α-MMS 分配。*

引理 2.2 使我们可以不失一般性地假设该实例是 IDO。对于 $j \in [m]$，我们用 $M[j] = \{e_1, \ldots, e_j\}$ 表示按此共同顺序排列的前 j 件物品。

3 完整估值下的分配

本节将证明，在显式估值下，物品的分配具有以下保证。

定理 3.1。 *对于每个固定的 $\varepsilon \in (0, 1)$ 以及所有充分大的 n，我们都可以在多项式时间内计算出物品的一个$(1 - \varepsilon)$-MMS 分配。*

我们首先对每位代理人的估值进行归一化，并合并较小物品，使 $O(n)$ 个物品成为有序物品（引理 3.2）。接下来，我们构建一个线性规划（LP），在预留最有价值物品中的统一松弛量的同时分配分数捆绑。当该松弛量足够大时，我们可以对线性规划解进行舍入，从而满足几乎所有代理人的需求；剩余物品则能提供足够的价值，使我们可以通过贪心方式满足其余代理人的需求（引理 3.6）。否则，对偶会揭示物品的一个公共前缀，它几乎包含了几乎每位代理人的全部价值（引理 3.8）；我们利用这一结构构造近似最大最小份额分配（定理3.13）。

3.1 归约与线性规划框架

在本小节中，我们首先将任意物品实例归约为一个包含 $O(n)$ 个物品的归一化 IDO 实例（引理 3.2），然后构建一个线性规划来衡量可用的松弛量。此外，对于约简实例中的每位代理人，该归约还可以在多项式时间内完成，并给出明确的 MMS 划分（尽管计算给定实例的 MMS 划分是 NP-hard 的）。

引理 3.2。对于固定的 $0 < \alpha < \beta < 1$，我们可以在多项式时间内将任意物品实例 I 归约为一个包含 $O(n)$ 个物品且具有显式最大最小份额划分的归一化 *IDO* 实例。约简实例中的任意 β-最大最小份额分配，都可以在多项式时间内映射回 I 的一个 α-最大最小份额分配。

引理 3.2 的证明推迟至附录 A.1。以下分析中，我们处理一个具有 $m = O(n)$ 的约简后归一化 IDO 实例，并固定一个目标 $\beta \in (0, 1)$，允许隐含常数依赖于 β。我们用 $\mathbf{P}^i = (P_1^i, \ldots, P_n^i)$ 表示代理人 i 的最大最小份额划分。此外，对于所有 $i \in N$ 和 $e \in M$，我们有 $v_i(M) = n$ 且 $v_i(e) \le 1$。我们固定一个中间阈值 $\sigma \in (\beta, 1)$，并允许分析中的常数依赖于 σ。对于每个代理人 $i \in N$，我们构造一个候选捆绑族 $\mathbf{B}_i$，其中每个捆绑 $S \in \mathbf{B}_i$ 都满足 $v_i(S) \ge \sigma$。族 $\mathbf{B}_i$ 由以下三类捆绑构成，其具体结构将用于第 3.3 节的对偶分析。

- *MMS* 捆绑。我们纳入每个捆绑 $B \in \mathbf{P}^i$，其中满足 $v_i(B) = 1 > \sigma$。
- 缩减 *MMS* 捆绑。对于每个 $B \in \mathbf{P}^i$，我们按照共同顺序扫描满足 $v_i(e) \le 1 - \sigma$ 的物品 e，并将其划分为连续区段。每当加入下一个物品会使价值超过 $1 - \sigma$ 时，我们就开始一个新区段。对于每个区段 $B\prime$，我们将$B \setminus B\prime$ 纳入$\mathcal{B}_i$。注意，$v_i(B \setminus B\prime) \ge \sigma$。由于任意两个连续区段的总价值都超过 $1 - \sigma$，且 $v_i(B) = 1$，因此每个 B 至多产生 $1 + \lceil 2/(1 - \sigma) \rceil$ 个捆绑。
- 最短连续块。对于每个 $e \in M$，如果存在这样的连续块，我们就纳入从 e 开始、对代理人 i 的价值至少为 σ 的最短连续块。

注意，用于构成缩减 MMS 捆绑（上文第二种类型）的区段是 M 的非空两两不相交子集。因此，缩减 MMS 捆绑至多有 m 个。此外，每个起始物品至多产生一个最短连续块（上文第三种类型）。结合 n 个原始 MMS 捆绑，这意味着 $|\mathcal{B}_i| \le n + 2m = O(n)$。接着，我们求解以下线性规划，[3] 为代理人 i 的每个候选捆绑 $S \in \mathcal{B}_i$ 分配一个变量 $x_i(S)$，表示分配给该捆绑的份额。

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & \lambda \\
\text{subject to} \quad & \textstyle\sum_{S \in \mathcal{B}_i} x_i(S) = 1 && \text{for all } i \in N, \\
& \textstyle\sum_{i \in N} \sum_{S \in \mathcal{B}_i} x_i(S) \cdot |S \cap M[j]| \le \lambda \cdot j && \text{for all } j \in [m], \\
& x_i(S) \ge 0 && \text{for all } i \in N \text{ and } S \in \mathcal{B}_i.
\end{aligned}
$$

第一个约束确保所得的分数分配让每位代理人获得至少 σ 的价值。直观地说，候选捆绑中的任何物品都可以替换为更早的物品而不损失价值，因此第二个约束限制的是每个前缀 $M[j]$ 上的总需求，而不是单个物品上的需求。变量 λ 限定了每个前缀容量的使用比例，目标则是最大化所有前缀上的统一松弛量 $1 - \lambda$。这种松弛量能让高价值物品保留下来，而不是只剩低价值物品，从而确保后续贪心步骤有足够的剩余价值。

[2]请注意，即使在同一族内，候选捆绑也可能重叠。[3]除非另有说明，本文其余部分所称的“线性规划”均指此前缀松弛。

该线性规划是可行的，因为我们可以对 MMS 划分中的每位代理人 i 和每个捆绑 $S \in \mathbf{P}^i$ 设置 $x_i(S) = 1/n$。这会得到 $\lambda = 1$，并意味着最优解满足 $\lambda \leq 1$。由于$\mathcal{B}_i$ 中的每个候选捆绑都非空， $j = m$ 处的前缀约束也确保了 $\lambda > 0$。该线性规划有 n 个代理人约束和 m 个前缀约束，因此我们可以在多项式时间内计算出一个基本最优解（λ, x），其中 x中至多有 $n + m$ 个正值项。

定义 3.3。 对于线性规划的一个最优解（λ， x），其总松弛 定义为 $\Delta = n \cdot (1 - \lambda)$。

我们设 $L = \lceil \log_2 n \rceil$，并使用 $R = 768L^2 = O(\log^2 n)$ 作为舍入损失预算。我们将分析分为两种情形。当 $\Delta \geq 2R$时，第 3.2 节进行 x 轮次，并分配剩余物品，以保证每个代理人的价值至少为 σ。当 $\Delta < 2R$时，第 3.3 节利用对偶线性规划证明，几乎所有代理人都认可物品的一个共同有价值前缀；第 3.4 节和 3.5 节利用这一性质计算近似最大最小份额分配。

3.2 大松弛量： $\Delta \geq 2R$

在本小节中，我们处理 $\Delta \geq 2R$的情形，此时线性规划在每个前缀上都留下了大量未使用容量。直观地说，这种统一松弛量使我们能够满足几乎所有代理人，同时留出一个由大物品和小物品组成的均衡物品池。我们调整 Feige和Grinberg 的迭代舍入方法 [FG26]，使未得到服务的代理人仅剩 $O(\log^2 n)$。随后，剩余物品池提供足够的价值，以便通过贪心方式为他们提供服务（见算法 3.1 和引理 3.6）。

算法概述。 算法 3.1 分三个步骤构造分配。首先，我们使用迭代检查点舍入 [FG26] 将 x 舍入为整数物品束选择，同时保留每个前缀约束，并使至多 R 名代理人未得到服务。其次，对于这些选定的捆绑，我们将每个请求的物品替换为共同顺序中位于其位置或之前的一个不同物品，从而保证每位得到服务的代理人的价值至少为 σ。由于每个前缀中至少有 $1 - \lambda$ 的比例仍未分配，剩余物品池对每位代理人的价值至少为 Δ。最后，我们通过简单的装袋填充，从该物品池中贪心地为其余代理人提供物品。每个捆绑一旦达到某位未得到服务的代理人的价值 σ 便停止，因此 $\Delta \geq 2R$ 足以满足所有这些代理人。

具体而言，步骤 1 通过反复将 x 更新为辅助舍入线性规划的最优顶点，消除 x 中的所有分数条目，同时保留每个前缀界。在线性规划的基本可行解中，一旦所有整数条目固定，分数条目的数量至多等于涉及这些分数条目的紧约束数量。如果舍入线性规划包含所有 m 前缀约束，这个上界为 $O(m)$，并不能保证分数支撑 $\mathcal{F} = \{(i, S) : 0 < x_i(S) < 1\}$会缩小。相反，每个舍入线性规划只包含 $[m]$中一小组位置上的前缀约束，这些位置称为检查点，记作$\mathcal{C}(\tilde{x})$。对于每个检查点，舍入线性规划都要求前缀负载不得增加。然而，由于线性规划未约束其他位置，非检查点前缀上的负载仍可能增加。为了保留这些位置上的前缀界，步骤 1 在求解线性规划之前，先略微降低每个分数条目，在每个 $M[j]$上于 $\lambda \cdot j$ 之下留出少量松弛量，以抵消此类增加。

具体而言，在每次非空$\mathcal{F}$的迭代中，我们令 $\omega = 16(1 + \lceil \log_2(m \cdot |\mathcal{F}|) \rceil)/|\mathcal{F}|$。当$\omega < 1/2$时，我们保持所有整数条目不变，并将每个分数条目减少 ω:

$$\tilde{x}_i(S) = \max\{0, x_i(S) - \omega\} \qquad \text{for all } (i, S) \in \mathcal{F}.$$

下面，我们定义 舍入线性规划，记为 LP($\tilde{x}$)。该程序保留所有整数条目

算法 3.1： 检查点舍入与总松弛捆绑填充**输入：** $\mathcal{I} = (N,\ M、\mathbf{v})$, 候选捆绑 $\{\mathcal{B}_i\}_{i\in N}$,
目标 σ，以及一个基本最优解（λ x）
输出：分配 $\mathrm{X} = (X_1, \ldots, X_n)$
// Step 1: Iterative checkpoint rounding1 设置集合 $\mathrm{F} \leftarrow \{(i,S):$
$0 < x_i(S) < 1\}$；2 当 $\mathrm{F} \neq \emptyset$ 时执行 3 设置 $\omega \leftarrow 16(1 + \lceil \log_2(m\cdot |\mathrm{F}|)\rceil)/|\mathrm{F}|$;
4 如果 $\omega \geq 1/2$ 则 5 退出；6 通过设置 $\tilde{x}_i(S) \leftarrow \max\{0, x_i(S) - \omega\}$（对所有
$(i,S) \in \mathrm{F}$），由 x 构造 $\tilde{x}$；7 $x \leftarrow$ LP($\tilde{x}$) 的一个最优顶点，并更新 F；8
设置 $x_i(S) \leftarrow 0$（对所有 $(i,S) \in \mathrm{F}$）；9 按物品位置对所有满足 $x_i(S) = 1$ 且
$e \in S$ 的请求 (i,e) 排序；10 对于第 k 个请求 (i,e)，将 M 的第 $\lceil k/\lambda \rceil$ 个物
品分配给 X_i；11 $U \leftarrow M \setminus \bigcup_{i\in N} X_i$；// Step 3: Greedy bundle filling
12 $N^- \leftarrow \{i \in N : \sum_{S\in \mathrm{B}_i} x_i(S) = 0\}$；13 当 $N^- \neq \emptyset$ 时执行 14 设 $B' \subseteq U$ 为
U 的最短前缀，使得对于某个 $i \in N^-$，$v_i(B') \geq \sigma$；15 $X_i \leftarrow B'$, $U \leftarrow U$
$\setminus B'$, $N^- \leftarrow N^- \setminus \{i\}$；16 将 U 添加到 X_1；17 返回 $\mathrm{X} = (X_1, \ldots, X_n)$;

固定，并且只在稍后将正式定义的 $[m]$ 的子集 $\mathcal{C}(\tilde{x})$ 上施加前缀界。

$$
\begin{array}{lll}
\text{maximize} & \sum_{i\in N} \sum_{S\in\mathcal{B}_i} x'_i(S) & \\
\text{subject to} & \sum_{S\in\mathcal{B}_i} x'_i(S) \leq 1 & \text{for all } i \in N, \\
& x'_i(S) = \tilde{x}_i(S) & \text{for all } (i,S) \text{ with } \tilde{x}_i(S) \in \{0,1\}, \\
& \sum_{i\in N} \sum_{S\in\mathcal{B}_i} (x'_i(S) - \tilde{x}_i(S)) \cdot |S \cap M[j]| \leq 0 & \text{for all } j \in \mathcal{C}(\tilde{x}), \\
& x'_i(S) \geq 0 & \text{for all } (i,S).
\end{array}
$$

对于每个 $j \in [m]$，$\tilde{x}$ 中仍为分数的条目具有总前缀耦 nt

$$A(j) = \sum_{(i,S):\, 0<\tilde{x}_i(S)<1} |S \cap M[j]|.$$

由于这些条目中的每一项都减少了 ω，因此从 x 到 $\tilde{x}$ 的转变会在 $M[j]$上 $\lambda\cdot j$以下产生至少$\omega\cdot A(j)$的松弛量。如果检查点 $j_0 \leq j$阻止 $M[j_0]$上的负载在下一次线性规划步骤中增加，那么 $M[j]$ 上的负载从 $\tilde{x}$ 起至多增加 $A(j) - A(j_0)$，因此 $A(j)$的较大值可以容忍检查点之间更宽的间隔，同时不会超过 $\lambda\cdot j$。因此，我们将 $A(j)$的所有可能正值$\{1, \ldots, m\cdot |\mathrm{F}|\}$划分为 $O(\log(m\cdot |\mathrm{F}|))$个范围 $[2^k, 2^{k+1})$，其中$k \geq 0$为满足 $2^k \leq m\cdot |\mathrm{F}|$的整数，并将阈值间距设为 $w_k = \max\{1, \lfloor \omega\cdot 2^k \rfloor\}$。在每个范围 $[2^k, 2^{k+1})$内，我们在 2^{k+1}以下设置阈值 2^k、$2^k + w_k$、$2^k + 2w_k$、.....，这使用了 $O(1/\omega)$

每个范围的阈值，以及 $O(\log(m \cdot |\mathcal{F}|)/\omega)$ 个总体阈值。对于每个阈值，我们将检查点集合中的$\mathcal{C}(\tilde{x})$最小位置 $j \in [m]$，其中 $A(j)$ 至少达到该阈值（如果存在这样的位置；示意见图 3.1 ）。至此，舍入线性规划的定义完成。根据我们的

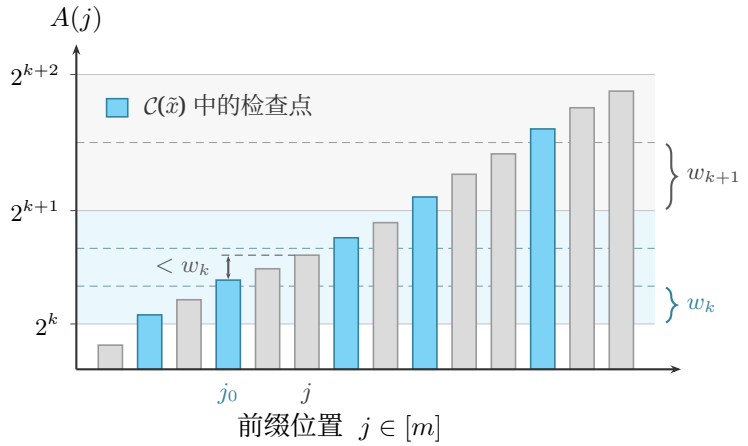

图 3.1： $\tilde{x}$ 的检查点放置。每个达到阈值的首个条形被选入$\mathcal{C}(\tilde{x})$，因此任意位置 j 与其前一个检查点 $j_0 \le j$ 相差 $A(j) - A(j_0) < w_k$。

选择 ω 后，集合 $\mathcal{C}(\tilde{x})$ 的大小至多为 $|\mathcal{F}|/4$，这会使每次迭代中的 $|\mathcal{F}|$ 按常数比例减少，同时使 x 中各项之和至多减少 $\omega \cdot |\mathcal{F}| = O(\log n)$。

在步骤 2 中，每个变量都属于 $\{0,1\}$，且候选捆绑中系数为 1 的每个物品 e 都会生成一个请求，其截止时间为该物品在共同顺序中的位置。按照共同顺序，任何位于该位置或之前的物品都能满足该请求，且不会降低代理人的价值。我们按截止时间对所有请求排序，并将 M 的第 $\lceil k/\lambda \rceil$ 个物品分配给第 k 个请求。由于 $\lambda \le 1$，这些位置严格递增，因此彼此不同。此外，若第 k 个请求的截止时间为 j，则保留的前缀约束给出 $k \le \lambda \cdot j$，因此 $\lceil k/\lambda \rceil \le j \le m$；所以被分配的物品总是存在且满足该请求。由于被分配的位置为 $\lceil k/\lambda \rceil$，每个前缀 $M[j]$ 至多包含 $\lfloor \lambda \cdot j \rfloor$ 个已分配物品，因此在 $M[j]$ 中至少留下 $(1-\lambda) \cdot j$ 个未分配物品供步骤 3 使用。

在步骤 3 中，集合 N^- 收集步骤 1 中未得到服务的代理人。当 N^- 非空时，我们将满足 $\max_{i \in N^-}\{v_i(B')\} \ge \sigma$ 的最短前缀 $B' \subseteq U$ 分配给符合条件的代理人 $i \in N^-$，并从 U 中移除 B'，再从 N^- 中移除 i。最后，将 U 中的任何剩余物品加入 X_1。

引理 3.4。 在算法 *3.1*的步骤 *1* 中，对于任意 $j \in [m]$，前缀 $M[j]$ 满足

$$\sum_{i \in N} \sum_{S \in \mathcal{B}_i} x_i(S) \cdot |S \cap M[j]| \le \lambda \cdot j.$$

证明。我们对步骤 1 的迭代次数进行归纳。由于（λ， x）对于线性规划是可行的，因此初始时该界成立。在一次迭代中，若 $\omega \ge 1/2$，将 F 中的每个条目设为 0 都不会增加任何前缀负载，因此该界仍然成立。当 $\omega < 1/2$时，对于每个 $j \in [m]$， $\tilde{x}$ 中仍为分数值的条目具有前缀计数 A（j）。由于这些条目各自减少 ω，而所有其他条目都不会增加，因此 $M[j]$ 上的 $\tilde{x}$ 负载至多为 $\lambda \cdot j - \omega \cdot A$（$j$）。此外， $\tilde{x}$ 对于 LP（$\tilde{x}$）是可行的；在其基本最优解中，只有满足 $0 < \tilde{x}_i(S) < 1$ 的条目 x' 可以变化，且每个条目的变化幅度都小于 1。对于任意 $j \in [m]$，若 A（j）$= 0$，则从 $\tilde{x}$ 到 x'， $M[j]$ 上的负载不变。否则，A（j）$\in [2^k, 2^{k+1})$，存在唯一整数 $k \ge 0$ 满足 $2^k \le m \cdot |\mathrm{F}|$；不超过$A$（$j$）的最大阈值给出检查点 $j_0 \in$ C（$\tilde{x}$），使得 $j_0 \le j$ 且 A（j）$- A$（j_0）$< w_k$。由于 $M[j_0]$上的负载

从 $\tilde{x}$ 到 x'不会增加，因此 $M[j]$ 上的负载至多增加 $A(j) - A(j_0)$。当 $w_k = 1$时，这个非负整数差为 0。若 $w_k \geq 2$，则有

$$A(j) - A(j_0) < w_k = \lfloor \omega \cdot 2^k \rfloor \leq \omega \cdot 2^k \leq \omega \cdot A(j).$$

在两种情况下，该增量均至多为 $\omega \cdot A(j)$，因此 x' 在 $M[j]$ 上的负载始终至多为 $\lambda \cdot j$。 □

引理 3.5。 步骤 *1* 在多项式时间内终止，并得到整数权重向量 x 和 $|N^-| \leq R$。

证明。 在任意满足 $\omega < 1/2$的迭代中，至多有 $1 + \lceil \log_2(m \cdot |\mathcal{F}|) \rceil$ 个整数 $k \geq 0$ 满足 $2^k \leq m \cdot |\mathcal{F}|$。对于每个这样的 k，当 $\omega \cdot 2^k < 1$时，阈值数量为 $2^k < 1/\omega$；否则至多为 $1 + 2^k/\lfloor \omega \cdot 2^k \rfloor \leq 1 + 2/\omega < 4/\omega$（因为 $\omega < 1/2$）。根据 ω的定义，检查点数量因此满足

$$|\mathcal{C}(\tilde{x})| \leq \frac{4}{\omega} \cdot (1 + \lceil \log_2(m \cdot |\mathcal{F}|) \rceil) = \frac{|\mathcal{F}|}{4}.$$

我们将 $\mathbf{F}' = \{(i, S) : 0 < x'_i(S) < 1\}$ 记为 LP($\tilde{x}$) 的基本最优解 x'的分数支撑。一旦 x' 的所有整数条目均被固定，$\mathbf{F}'$ 中的坐标仍构成一个基本可行解，因此 $|\mathbf{F}'|$至多等于涉及 $\mathbf{F}'$ 的紧约束数量。由于 $\mathbf{F}'$ 中的每个变量均满足 $x'_i(S) > 0$（因此 $x'_i(S) \geq 0$永远不会是紧约束），且没有约束 $x'_i(S) = \tilde{x}_i(S)$ 涉及 $\mathbf{F}'$，因此只剩下两类紧约束：检查点约束（至多 $|\mathbf{C}(\tilde{x})| \leq |\mathbf{F}|/4$）和紧代理人约束 $\sum_{S \in \mathbf{B}_i} x'_i(S) = 1$。此外，任何包含 $\mathbf{F}'$ 中变量的紧代理人约束都不可能含有等于 1 的条目，因此其中至少包含两个 $\mathbf{F}'$中的变量，其和为 1。由于代理约束在不同代理人之间互不相交，至多存在 $|\mathbf{F}'|/2$ 个此类约束。因此，$|\mathbf{F}'| \leq |\mathbf{F}|/4 + |\mathbf{F}'|/2$，这意味着 $|\mathbf{F}'| \leq |\mathbf{F}|/2$。

由于 n 足够大， $m \leq n^2$，且初始分数支撑满足 $|\mathbf{F}| \leq n + m \leq 2n^2 \leq 2^{2L+1}$。由于在满足 $\omega < 1/2$ 的情况下， $|\mathbf{F}|$ 在每次迭代中都会减半，根据 ω 的定义，在步骤 1 的整个过程中都有 $\omega \cdot |\mathbf{F}| \leq 80L$，并且步骤 1 至多执行 $2L + 1$ 次此类迭代。在每次迭代中，将 x 化为 $\tilde{x}$ 至多使总权重减少 $\omega \cdot |\mathbf{F}| \leq 80L$；又由于 $\tilde{x}$ 对 LP($\tilde{x}$) 是可行的，最优解不会损失更多权重。如果某次迭代达到 $\omega \geq 1/2$，则将 $\mathbf{F}$ 中的所有条目设为 0 会移除 $|\mathbf{F}| \leq 2\omega \cdot |\mathbf{F}| \leq 160L$ 个条目，每个条目的权重都小于 1，并终止步骤 1。终止时， x 为整数，且对于每个 $i \in N$， $\sum_{S \in \mathbf{B}_i} x_i(S) \in \{0, 1\}$，因此总权重从 n 开始并以 $n - |N^-|$结束，这意味着

$$|N^-| \leq (2L + 1) \cdot 80L + 160L < 768L^2 = R.$$

固定整数坐标后，LP($\tilde{x}$)至多有 $|\mathcal{F}| \leq n + m = O(n)$ 个自由变量，且整数约束系数的绝对值至多为 m。右端项的公分母整除 x 的先前公分母乘以 $|\mathcal{F}|$，因为 ω 的分母整除$|\mathcal{F}|$。根据克拉默法则和 Hadamard界，每次迭代中的基行列式至多使分母的位长增加 $O(n \log n)$。由于所有权重均属于 $[0, 1]$，且共有 $O(L)$ 次迭代，步骤 1 的位长和运行时间均为多项式级。

□

引理 3.6。 若 $\Delta \geq 2R$，算法 *3.1* 对每个 $\mathbf{X}$，计算出一个 $v_i(X_i) \geq \sigma$。 $i \in N$。

证明。 根据引理 3.4 和 3.5，步骤 1 在多项式时间内终止，并得到一个整数权重向量x，该向量保留每个前缀界 $\sum_{i \in N} \sum_{S \in \mathcal{B}_i} x_i(S) \cdot |S \cap M[j]| \leq \lambda \cdot j$ ($j \in [m]$)，并使$|N^-| \leq R$ 个代理人未获服务。在步骤 2 中，保留的前缀界确保按截止期限顺序排列的第 k 个请求（假设其截止时间为 j）满足 $k \leq \lambda \cdot j$，因此 $\lceil k/\lambda \rceil \leq j$。由于 $\lambda \leq 1$，这些索引 $\lceil k/\lambda \rceil$严格递增，因此步骤 2 分配的物品各不相同，且满足每个请求。因此，每个 $i \in N \setminus N^-$都会收到一个捆绑 X_i，其价值至少为 σ，并且每个前缀 $M[j]$ ($j \in [m]$) 有

至多 $\lfloor \lambda \cdot j \rfloor$ 件分配物品，使得 $|U \cap M[j]| \geq (1-\lambda) \cdot j$。 U 的价值是这些前缀计数的加权和。对于任意非递增序列 $s_1 \geq \cdots \geq s_\ell \geq s_{\ell+1} = 0$ 以及任意子集$S \subseteq [\ell]$，我们有

$$\sum_{j \in S} s_j = \sum_{j=1}^{\ell} |S \cap [j]| \cdot (s_j - s_{j+1}). \tag{3.1}$$

对于每个 $i \in N^-$，我们取$s_j = v_i(e_j)$ 用于 $j \in [m]$并将（3.1）应用于 U中物品的位置。由于 $s_j - s_{j+1} \geq 0$，前缀界给出 $v_i(U) \geq (1-\lambda) \cdot v_i(M) = \Delta$。

在步骤 3 的每次迭代中，在添加其最后一件物品之前，选定前缀 $B' \subseteq U$ 对所有等待中的代理人的价值均低于 σ，且每件物品的价值至多为 1，因此移除 B' 会使每个代理人的 $v_i(U)$降低不到 $\sigma + 1 < 2$。由于 $|N^-| \leq R$最初且 $\Delta \geq 2R$，在每一步中，每个等待中的代理人在 U 中的价值至少为 $\Delta - 2(R-1) \geq 2 > \sigma$，因此步骤 3 为 N^- 提供价值至少为 σ的物品。最后，将 U 中的剩余物品添加到 X_1 中，不会降低 $v_1(X_1)$，并且步骤 2 和步骤 3 也能在多项式时间内运行。□

3.3 SmallSlack：对偶刻画

下面我们研究小松弛情形 $\Delta < 2R$。在这种情形下，线性规划为算法 3.1 留下的未使用容量太少，无法保证 σ 为每个代理人提供至少 n 个代理人甚至无法通过跨前缀交换节省 $O(\log^2 n)$ 物品束的价值，那么几乎所有代理人都必须依赖同一组大件物品，而剩余位于末端的较小物品所承载的价值非常少。我们通过考察线性规划的对偶来严格刻画这一直觉。对偶为我们提供物品价格，将代理人划分为普通代理人 和 保留代理人（定义 3.7），并确定一个有价值物品的前缀 M_1，其中包含几乎所有普通代理人的价值（引理 3.8）。

在对偶线性规划中，我们为每个代理人约束引入一个变量 $\zeta_i \in \mathbb{R}$，并为每个前缀约束 $\sum_{S \in \mathcal{B}_i} x_i(S) \hat{=} 1$引入一个非负变量 $\hat{\alpha}_j \geq 0$。为便于解释这些数值，我们将每个对偶变量乘以 n，令 $\zeta_i = n \cdot \zeta_i$ 和 $\alpha_j = n \cdot \hat{\alpha}_j \geq 0$。对于每件物品 $e_k \in M$，我们将其价格 定义为 $p(e_k) = \sum_{j=k}^{m} \alpha_j$。注意，价格是非递增的，所有物品价格之和等于 n：

$$p(M) = \sum_{k=1}^{m} p(e_k) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=k}^{m} \alpha_j = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{j} \alpha_j = \sum_{j=1}^{m} j \cdot \alpha_j = n,$$

其中最后一个等式成立，是因为在未缩放对偶中，原变量 λ 的约束为$\sum_{j=1}^{m} j \cdot \hat{\alpha}_j = 1$。此外，对于任意捆绑 $S \subseteq M$，记 $p(S) = \sum_{e \in S} p(e)$，我们有

$$\sum_{j=1}^{m} |S \cap M[j]| \cdot \alpha_j = \sum_{e_k \in S} \sum_{j=k}^{m} \alpha_j = \sum_{e_k \in S} p(e_k) = p(S).$$

因此，原变量 $x_i(S)$ 的缩放对偶约束就是 $\zeta_i \leq p(S)$.

综合这三点，缩放对偶线性规划为

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & \textstyle\sum_{i \in N} \zeta_i \\ \text{subject to} \quad & p(e_1) \geq \cdots \geq p(e_m) \geq 0, \\ & \textstyle\sum_{e \in M} p(e) = n, \\ & \zeta_i \leq p(S) \qquad\qquad \forall i \in N,\ S \in \mathcal{B}_i. \end{aligned}$$

在最优对偶解处，对于每个 $i \in N$，都有 $\zeta_i = \min_{S \in \mathcal{B}_i}\{p(S)\} \geq 0$。另一方面，族 $\mathcal{B}_i$ 包含代理人 i的 MMS 划分 $\mathbf{P}^i$中的所有 n 两两不相交的捆绑。由于这些 n

捆绑划分了 M，它们的价格总和为 $p(M) = n$，因此平均价格为 1。于是，我们有$\zeta_i \le 1$。根据强对偶性，有 $\sum_{i\in N}\zeta_i = n\cdot\lambda$，这意味着

$$\sum_{i\in N}(1-\zeta_i) = n\cdot(1-\lambda) = \Delta.$$

注意到每一项 $1-\zeta_i$ 均为非负数（因为 $\zeta_i \le 1$），且它们的总和为 $\Delta < 2R = O(L^2)$。因此，几乎每个代理人的 $1-\zeta_i$ 都必须非常接近 0（也就是说，ζ_i 非常接近 1）。

定义 3.7。 我们将 N 划分为 普通代理人 N_o 和 保留代理人 N_r，划分方式为

$$N_o = \left\{ i \in N : n\cdot(1-\zeta_i) \le L^4 \right\} \qquad \text{and} \qquad N_r = N \setminus N_o.$$

由于每个代理人 $i \in N_r$ 都满足 $n\cdot(1-\zeta_i) > L^4$，因此有

$$|N_r|\cdot L^4 \le \sum_{i\in N_r} n\cdot(1-\zeta_i) \le \sum_{i\in N} n\cdot(1-\zeta_i) = n\cdot\Delta < 2n\cdot R = 1536n\cdot L^2.$$

将两边同时除以 L^4，得到 $|N_r| \le 1536n/L^2 = O(n/L^2) = o(n)$。

引理 3.8。 如果 $\Delta < 2R$，那么我们可以在多项式时间内计算出一个非空前缀 $M_1 \subseteq M$，使得每个 $i \in N_o$ 都满足 $v_i(e) > 1-\sigma$，对于所有 $e \in M_1$ 以及 $v_i(M \setminus M_1) = O(L^4)$。

证明。固定任意代理人 $i \in N$ 和任意捆绑 $B \in \mathbf{P}^i$。回顾我们在第 3.1 小节中如何从 B 构造缩减 MMS 捆绑：我们取共同顺序中所有满足 $v_i(e) \le 1-\sigma$ 的物品 $e \in B$，并从左到右将它们贪心地划分为连续区段 $B'_1, B'_2, \ldots, B'_t$，其中每个区段的价值至多为 $1-\sigma$，且是极大的。区段总数至多为$1 + \lceil 2/(1-\sigma)\rceil$。现在考察任意一个 $B' \subseteq B$，其中 $B \setminus B'$ 属于 $\mathbf{B}_i$。根据关于 $B \setminus B'$的对偶约束，有 $p(B \setminus B') \ge \zeta_i$，从而得到 $p(B') \le p(B) - \zeta_i$。注意到 $p(B) - \zeta_i \ge 0$，因为整个捆绑 B 也属于 $\mathbf{B}_i$。对 B 内的所有区段求和 $p(B') \le p(B) - \zeta_i$，得到

$$\sum_{e\in B:\, v_i(e)\le 1-\sigma} p(e) \le (1 + \lceil 2/(1-\sigma)\rceil)\cdot(p(B) - \zeta_i)\,.$$

最后，将该不等式对所有 n 物品束 $B \in \mathbf{P}^i$ 求和可得

$$\sum_{e\in M:\, v_i(e)\le 1-\sigma} p(e) \le (1 + \lceil 2/(1-\sigma)\rceil)\cdot n\cdot(1-\zeta_i) \qquad \forall i \in N. \tag{3.2}$$

令 M_2 为满足以下条件的物品 e 所构成的集合：存在一个普通代理人 $i \in N_o$ 使得 $v_i(e) \le 1-\sigma$。令 $M_1 = M \setminus M_2$。由此划分可立即得到两个性质：

- 中的每件物品 M_1 对于每个普通代理人的价值都严格大于 $1-\sigma$。
- 存在一个普通代理人 $i^* \in N_o$，其对 M_2 中的每件物品的价值都至多为 $1-\sigma$。将（3.2）应用于 $i^* \in N_o$，并利用定义3.7 ($n\cdot(1-\zeta_{i^*}) \le L^4$，可得

$$p(M_2) \le (1 + \lceil 2/(1-\sigma)\rceil)\cdot L^4.$$

最后，我们将 M_2 上的价格界转换为价值下界。固定任意一个普通代理人 $i \in N_o$。我们从左到右扫描 M_2，反复切分出价值至少为σ 、且长度最短的剩余前缀，并将其分配给代理人 i；当 M_2 中剩余物品的总价值小于 σ时停止。假设这样产生了 $s+1$ 个区块。前 s 个区块中的每一个都属于候选族 $\mathcal{B}_i$，因此其对偶价格

至少为 $\zeta_i \geq 1 - L^4/n \geq 1/2$。由于这些区块是 M_2的互不相交子集，将它们的价格相加得到 $p(M_2) \geq s/2$。根据我们的构造，每个区块的价值至多为 $1+\sigma \leq 2$。对所有$s+1 \leq 2p(M_2)+1$ 个区块求和得到 $v_i(M_2) \leq (2p(M_2)+1) \cdot 2 = O(L^4)$。特别地，$v_i(M_2) = o(n)$，因此 $v_i(M_1) = n - v_i(M_2) > 0$，这证明了 M_1 非空。最后，我们只需扫描 N_o中所有代理人的物品价值，即可在多项式时间内找到 i^* 和 M_1。 □

我们设定常数 $\kappa = \lceil 1/(1-\sigma) \rceil$。对于普通代理人 $i \in N_o$ 的任意 MMS 捆绑 P_j^i，来自 M_1 的每件物品的价值都严格大于 $1-\sigma$。由于 P_j^i 的总价值为 1，因此对于每个 $i \in N_o$ 和 $j \in [n]$，我们有$|P_j^i \cap M_1| < \kappa$。

总结。 我们总结在 $\Delta < 2R$ 时所建立的性质。我们处理定义在 M 上的归一化 IDO 实例，其中有 $m = O(n)$ 件物品和 MMS 划分 $\{\mathbf{P}^i\}_{i \in N}$，以及上文在第 3.1 节中通过多项式时间计算得到的代理人划分和前缀 M_1：

(1) 代理人 $N = N_o \cup N_r$ 被划分为普通代理人 N_o 和保留代理人 N_r，其中我们有 $|N_r| = O(n/L^2) = o(n)$。

(2) 前缀 $M_1 \subseteq M$ 非空，并且对于每个 $i \in N_o$，$v_i(M_2) = O(L^4)$，其中 $M_2 = M \setminus M_1$。（3）对于常数 $\kappa = \lceil 1/(1-\sigma) \rceil$，对于每个 $i \in N_o$ 和 $j \in [n]$，我们都有 $|P_j^i \cap M_1| < \kappa$。

3.4 SmallSlack：选择捆绑

在本小节及下一小节中，我们利用性质（1）–（3）在多项式时间内计算一个 β-最大最小份额分配（定理 3.13）。首先注意，将性质（3）对任意单个普通代理人的最大最小份额划分中的所有 n 物品束求和，可得 $|M_1| \leq \kappa \cdot n$。在这两个小节中，$\beta \in (0,1)$和 κ 均为固定常数，并且 n 足够大。根据性质（2），我们还可以得到

$$T = \max\left\{1, \left\lceil \max_{i \in N_o}\{v_i(M_2)\} \right\rceil\right\} = O(L^4) = n^{o(1)}.$$

接下来，我们将 M_1 划分为常数个区间，将几乎所有普通代理人分组，并选择 n 整数捆绑。然后，我们在第 3.5节中分配实际物品。

3.4.1 初始区间

我们首先固定一个有理数舍入步长 $d_1 > 0$ on M_1，使得 $(\kappa+1) \cdot d_1 < 1-\beta$ 足够小。对于每个普通代理人 $i \in N_o$ 和每件物品 $e \in M_1$，我们将 $v_i(e)$ 向下舍入至最近的 d_1 倍数。由于普通代理人的最大最小份额捆绑在 M_1 中包含的物品少于 κ 件，对这些物品向下舍入造成的总损失严格小于 $\kappa \cdot d_1$。现在，沿着从左到右的方向扫描M_1，观察一位普通代理人 i 的 d_1 舍入值。由于该实例是 IDO，她的舍入值非递增，且位于$[0,1]$中。每当她的舍入值在 M_1 中两个相邻位置之间下降时，下降幅度至少为 d_1。因此，她在所有 M_1中至多有 $\lfloor 1/d_1 \rfloor$ 个下降位置。我们在每位普通代理人 $i \in N_o$ 的每个下降位置处放置一个标记。所有 $|N_o| \leq n$ 普通代理人合计至多有 $n \cdot \lfloor 1/d_1 \rfloor$ 个标记。我们按照标记在 M_1 上的位置排序，并每隔 $\lceil n/10 \rceil$个标记放置一个切分点。这样至多会放置 $\lfloor 10/d_1 \rfloor$ 个切分点。

标记可能会导致两个切割点之间留有一长段物品（这给我们后续的分析带来了一些困难）。因此，我们以规则的间距添加切割点。具体而言，我们将 M_1 划分为每块包含 $\lceil d_1 \cdot |M_1| \rceil$ 个连续物品的区块，允许最后一个区块较短。在每对相邻区块之间放置一个切割点。由于 $|M_1|/\lceil d_1 \cdot |M_1| \rceil \leq 1/d_1$，我们至多添加 $\lfloor 1/d_1 \rfloor$ 个切割点。这些切割点共同产生至多 $\lfloor 11/d_1 \rfloor + 1$ 个非空的初始区间。

我们称普通代理人 $i \in N_o$ 对某个区间敏感，如果她的 d_1舍入价值在该区间内部严格下降；否则称其对该区间不敏感。由于切割点位于标记位置，任意初始区间内部的标记数都严格少于 $\lceil n/10 \rceil$，因此至多有 $n/10+1$ 个普通代理人对其敏感。直观地说，在代理人 i 不敏感的任何区间上，她的 d_1舍入价值在整个区间内完全平坦（为常数），因此用该区间中的任意物品替换另一件物品，对她的真实价值造成的变化严格小于 d_1。示意见图3.2。

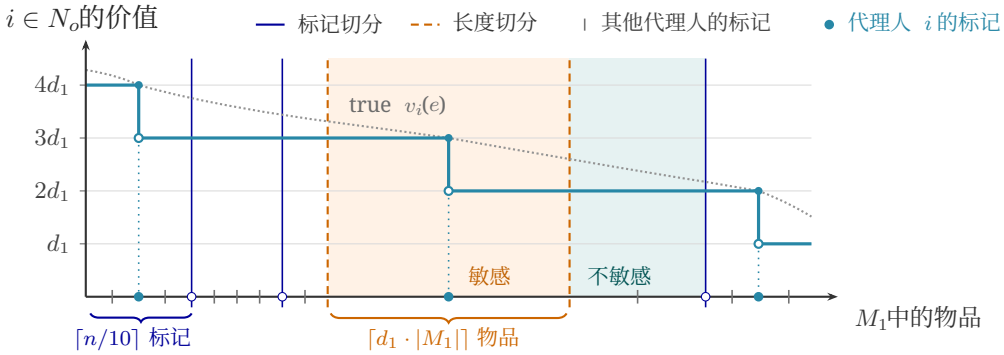

图 3.2：由标记切分和长度切分在 M_1 上形成的初始区间。

3.4.2 精细化区间与对齐组

接下来，我们为 M_2 固定两个较小的正有理数：价值阈值 $\tau > 0$ 和舍入步长 $d_2 > 0$，并将它们选得足够小，使得 $\kappa \cdot d_1 + \tau + d_2/\tau < 1 - \beta$。这是可行的，因为 $(\kappa+1) \cdot d_1 < 1-\beta$。在细化初始区间之前，我们将选择一个整数 $\gamma = n^{o(1)}$，使得 $\sqrt{\gamma} \geq 2L$。其公式见附录 A.2。对于每位普通代理人 $i \in N_o$，我们将她的局部记录 定义为以下舍入后的价值列表：

1. 对于每个初始区间，取其前 2γ 个局部位置上的 d_1 舍入值（如果区间中的物品少于 2γ 个，则取整个区间上的值）。

2. 在 M_2 上，列出代理人 i 认为价值至少为 τ 的所有物品，以及将其价值向下取整为 d_2 的整数倍后的结果。由于该实例是 IDO，这些物品构成了 M_2 的一个前缀。

我们来统计可能存在多少种不同的局部记录。来看局部记录中的任意一个列表：

- 在一个初始区间上，该列表是非递增的，长度至多为 $2\gamma \cdot (1 + \lfloor 1/d_1 \rfloor) = O(\gamma)$，且取值来自 $[0,1]$中 $1 + \lfloor 1/d_1 \rfloor$ 个 d_1 的整数倍。由于列表按从大到小排序，只需说明每个 $1 + \lfloor 1/d_1 \rfloor$ 层级上有多少个物品，就能重建整个列表（及其长度）。每个计数都是介于 0 和 $O(\gamma)$ 之间的整数，因此对于一个初始区间，可能的列表至多有 $(O(\gamma)+1)^{1+\lfloor 1/d_1 \rfloor}$ 个。

- 在 M_2 上，每位普通代理人都有 $v_i(M_2) \leq T$，因此她至多有 T/τ件价值至少为 τ 的物品。因此，她的 M_2列表长度至多为 $T/\tau = O(T)$，且其取值至多来自$1 + \lfloor 1/d_2 \rfloor$ 个 d_2 的倍数。计算每个层级上有多少件物品，可知 M_2 至多有 $(O(T)+1)^{1+\lfloor 1/d_2 \rfloor}$ 种可能的列表。

由于最多有 $\lfloor 11/d_1 \rfloor + 1 = O(1)$ 个初始区间，将所有列表中的这些数量相乘可知，不同的局部记录总数至多为 $(\gamma + T + 2)^{O(1)} = n^{o(1)}$。我们将普通代理人 N_o 划分为局部记录相同的代理人类别，并选取

一个 最大的 类别 $N_a \subseteq N_o$。根据性质（1），共有 $|N_o| = n - o(n)$ 个普通代理人。根据抽屉原理，最大的类别 N_a 的大小至少为 $|N_o|/n^{o(1)} = n^{1-o(1)}$。该性质将在第 3.5.1节的分析中使用。

由于 N_a 中的每个代理人对 M_2都有相同的列表，因此 N_a 中的所有代理人都同意具有相同的前缀$M_{/2} \subseteq M_2$，其中物品的价值至少为 τ；同时也同意相同的剩余物品 $M_{//2} = M_2 \setminus M_2'$，其中物品的价值严格小于 τ。在 N_a中，我们选取在 M_2''上的总价值最小的一个代理人 $a \in N_a$，并将其称为参考代理 a 。直观地说， N_a 中的每个代理人都认为，在每个初始区间的前端以及在 M_2'上， a 与其非常接近；同时，他们赋予 $M_{//2}$的价值至少与 a赋予的价值一样高，因此来自$\mathbf{P}^a$ 的任何捆绑对 N_a 中的每个代理人的价值，都与其对 a的价值几乎相同。

给定初始区间的任意细化 $I_1, \ldots, I_q$以及任意 $\ell \in [q]$，我们将局部位置 $1, 2, 4, \ldots$直到 $|I_\ell|$，连同最后一个位置 $|I_\ell|$，称为 I_ℓ的检查点 。如果一组普通代理人对齐 ，则称其在每个细分区间的每个检查点处的 d_1舍入值都一致。

引理 3.9。 对于任意正整数 $\gamma = n^{o(1)}$，我们可以在多项式时间内，将初始区间细化为 I_1、.....、I_q，留出一个子集 $N_s \subseteq N$，并将 $N \setminus N_s$划分为对齐组 $\{N_g\}$[4]，满足以下性质：

1. 我们有 $q \le \lfloor 12/d_1 \rfloor + 1$。每个 I_ℓ 至多包含 $\lceil d_1 \cdot |M_1| \rceil$ 个物品，并且至多有 $n/10 + 1$ 个普通代理人对其敏感。*2.* 对于每个区间 I_ℓ，要么 N_a 中的所有代理人在 I_ℓ的全部范围内共享一个常数 d_1舍入价值，要么它们在 I_ℓ的前 2γ 个局部位置上，与 a 的最高 d_1舍入价值一致。*3.* N_s 包含 N_a 中的 γ 个成员以及全部 N_r，并满足 $n/L \le |N_s| = o(n)$ 。*4.* 至多有 $G = \left(2 + \lceil \log_2(\kappa \cdot n) \rceil\right)^{q \cdot (1 + \lfloor 1/d_1 \rfloor)} = n^{o(1)}$ 个对齐组 $\{N_g\}$，且每个组都满足 $|N_g| \ge \sqrt{n}$。

–

证明。 我们首先围绕参考代理人 a细化初始区间。逐一考察每个初始区间，并查看代理人 a 在该区间上的 d_1舍入值：

- 情形 *A*：整个初始区间都包含在 a的局部记录中。 于是， N_a 中的每个代理人在整个区间上都与 a 拥有完全相同的 d_1舍入值。我们在 a的 d_1舍入值下降的每个位置处切分这个初始区间。由此得到的每个子区间现在都具有一个由 N_a中所有代理人共享的恒定d_1舍入值。

- 情形 *B*：初始区间长于 $2\gamma \cdot (1 + \lfloor 1/d_1 \rfloor)$。 查看其长度为 $2\gamma \cdot (1 + \lfloor 1/d_1 \rfloor)$的记录前缀。由于 a的 d_1舍入值是非递增的，且最多取$1 + \lfloor 1/d_1 \rfloor$ 个不同值，因此该前缀至多分成 $1 + \lfloor 1/d_1 \rfloor$ 个舍入值相等的平坦段。根据抽屉原理，至少有一个平坦段的长度不小于 2γ。我们在 a 截至该长平坦段起点之前的每个值下降处进行切分，之后不再切分。在长平坦段之前创建的每个子区间对于 N_a中的所有代理人而言都是完全平坦的；而最终的子区间以这个长度至少为 2γ的平坦段开始，因此在该子区间的最初 2γ 个位置上， N_a 中的每个代理人在整个范围内都同意 a的最高 d_1舍入值。

此细化中添加的每个切割点，都位于 a 的 d_1 舍入价值下降的位置。由于 a 的 d_1 舍入值在整个前缀 M_1 上只会递减（从至多 1 降至至少 0），因此代理人 a 在所有 M_1 合起来至多出现 $\lfloor 1/d_1 \rfloor$ 次下降。由此，我们在所有初始区间中总共至多添加 $\lfloor 1/d_1 \rfloor$ 个切割点，从而得到 $q \le \lfloor 11/d_1 \rfloor + 1 + \lfloor 1/d_1 \rfloor \le \lfloor 12/d_1 \rfloor + 1$。每个细分后的

[4]注意 每个 N_g 都是组 g 中代理人的集合，而 $\{N_g\}$ 表示 $N \setminus N_s$ 的整个划分 .

区间都包含在某个初始区间内，因此至多包含 $\lceil d_1 \cdot |M_1| \rceil$ 个物品。由于对每个初始区间敏感的普通代理人至多有 $n/10+1$ 个，其细分区间也同样如此。这就证明了性质 (1) 和 (2)。

接下来，我们介绍将代理人划分为各组的方法。首先，将 γ 个任意代理人与所有保留代理人 N_r放在一起，组成 N_s。如果目前池中的代理人少于 $\lceil n/L \rceil$ 个，就加入任意普通代理人，直到 $|N_s| = \lceil n/L \rceil$。

对于每个剩余的代理人 $i \in N \setminus N_s$，我们通过记录她在每个细分区间 I_ℓ各检查点处的 d_1舍入价值，来创建一个对齐标签。这些价值构成非递增序列，因此可由 $1 + \lfloor 1/d_1 \rfloor$ 种可能的舍入价值层级中每个层级对应的检查点数量确定。由于 $|I_\ell| \le |M_1| \le \kappa \cdot n$，每个区间的检查点数最多为 $1 + \lceil \log_2(\kappa \cdot n) \rceil$。每个计数从零到检查点总数不等，因此每个区间、每个价值层级最多有 $2 + \lceil \log_2(\kappa \cdot n) \rceil$ 种选择。因此，不同的对齐标签最多有 G 个。我们按照相同的对齐标签对$N \setminus N_s$ 中的代理人分组；根据定义，由此得到的每个组都是对齐的。

最后，将所有大小严格小于 $\sqrt{n}$ 的对齐组移入 N_s。这至多会向 N_s中加入$G \cdot \sqrt{n} = o(n)$个代理人。结合 $\bar{\gamma} = n^{o(1)}$、 $|N_r| = O(n/L^2) = o(n)$以及最初为 $\lceil n/L \rceil$进行的填充，最终的留置池满足 $n/L \le |N_s| = o(n)$，且每个剩余的对齐组 N_g 的大小均为 $|N_g| \ge \sqrt{n}$。每一步都能在多项式时间内完成。□

3.4.3 束的选择

若 MMS捆绑 P_j^i满足 $v_i(P_j^i \cap M_2) \le d_1$，则称其对普通代理人 $i \in N_o$符合条件。注意，每个符合条件的束都满足 $v_i(P_j^i \cap M_1) \ge 1 - d_1$；即使在 M_1上经受了小于 $\kappa \cdot d_1$ 的 d_1舍入损失后，其价值仍严格高于 $1-(\kappa+1) \cdot d_1 > \beta$，因此其接收者无需从 M_2中获得任何物品。对于引理 3.9 中的每个对齐组 N_g，任意选取其中一名成员 $a_g \in N_g$ 作为该组的代表，并为a_g的 MMS 划分 $\mathbf{P}^{a_g} = (P_1^{a_g}, \ldots, P_n^{a_g})$中的每个捆绑赋予分数权重

$$\phi_g = \frac{|N_g|}{|N \setminus N_s|} = \frac{|N_g|}{n - |N_s|}.$$

这种加权方式立即带来两个结论：

1. 由于各组 N_g 划分了 $N \setminus N_s$，因此有 $\sum_g \phi_g = 1$。由于每个划分 $\mathbf{P}^{a_g}$ 都恰好使用每个区间 I_ℓ 中的每件物品一次，所以所有组中使用的物品的分数数量总计为 $\sum_g \phi_g \cdot |I_\ell| = |I_\ell|$。

2. 由于 $\mathbf{P}^{a_g}$有 n 个捆绑，分配给组 N_g的捆绑的分数数量总计为 $\phi_g \cdot n = |N_g| \cdot \frac{n}{n-|N_s|} = |N_g| + \frac{|N_s|}{n-|N_s|}$。由于 $|N_s| \ge n/L$和 $|N_g| \ge \sqrt{n}$，每组获得的额外分数捆绑至少为 $\sqrt{n}/L$，超出其成员所需的 $|N_g|$个捆绑。

接下来，我们定义代表 a_g 的一个捆绑如何为任意成员 $i \in N_g$指定物品请求：

- 对于 a_g 不敏感的区间 I_ℓ，每个成员 $i \in N_g$ 在 I_ℓ 上共享相同的常数d_1舍入价值（因为他们的舍入值在第一个和最后一个检查点处相同）。对于代表的捆绑中属于 I_ℓ的每件物品，我们为来自 I_ℓ的物品创建一个请求。I_ℓ 中的任何可用物品都能满足该请求，因此它没有截止时间。

- 在区间 I_ℓ 上，若 a_g 是敏感的，则捆绑 $\mathbf{P}^{a_g}$中位于局部位置 r 的物品会产生一个敏感请求，其截止时间是 r之前或恰好位于 r的最后一个检查点。在该检查点，N_g 的每个成员都同意a_g 的舍入价值。由于舍入值非递增，截止时间之前或恰好位于截止时间的任何物品，都能为组成员带来至少与a_g 分配给位置 r的物品相同的舍入价值。

对于每个对齐组 N_g，我们将其代表a_g的 MMS 划分 $\mathbf{P}^{a_g}$ 中的 n 个捆绑称为 N_g的代表性捆绑 。由于组数至多为 G，代表性捆绑的总数至多为 $n\cdot G$。回顾一下， a 是从 N_a中选出的参考代理。

引理 3.10。 我们可以在多项式时间内选择 $n-k$ 符合条件的代表性捆绑以及 $k\le\sqrt{\gamma}$个互不相同的捆绑，这些捆绑来自 $\mathbf{P}^a$ （称为备用捆绑包），并满足：

1. n 选定的捆绑从每个区间 I_ℓ中恰好请求 $|I_\ell|$ 个物品。*2.* 在每个区间 I_ℓ 以及每个前缀长度 $b\in[|I_\ell|]$下，选定的代表性捆绑所生成的截止时间不晚于 b的敏感请求严格少于 $b/4$ 个。*3.* 每个组 N_g 保留介于 $\phi_g\cdot n-\sqrt{\gamma}$和 $\phi_g\cdot n$ 个代表性捆绑。此外，在每个区间 I_ℓ中，组 N_g 从 I_ℓ中保留的请求数至多为 $\phi_g\cdot|I_\ell|$，并且在所有 q 个区间中，其低于 $\phi_g\cdot|I_\ell|$ 的请求不足量之和至多为 $\kappa\cdot\sqrt{\gamma}$。

我们分两个阶段选择这些捆绑，首先从每个代表性捆绑上的初始分数权重开始 ϕ_g 。在第一阶段，我们丢弃所有不符合条件的捆绑，并使用一个线性规划将剩余的符合条件的捆绑取整为整数选择，同时保持每个组的捆绑总数和区间总数，以及所有检查点处的敏感截止期限负载不变。取一个顶点解后，只剩下少量分数捆绑，我们也将其丢弃。权重为1 的幸存捆绑构成了一个符合条件的代表性捆绑的整数集合，并且已经满足敏感截止期限界，但捆绑总数和各区间物品数量仍略有不足。在第二阶段，我们修复这些不足，使最终选择恰好包含 n个捆绑，并从每个区间 $|I_\ell|$ 恰好请求 I_ℓ个物品。由于参考划分$\mathbf{P}^a$ 中的一个捆绑可以同时从多个区间请求物品，简单地从$\mathbf{P}^a$ 中添加捆绑以填补某个区间的不足，可能会导致另一个区间中的请求过多。因此，我们同时允许从$\mathbf{P}^a$（备用捆绑）中添加捆绑，并丢弃少量其他幸存的代表性捆绑，选择一种组合，以最少的总添加数和删除数达到精确的目标数量。这样的修复总是存在，因为$\mathbf{P}^a$ 本身就是 M_1 的完全划分，划分为 n 个捆绑；并且由于区间数量 q 和每个捆绑中的最大物品数量 κ 都是常数，因此可以在多项式时间内找到该修复。在附录A.2中，我们证明了该修复只需进行少量更改，并且选定的捆绑满足引理3.10的全部三个结论。

3.5 小松弛量：完成分配

现在，我们将 n 引理3.10中的抽象物品束转化为实际分配 .

3.5.1 备用代理与 M_2 的分配

在构造 N_s时，我们留出 γ 个 N_a 成员（回顾一下， $|N_a|=n^{1-o(1)}\gg\gamma$）。由于 $k\le\sqrt{\gamma}\le\gamma$，我们可以将 k 个备用捆绑分别分配给这些代理人中的不同个体。令 N_b 包含这些k 备用代理。代理人集合的示意图见图3.3 。

在任何 I_ℓ 具有 N_a 恒定 d_1舍入价值的细分区间上，备用代理在 I_ℓ 中的请求都没有截止时间。在其余每个区间 I_ℓ上，令 h_ℓ 表示备用请求的数量。我们将这些请求预先分配到局部位置 1、3、.....、$2h_\ell-1$。由于 $h_\ell\le\kappa\cdot k\le\kappa\cdot\sqrt{\gamma}\le\gamma$，其中附录 A.2 中对 γ的选择给出了 $\sqrt{\gamma}\ge\kappa$，因此它们位于前 2γ个位置之中。为了在所有留置代理 $N_s=N_b\cup(N_s\setminus N_b)$之间分配剩余物品 M_2''，现在固定一个满足 $\kappa\cdot d_1+d_2/\tau+\xi+\tau<1-\beta$的较小正有理数 $\xi\in(0,1/4)$。这是可能的，因为我们选择了$\kappa\cdot d_1+\tau+d_2/\tau<1-\beta$。

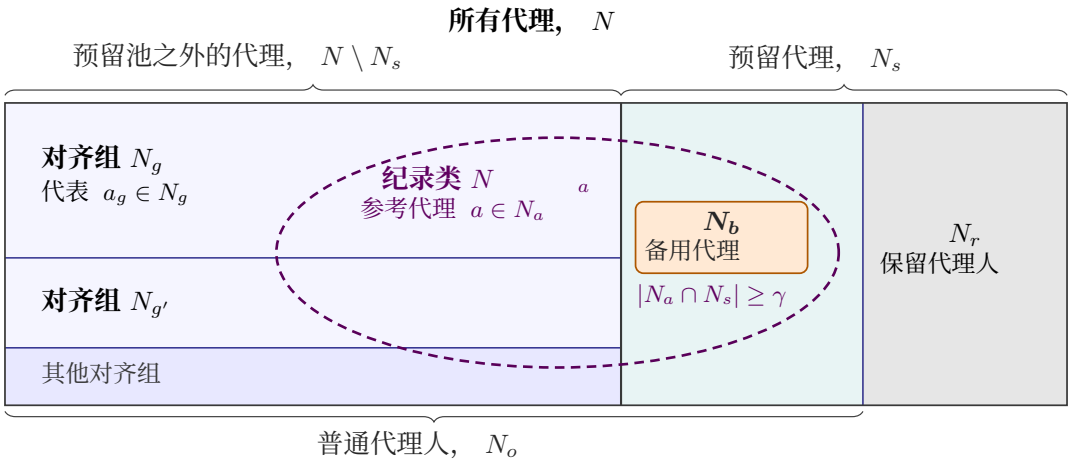

图 3.3：小松弛情形下代理人集合的示意图。

引理 3.11。在多项式时间内，我们可以将 M_2 分配给 N_s，使得 N_b 中的每个备用代理（在 M_1上收到其指定物品后）的总价值至少达到 β，并且每个其他留置代理 $i \in N_s \setminus N_b$要么仅凭 M_2就达到至少 β的价值，要么满足 $v_i(M_1) = n - o(n)$。

证明。从 M_1上规定的分配开始，我们将每个备用代理的备用捆绑中属于 M_2'的物品分配给该备用代理。然后，我们将 $M_{/2}$在 N_s中的所有代理人之间进行划分。

步骤 1：备用代理在 M_1上的价值。根据引理 3.9(2)，每个指定奇数位置都会使每个备用代理获得 a 中 I_ℓ的最高 d_1舍入价值。这至少等于备用捆绑中分配给 i、用于替代它的物品的舍入价值。在平坦区间上，I_ℓ 中的任何物品都具有与 a相同的 d_1舍入价值。由于在 M_1中至多有κ 件物品，向下舍入每件物品损失小于 d_1，因此每个备用代理 $i \in N_b$ 至少获得 $v_a(Q \cap M_1) - \kappa \cdot d_1$。

步骤 2：备用代理在 M_2'上的价值。将确切的物品 $Q \cap M_2'$分配给每个备用代理 $i \in N_b$（与 $Q \in \mathbf{P}^a$配对）。这些集合彼此不相交，因为所有 k 备用捆绑都来自$\mathbf{P}^a$。由于 $M_{/2}$中的每件物品对代理 a的价值至少为 τ，且 $v_a(Q) = 1$，我们有 $|Q \cap M_2'| \leq 1/\tau$。因为$i \in N_a$在 M_2'上与 a's的 d_2舍入价值相同，所以她在 $M_{/2}$上的价值至少为 $v_a(Q \cap M_{/2}) - d_2/\tau$。

步骤 3：分配 $M_{/2}$的分数份额。为每位代理人 $i \in N_s$分配 $s_i \in [0,1]$的分数份额：

- 对于每个与 $Q \in \mathbf{P}^a$配对的备用代理 $i \in N_b$，如果 $v_a(M_{/2}) > 0$，则设 $s_i = (1-\xi) \cdot \frac{v_a(Q \cap M_{/2})}{v_a(M_{/2})}$；否则设为 $s_i = 0$。由于备用捆绑包彼此不相交，$\sum_{i \in N_b} s_i \leq 1 - \xi$。
- 如果 $N_s \setminus N_b$ 非空，则为每个 $i \in N_s \setminus N_b$ 分配相等份额 $s_i = \xi / |N_s \setminus N_b|$。

按公共 IDO 顺序将 M_2''列为局部位置 $1, \ldots, |M''_2|$。对于每个 $i \in N_s$和每个位置$b \in [|M_2''|]$，只要满足 $\lfloor s_i \cdot b \rfloor > \lfloor s_i \cdot (b-1) \rfloor$，就为 i创建一个截止时间为 b的请求。于是，代理人 i有 $\lfloor s_i \cdot b \rfloor$ 个截止时间不晚于 b的请求；对所有 $i \in N_s$ 求和可知，截止时间不晚于 b的请求至多有 $\sum_{i \in N_s} s_i \cdot b \leq b$ 个。按截止时间对所有请求排序，并将第 j个请求分配给 M_2''中的第 j个物品，即可满足所有截止时间要求，从而为代理人 i 分配一个子集 $Z_i \subseteq M_2''$，使得对于每个前缀长度 b，都有 $|Z_i \cap [b]| \geq \lfloor s_i \cdot b \rfloor \geq s_i \cdot b - 1$。令 $u_1 \geq \cdots \geq u_\ell \geq u_{\ell+1} = 0$为代理人 i对 M_2''($\ell = |M''_2|$) 的价值。对 Z_i 应用 (3.1)（若 $\ell = 0$，她不会有任何损失），得到

$$v_i(Z_i) = \sum_{b=1}^{\ell} |Z_i \cap [b]| \cdot (u_b - u_{b+1}) \geq \sum_{b=1}^{\ell} (s_i \cdot b - 1) \cdot (u_b - u_{b+1}) = s_i \cdot v_i(M_2'') - u_1.$$

因此，每位 $i \in N_s$ 获得的价值至少为 $s_i \cdot v_i(M_{\not 2})$，再减去她在 M_2'' 中的最大单件物品价值。

步骤 *4*：检查 N_b 和 $N_s \setminus N_b$ 的最终价值。对于任意备用代理 $i \in N_b$（与 $Q \in \mathbf{P}^a$ 配对），我们的选择 a 给出 $v_i(M_2'') \geq v_a(M_{\not 2})$，且 $M_{\not 2}$ 中的每件物品对代理人 i 的价值至多为 $u_1 < \tau$。利用 $v_a(Q \cap M_{\not 2}) \leq v_a(Q) = 1$，她对 M_2'' 的价值至少为

$$(1-\xi) \cdot v_a(Q \cap M_2'') - \tau \geq v_a(Q \cap M_2'') - \xi - \tau.$$

将她对 M_1、M_2' 和 $M_{\not 2}$ 的价值相加，得到的总价值至少为 $1 - \kappa \cdot d_1 - \frac{d_2}{\tau} - \xi - \tau > \beta$。现在任取一个 $i \in N_s \setminus N_b$，其从 M_2 获得的价值低于 β。她在 M_2'' 中价值最高的物品价值为 $u_1 \leq 1$，因此她的份额 $s_i = \xi / |N_s \setminus N_b|$ 给出

$$\frac{\xi}{|N_s \setminus N_b|} \cdot v_i(M_2'') - 1 \leq v_i(Z_i) < \beta \quad \Longrightarrow \quad v_i(M_2'') \leq \frac{(\beta+1) \cdot |N_s \setminus N_b|}{\xi}.$$

与此同时，$M_{\not 2}$ 至多包含 T/τ 件物品，每件价值至多为 1，因此 $v_i(M_{\not 2}) \leq T/\tau$。由于 $v_i(M) = n$、$|N_s| = o(n)$ 和 $T = n^{o(1)}$，我们得出

$$v_i(M_1) \geq n - \left(\frac{(\beta+1) \cdot |N_s \setminus N_b|}{\xi} + \frac{T}{\tau} \right) = n - o(n).$$

M_2 中任何剩余的未分配物品都会被添加到 N_s 中的代理人处，且不会降低任何人的价值。所有步骤均在多项式时间内运行。 □

3.5.2 M_1 的分配

现在，我们将 n 引理 3.10 中的选定捆绑与引理 M_2 3.11中的分配相结合，从而分配 M_1，使每位代理人的价值至少为 β（引理 3.12），从而完成定理3.13。

引理 3.12。我们可以在多项式时间内分配 M_1，以满足所有备用代理的要求，并使每位其他代理人在 M_1 和 M_2 中的总价值至少达到 β。

证明。我们分两步完成分配：首先用 M_1 中的实际物品填充引理 3.10中的 n 选定捆绑的所有请求，然后分配所得的完整捆绑。

我们首先构造这些捆绑。在每个区间 I_ℓ 中，我们按截止时间对敏感代表请求进行排序。如果第 j 个请求的截止时间为 b，则至少有 j 个请求在 b 之前到期，因此由引理 3.10(2)可得 $j < b/4$。我们将该请求分配到局部位置 $2j$。由于 $2j \leq b$，且所有固定备用位置都是奇数，这满足了其截止时间要求。我们按任意顺序用 I_ℓ 的剩余物品填充无截止时间请求。由于根据引理 3.10(1)，选定的捆绑恰好请求 $|I_\ell|$ 件物品，因此数量相符。我们立即将 N_b 中的每位备用代理人的完整备用捆绑交给她；根据引理 3.11，她在 M_1 和 M_2 中的总价值至少为 β。接下来，考虑组 N_g 中的任一完整代表性捆绑以及任一成员 $i \in N_g$。由于该捆绑符合 a_g 的条件，其在 M_1 中的原始物品对 a_g 的价值至少为 $1 - d_1$，且此类物品少于 κ 件。在每个区间 I_ℓ 中，若 a_g 不敏感，则 i 和 a_g 在 I_ℓ 的全部范围内共享相同的常数 d_1 舍入价值。在每个区间 I_ℓ 中，若 a_g 敏感，则在其检查点截止时间之前或恰好在该时间填充请求，会使 i 至少获得 a_g 分配给原始物品的 d_1 舍入价值。由于向下舍入每件物品的损失小于 d_1，因此每个 $i \in N_g$ 对组 N_g 中的每个完整代表性捆绑的价值至少为 $1 - d_1 - \kappa \cdot d_1 = 1 - (\kappa+1) \cdot d_1 > \beta$。

接下来，我们分配完整的代表性捆绑。根据 引理 3.10(3)，每个组 N_g 至少保留 $\phi_g \cdot n - \sqrt{\gamma}$ 个代表性捆绑。利用 $|N_g| \geq \sqrt{n}$，$|N_s| \geq n/L$ 和 $\gamma = n^{o(1)}$，可得

$$\phi_g \cdot n - |N_g| = \phi_g \cdot |N_s| = \frac{|N_g| \cdot |N_s|}{n - |N_s|} \geq \frac{\sqrt{n}}{L} > \sqrt{\gamma}.$$

因此，每个组 N_g 至少保留 $|N_g|$ 个完整捆绑。所有组总共有 $n-k$个完整的代表性捆绑，对应 $n-|N_s|$ 名组成员，因此总共恰好剩下 $(n-k)-(n-|N_s|)=|N_s\setminus N_b|$ 个额外捆绑。我们按任意顺序依次处理 $N_s\setminus N_b$ 中的代理人。轮到某位代理人时，任选一个当前剩余捆绑数量严格多于成员数量的组 N_g，并把她最看重的一个剩余捆绑分给她。待 $N_s\setminus N_b$ 中的所有代理人都选完后，每个组 N_g 恰好剩下 $|N_g|$ 个捆绑，再将这些捆绑任意分配给该组的 $|N_g|$ 名成员。根据步骤 1，每位组成员获得的价值至少为 β。接下来需要验证：在引理 3.11 中，所有获得的价值低于 β 的 $i\in N_s\setminus N_b$ 中的代理人，在 M_2 上选择的捆绑价值至少为β （在 M_1上）。固定她轮到时选定的组 N_g，令 $U_g\subseteq M_1$ 为 M_1中属于 N_g的捆绑所包含的所有物品组成的集合。对于任意 $j\in[|M_1|]$，前缀 $M[j]$ 由若干完整区间和至多一个额外区间的真前缀构成。根据引理 3.9(1)，该部分区间至多包含 $\lceil d_1\cdot|M_1|\rceil-1\le d_1\cdot|M_1|\le\kappa\cdot d_1\cdot n$ 个物品，因此 $M[j]$ 中的完整区间至少包含 $j-\kappa\cdot d_1\cdot n$ 个物品。根据引理 3.10(3)，所有区间 I_ℓ 中，U_g 低于$\phi_g\cdot|I_\ell|$ 的不足量总计至多为 $\kappa\cdot\sqrt{\gamma}$。因此，仅统计 $M[j]$ 所包含的完整区间中属于 U_g的物品，可得

$$|U_g\cap M[j]|\ge\phi_g\cdot(j-\kappa\cdot d_1\cdot n)-\kappa\cdot\sqrt{\gamma}\qquad\text{for all } j\in[|M_1|].$$

然后我们可 以将此前缀计数下界转化为价值下界（通过望远镜求和）：

$$v_i(U_g)\ge\phi_g\cdot(v_i(M_1)-\kappa\cdot d_1\cdot n)-\kappa\cdot\sqrt{\gamma}.$$

根据引理 3.10(3)，组 N_g 在步骤 2 开始时至多有 $\phi_g\cdot n$ 个捆绑，因此 $N_s\setminus N_b$ 中排在前面的代理人从 N_g 中拿走了至多 $\phi_g\cdot n-|N_g|=\phi_g\cdot|N_s|$ 个捆绑。每个捆绑都包含少于 κ 个来自 M_1 的物品，且对代理人 i 而言每件物品的价值至多为 1，因此排在前面的代理人从 U_g 中移除了至多 $\kappa\cdot\phi_g\cdot|N_s|$ 的价值。将剩余价值除以 $\phi_g\cdot n$ （这是 N_g 中剩余捆绑数量的上界）可知，代理人 i 最喜欢的剩余捆绑的价值至少为

$$\frac{v_i(M_1)}{n}-\kappa\cdot d_1-\frac{\kappa\cdot\sqrt{\gamma}}{\phi_g\cdot n}-\frac{\kappa\cdot|N_s|}{n}\ge1-\kappa\cdot d_1-o(1)>\beta,$$

其中，第一个不等式成立是因为 $v_i(M_1)=n-o(n)$ (根据引理 3.11)，$\phi_g\cdot n\ge|N_g|\ge\sqrt{n}$，$\gamma=n^{o(1)}$ $|N_s|=o\ n$ β 1 2，以及 ()。因此，每个代理人都能达到至少为 的总价值。由于步骤 和 只对请求进行排序并比较完整捆绑，该过程可在多项式时间内运行。 □

定理 3.13. 对于任意固定的有理数 $\beta\in(0,1)$ 以及充分大的 n，我们可以在多项式时间内计算一个β-最大最小份额分配，该分配适用于一个归一化 *IDO* 实例，该实例包含 $m=O(n)$ 件物品，并给定满足性质（*1*）–（*3*）的最大最小份额划分。

证明。应用引理 3.9（其中 γ 按附录 A.2 中的方式选取），得到区间 $I_1,\dots,I_q$、留置池 N_s 和对齐组 $\{N_g\}$。随后，引理 3.10 从 P^a 中选出 $n-k$ 个合格组捆绑和 $k\le\sqrt{\gamma}$ 个备用捆绑，使每个负载为 $<b/4$ 的敏感代理人 $|I_\ell|$ 都有对应捆绑；引理 3.11 将 M_2 分配给 N_s，并预先分配备用代理的位置；引理 3.12 完成 M_1 的分配，使每位代理人获得的价值至少为 β。M_2 中的任何剩余物品均任意分配，并且每个阶段都在多项式时间内完成。 □

3.6 整合所有内容

现在，我们将第 3.1 节的归约和线性规划与第 3.2–3.5 节的大松弛和小松弛算法相结合，以证明定理 3.1。

定理 3.1 的证明。我们固定一个有理数 $\beta \in (1-\varepsilon/2, 1-\varepsilon/4)$。根据引理 3.2，取 $\alpha = 1-\varepsilon$ 和 β，我们可以在多项式时间内构造一个包含 $m = O(n)$ 个物品及 MMS 划分 $\{\mathrm{P}^i\}_{i\in N}$ 的归一化 IDO 实例，使得任何 β-MMS 分配都能在多项式时间内映射回原实例的 $(1-\varepsilon)$-MMS 分配。我们固定一个有理数 $\sigma \in (\beta, 1)$，并在多项式时间内求解第 3.1 节的线性规划，以获得一个基本最优解 (λ, x) 及其最优对偶价格。

当 $\Delta \geq 2R$时，算法 3.1 和引理 3.6 可在多项式时间内计算出一个分配，使每位代理人的价值至少为 $\sigma > \beta$。当 $\Delta < 2R$时，第 3.3 节给出性质（1）–（3），因此我们应用定理 3.13 来计算一个 β-最大最小份额分配。在这两种情况下，将得到的 β-最大最小份额分配映射回原实例后，都能在多项式时间内得到原实例的一个 $(1-\varepsilon)$-最大最小份额分配。 □

人工智能使用声明

我们使用 OpenAI 的 GPT-6.2 协助进行数学分析、语言编辑和 LaTeX 排版。作者审阅并核实了所有数学陈述、证明、计算和引文，并对论文内容承担全部责任。

参考文献

[AAB+23] Georgios Amanatidis, Haris Aziz, Georgios Birmpas, Aris Filos-Ratsikas, Bo Li, Hervé Moulin, Alexandros A. Voudouris 和 Xiaowei Wu。不可分物品的公平分配：最新进展与开放问题。《Artificial Intelligence》，322:103965，2023年。[ABM16] Georgios Amanatidis、Georgios Birmpas 和 Evangelos Markakis。关于最大最小份额分配的真实机制。载于第*25*届国际人工智能联合会议（*IJCAI*）论文集，第31–37页，2016年。[AG24] Hannaneh Akrami 和 Jugal Garg。突破近似最大最小份额的 3/4 界。载于*2024*年 *ACM-SIAM* 离散算法研讨会论文集（*SODA*），第74–91页。SIAM，2024年。[AGST23] Hannaneh Akrami、Jugal Garg、Eklavya Sharma 和 Setareh Taki。MMS 近似的简化与改进。载于第三十二届国际人工智能联合会议（*IJCAI*）论文集，第2485–2493页，2023年。[ALMW22] Haris Aziz、Bo Li、Hervé Moulin 和 Xiaowei Wu。不可分割物品的算法公平分配：综述与新问题。《ACM SIGecom Exchanges》，20(1):24–40，2022年。[ALW24] Haris Aziz、Bo Li 和 Xiaowei Wu。具有序数偏好的家务任务近似且策略无关的最大最小份额分配。《Mathematical Programming》，203(1):319–345，2024年。[AMNS17] Georgios Amanatidis、Evangelos Markakis、Afshin Nikzad 和 Amin Saberi。计算最大最小份额分配的近似算法。《ACM Transactions on Algorithms》，13(4):52:1–52:28，2017年。[ARSW17] Haris Aziz、Gerhard Rauchecker、Guido Schryen 和 Toby Walsh。不可分割劳务最大最小份额公平分配算法。载于第三十一届 *AAAI* 人工智能会议论文集，第335–341页，2017年。

[BK20] Siddharth Barman 和 Sanath Kumar Krishnamurthy。极大极小公平分配的近似算法。《ACM经济学与计算汇刊》，8(1):5:1–5:28，2020年。[BL16] Sylvain Bouveret 和 Michel Lemaître。利用一系列标准刻画不可分物品公平分配中的冲突。《自主智能体与多智能体系统》，30(2):259–290，2016年。[BLL+24] Xiaolin Bu、Zihao Li、Shengxin Liu、Jiaxin Song 和 Biaoshuai Tao。不可分物品公平分配的对数级比较查询复杂度。载于《网络与互联网经济学》（WINE 2024），《计算机科学讲义》第15534卷，第348–365页。施普林格，2024年。[BLL+26]Xiaohui Bei、Zehan Lin、Shengxin Liu、Rong Luan 和 Biaoshuai Tao。可加型负担不存在 PMMS 分配，且无法保证 $4/3$-PMMS。CoRR，abs/2609.10493，2026年。[BS06] Nikhil Bansal 和 Maxim Sviridenko。圣诞老人问题。载于第38届 ACM 计算理论年度研讨会论文集，第31–40页。ACM，2006年。[Bud11] Eric Budish。组合分配问题：从等收入出发的近似竞争均衡。《政治经济学杂志》，119(6):1061–1103，2011年。[CFS17] Vincent Conitzer、Rupert Freeman 和 Nisarg Shah。公平公共决策。载于2017年 ACM经济学与计算会议（EC）论文集，第629–646页。ACM，2017年。[CKM+19] Ioannis Caragiannis、David Kurokawa、Hervé Moulin、Ariel D. Procaccia、Nisarg Shah 和 Junxing Wang。最大纳什福利所体现的不合理公平性。《ACM经济学与计算汇刊》，7(3):12:1–12:32，2019年。[DI26] Max Dupré la Tour 和 Ayumi Igarashi。使用少量价值查询计算 EF1分配。arXiv 预印本，arXiv:2611.22376，2026年。[EG26a] Tomer Ezra 和 Tamar Garbuz。几乎对所有代理人都成立的公平份额分配。CoRR，abs/2609.33234，2026年。[EG26b] Tomer Ezra 和 Tamar Garbuz。最大最小份额分配的改进不可能性界。arXiv 预印本，arXiv:2609.15085，2026年。[Fei25] Uriel Feige。不可分物品公平分配的低通信量协议。载于第26届 ACM经济学与计算会议（EC）论文集，第358–382页。ACM，2025年。[FG26] Uriel Feige 和 Vadim Grinberg。智能体冗余较小的近似MMS分配。arXiv 预印本，arXiv:2611.05360，2026年。[Fol66] Duncan Karl Foley。《资源分配与公共部门》。博士论文，耶鲁大学，1966年。[FST21] Uriel Feige、Ariel Sapir 和 Laliv Tauber。MMS公平分配的紧致负面示例。载于《网络与互联网经济学》（WINE），《计算机科学讲义》第13112卷，第355–372页。施普林格，2021年。

[GHS+18] Mohammad Ghodsi、Mohammad Taghi Hajiaghayi、Masoud Seddighin、Saeed Seddighin 和 Hadi Yami。不可分物品的公平分配：改进与推广。载于2018年ACM经济学与计算会议（EC）论文集，第539–556页。ACM，2018年。[GMT19] Jugal Garg、Peter McGlaughlin 和 Setareh Taki。近似最大最小份额分配。载于第2届算法简洁性研讨会（SOSA），《信息学开放获取丛书》第69卷，第20:1–20:11页，2019年。[GT21] Jugal Garg 和 Setareh Taki。改进的最大最小份额近似算法。《Artificial Intelligence》，300：103547，2021年。[HKSS26] Ehsan Heidari、Alireza Kaviani、Masoud Seddighin 和 AmirMohammad Shahrezaei。加性估值下改进的最大最小份额保证。载于2026年ACM-SIAM离散数学研讨会（SODA）论文集，第2239–2290页。SIAM，2026年。[HL21] Xin Huang 和 Pinyan Lu。近似家务任务最大最小份额分配的算法框架。载于第22届ACM经济学与计算会议（EC）论文集，第630–631页。ACM，2021年。完整版本见 arXiv:1907.04505。[HS87] Dorit S. Hochbaum 和 David B. Shmoys。利用对偶近似算法解决调度问题：理论与实践结果。《Journal of the ACM》，34(1)：144–162，1987年。[HS21] Daniel Halpern 和 Nisarg Shah。部分信息下公平且高效的资源分配。载于第三十届国际人工智能联合会议（IJCAI）论文集，第224–230页。ijcai.org，2021年。[HS23] Xin Huang 和 Erel Segal-Halevi。从家务分配到作业调度的归约。CoRR，abs/2302.04581，2023年。[HZ26] Xin Huang 和 Shengwei Zhou。用于最大最小份额分配的强多项式时间 7/9 近似算法。arXiv预印本 arXiv:2511.13056v3，2026年。[KPW18] David Kurokawa、Ariel D. Procaccia 和 Junxing Wang。足够公平：保证近似最大最小份额。《Journal of the ACM》，65(2)：8:1–8:27，2018年。[LLTZ26] Zehan Lin、Shengxin Liu、Biaoshuai Tao 和 Shengwei Zhou。EF1分配的对数比较查询复杂度。arXiv预印本 arXiv:2611.04753，2026年。[LLTZ27] Zehan Lin、Shengxin Liu、Biaoshuai Tao 和 Shengwei Zhou。不可分割劳务的基于比较的公平分配。载于 SODA，2027年。即将出版。[LMMS04] Richard J. Lipton、Evangelos Markakis、Elchanan Mossel 和 Amin Saberi。关于不可分物品的近似公平分配。载于第5届ACM电子商务会议（EC）论文集，第125–131页。ACM，2004年。[LWZ26] Zehan Lin、Xiaowei Wu 和 Shengwei Zhou。具有次线性处置的家务多世界最优MMS分配。arXiv预印本 arXiv:2611.04884，2026年。

[OPS21] Hoon Oh、Ariel D. Procaccia 和 Warut Suksompong。用少量查询公平分配大量物品。*SIAM*离散数学杂志，35(2)：788–813，2021年。[PR20a] Benjamin Plaut 和 Tim Roughgarden。一般估值下的近似无嫉妒性。*SIAM*离散数学杂志，34(2)：1039–1068，2020年。[PR20b] Benjamin Plaut 和 Tim Roughgarden。离散公平分配的通信复杂度。*SIAM Journal on Computing*，49(1)：206–243，2020年。[PW14] Ariel D. Procaccia 和 Junxing Wang。足够公平：保证近似最大最小份额。载于第*15*届*ACM*经济学与计算会议（*EC*）论文集，第675–692页。ACM，2014年。[Ste48] Hugo Steinhaus。公平分配问题。《计量经济学》，16(1)：101–104，1948年。[Woe97] Gerhard J. Woeginger。最大化最小机器完成时间的多项式时间近似方案。《运筹学通讯》，20(4)：149–154，1997年。

第 3节的缺失分析

A.1 物品的归一化与归约

在本小节中，我们证明引理 3.2，该引理将任意物品实例归约为一个包含 $O(n)$ 个物品且具有显式 MMS 划分的归一化 IDO 实例。我们首先在引理 A.1 （如图 A.1所示）中单独阐述这一压缩步骤：该步骤将 M 合并为至多 $2h$ 个物品，同时构造新的划分，使其对应的捆绑价值与原划分的差异至多为 $2n/h$。

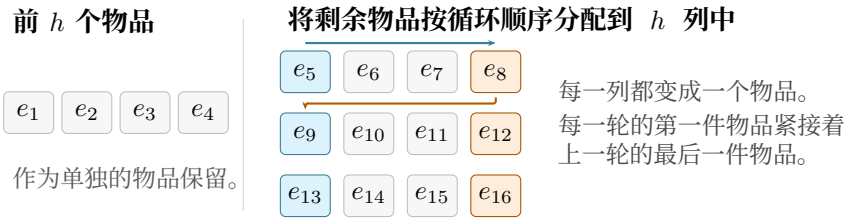

图 A.1：循环压缩，图中展示了 $h = 4$。在每个有序行中，第一列和最后一列按共同顺序交错排列，因此它们的总价值相差至多为 e_{h+1} 的价值。

引理 A.1。给定一个 *IDO* 实例，其中 $v_i(M) \le n$ 对所有 $i \in N$ 都成立，一个 n-划分 $\mathbf{P}^i$，其中 M对每个 $i \in N$ 都成立，以及一个整数 $h \ge n$，我们可以在多项式时间内将 M 合并为至多 $2h$ 件物品，并计算这些物品的 n-划分 $\tilde{\mathbf{P}}^i$，使得 $|v_i(\tilde{P}^i_j) - v_i(P^i_j)| \le 2n/h$ 对所有 $i \in N$ 和 $j \in [n]$ 都成立。

证明。如果 $m \le 2h$，我们将每件物品保留为单元素组，并设置 $\tilde{\mathbf{P}}^i = \mathbf{P}^i$。否则，我们将 e_1、……、e_h 保留为单元素组，并将 $M \setminus M[h]$ 循环分配到 h 列 C_1、……、C_h中，其中 $C_k = \{e_{th+k} : t \ge 1,\ th+k \le m\}$（图 A.1）。每一列 C_k 都变成一个价值为 $v_i(C_k) = \sum_{e \in C_k} v_i(e)$的压缩物品，总计得到 $2h$ 个压缩物品。对于任意 $i \in N$，由于 $v_i(M) \le n$，我们有 $v_i(e_{h+1}) \le n/h$以及 $v_i(C_1) \ge \cdots \ge v_i(C_h)$，从而得到 $v_i(C_h) \le n/h$，因为 $\sum_{k=1}^{h} v_i(C_k) \le n$。此外，根据构造，我们有 $v_i(C_1 \setminus \{e_{h+1}\}) \le v_i(C_h)$，这意味着

$$v_i(C_k) \le v_i(C_1) \le v_i(e_{h+1}) + v_i(C_h) \le 2n/h \qquad \text{for all } k \in [h].$$

对于每个代理人 $i \in N$，我们为每个 $j \in [n]$ 初始化 $\tilde{P}_j^i = P_j^i \cap M[h]$，并跟踪每个捆绑的亏缺 $\delta_j = v_i(P_j^i) - v_i(\tilde{P}_j^i)$。初始时，$\delta_j = v_i(P_j^i \setminus M[h]) \geq 0$，且 $\sum_{j=1}^n \delta_j = v_i(M \setminus M[h]) = \sum_{k=1}^h v_i(C_k)$。我们逐一分配列 C_1、……、C_h，每次将 C_k 加入当前亏缺 δ_j 最大的捆绑 j 中（通过 $v_i(C_k)$ 减少 δ_j）。在每一步之前，$\sum_{j=1}^n \delta_j$ 等于未分配列的总价值，因此非负；所以，被选中的捆绑 j 在接收 C_k 之前具有 $\delta_j \geq 0$，接收后具有 $\delta_j \geq -2n/h$。由于所有亏缺的初始值均非负，每个捆绑都满足 $\delta_j \geq -2n/h$。另一方面，我们证明终止时每个捆绑也满足 $\delta_j \leq 2n/h$。如果某个捆绑 j 最终为 $\delta_j > 2n/h$，那么由于亏缺不会增加，在每一步之前都将有 $\delta_j > 2n/h$ 成立。因此，在每一步中，被选中的捆绑在接收一列之前的亏缺都将高于 $2n/h$，所以接收后其亏缺仍为正。然而，这样一来每个捆绑最终都将具有非负亏缺，而 $\delta_j > 0$，这与 $\sum_{j'=1}^n \delta_{j'} = 0$ 矛盾。因此，对于所有 $j \in [n]$，$|\delta_j| = |v_i(P_j^i) - v_i(\tilde{P}_j^i)| \leq 2n/h$，并且该过程在多项式时间内运行。 □

引理 3.2的证明。我们选取固定的有理参数 $\beta_0 \in (\alpha, (\alpha+\beta)/2)$ 以及 $\varepsilon_1 \in (0, 1)$，使得 $(1-\varepsilon_1) \cdot \beta_0 \geq \alpha$。在接下来的三个步骤中，我们构造约简实例以及每个代理人在约简实例中的最大最小份额划分。

初始归一化。对于每个代理人 $i \in N$，我们使用机器覆盖方案 [Woe97]，根据物品大小 $v_i(e)$ 在 n 台同质机器上计算一个划分 $\mathbf{P}^i = (P_1^i, \ldots, P_n^i) \in \pi_n(M)$，其最小捆绑价值 $v_i^{\min} = \min_{j \in [n]} \{v_i(P_j^i)\}$ 满足 $v_i^{\min} \geq (1-\varepsilon_1) \cdot \mu_i$。当 $v_i^{\min} > 0$ 时，我们应用 Akrami、Garg、Sharma 和 Taki [AGST23] 的逐捆绑缩放，并对每个 $j \in [n]$ 和 $e \in P_j^i$ 设置 $\hat{v}_i(e) = v_i(e)/v_i(P_j^i)$。由于对于每个捆绑 P_j^i 都有 $v_i(P_j^i) \geq v_i^{\min}$，因此得到 $\hat{v}_i(P_j^i) = 1$，以及 $v_i(S) \geq v_i^{\min} \cdot \hat{v}_i(S)$，对所有 $S \subseteq M$ 均成立。当 $v_i^{\min} = 0$ 时，可推出 $\mu_i = 0$，因此我们用 M 的任意划分替换 $\mathbf{P}^i$，将其划分为 n 个非空捆绑（使用 $m \geq n$），并定义 $\hat{v}_i$：将每个捆绑中选定的一个物品赋值为 1，将所有其他物品赋值为 0。所得实例 $\mathbf{I}_1 = (N, M, \hat{\mathbf{v}})$ 是归一化的，并具有最大最小份额划分 $\{\mathbf{P}^i\}_{i \in N}$；对于所有 $i \in N$，$\mathbf{I}_1$ 的每个 β_0-MMS 分配 $\mathbf{X}$ 都满足 $v_i(X_i) \geq v_i^{\min} \cdot \hat{v}_i(X_i) \geq (1-\varepsilon_1) \cdot \beta_0 \cdot \mu_i \geq \alpha \cdot \mu_i$。

压缩、重新归一化与最终 IDO 约简。我们首先对 $\mathbf{I}_1$ 应用引理 2.2：将每位代理人的估值行按非递增顺序排序，并对 $\mathbf{P}^i$ 应用相同的排列，从而保持每个物品束的价值等于 1。我们设 $h = \lceil 2\beta \cdot n/(\beta - \beta_0) \rceil$，使得 $h > 2n$ 以及 $(1 - 2n/h) \cdot \beta \geq \beta_0$。根据引理 A.1，我们得到一个压缩实例，其中至多包含 $2h = O(n)$ 个物品（隐含常数为 $O(1/(\beta - \alpha))$），以及 n-划分 $\{\tilde{\mathbf{P}}^i\}_{i \in N}$，其物品束价值均位于 $[1 - 2n/h, 1 + 2n/h]$ 中。对于每位代理人 $i \in N$ 以及每个物品束 $\tilde{P}_j^i \in \tilde{\mathbf{P}}^i$，我们将 $\tilde{P}_j^i$ 中每个压缩物品的价值除以该物品束的价值（该价值至少为 $1 - 2n/h > 0$）。这就得到一个定义在压缩物品上的归一化实例，并具有 MMS 划分 $\{\tilde{\mathbf{P}}^i\}_{i \in N}$。由于合并物品和重新缩放物品束都可能破坏共同物品顺序，因此该压缩归一化实例不一定是 IDO。于是，我们最后一次应用引理 2.2：将每位代理人的压缩物品按非递增顺序排序，并对 $\tilde{\mathbf{P}}^i$ 应用相同的排列。每个排列都保持物品束价值为 1，从而得到一个归一化 IDO 实例 $\mathbf{I}_2$，其中至多包含 $2h = O(n)$ 个物品，并具有显式的 MMS 划分。

将分配映射回去。 给定任意 β-最大最小份额分配 $\mathcal{I}_2$，引理 2.2 将其映射回压缩后的归一化实例中的一个分配，其中每位代理人的价值至少为 β。$\mathbf{P}^i$ 中的每个捆绑在缩放前的价值至少为 $1 - 2n/h$。因此，每个压缩物品在缩放前对代理人 i 的价值至少是其归一化价值的 $1 - 2n/h$ 倍，将分配给该代理人的物品价值相加，可得其价值在缩放前至少为 $(1 - 2n/h) \cdot \beta \geq \beta_0$ $1 - 2n/h$。随后，每个压缩物品都会展开为其组成物品，且不会改变任何捆绑价值；引理 2.2 将所得分配映射为 β_0-最大最小份额分配 $\mathcal{I}_1$。根据初始归一化保证，

对于原始实例$\mathcal{I}$，此分配是 α-最大最小份额分配。构造和反向映射均可在多项式时间内完成。

□

A.2 引理的证明 3.10

引理 *3.10* 的证明。 我们分两个阶段构造选择：首先，在某个线性规划的顶点处对符合条件的代表性捆绑进行舍入（并舍弃分数捆绑和不符合条件的捆绑），然后使用至多 $\sqrt{\gamma}$ 个来自 $\mathbf{P}^a$的捆绑修复精确的区间计数。在阶段 2 结束时，我们推导出 γ 的精确公式，以便吸收所有舍入误差和修复误差。

阶段 *1*：对符合条件的代表性捆绑进行顶点舍入。 为每个代表 a_g 的每个捆绑 $P_j^{a_g}$ 引入一个变量 $z_{g,j} \in [0,1]$，初始值为 $z_{g,j} = \phi_g$。初始时，每个区间 I_ℓ 中，组 N_g 的捆绑总权重为 $\phi_g \cdot n$，请求总权重为 $\phi_g \cdot |I_\ell|$。所有组的捆绑总权重为 n，而 I_ℓ 中的请求总权重为 $|I_\ell|$。

首先，舍弃所有不符合条件的捆绑（每当 $P_j^{a_g}$ 不符合条件时，令 $z_{g,j} = 0$）。舍弃的权重有多少？由于 $v_{a_g}(M_2) \le T$，且每个不符合条件的捆绑在 M_2 上的价值严格大于 d_1，因此每个代表 a_g 的不符合条件捆绑少于 T/d_1 个。利用 $\sum_g \phi_g = 1$ 对所有组求和，此处舍弃的总权重至多为 $\sum_g \phi_g \cdot (T/d_1) = T/d_1$。

接下来，考虑所有位于剩余符合条件的 物品束上的权重向量 $z \in [0,1]$ 所构成的多面体；这些向量保持以下线性等式不变（丢弃不符合条件的捆绑后，使每个左侧的值仍等于其当前值）：

- 对于每个组 N_g：保持该组的捆绑权重总和（1 个等式），以及每个区间内的请求权重总和（q 个等式）。在最多 G 个组中，这至多产生 $G\cdot(q+1)$个等式。

- 对于每个区间 I_ℓ：在每个二的幂次检查点 $b\prime \in \{1、2、4、8、.....\} \cap [|I_\ell|]$ 以及最后一个位置$b\prime = |I_\ell|$处，保持截至局部位置 b应到期的敏感请求的分数数量总和不变。由于 $|I_\ell| \le m$，每个区间至多增加 $2 + \lceil \log_2 m \rceil$ 个检查点，因此总共至多增加$q \cdot (2 + \lceil \log_2 m \rceil)$个等式。

总之，该多面体由 $0 \le z_{g,j} \le 1$ 以及至多 $G \cdot (q+1) + q \cdot (2 + \lceil \log_2 m \rceil)$ 个线性等式定义。

取该多面体的一个顶点 z^*。 z^* 中有多少个坐标可以是严格分数值的 $(0 < z^*_{g,j} < 1)$？至多与线性等式的数量相同！事实上，如果严格分数值坐标的数量多于线性等式的数量，那么将这些等式限制在分数值坐标上所形成的齐次线性系统就会有一个非零解 v。当 $\eta > 0$ 足够小时，从 z^* 移至 $z^* + \eta v$和 $z^* - \eta v$ 仍然可行，这与 z^* 是一个顶点矛盾。此外，我们可以通过逐个遍历坐标，在多项式时间内计算出一个顶点：在每一步中，在当前可行面上最小化当前坐标（求解一个线性规划），并在转到下一个坐标之前，将该坐标固定为其最小值。

现在我们来检查 z^* 是否在每个区间 I_ℓ 和每个位置 $b \in [|I_\ell|]$ 都满足 $< b/4$ 敏感截止期限界。令 b' 为 I_ℓ 中不晚于 b 的最后一个检查点。由于敏感请求只会在检查点到期，因此 b 处的负载等于 b' 处的负载。来看 b' 处初始（舍入前）的敏感负载：

- 对于原始局部位置为 r、截止时间为 c 的敏感请求，我们有 $r < 2c$。如果 c 是 I_ℓ的最后一个位置，那么 $r = c$。否则，c 是二的幂，而 $r \ge 2c$ 会使 $2c$ 成为不晚于 r的一个后续检查点。因此，不晚于 $b\prime$ 到期的请求来自位置 $r < 2c \le 2b\prime \le 2b$。由此，每个敏感代表元的划分 $\mathbf{P}^{a_g}$ 中，不晚于 $b\prime$到期的敏感请求至多有 $2b$ 个。

- 如果代表 a_g 对 I_ℓ敏感，那么 N_g 中的每个成员也都对 I_ℓ 敏感（因为它们在 I_ℓ的第一个和最后一个检查点处共享两个不同的舍入值）。由于对 I_ℓ敏感的普通代理人至多有 $n/10+1$ 个，因此，所有敏感组中 $\phi_g = |N_g|/(n-|N_s|)$ 的总和至多为 $(n/10+1)/(n-|N_s|)$。

由于丢弃不符合条件的捆绑只会降低 b' 处的负载，而移动到 z^* 处会保持负载不变，因此 z^* 在位置 b 处的敏感负载等于其在 b'处的负载；当 n 足够大时，该负载至多为 $2b\cdot \frac{n/10+1}{n-|N_s|} \le \frac{b}{4}$（因为 $|N_s| = o(n)$）。

现在丢弃 z^* 的所有分数变量（将每个 $z^*_{g,j} \in (0,1)$ 都设为 0）。将不符合条件的权重 ($\le T/d_1$) 和分数变量（至多有 $G\cdot(q+1) + q\cdot(2+\lceil \log_2 m\rceil)$ 个，每个权重为 <1）一并计入后，阶段 1 中丢弃的捆绑总权重至多为

$$J = \frac{T}{d_1} + G\cdot(q+1) + q\cdot(2+\lceil \log_2 m\rceil)\,.$$

所有剩余变量都等于 1，从而得到一组互不相同且符合条件的代表性捆绑，其敏感截止时间负载处处严格小于 $b/4$ 。

阶段 *2*：使用来自 $\mathbf{P}^a$ 的捆绑进行精确库存修复。 对于任意捆绑 P，将其区间计数向量 $(|P\cap I_1|,\dots,|P\cap I_q|) \in \mathbb{Z}^q_{\ge 0}$ 称为其配置。令 $\mathcal{C}$ 为所有长度为 q 、坐标和至多为 κ 的非负整数向量所构成的集合。添加一个值等于 κ减去坐标和的额外坐标后，可得到长度为 $q+1$ 且总和为 κ 的非负整数向量，因此根据隔板法，$|\mathcal{C}| = \binom{q+\kappa}{\kappa} = O(1)$。对于每个配置 $c\in\mathcal{C}$:

- 令 x_c 表示配置 c 中存活的符合条件的代表性捆绑数量（对所有组求和），并且

- 令 h_c 表示配置 c的参考划分$\mathbf{P}^a$ 中的捆绑数量。

构造 $(q+1)\times|\mathcal{C}|$ 矩阵 A，其对应配置 $c\in\mathcal{C}$ 的列向量为 $(1, c_1, \dots, c_q)^T$。第一行统计捆绑数量，第 2 至 $q+1$ 行分别统计 I_1、...、I_q 中物品的数量。由于 $\mathbf{P}^a$是将 M_1 划分为 n 个捆绑的完全划分，$A\cdot h = (n, |I_1|, \dots, |I_q|)^T$。与此同时，我们最初的完整分数集合的总量也为 $A\cdot h$，而阶段 1 丢弃的捆绑权重总量至多为 J （每单位捆绑权重在 M_1中至多对应 κ 个物品）。因此，短缺向量 $b = A\cdot(h-x)$ 的每个坐标均非负，且满足 $\|b\|_1 \le (\kappa+1)\cdot J$。令$H = (\kappa+2)^{q+2} = O(1)$。我们声称，存在一个整数向量 $y\in\mathbb{Z}^{|\mathcal{C}|}_{\ge 0}$，其逐坐标地介于 x 与 h 之间（也就是说，对于每个 $c\in\mathcal{C}$，都有 $\min\{x_c,h_c\} \le y_c \le \max\{x_c,h_c\}$），使得

$$A\cdot y = A\cdot h \qquad \text{and} \qquad \|y-x\|_1 \le H\cdot(\|b\|_1 + |\mathcal{C}| + q + 1)\,.$$

我们通过四个基本步骤证明这一结论:

1. 将差值写成一个非负的零空间向量。对每个 $c\in\mathcal{C}$ 定义一个符号 $s_c\in\{+1,-1\}$，使其与 $h_c - x_c$ 的符号一致（若 $h_c = x_c$，则取 $+1$ ），并令 A_{signed} 为将 A 的第 c 列乘以 s_c 后得到的矩阵。于是，非负向量 $u = (|h-x|, b) \in \mathbb{R}^{|\mathcal{C}|+q+1}_{\ge 0}$ 满足 $[A_{\text{signed}}, -I]\cdot u = A(h-x) - b = 0$。若 $u=0$，我们只需令 $y=x$ 即可。

2. 将 u 分解为基本顶点（卡拉泰奥多里定理）。如果 $u\ne 0$，将 u 除以其坐标和 $\|u\|_1$，即可得到多面体 $\{w\ge 0 : [A_{\text{signed}}, -I]\cdot w = 0,\ \sum_r w_r = 1\}$中的一个点。由于该多面体位于维数为 $|\mathcal{C}|+q$ 的超平面中，卡拉泰奥多里定理表明，$u/\|u\|_1$ 可表示为该多面体至多 $t\le|\mathcal{C}|+q+1$ 个顶点的凸组合 $\sum_{r=1}^{t}\lambda_r v^{(r)}$ 。

3. 使用克拉默法则和 Hadamard界消去分母。任取一个顶点$v^{(r)}$。 $v^{(r)}$ 最多能有多少个正坐标? 至多为 $q+2$: 因为该多面体有 $q+1$ 个零空间等式，外加 1 个和为一等式（总计 $q+2$ 个等式），如果 $v^{(r)}$ 有多于 $q+2$ 个正坐标，我们就可以沿着一个支撑在这些坐标上的非零向量向两个方向稍作移动，同时保持所有 $q+2$ 个等式不变，这与$v^{(r)}$ 是一个顶点相矛盾。完全同理，增广矩阵（ $q+1$ 个零空间行加上全 1 的求和行）中，位于 $v^{(r)}$ 支撑集上的列线性无关，因此我们可以提取一个阶数至多为 $(q+2)\times(q+2)$ 的非奇异方子矩阵，其唯一解给出 $v^{(r)}$的非零项。根据克拉默法则，该矩阵的行列式绝对值 D_r 是 $v^{(r)}$的一个正整数公分母，因此 $w^{(r)}=D_r v^{(r)}$ 是 $[A_{\text{signed}},-I]$零空间中的一个非负整数向量。此外，该子矩阵的每一列在第一行至多有一个绝对值为 1 的元素，在接下来的 q 行中，元素绝对值之和至多为 κ （或一个单独的 -1），且在求和行中有一个元素 1，因此其欧几里得范数至多为 $\kappa+2$。根据 Hadamard不等式，$D_r\le(\kappa+2)^{q+2}=H$。由于 $v^{(r)}$的坐标和为 1，整数向量 $w^{(r)}$ 的坐标和为 $\|w^{(r)}\|_1=D_r\le H$。

4. 移除零残差部分（零和交换）。将 $u/\|u\|_1=\sum_{r=1}^{t}\lambda_r v^{(r)}$ 重新缩放回 u，得到 $u=\sum_{r=1}^{t}\gamma_r w^{(r)}$，其中满足 $\gamma_r\ge 0$。将每个系数拆分为整数部分和小数部分，$\gamma_r=\lfloor\gamma_r\rfloor+$ （$\gamma_r-\lfloor\gamma_r\rfloor$），并令

$$u_{\text{rem}}=\sum_{r=1}^{t}\left(\gamma_r-\lfloor\gamma_r\rfloor\right)w^{(r)}=u-\sum_{r=1}^{t}\lfloor\gamma_r\rfloor\,w^{(r)}.$$

由于 u 和每个 $\lfloor\gamma_r\rfloor w^{(r)}$ 都是整数向量， u_{rem} 是一个非负整数零空间向量；又因为 $\gamma_r-\lfloor\gamma_r\rfloor<1$ 和 $\|w^{(r)}\|_1\le H$，其坐标和至多为 $H\cdot t\le H\cdot(|\mathcal{C}|+q+1)$。现在通过保留 u_{rem} 以及仅那些向下取整项 $\lfloor\gamma_r\rfloor w^{(r)}$来构造 u'，其中对应向量 $w^{(r)}$ 在其最后 $q+1$ 个坐标中至少有一个非零项（去掉最后 $q+1$ 个坐标全为零的每一项——这些都是零和交换）。于是:

- 显然， $0\le w\le u$ 逐坐标地成立；去掉最后 $q+1$ 个坐标为零的项后，最后 $q+1$ 个坐标保持不变，因此 w 的最后 $q+1$ 个坐标仍等于b。

- 每个保留的取整项 r 对 u最后 $q+1$ 个坐标之和的贡献至少为 $\lfloor\gamma_r\rfloor$，该和为 $\|b\|_1$。由于所有项均非负，$\sum_{r\text{ 保留}}\lfloor\gamma_r\rfloor\le\|b\|_1$。
- 因此， w 的坐标和至多为

$$\|u'\|_1\le\|u_{\text{rem}}\|_1+H\cdot\sum_{r\text{ kept}}\lfloor\gamma_r\rfloor\le H\cdot\left(\|b\|_1+|\mathcal{C}|+q+1\right).$$

最后，将原始符号 s_c 恢复到 u' 的前 $|\mathcal{C}|$ 个坐标上，并将其加到 x 上，得到y。由于 $0\le u'\le u$， y 是一个整数向量，逐坐标地介于 x 和 h之间，满足$A(y-x)=b$（因此 $A\cdot y=A\cdot h$），并且满足 $\|y-x\|_1\le\|u'\|_1\le H\cdot(\|b\|_1+|\mathcal{C}|+q+1)$，故命题得证。

要在多项式时间内找到 y，我们无需构造上述分解：因为$|\mathcal{C}|=O(1)$ 是一个常数，并且每个坐标 y_c都是 $\{0,1,\dots,n\}$ 中的整数，所以我们只需遍历所有至多为 $(n+1)^{|\mathcal{C}|}$、介于 x 和 h 之间且满足 $A\cdot y=A\cdot h$ 的整数向量 y，并选取使 $\|y-x\|_1$ 最小的一个。

现在我们执行修复向量 y:

- 对于每个配置 c（满足 $y_c < x_c$），再丢弃 $x_c - y_c$ 个配置为 c 的符合条件的代表捆绑（从持有它们的任意组中丢弃）。
- 对于每个满足 $y_c > x_c$ 的配置 c，从 $\mathbf{P}^a$ 中选择 $y_c - x_c$ 个配置为 c 且彼此不同的备用捆绑包。$\mathbf{P}^a$ 中有足够的物品束，因为 $y_c \le h_c$。

令 $k = \sum_{c:\ y_c > x_c} (y_c - x_c)$ 表示所选备用捆绑包的总数。由于 $A \cdot y = A \cdot h$，我们的 $n - k$ 剩余符合条件的代表捆绑与 k 个备用捆绑的总数为 n，并且恰好匹配每个区间库存 $|I_\ell|$。

最后，我们调整尺度 γ，使其同时涵盖阶段 1 和阶段 2。记 $q_{\max} = \lfloor 12/d_1 \rfloor + 1$（因此 $q \le q_{\max}$）、$G_{\max} = (2 + \lceil \log_2(\kappa n) \rceil)^{q_{\max}(1+\lfloor 1/d_1 \rfloor)}$（因此 $G \le G_{\max}$）、$J_{\max} = T/d_1 + G_{\max} \cdot (q_{\max} + 1) + q_{\max} \cdot (2 + \lceil \log_2 m \rceil)$（因此 $J \le J_{\max}$），以及 $H_{\max} = (\kappa + 2)^{q_{\max}+2}$（因此 $H \le H_{\max}$）。注意，这些上界中的每一个都只依赖于 d_1、κ、T、m、n，并且可以在运行引理 3.9 之前于多项式时间内计算出来。令

$$\sqrt{\gamma} = \left\lceil 2L + J_{\max} + H_{\max} \cdot \left((\kappa + 1) \cdot J_{\max} + \binom{q_{\max} + \kappa}{\kappa} + q_{\max} + 1 \right) \right\rceil$$

给出 $\gamma = n^{o(1)}$ 并保证

$$J + \|y - x\|_1 \le J + H \cdot ((\kappa + 1) \cdot J + |\mathcal{C}| + q + 1) \le \sqrt{\gamma}.$$

特别地，$k \le \|y - x\|_1 \le \sqrt{\gamma}$。在阶段 1 中，移动到顶点保留了每个组的符合条件的束数量和区间请求计数；其他每一步仅丢弃代表权重。因此，每个组 N_g 总共至多损失 $\sqrt{\gamma}$ 个捆绑（保持在 $\phi_g \cdot n - \sqrt{\gamma}$ 和 $\phi_g \cdot n$ 之间），在每个 I_ℓ 中至多保留 $\phi_g \cdot |I_\ell|$ 个请求，并且跨所有区间的请求不足量总计至多为 $\kappa \cdot \sqrt{\gamma}$（因为每个被丢弃的捆绑在 M_1 中携带的物品少于 κ 个）。在阶段 2 中丢弃捆绑只会减少敏感请求，因此，$< b/4$ 界限在各处仍然成立。 □

B 使用捆绑包比较的实现

第 3 节中的算法将代理人的物品价值作为输入。在比较查询模型 [BLL+24] 中，每个代理人都需要在两个物品捆绑包之间进行选择。她的回答仅揭示她更偏好哪个捆绑包，因此，归一化步骤中使用的数值无法获得。在该模型中，$O(n^4 \log m)$ 次捆绑比较足以计算出一个 1/2-最大最小份额分配。

在本节中，我们将为定理 $(1 - \varepsilon)$ 获得 3.1 的 $\varepsilon \in (0,1)$-MMS 保证，其中 n 为充分大的数，并使用多项式数量的如下形式的捆绑比较。

定义 B.1。给定代理人 $i \in N$ 和两个物品束 X、$Y \subseteq M$，查询 $\mathrm{Comp}_i(X, Y)$ 会根据 v_i 返回 X 和 Y 中价值较大的物品束；对于每次查询，平局均任意打破。

为了在该模型中应用第 3 节的算法，我们为每个代理人 i 构造一个辅助可加估值 w_i。我们要求，在 w_i 下满足近似 MMS 目标的任何捆绑，也能使代理人 i 在其真实估值下获得所需的保证 w_i。得到这些辅助估值后，我们可以在其上运行算法，而无需进一步进行比较查询。具体而言，我们分两步使用物品束比较。首先，我们将物品划分为 $O(n^2/\varepsilon)$ 个组，同时保留每个代理人的大部分 MMS（引理 B.2）。随后，每个辅助估值都可以通过为每个组指定一个价值来表示。接下来，我们比较组的并集，以构造具有所需保证的辅助估值（引理 B.3）。最后，我们将定理 3.1 应用于这些估值，并将每个分配到的组展开为其组成物品。

B.1 原始物品分组

在构造辅助估值之前，我们先将物品划分为组。这样，对于每个代理人，我们只需为每个组指定一个价值，并且可以通过对这些组的并集进行一次查询来比较两个组的集合。由于每个组中的物品必须一起分配，分组可能会降低代理人的 MMS。固定一个正整数 k。沿用 Lin、Liu、Tao 和 Zhou [LLTZ27], 的压缩方法 [，我们通过确保每个非单元素组对每个代理人 i的价值至多为 μ_i/k 来控制这种损失 i。

若 $m \leq 4kn$，我们就将每件物品分别作为一组。否则，我们为所有代理人固定物品的任意顺序，并改编 Lin、Liu、Tao 和 Zhou [LLTZ26]的递归划分过程。对于每位代理人 i，我们从 M 作为一个单一区间开始。每一步，我们选取价值最高的非单元素区间 I，并在一个加权中位数处将其切分。该物品满足：在 I 中，严格位于它左侧的物品和严格位于它右侧的物品，各自的总价值至多为 $v_i(I)/2$。为找到这样的物品，我们使用他们的二分搜索，将 I 的前缀与其互补后缀进行比较，并进行 $O(\log |I|)$ 次比较。若出现并列，前缀和后缀的价值均为$v_i(I)/2$，因此任一结果都有效。我们将中位数物品保留为一个单元素组，并将两侧各自的非空部分作为独立区间处理。对于每位代理人，在完成 $4kn$次切分后，或其所有区间均为单元素时，我们停止。我们汇总所有代理人的切分点，形成对 M的一个划分。

引理 B.2. 对于任意正整数 k，分组过程将 M 划分为至多$\min\{m, 8kn^2+1\}$组，并使用 $O(k^2n^3+kn^2 \log m)$次物品束比较。将每组视为一个物品时，每位代理人 i 的最大最小份额至少为 $(1-1/k)\mu_i$。

证明。我们首先界定构造这些组所需的组数和比较次数。若 $m \leq 4kn$，则我们将每件物品单独作为一组，这样既能保留每位代理人的最大最小份额，也无需进行比较。假设 $m > 4kn$。对于每位代理人，我们至多进行 $4kn$ 次切分，每次最多引入两个切分点。按照 Lin、Liu、Tao 和 Zhou 的引理 B.2 的证明 [LLTZ26], ，我们汇总所有代理人的切分点来计算组数。不同切分点至多有 $8kn^2$ 个，因此它们将 M 划分为至多 $8kn^2+1$ 组。由于每组均非空，组数也至多为 m。对于单个代理人，在任何一步中区间数至多为 $8kn+1$。因此，选取价值最高的非单元素区间需要 $O(kn)$次比较，而根据同一论文中的引理 B.1，求出其加权中位数还需要 $O(\log m)$次比较。对 n 位代理人中的每一位至多进行 $4kn$ 次切分，总共需要 $O(k^2n^3 + kn^2 \log m)$次比较。

现在我们来界定最大最小份额的损失。固定一个代理人 i。由于公共划分包含她的所有切分点，每个非单元素组都位于她剩余的某个非单元素区间内。如果不再有这样的区间，所有组都是单元素组，她的最大最小份额就不会改变。否则，令 x 为她剩余非单元素区间中的最大价值。我们的第一步是证明 $x \leq \mu_i/k$。为此，我们构造一个 n划分，将 M 划分为若干份，使得每个捆绑对代理人 i的价值至少为 kx 。由于仍有一个非单元素区间，过程为代理人 i完成了所有 $4kn$ 次切分。在每一步中，它都会切分价值最高的非单元素区间。加权中位数两侧的每个区间，其价值至多为被切分区间价值的一半，因此非单元素区间中的最大价值从未增加。由此可知，每个被选中进行切分的区间价值至少为 x。

考虑由这些 $4kn$ 区间构成的二叉树。一个区间的子节点是其侧边区间中随后被分割的那些区间。我们利用这棵树来寻找不相交的物品集合，每个集合的价值至少为 $x/2$。对于每个叶节点，取其整个区间，该区间的价值至少为 x。对于恰好有一个子节点 J的每个区间 I，取 $I \setminus J$。根据加权中位数的选择，$v_i(J) \leq v_i(I)/2$，因此 $v_i(I \setminus J) \geq v_i(I)/2 \geq x/2$。以这种方式得到的集合彼此不相交，因为不同分支中的区间互不相交，并且在只有一个子节点的节点处取出的集合排除了该子节点的整个区间。

要形成所需的划分，只需有 $2kn$ 个这样的集合。在二叉树中，有两个子节点的节点数比叶节点数少一个。因此，至少有 $2kn$ 个 $4kn$ 节点至多有一个子节点，而每个这样的节点都会产生上述不相交集合中的一个。将 $2k$ 个这样的集合放入每个 n个捆绑中，并任意分配剩余物品。每个捆绑对代理人 i的价值至少为 $2k \cdot (x/2) = kx$。因此， $\mu_i \geq kx$，并且每个非单元素组对她的价值至多为 $x \leq \mu_i/k$ 。

接下来要证明，将这些组保持在一起，代理人 i的最大最小份额最多会降低 μ_i/k。固定她的一个 MMS 划分，并将每个单元素组保留在原来的捆绑中。与引理A.1的证明类似，逐一将非单元素组分配给当前价值相对于原始价值差距最大的捆绑。由于每个重新分配的组的价值至多为 μ_i/k，同样的论证表明，每个捆绑相对于其原始价值最多损失 μ_i/k 。每个原始捆绑的价值都至少为 μ_i，因此，所得划分的最小捆绑价值至少为$(1-1/k)\mu_i$。

□

B.2 辅助估值的构造

接下来，我们为引理 B.2 中的各组，为每位代理人构造一个辅助可加估值。我们先描述如何对由 M 个 m 物品组成的任意集合进行构造。将其应用于各组时，每个组都视为一个物品，而 μ_i 表示代理人 i在分组实例上的最大最小份额。固定$\eta \in (0, 1/16)$，令 $\mu(w)$表示非负加性估值 w下的最大最小份额。若每个满足 $w(S) \geq (1-\eta)\mu(w)$的捆绑 S 都满足 $v_i(S) \geq (1-8\eta)\mu_i$，则称$w$ 对代理人 i 是 η-忠实的。因此，以准确度 η 将定理 3.1 应用于 η-忠实的辅助估值，即可使每位代理人在其真实估值下获得所需保证。

我们为每个代理人分别构造辅助估值。固定一个代理人 i。从对每个物品 e 都有$w(e) = 0$ 开始，我们经过一系列轮次更新 w 。在每一轮中，我们首先使用 Woeginger 的机器覆盖方案 [Woe97]估计$\mu(w)$。令所得划分中的最小捆绑价值为 p ，于是 $(1-\eta)\mu(w) \leq p \leq \mu(w)$。这一步只使用已知的价值$w(e)$。如果在 w下具有正价值的物品少于 n 个，则取 $p = 0$，因为 $\mu(w) = 0$。我们使用 p来选择两个物品束。首先，在所有满足 $w(S) \geq p - 3\eta$的物品束 S中，我们选择真实价值最小的物品束 B。正如我们将在下文展示的，这一搜索包含每个满足 $(1-\eta)$-最大最小份额目标且位于 w下的物品束。因此， $v_i(B)$是每个此类物品束真实价值的下界。更新 w之前，我们记录下这一对 (w, B)。为指导更新，我们在所有满足 $w(S) \leq p + 3\eta$ 的物品束 S 中，选择真实价值最大的物品束 A 。我们将在下文证明 $v_i(A) \geq \mu_i$。如果 $v_i(B) < (1-8\eta)\mu_i$，则 $v_i(A) - v_i(B) > 8\eta\mu_i$，而搜索阈值给出 $w(A) - w(B) \leq 6\eta$。这促使我们进行如下更新，并在每一轮中执行该更新。令 $D = \lceil m/\eta \rceil$。对于每个 $e \in A \setminus B$，我们将 $w(e)$增加 $1/D$；对于每个 $e \in B \setminus A$，将其减少 $1/D$，并将更新后的值保持在 $[0, 1]$中。如果所得总和超过 $2n$，则从每个坐标中减去 $1/D$ ，并将负值替换为零。

我们通过对整数分数 $Dw(e)$执行背包动态规划来实现这两种搜索，每次处理一件物品。对于 A，我们舍弃满足 $w(S) > p + 3\eta$ 的物品束 S，并在每个剩余的可达分数上保留真实价值最高的物品束。处理完所有物品后，我们从这些物品束中选出价值最高的一个。对于 B，我们将所有对应于 $w(S) \geq p - 3\eta$的分数合并为一个状态，并在每个状态保留真实价值最低的物品束。所有物品处理完毕后，合并状态中的物品束给出 B。每次在两个候选项之间进行选择都需要一次物品束比较。根据可加性，将同一件尚未处理的物品加到两者上，不会改变它们在 v_i下的顺序。经过 $T = 1 + \lfloor m \min\{m, 2n\}/\eta^2 \rfloor$ 轮后，我们比较记录的物品束 B，选出真实价值最高的一个，并返回与其一同记录的估值。下文将证明，至少有一个记录的物品束对代理人 i而言价值不低于$(1-8\eta)\mu_i$。因此，该过程返回的估值对 i是 η-忠实的。

引理 B.3. 对于任意固定的 $\eta \in (0,\ 1/16)$，该过程能在$\mathrm{poly}(n,\ m)$ 时间内，为每个代理人 $i \in N$ 计算出一个 η-忠实的非负加性估值 w_i，总共使用 $O(nm^3 \min\{m,\ n\}/\eta^3)$ 次物品束比较。

证明。固定一位代理人 i。我们首先使用估计值 p，将 A 和 B 的选择与代理人 i的最大最小份额联系起来。辅助物品价值初始为零，并始终处于$\{0, 1/D, \ldots, 1\}$之中。每一轮中，一个物品的价值最多增加 $1/D$。如果总和超过 $2n$，我们就从每个物品的价值中减去 $1/D$，并将负值替换为零。经过此修正后，每个物品的价值都不超过本轮开始时的值。因此，每轮开始时都有 $w(M) \le 2n$，故 $\mu(w) \le w(M)/n \le 2$。将此界与$(1-\eta)\mu(w) \le p \le \mu(w)$结合，可得 $\mu(w) - 2\eta \le p \le \mu(w)$。现在固定一个关于 v_i的最大最小份额划分。根据 $\mu(w)$的定义，该划分中有一个物品束在 w下的价值至多为$\mu(w) \le p + 2\eta$。此物品束在搜索 A 时是可行的，且其真实价值至少为 μ_i，因此$v_i(A) \ge \mu_i$。对于 B，每个满足 $w(S) \ge (1-\eta)\mu(w)$的物品束 S，都有 $w(S) \ge \mu(w) - 2\eta \ge p - 2\eta$，因此在搜索 B时是可行的。由于 B 在所有可行物品束中真实价值最小，因此 $v_i(S) \ge v_i(B)$。于是，任何一轮中记录的、满足 $v_i(B) \ge (1-8\eta)\mu_i$ 的估值，对代理人 i而言都是η-忠实的。

为证明这样的轮次存在，我们将 w 与固定的加性估值 w^* 进行比较。如果 $\mu_i = 0$，则每一轮都满足所需的界。假设 $\mu_i > 0$，并对每件物品 e 定义 $w^*(e) = \min\{1,\ v_i(e)/\mu_i\}$。在 v_i 下价值至少为 μ_i 的每个物品束，在 w^* 下价值至少为 1。我们还有 $w^*(M) \le 2n-1$。为说明这一点，假设 $w^*(M) > 2n-1$。依次构造 $n-1$ 个物品束，逐件向每个物品束添加物品，直到其在 w^* 下的价值首次超过 1。由于每件物品的价值至多为 1，这些物品束的价值都至多为 2。剩余物品构成最后一个价值也严格大于 1 的物品束。由于对每个物品束 S 都有 $v_i(S) \ge \mu_i w^*(S)$，那么所有 n 个物品束在 v_i 下的价值都会严格大于 μ_i，这与最大最小份额的定义矛盾。

现在说明，每个满足 $v_i(B) < (1-8\eta)\mu_i$ 的轮次都会使平方距离 $\|w - w^*\|_2^2$ 减小。在这样的轮次中，$w^*(A) \ge 1$ 以及 $w^*(B) \le v_i(B)/\mu_i < 1 - 8\eta$，而搜索阈值给出$w(A) - w(B) \le 6\eta$。因此，$w^*(A) - w^*(B)$ 比 $w(A) - w(B)$ 大超过 2η。在将坐标限制为 $[0,1]$, 之前，此更新会在 A 上加上 $1/D \setminus B$，并在 B 上减去 $1/D \setminus A$。展开平方距离，并利用至多有 m 个坐标发生变化这一事实，可得减少量至少为

$$\frac{2}{D}\left[(w^*(A) - w^*(B)) - (w(A) - w(B))\right] - \frac{m}{D^2} \ge \frac{4\eta}{D} - \frac{m}{D^2} \ge \frac{\eta^2}{m},$$

其中，最后一个不等式使用了 $m/\eta \le D \le 2m/\eta$。其余调整会保持这一界限。将每个坐标限制为 $[0,1]$ 不会增加其与 $w^*(e)$ 的距离。如果所得总和超过 $2n$，则它超过 $w^*(M)$ 一个以上。然后从每个坐标中减去 $1/D$，会使平方距离至少减少 $2/D - m/D^2 > 0$；将负坐标替换为零则不会增加平方距离。

还需证明 T 轮次就足够。初始时，$\|w - w^*\|_2^2 = \sum_{e \in M} w^*(e)^2 \le \min\{m, 2n\}$。如果每一轮都有 $v_i(B) < (1-8\eta)\mu_i$，那么经过 T 轮次后的总下降量将超过初始平方距离。因此，至少有一个记录的物品束 B 满足 $v_i(B) \ge (1-8\eta)\mu_i$。该过程选择真实价值最大的记录的物品束，因此，与其一同记录的估值对于代理人 i而言是 η-忠实的。最后，由于 $p \le 2$，每次背包搜索都有 $O(D)$个可能的得分，并使用 $O(mD) = O(m^2/\eta)$次比较。对于每个代理人，该过程运行 $O(m\min\{m,n\}/\eta^2)$轮次，并且至多再使用 $T-1$ 次比较来选择一个记录的物品束。对所有代理人而言，这给出$O(nm^3 \min\{m,n\}/\eta^3)$次捆绑比较。对于固定的 η，轮次的数量和每轮所需的时间都是 n 和 m的多项式。□

最后，我们将第 3 节中的算法应用于各组的辅助估值，并将其保证转移到原始物品上。

定理 B.4。 对于任意固定的 $\varepsilon \in (0,1)$ 以及所有充分大的 n，在完整估值下，可以在多项式时间内计算出一个 $(1-\varepsilon)$- 最大最小份额分配，将 m 件物品进行分配；使用 $O(n^2 \log m/\varepsilon + n^8/\varepsilon^6)$ 次捆绑比较时，则可以在 $\mathrm{poly}(n, m)$ 时间内完成。

证明。完整估值的结论由定理 3.1 得出。对于比较次数的结论，令 $k = \lceil 8/\varepsilon \rceil$，并选择 $\eta \in (\varepsilon/64, \varepsilon/32)$。根据引理 B.2，我们可以使用 $O(n^3/\varepsilon^2 + n^2 \log m/\varepsilon)$ 次物品束比较，将 M 划分为 $m' \leq$个组，其中组数为 $\min\{m, 8kn^2+1\}$。令 μ_i' 表示将每组视为一个物品时代理人 i的最大最小份额。于是，对于每个 $i \in N$，都有 $\mu_i' \geq (1-1/k)\mu_i$。接下来，我们应用引理 B.3，为这些 m' 组构造辅助估值 w_i，使其对每个代理人 i都是 η-忠实的。每次对组的物品束进行比较，都相当于对相应原始物品并集进行一次查询。由于 $m' = O(n^2/\varepsilon)$ 且 $\eta = \Theta(\varepsilon)$，这一步需要 $O(n(m')^3 \min\{m', n\}/\eta^3) = O(n^8/\varepsilon^6)$ 次物品束比较。现在，我们以准确度 η将定理 3.1 应用于 $(w_1, \ldots, w_n)$。每个代理人 i都会得到一束组 Y_i，满足 $w_i(Y_i) \geq (1-\eta)\mu(w_i)$。令 X_i 为 Y_i中各组的并集。根据 η-忠实性以及关于μ_i'的界，我们有

$$v_i(X_i) \geq (1-8\eta)\mu_i' \geq (1-8\eta)(1-1/k)\mu_i \geq (1-\varepsilon)\mu_i \qquad \text{for every } i \in N,$$

最后一个不等式由 $8\eta + 1/k \leq \varepsilon$ 得出。我们注意到，只有分组和辅助估值的构造需要进行比较查询。因此，该算法使用$O(n^2 \log m/\varepsilon + n^8/\varepsilon^6)$ 次捆绑比较，并且对于固定的 ε，可在多项式时间内运行。 □

C 不可分割 chores 的扩展

本节将我们针对不可分割劳务的多项式时间最大最小份额近似方案扩展到完整成本和捆绑比较这两种情形。对于劳务，每个代理人 $i \in N$ 都有一个非负加性成本函数 c_i：$2^M \to \mathbb{R}_{\geq 0}$。我们将她的最大最小份额定义为 $\mu_i = \min_{\mathbf{P} \in \pi_n(M)} \max_{j \in [n]} \{c_i(P_j)\}$。若分配 $\mathbf{X}$ 满足 $c_i(X_i) \leq (1+\varepsilon)\mu_i$ 对每个 $i \in N$ 都成立，则称其为 $(1+\varepsilon)$-最大最小份额分配。

在附录 C.1中，我们给出了一个从家务到物品的等基数归约。具体而言，我们构造一个物品实例，并针对每个代理人将其划分为大小共同的物品束。然后，我们将定理 3.1 应用于该实例，并将所得分配转换为原始家务的一个 $(1+\varepsilon)$-MMS 分配。在附录C.2中，我们使用捆绑比较来实现该归约。

定理 C.1。 对于任意固定的 $\varepsilon \in (0、1)$ 以及所有充分大的 n，在显式成本下，可以在多项式时间内计算家务的一个 $(1+\varepsilon)$-*MMS* 分配；使用$O(n^2 \log m/\varepsilon + n^8/\varepsilon^6)$ 次捆绑比较时，则可在 $\mathrm{poly}(n, m)$ 时间内完成。

C.1 使用完整成本进行 AllocatingChores

当成本以显式形式给出时，我们使用定理 3.1 中针对物品的算法，将代理人的个体划分转化为单个家务分配。固定 $\delta \in (0, 1/8)$。假设对于每个代理人i，给定了一个划分 $\mathbf{P}^i = (P_1^i, \ldots, P_n^i)$，其中对于每个 $j \in [n]$都有 $c_i(P_j^i) \leq 1$。我们的目标是找到一个分配 $\mathbf{X}$，使得对于每个 $i \in N$都有 $c_i(X_i) \leq 1 + 3\delta$。

为构造物品实例，我们修改每个划分 $\mathbf{P}^i$，使所有物品束的大小都相同 K，同时仅略微增加其成本。然后，我们将每件物品的价值设为 2 减去其成本，从而将成本转换为物品价值。代理人 i 修改后划分中的最小捆绑价值，为她在所构造实例中的最大最小份额提供了一个下界。这个下界足够大，因此物品算法必须至少给每位代理人 K 件物品。物品总数恰好为 Kn 件，因此每位代理人恰好获得 K。因此，她所得物品束的成本等于 $2K$ 减去其物品价值，由此得到所需的成本界 $1 + 3\delta$。

引理 C.2. 我们可以在多项式时间内，为每位代理人分配 $i \in N$ 一个含有 $c_i(X_i) \leq 1 + 3\delta$ 的物品束 X_i。

证明。我们首先对家务应用 IDO 归约 [HL21]，得到一个包含有序物品$e_1, \ldots, e_m$的实例。对于每位代理人 i，我们对她的成本排序，使得 $c_i(e_1) \geq \cdots \geq c_i(e_m)$，并对她的划分 $\mathbf{P}^i$应用相同的排列。由于 $\mathbf{P}^i$ 中的每个 n 物品束的成本至多为 1，她的总成本至多为 n。我们应用引理 A.1，其中 $h = \lceil 2n/\delta \rceil$，从而得到至多 $2h$ 个压缩物品，并为每位代理人得到一个划分，其中每个物品束的成本至多为 $1 + 2n/h \leq 1 + \delta$。令 $d_i(e)$表示代理人 i对压缩物品 e的成本。

接下来，我们证明每个物品束中的压缩物品数量有上界，同时使其成本最多增加 δ。设 $L_0 = \lceil 4/\delta \rceil + 2$, $K_0 = \lceil (1+\delta)L_0/\delta \rceil$, 且 $K = K_0 + L_0$。我们分别修改每位代理人的划分。在压缩物品超过 K_0 个的每个物品束中，我们保留成本最高的 K_0 个，其余的先放在一边。每个放在一边的压缩物品成本至多为 $(1+\delta)/K_0$，因为该物品束中保留的K_0 个物品的成本都至少与其相同。我们将放在一边的压缩物品循环分配给 n 个物品束。每个物品束最多接收其中的 $\lceil 2h/n \rceil \leq L_0$ 个，总成本至多为 δ。因此，现在每个物品束至多包含 K 个压缩物品，且成本至多为 $1 + 2\delta$。

随后，我们加入零成本的虚拟物品，直到物品总数恰好为 Kn，其中包括压缩物品和虚拟物品。在每个代理人的划分中，我们分配虚拟物品，使每个捆绑恰好包含 K 个物品。我们将可加商品估值定义为 $v_i(e) = 2 - d_i(e)$，其中$d_i(e) = 0$ 表示虚拟物品的估值。这些估值均为非负数，因为每个压缩物品的成本至多为$1 + 2\delta < 2$，而每个虚拟物品的成本为零。利用虚拟物品和互补价值来确保捆绑大小相等，这一做法也出现在两两极小极大份额的家务物品到商品的归约中 [BLL+26，引理 1]。代理人 i的划分中的每个捆绑价值至少为 $2K - 1 - 2\delta$，因此她在 v_i 下的最大最小份额至少为 $2K - 1 - 2\delta$。

现在，我们以准确度3.1 应用定理 $\delta/(2K - 1 - 2\delta)$。当 n足够大时，每个代理人 i都会获得一个满足 Y_i 的捆绑

$$v_i(Y_i) \geq \left(1 - \frac{\delta}{2K - 1 - 2\delta}\right)(2K - 1 - 2\delta) = 2K - 1 - 3\delta > 2(K - 1).$$

每个压缩物品的价值至多为 2，而每个虚拟物品的价值恰好为 2。因此，每位代理人至少获得 K 个物品。由于总共有恰好 Kn个物品，每位代理人恰好获得 K。由此可得 $d_i(Y_i) = 2K - v_i(Y_i) \leq 1 + 3\delta$。

移除虚拟物品并展开压缩物品后，可得到一个具有相同成本的有序物品分配 $\mathbf{X}'$。为了获得原始家务的分配 $\mathbf{X}$，我们按 e_j for $j = m, \ldots, 1$ 的顺序处理有序物品。当 $e_j \in X'_i$ 时，代理人 i 会拿取剩余家务中成本最低的一项。此时只分配了 $m - j$项家务，因此她成本最低的 $m - j + 1$ 项家务中至少还有一项剩余。因此，她拿取的家务成本至多为 $c_i(e_j)$。对 $e_j \in X'_i$ 求和可得，对于每个 $i \in N$，都有 $c_i(X_i) \leq \sum_{e \in X'_i} c_i(e) \leq 1 + 3\delta$。最后，我们指出，所有步骤都可在多项式时间内完成。 □

定理 *C.1* 在显式成本下的证明。选择 $\delta \in (0, 1/8)$ 使得 $(1 + 3\delta)(1 + \delta) \leq 1 + \varepsilon$。如果某个代理人对每项家务的成本都为零，那么将所有家务分配给她，就能使每位代理人的成本都为零。因此，我们可以假设 $\mu_i > 0$ 对每个 $i \in N$。

对于每个代理人 i，我们将家务视为在 n 台同质机器上处理时间为 $c_i(e)$的作业。将作业分配给机器等价于将家务划分为 n 个物品束，因此最优完工时间为 μ_i。Hochbaum 和 Shmoys [HS87] 的近似方案给出了一个划分 $\mathbf{P}^i$，其最大捆绑成本 $c_i^{\max} = \max_{j \in [n]}\{c_i(P_j^i)\}$ 满足 $c_i^{\max} \leq (1 + \delta)\mu_i$。将代理人 i 的成本除以 $c_i^{\max}$后，她的划分中的每个物品束对她而言的成本至多为 1。引理 C.2 随后给出了一个分配 $\mathbf{X}$，使得每个代理人的缩放成本至多为 $1 + 3\delta$。恢复原始成本后，我们得到

$$c_i(X_i) \leq (1 + 3\delta)c_i^{\max} \leq (1 + 3\delta)(1 + \delta)\mu_i \leq (1 + \varepsilon)\mu_i \qquad \text{for every } i \in N. \qquad \square$$

C.2 使用捆绑包比较分配家务

给定一个代理人 $i \in N$和两个家务物品束 X、$Y \subseteq M$，查询 Comp$_i(X, Y)$ 会根据 c_i 返回成本较小的物品束；对于每次查询，平局均任意打破。对于固定的 n 和 $\varepsilon > 0$，Lin、Liu、Tao 和 Zhou [LLTZ27] 通过 $O(\log m)$ 次比较，获得了一个 $(13/11 + \varepsilon)$-最大最小份额分配。为了获得附录 C.1 中的 $(1 + \varepsilon)$-最大最小份额保证，我们遵循附录 B，使用比较对家务进行分组，并为每个代理人构造一个辅助加性成本函数。

我们设定 $k = \lceil 8/\varepsilon \rceil$ 并选择 $\eta \in (\varepsilon/64, \varepsilon/32)$ 如附录 B. 然后，我们使用引理 B.2中的过程对家务进行分组。对于每位代理人，我们反复选取成本最高的非单元素区间，并根据她的成本在加权中位数处将其拆分。令 μ'_i 表示代理人 i将每组视为一项家务时的最大最小份额。

在这些组上，我们针对每位代理人 i分别调整引理 B.3 中的构造。在每一轮中，令 $\mu(w)$ 表示当前辅助成本 w下的杂务 MMS。我们采用 Hochbaum 和 Shmoys [HS87] 的调度方案，寻找一个划分，使其最大捆绑成本 p 满足$\mu(w) \le p \le (1 + \eta)\mu(w)$。与第 B.2 节中一样，接着我们通过针对离散化辅助成本的背包动态规划，使用 p 选出两个捆绑：一个是在满足 $w(A) \le p + 3\eta$的条件下真实成本最高的捆绑 A，以及一个是在满足 $w(B) \ge p - 3\eta$的条件下真实成本最低的捆绑 B。如下文所示，每个满足目标条件 $w(S) \le (1 + \eta)\mu(w)$ 的捆绑 S，其真实成本至多为 $c_i(A)$；而B 满足 $c_i(B) \le \mu'_i$，并用于指导对 w的更新。因此，我们在按照引理 B.3 更新 w 之前，记录 (w, A)。将各组作为物品经过规定轮数后，我们返回与成本最低的 A一同记录的成本函数 w_i。

定理 C.1 比较结论的证明。我们先界定分组导致的最大最小份额增幅。固定一个代理人 i。对于任意非单元素组 G，将引理 B.2 证明中使用二叉树的论证应用于 c_i，可得 $2kn$ 个两两不相交的家务集合，每个集合的成本至少为 $c_i(G)/2$。因此，$c_i(G) \le c_i(M)/(kn) \le \mu_i/k$。现在固定代理人 i 的一个 MMS 划分。接着，[LLTZ27，引理 4.5] 中的重新分配论证给出 $\mu'_i \le (1 + 1/k)\mu_i$。

接下来，我们说明两次搜索在每一轮中能保证什么。辅助成本之和至多为 $2n$，并且在 w下，每个组的成本至多为 1。如果我们每次将一个组分配给当前辅助成本最低的捆绑，那么每次分配前，被选中的捆绑成本至多为 2，分配后至多为 3。因此，$\mu(w) \le 3$。由此可知，每个满足 S 且$w(S) \le (1 + \eta)\mu(w)$ 的捆绑都满足 $w(S) \le p + 3\eta$。由于 A 在这些搜索候选项中具有最高的真实成本，因此 $c_i(S) \le c_i(A)$。对于 B，考虑在 c_i下对这些组进行的一个 MMS 划分。根据 $\mu(w)$ 的定义，该划分中有一个捆绑的辅助成本至少为 $\mu(w) \ge p - 3\eta$。这个捆绑在对 B 的搜索中是可行的，且其真实成本至多为 μ'_i，因此 $c_i(B) \le \mu'_i$。

还需证明，某一轮会记录一个满足 A with $c_i(A) \le (1 + 8\eta)\mu'_i$ 的捆绑。如果 $\mu'_i = 0$，则对代理人 i 而言，每个组的成本均为零，因此该界在每一轮都成立。否则，对每个组 G，令 $w^*(G) = c_i(G)/\mu'_i$。每个坐标都属于 $[0, 1]$, , 且它们的总和至多为 n。在满足$c_i(A) > (1 + 8\eta)\mu'_i$ 的任一轮中，由 $c_i(B)$ 的界可得 $w^*(A) - w^*(B) > 8\eta$，而搜索阈值给出$w(A) - w(B) \le 6\eta$。因此，引理 B.3 的证明中的平方距离论证表明，某一轮满足 $c_i(A) \le (1 + 8\eta)\mu'_i$。记录的成本最低的 A 也满足此界。

最后，我们将附录 C.1 中的算法应用于准确度为 η的辅助成本。对于足够大的 n，每个代理人 i 都会收到一组组的捆绑 Y_i，满足 $w_i(Y_i) \le (1 + \eta)\mu(w_i)$。令 X_i为 Y_i中的各组的并集。根据 w_i 的选择以及 μ'_i的界，我们得到

$$c_i(X_i) \le (1 + 8\eta)\mu'_i \le (1 + 8\eta)(1 + 1/k)\mu_i \le (1 + \varepsilon)\mu_i \qquad \text{for every } i \in N,$$

其中，最后一个不等式由 $8\eta \le \varepsilon/4$、$1/k \le \varepsilon/8$ 和 $\varepsilon < 1$ 得出。只有分组和辅助成本的构造需要进行物品束比较。这两个步骤具有相同的查询

界限与附录 B 中的相同，因此算法使用 $O(n^2 \log m/\varepsilon + n^8/\varepsilon^6)$ 次物品束比较，并在固定 ε下以多项式时间运行。 □

D 对准确度的依赖

在本节中，我们首先根据目标准确度界定定理 3.1 所需的代理人数上限。然后利用这个上限，推导定理 B.4和 C.1中物品和家务的速率。压缩物品后，我们用 $\varepsilon' = 1 - \beta$ 表示目标损失，并令 $\sigma = 1 - \varepsilon'/2$。我们要求 $L \geq C \cdot (\varepsilon')^{-8} \cdot \log L$，其中 C 是充分大的绝对常数，且 n充分大。特别地，$(\varepsilon')^{-1} \leq L^{1/8}$。

我们选择归一化和压缩中的损失，使得 ε' 是原始目标损失的一个常数比例。压缩后，我们有 $O(n/\varepsilon')$ 个物品，因此，对于充分大的 $m \leq n^2$， n。于是，当 $\Delta \geq 2R$时，我们可以应用引理 3.6。对于 $\Delta < 2R$，我们有 $\kappa = \lceil 2/\varepsilon' \rceil$。由于对于充分大的 $L^4 \leq n/2$， n，每个普通代理人都有 $\zeta_i \geq 1/2$。引理 3.8 的证明进而给出

$$p(M_2) \leq \left(1 + \lceil 4/\varepsilon' \rceil\right) \cdot L^4 \qquad \text{and} \qquad v_i(M_2) \leq 4p(M_2) + \sigma \qquad \forall i \in N_o.$$

因此，当 n 足够大时， $T = O(L^4/\varepsilon') < n$，所以 M_1 非空。由于 $\Delta < 1536L^2$，我们还有 $|N_r| \leq 1536n/L^2 \leq n/(4L)$。

对于定理 3.13，我们采用小节 3.4 中的参数定义，并选择

$$d_1 = \frac{\varepsilon'}{4\,(\kappa + 1)}, \qquad \xi = \tau = \frac{\varepsilon'}{8}, \qquad d_2 = \frac{\varepsilon'}{8\,(\kappa + 1/\tau)}.$$

这些选择给出 $(\kappa + 1) \cdot d_1 = \varepsilon'/4$ 和 $\kappa \cdot d_1 + \xi + \tau + d_2/\tau \leq 5\varepsilon'/8$，这正是普通代理人和备用代理所需的结果。我们有 $d_1 = \Theta((\varepsilon')^2)$、 $d_2 = \Theta((\varepsilon')^2)$ 和 $q_{\max} = O((\varepsilon')^{-2})$。

记录计数。我们使用 $\bar{F} = \binom{q_{\max}+\kappa}{\kappa} \leq 2^{q_{\max}+\kappa}$，因此 $\log_2 \bar{F} = O((\varepsilon')^{-2})$。将 $(\varepsilon')^{-1} \leq L^{1/8}$ 代入 $G_{\max}$ 和 $H_{\max}$ 的定义，可得 $\log_2 G_{\max} = O((\varepsilon')^{-4} \cdot \log\ L)$ 和 $\log_2 H_{\max} = O((\varepsilon')^{-2} \cdot \log\ L)$。我们还有 $T/d_1 = O(L^4/(\varepsilon')^3)$ 和 $\log_2 m \leq 2L$。将这些界代入附录 A.2 中关于 γ 的公式，得到 $\log_2 \gamma = O((\varepsilon')^{-4} \cdot \log L)$。在每条局部记录中，我们根据每个层级的计数，恢复初始区间内舍入价值的非递增列表。每个区间至多存储 $1 + \lfloor 1/d_1 \rfloor$ 个计数，每个计数至多为 $2\gamma \cdot (1 + \lfloor 1/d_1 \rfloor)$。在这些初始区间中，我们存储$O((\varepsilon')^{-4})$ 个计数，每个计数使用 $O((\varepsilon')^{-4} \cdot \log L)$ 比特。对于 M_2 的记录部分，我们存储 $O(1/d_2)$ 个计数，每个计数至多为 $T/\tau = O(L^4/(\varepsilon')^2)$。这些计数可以恢复记录部分的长度及其价值的非递增列表。它们总共使用 $O((\varepsilon')^{-2} \cdot \log L)$ 比特。因此，局部记录数量的对数为 $O((\varepsilon')^{-8} \cdot \log L)$。根据 C 的选择，我们可以将 G、 γ 的以二为底的对数以及局部记录的数量都界定为 $L/8$。因此， $|N_a| \geq (n - |N_r|)/2^{L/8} \geq \gamma$。当 n 足够大时，我们还有 $\gamma \leq n/(4L)$ 和 $G \cdot \sqrt{n} \leq n/(4L)$。构造 N_s 时， N_a 的初始γ 个成员以及所有 N_r 的数量至多为 $n/(2L)$。我们将规模增至 $\lceil n/L \rceil$，然后从小组中移入至多 $G \cdot \sqrt{n}$ 个代理人。因此， $n/L \leq |N_s| \leq 2n/L$。

由于 $\sqrt{\gamma} \leq 2^{L/16} < \sqrt{n}/L$，每个组中的舍入损失都小于其初始超额。根据引理 3.11 的证明，仍低于 $i \in N_s \setminus N_b$ 的每个代理人，在 β 上 M_2 都满足

$$n - v_i(M_1) \leq \frac{(\beta + 1) \cdot |N_s \setminus N_b|}{\xi} + \frac{T}{\tau} = O\left(\frac{n}{\varepsilon' \cdot L} + \frac{L^4}{(\varepsilon')^2}\right).$$

利用 $(\varepsilon')^{-1} \leq L^{1/8}$，当 n 足够大时，我们将其界定为 $\varepsilon' \cdot n/4$。在引理 3.12 中对代理人 i 最喜欢的剩余捆绑的价值进行界定时，我们从部分 $\kappa \cdot d_1 < \varepsilon'/4$ 中至多损失

in区间。对于剩余的两个误差项，我们有 $\phi_g \cdot n \geq \sqrt{n}$ ，以及

$$\frac{\kappa \cdot \sqrt{\gamma}}{\sqrt{n}} + \frac{2\kappa}{L} = O\left(\frac{2^{L/16}}{\varepsilon' \cdot \sqrt{n}} + \frac{1}{\varepsilon' \cdot L}\right) \leq \frac{\varepsilon'}{4}.$$

因此，剩余物品束中最好的一个赋予代理人 i 的价值至少为 $1 - 3\varepsilon'/4 > \beta$。

对物品和家务的推论。对于物品，定理 B.4 证明中的归约使我们能够在完整估值和物品束比较两种情况下取 $\varepsilon' = \Theta(\varepsilon)$。因此，当绝对常数 C 足够大时， $L \geq C\varepsilon^{-8} \log L$ 就足以保证 $(1-\varepsilon)$-最大最小份额保证。对于家务，等基数归约决定了物品算法所需达到的准确度。在定理 C.1 的完整成本证明中，我们可以取 $\delta = \Theta(\varepsilon)$。于是，引理 C.2 中共同的物品束大小为 $K = \Theta(\delta^{-2})$，因此该归约将定理 3.1 应用于准确度为 $\delta/(2K - 1 - 2\delta) = \Theta(\varepsilon^3)$ 的情形。在物品束比较下，我们以准确度 $\eta = \Theta(\varepsilon)$ 运行完整成本算法，因此所需的物品准确度仍为 $\Theta(\varepsilon^3)$。将此准确度代入物品的界可知，在必要时增大 C 后，$L \geq C\varepsilon^{-24} \log L$ 就足以在两种模型下保证 $(1+\varepsilon)$-最大最小份额保证。由于 $L = \lceil \log_2 n \rceil$，我们可以令 ε 为一个足够大的常数乘以：物品情形下的 $(\log L/L)^{1/8}$，以及家务情形下的 $(\log L/L)^{1/24}$ 。因此，我们得到

$$1 - \alpha_n^* = O\left(\left(\frac{\log\log n}{\log n}\right)^{1/8}\right) \qquad \text{and} \qquad \rho_n^* - 1 = O\left(\left(\frac{\log\log n}{\log n}\right)^{1/24}\right).$$

两个定理中的多项式运行时间均适用于每个固定的 ε。