arXiv:2611.33058v1 [math.CA] 24 Nov 2026

A_1 加权变指数勒贝格空间上极大函数的有界性刻画

FRANCISCO GONÇALVES、TUOMAS OIKARI 和 TROY ROBERTS

Abstract. 我们刻画了满足 $1 < p_- \le p_+ < \infty$ 的指数下，Hardy–Littlewood 极大算子 M 在加权变指数勒贝格空间上的有界性。我们证明，M 在 $L^{p(\cdot)}_w$ 上有界，当且仅当数对 $(p(\cdot)\ w)$ 满足变指数 Muckenhoupt 条件，并且存在 $h \in L^1$ 使得 $w^{-1}h^{1/p(\cdot)}$ 和 $wh^{1/p'(\cdot)}$ 属于 A_1。即使在无权情形下，这一刻画也是全新的。为证明充分性，我们结合稀疏支配与局部模平均估计；该估计的误差项在稀疏族上可求和至 $\|h\|_{L^1}$。反过来，假设 M 有界，我们利用同步的 Rubio de Francia 算法构造 h。为说明这一新刻画的意义，我们证明，在无权情形下由 Diening 定理刻画 M 有界性的强 Muckenhoupt 条件，在加权情形下并不充分。作为应用，我们简要证明并推广了已知的充分条件。

1. Introduction and main results

Hardy-Littlewood 极大算子 [HL30] 定义于 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$如下

$$Mf(x) := \sup_{Q \ni x} \langle |f| \rangle_Q,$$

其中 $\langle f \rangle_Q := \frac{1}{|Q|} \int_Q f(x)\mathrm{d}x$，上确界取遍所有包含点 x 的立方体。对于$p \in (1,\infty)$ 和权 $w > 0$，加权勒贝格空间 $L^p_w = L^p_w(\mathbb{R}^n)$ 由范数$\|f\|_{L^p_w(\mathbb{R}^n)} := \|fw\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ 有限的函数组成。现在我们主要省略记号中的环境空间 $\mathbb{R}^n$。Muckenhoupt [Muc72] 证明了，M 在 L^p_w 上有界，当且仅当权 w 满足 A_p 条件，

$$[w]_{A_p} := \sup_Q |Q|^{-1} \|\mathbf{1}_Q\|_{L^p_w} \|\mathbf{1}_Q\|_{L^{p'}_{w^{-1}}} < \infty,$$

其中 $p' = p/(p-1)$。此外，该 A_p Muckenhoupt 条件刻画了所有 Calderˊon–Zygmund 算子在 L^p_w上的有界性，正如 Coifman 和 Fefferman [CF74]所证明的那样。

变指数勒贝格空间 $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 允许通过变指数 $p(\cdot)$ 改变整个定义域中的可积性：$\mathbb{R}^n \to (1,\infty)$。在全文中，我们假设 $p(\cdot)$ 是可测的，并且

$$1 < p_- := \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\mathbb{R}^n} p(x) \le \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^n} p(x) =: p_+ < \infty. \tag{1.1}$$

空间 $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 由具有有限 Luxemburg 范数的可测函数组成

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} := \inf\left\{\lambda > 0 : \int_{\mathbb{R}^n} \left|\frac{f(x)}{\lambda}\right|^{p(x)} \mathrm{d}x \le 1\right\}.$$

除了其固有的重要性之外，变指数勒贝格空间还因其在具有非标准增长的偏微分方程和变分问题中的应用而受到研究 [AM02, DR03, FZ03, HHLN10, LLP10, Min06, R˚uˇz00]。该领域的主要问题之一，是准确刻画何时M：$L^{p(\cdot)} \to L^{p(\cdot)}$ 有界地映射。

经典 Muckenhoupt 条件的变指数类比是 $A_{p(\cdot)}$ 条件。我们称 $1 \in A_{p(\cdot)}$ if

$$[1]_{A_{p(\cdot)}} := \sup_Q |Q|^{-1} \|\mathbf{1}_Q\|_{L^{p(\cdot)}} \|\mathbf{1}_Q\|_{L^{p'(\cdot)}} < \infty,$$

2020 *Mathematics Subject Classification.* 42B25,46E30。*Key words and phrases.* 变指数勒贝格空间、Hardy-Littlewood 极大算子、稀疏支配、加权不等式、Muckenhoupt 权重。T.O. 得到了芬兰研究委员会项目 360184 和 371637 的支持。他是芬兰随机性与结构卓越中心的成员。F.G. 得到了荷兰研究理事会（NWO）通过资助编号 VI.Vidi.223.019 的支持。

其中，我们将 $p'(\cdot) = p(\cdot)/(p(\cdot)-1)$ 记作共轭指数。它等价于平均算子 $f \mapsto \langle f\rangle_Q 1_Q$ 在 $L^{p(\cdot)}$上的一致有界性，因此是 M 在 $L^{p(\cdot)}$上有界的必要条件。Kopaliani [Kop07] 证明，当 $p(\cdot)$ 在一个球外为常数时，$1 \in A_{p(\cdot)}$ 是充分的。然而，他随后给出的反例 [Kop08] 表明，对于一般指数而言，仅有 $A_{p(\cdot)}$ 条件并不足够；这与 Muckenhoupt 关于 L^p_w的刻画形成鲜明对比。

Diening [证明了，一致的局部对数-H04]älder 条件¨在 $p(\cdot)$ 上足以保证 M 在 $L^{p(\cdot)}$上的有界性，$p(\cdot)$ 在球外为常数。Cruz-Uribe、Fiorenza 和 Neugebauer[CUFN03, CUFN04] 将无穷远处的这一假设放宽为对数-H¨älder 衰减至某个常数，从而得到熟知的全局对数-H¨älder 连续性这一充分条件。在保持相同局部假设的情况下，Nekvinda [Nek04] 通过将无穷远处的要求替换为积分条件，进一步削弱了该要求。然而，连续性并非必要条件，正如 Lerner [Ler05] 通过构造使 M 有界的不连续指数所证明的那样。

第一个充要条件由 Diening 给出，他通过以下方式刻画了 M 的有界性：对两两不相交的立方体上的平均算子之和具有一致有界性 [Die05，定理 8。1]利用 Diening 判据，Lerner [Ler26a，定理 1。12] 直接用 $p(\cdot)$ 给出了一个刻画，将 $A_{p(\cdot)}$ 条件与无穷远处的积分条件结合起来。最近，Lerner [Ler26c，定理 1。3] 通过对 A_∞-型条件刻画了$p(\cdot)$ 和 $p'(\cdot)$ 的有界性，比较阶梯函数在不相交立方体上以及限制到大子集前后的范数。这两个判据都依赖于 Diening 判据，并要求对任意的两两不相交立方体族进行一致估计，这可能使其难以针对给定指数加以验证。

我们的第一个结果给出了一个更易于验证的 M有界性判别。除了假设 $1 \in A_{p(\cdot)}$外，我们还要求存在一个正可积函数 h，使得 h 的两个变指数幂属于 A_1。回顾一下，局部可积函数 $u > 0$ 属于 A_1 （见 [Muc72]）是指

$$[u]_{A_1} := \sup_Q \frac{\langle u\rangle_Q}{\operatorname{ess\,inf}_{x\in Q} u(x)} < \infty. \tag{1.2}$$

我们的第一个结果如下。

定理 1.1。设 $p(\cdot)$ 满足 (1.1)。则 M 在 $L^{p(\cdot)}$ 上有界，当且仅当 $1 \in A_{p(\cdot)}$ 且存在一个正 $h \in L^1$ 使得

$$h^{1/p(\cdot)} \in A_1 \qquad and \qquad h^{1/p'(\cdot)} \in A_1. \tag{1.3}$$

我们称这样的函数 h 为关于 $p(\cdot)$ 的相容密度。与经典的加权情形一样，这些条件也刻画了所有 Calder´on–Zygmund 算子在 $L^{p(\cdot)}$上的有界性。事实上，Diening[Die05，定理 8.1 和 8.14]证明了 M 的有界性蕴含这些算子的有界性，而反向结论则由 Rutsky定理 [Rut16，定理 2]得出。

我们还研究了 M 在加权变指数Lebesgue空间上何时有界的问题。对于一个权 $w > 0$，我们回顾一下，$L^{p(\cdot)}_w$ 由满足以下范数条件的可测函数 f 构成

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}_w} := \|fw\|_{L^{p(\cdot)}}$$

有限。若 $w \in A_{p(\cdot)}$ 满足

$$[w]_{A_{p(\cdot)}} := \sup_Q |Q|^{-1} \|1_Q\|_{L^{p(\cdot)}_w} \|1_Q\|_{L^{p'(\cdot)}_{w^{-1}}} < \infty.$$

我们指出，当 $p(\cdot) = p$ 为常数时，这就还原为经典的 A_p Muckenhoupt 条件。此外，若 $p(\cdot)$ 满足（1.1）且 $w \in A_{p(\cdot)}$，则 $w^{p(\cdot)}$，$w^{-p'(\cdot)} \in L^1_{\mathrm{loc}}$。

Kokilashvili 和 Samko [KS04, 定理 A] 刻画了在包含 x_0 的有界域上，幂权$w(x) = |x - x_0|^\beta$ 下 M 在 $L^{p(\cdot)}_w$ 上的有界性，假设 $p(\cdot)$ 满足局部对数-H¨älder 连续性。对于 $\mathbb{R}^n$ 上的一般权，$A_{p(\cdot)}$ M $L^{p(\cdot)}_w$ p。¨ ¨ [11, 1 3] w
Cruz-Uribe、Diening 和 Hasto CUDH 定理 . 证明了当 ( ) 全局满足对数-Hölder 连续性时，刻画了 在 上的有界性。Cruz-Uribe、Fiorenza 和 Neugebauer [CUFN12, 定理 1.5] 通过不同的论证得到了相同的刻画。取 $w = 1$，可由无权情形下 Lerner 的例子 [Ler05] 看出，这些连续性假设并非必要。此外，正如我们在命题 5.1 中所展示的，Diening 关于 $M\colon L^{p(\cdot)} \to L^{p(\cdot)}$ 的刻画——通过对两两不相交立方体上的平均算子之和的一致有界性来刻画——无法推广到加权情形。这引出了一个自然的问题：如何刻画使得 $M\colon L^{p(\cdot)}_w \to L^{p(\cdot)}_w$ 的配对 $(p(\cdot)\ w)$?

以下定理1.2 是本文的主要贡献。它指出，加权版的相容密度条件与 $A_{p(\cdot)}$ 条件相结合，可完整刻画加权变指数勒贝格空间上极大函数的有界性（前提是满足（1.1））。特别地，该结果不要求指数满足对数-H¨older 连续性，因此这是加权情形下首个针对粗糙指数 $p(\cdot)$ 的有界性刻画，且不需要任何先验连续性假设。

定理 1.2。设 $p(\cdot)$ 满足 (1.1) 且令 w 为一个权。那么 M 在 $L^{p(\cdot)}_w$上有界，当且仅当$w \in A_{p(\cdot)}$ 且存在一个正函数 $h \in L^1$ 使得

$$w^{-1}h^{1/p(\cdot)} \in A_1 \qquad and \qquad wh^{1/p'(\cdot)} \in A_1. \tag{1.4}$$

我们称这样的函数 h 为 $(p(\cdot)\ w)$ 的相容密度。理解相容密度存在性的一种方式，是从 Jones 分解的角度来看。一个经典结果表明，采用乘子记号时，权 $w \in A_p$ 当且仅当存在 $u, v \in A_1$，使得 $w = u^{1/p}v^{-1/p'}$ [Jon80]。取 $u = wh^{1/p'(\cdot)}$ 和 $v = w^{-1}h^{1/p(\cdot)}$，可见相容密度给出了分解 $w = u^{1/p(\cdot)}v^{-1/p'(\cdot)}$，其中 $u, v \in A_1$ 和 $uv \in L^1$。对于常指数 p， A_1 权 u, v 可选取为满足 $uv \in L^1$ 这一事实，已隐含在 [CJRdF83] 给出的证明中。

我们注意到，在映射 $(p(\cdot)\ w) \mapsto (p'(\cdot)\ w^{-1})$ 下，(1.4) 中的两个 A_1 权会互换（反之亦然），$[w]_{A_{p(\cdot)}} = [w^{-1}]_{A_{p'(\cdot)}}$也是如此。因此，同一判据刻画了 M 在 $L^{p'(\cdot)}\,{}_{w^{-1}}$上的有界性。这两个极大算子有界性结论的等价性归功于 Lerner [Ler26b, 推论 1.5]，，该结果推广了他早先的结论；在早先的结论中，需要假设 $w^{p(\cdot)} \in A_\infty$ [Ler17, 定理 1.1]。在证明必要性时，我们使用[Ler26b, 推论 1.5]，为 $(p(\cdot)\ w)$ 构造一个相容密度 h。

本文结构如下。第2 节介绍预备知识。
第3 节是本文的核心，其中包含定理的证明 米 1.2.
第 3.1 节包含了 $w \in A_{p(\cdot)}$ 关于极大函数有界性的充分性以及相容密度的存在性。逐点稀疏控制（命题 2.8）将问题归结为证明稀疏算子的统一界（定理 3.1）。给定一个稀疏立方体族 $\mathcal{S}$，令E_Q 表示其两两不交的主子集。关键技术结果（引理 3.2）利用 $w \in A_{p(\cdot)}$条件和相容密度 h，通过 $\langle f1_{E_Q}\rangle_Q$ 的加权模来控制平均值 $f1_{E_Q}$，误差与 $\|h1_{E_Q}\|_{L^1}$. 成正比。由于 E_Q 互不相交，这些误差可以求和为 $\|h\|_{L^1}$，从而得到稀疏平均算子的统一界。

第 3.2 节包含了 $w \in A_{p(\cdot)}$ 以及关于极大算子有界性的相容密度存在性的必要性。条件 $w \in A_{p(\cdot)}$ 是显然的。相容密度的构造基于 Rubio de Francia[RdF82] 以及 Coifman、Jones 和 Rubio deFrancia [CJRdF83 的因子分解论证，是一种非线性迭代，见定理 II]的证明。为了使构造算法能够运行，我们使用 Lerner 对偶定理 [Ler26b，第 1.5] 推论，以获得 M 在伴随空间 $L^{p'(\cdot)}\,{}_{w^{-1}}$ 上的有界性。M 在 $L^{p(\cdot)}_w$以及 $L^{p'(\cdot)}\,{}_{w^{-1}}$ 上的有界性使递增递归序列在 L^1中保持一致有界，而其极限是一个满足（1.4）中两个A_1 条件的正可积函数。

第4节介绍了一些应用，并展示了如何利用相容密度这一概念，简洁地证明已知结果，例如 $1 \in A_{p(\cdot)}$ 和无穷远处的 log-H¨连续性对于 M 的充分性 $L^{p(\cdot)} \to L^{p(\cdot)}$。

最后，在第5节中，我们给出一个例子，说明 Diening 关于两两不相交立方体上的平均算子之和的一致有界性判据无法推广到加权变指数勒贝格空间。

2. Preliminaries

本节回顾全文中使用的加权变指数勒贝格空间的基本记号、范数性质和模函数性质。

基本定义与记号。我们回顾基本定义和记号约定。

- 本文中，变指数是一个可测函数 $p(\cdot) : \mathbb{R}^n \to (1, \infty)$。
- 我们通常省略环境空间 $\mathbb{R}^n$。
- 给定一个变指数 $p(\cdot)$ 和一个权 $w > 0$，加权变指数 Lebesgue 空间 $L^{p(\cdot)}{}_w$ 由满足范数有限的可测函数 f 组成，其中范数

$$\|f\|_{p(\cdot),w} := \|f\|_{L^{p(\cdot)}_w} := \inf\{\lambda > 0 : \rho_{p(\cdot),w}(f/\lambda) \le 1\}$$

有限，而加权模为

$$\rho_{p(\cdot),w}(f) := \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)w(x)|^{p(x)}\,\mathrm{d}x.$$

- 共轭指数 $p'(\cdot)$ 由以下关系给出 $\frac{1}{p(\cdot)} + \frac{1}{p'(\cdot)} = 1.$ —— ——

我们使用以下记号表示吸收常数。

- 若存在常数 $C > 0$ 使得 $A \le CB$，我们记作 $A \lesssim B$。若 $A \lesssim B$ 且 $B \lesssim A.$，我们记作 $A \simeq B$。常数的下标或括号中的数据（$C_{a,\,b}$，$C(a,\,b)$）以及量词（$\lesssim_{a,\,b}$，$\sim_{a,\,b}$）表示它们依赖于这些数据。

变指数勒贝格空间的基本性质。 由于乘法映射 $f \mapsto wf$ 是从 $L^{p(\cdot)}_w$ 到 $L^{p(\cdot)}$ 的等距映射，所引用的无权结果便自动给出下文记录的加权范数和模函数性质。我们首先记录格性质和单调收敛性质。

命题 2.1 ([DHHR11，定理 3.2。13])。 空间 $L^{p(\cdot)}_w$ 是一个巴拿赫空间。若 $g \in L^{p(\cdot)}_w$ 且 f 可测，并且 $|f| \le |g|$ 几乎处处成立，则 $f \in L^{p(\cdot)}_w$ 且 $\|f\|_{p(\cdot),\,w} \le \|g\|_{p(\cdot),\,w}$。

此外，该范数具有法图性质：若 $0 \le f_k \uparrow f$ 几乎处处成立，则

$$\|f_k\|_{p(\cdot),w} \uparrow \|f\|_{p(\cdot),w}. \tag{2.1}$$

接下来的范数—模函数关系允许我们将函数归一化，使其模为 1。

引理 2.2 ([DHHR11，引理 3.4。2])。 对于所有 f，我们有

$$\rho_{p(\cdot),w}(f) \le 1 \quad\Longleftrightarrow\quad \|f\|_{p(\cdot),w} \le 1, \tag{2.2}$$

and

$$\rho_{p(\cdot),w}(f) = 1 \quad\Longleftrightarrow\quad \|f\|_{p(\cdot),w} = 1.$$

特别地，若 $0 \ne f \in L^{p(\cdot)}_w$，则

$$\rho_{p(\cdot),w}\Big(\frac{f}{\|f\|_{p(\cdot),w}}\Big) = 1. \tag{2.3}$$

特别地，对于所有立方体 Q，由 (2.3) 可知，若 $\mathbf{1}_Q \in L^{p(\cdot)}_w$，则有

$$\int_Q \Big(\frac{w(x)}{\|\mathbf{1}_Q\|_{p(\cdot),w}}\Big)^{p(x)}\,\mathrm{d}x = 1. \tag{2.4}$$

凸组合可由以下模估计控制。

引理 2.3 ([CUF13，命题 2.7(4) 和 2.14])。 对于 f，$g \in L^{p(\cdot)}_w$ 有

$$\rho_{p(\cdot),w}\big(\theta f + (1-\theta)g\big) \le \theta\rho_{p(\cdot),w}(f) + (1-\theta)\rho_{p(\cdot),w}(g), \qquad 0 \le \theta \le 1. \tag{2.5}$$

$f \in L^{p(\cdot)}_w$ 与 $g \in L^{p'(\cdot)w^{-1}}$ 之间的配对中，恒等式 $fg = (wf)(w^{-1}g)$ 给出如下形式的 Hölder 不等式。

引理 2.4 ([DHHR11，引理 3.2。20])。 对于 $f \in L^{p(\cdot)}_w$ 和 $g \in L^{p'(\cdot)\,w^{-1}}$，有

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)g(x)|\,\mathrm{d}x \le 2\|f\|_{p(\cdot),w}\|g\|_{p'(\cdot),w^{-1}}. \tag{2.6}$$

注 2.5。 假设 $w^{p(\cdot)}$，$w^{-p'(\cdot)} \in L^1_{\mathrm{loc}}$，这些条件由 $w \in A_{p(\cdot)}$ 和 (1.1) 自动推出 $\|\mathbf{1}_Q\|_{p(\cdot),\,w} < \infty$ 以及 $\|\mathbf{1}_Q\|_{p'(\cdot)\,w^{-1}} < \infty$ 对所有立方体 Q 均成立。因此，应用引理 2.4 可得 $L^{p(\cdot)}_w \cup L^{p'(\cdot)}_{\,w^{-1}} \subset L^1_{\mathrm{loc}}$。

同样的配对给出如下对偶公式。

引理 2.6 ([DHHR11，推论 3.2。14])。 对于所有 $f \in L^{p(\cdot)}_w$，都有

$$\|f\|_{p(\cdot),w} \simeq \sup_{\|g\|_{p'(\cdot),w^{-1}} \le 1} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2.7}$$

2.1. **极大函数的预备知识**。 证明第3.1节充分性的主要工具，是通过二进稀疏算子对极大函数进行逐点稀疏支配。

定义 2.7。我们回顾以下概念。

- 称立方体的可数族 $\mathcal{D}$ 是二进的，若对所有 Q， $P \in \mathcal{D}$ 均有 $Q \cap P \in \{Q, P, \emptyset\}$。
- 若存在两两不相交的可测集 $E_Q \subseteq Q$、 $Q \in \mathcal{S}$，使得 $|E_Q| \geq |Q|/2$，则称立方体的可数族 $\mathcal{S}$ 是稀疏的。
- 若 $\mathcal{S}$ 既是稀疏的又是二进的，则称 $\mathcal{S}$ 为二进立方体的稀疏集族。

对于固定的稀疏集族 $\mathcal{S}$，我们定义稀疏平均算子

$$\mathcal{A}_{\mathcal{S}} f := \sum_{Q \in \mathcal{S}} \langle |f| \rangle_Q 1_{E_Q}. \tag{2.8}$$

我们使用极大函数的如下逐点稀疏控制。

命题 2.8 ([Ler17，引理 2.3 与 2.6])。 存在二进格 $\mathcal{D}_1$，……， $\mathcal{D}_{3^n}$ 使得对所有 $f \in L_c^\infty$都存在二进稀疏族 $\mathcal{S}_j \subseteq \mathcal{D}_j$ 使得

$$Mf \lesssim_n \sum_{j=1}^{3^n} \mathcal{A}_{\mathcal{S}_j} f. \tag{2.9}$$

这些二进格 $\mathcal{D}_j$， $j = 1$，……， 3^n，与 [Ler17第 2 节中的相同。3], 但其具体形式对我们并不重要；在支配之后，我们只需利用每个 $\mathcal{S}_j$ 都是一个二进稀疏族（见定义 2.7）。稀疏算子在 $L_w^{p(\cdot)}$上的一致界因此给出 M 在 $L_w^{p(\cdot)}$上的有界性，并且该估计从有界紧支集函数延拓到整个 $L_w^{p(\cdot)}$，方法是将其应用于 $\min\{|f|, j\} 1_{[-j,j]^n}$ 并利用命题 2.1。

对于必要性方向，为了在第3.2节构造相容密度，我们使用极大函数的以下对偶性。

T定理 2.9 ([Ler26b，推论 1.5])**.** 设 $p(\cdot)$ 满足 (1.1) 且 $w^{p(\cdot)}, w^{-p'(\cdot)} \in L^1_{\mathrm{loc}}$。那么

$$M : L_w^{p(\cdot)} \to L_w^{p(\cdot)} \quad \Longleftrightarrow \quad M : L_{w^{-1}}^{p'(\cdot)} \to L_{w^{-1}}^{p'(\cdot)}. \tag{2.10}$$

对于 $w = 1$，Diening 通过将其刻画为具有不相交支集的平均算子之和的一致有界性，得到了这一结果 [Die05，定理 8.1] 。Lerner [Ler17，定理 1.1] 首先在附加假设 $w^{p(\cdot)} \in A_\infty$ 下得到了加权结果，随后在 [Ler26b] 中仅在条件 $w^{p(\cdot)}, w^{-p'(\cdot)} \in L^1_{\mathrm{loc}}$下得到了该结果。

3. Proof of Theorem 1.2

3.1. **充分性**。 我们证明，$[w]_{A_{p(\cdot)}}$ 条件以及相容密度 h对于一对 $(p(\cdot)\ w)$ 的存在，是极大函数有界性的充分条件。根据命题 2.8，只需证明它们足以保证稀疏算子的一致界，如下所示。

定理 3.1。 设 $p(\cdot)$ 满足 (1.1)，并设 w 是一个权，满足 $[w]_{A_{p(\cdot)}} < \infty$。设 h 是对 $(p(\cdot)\ w)$ 的相容密度。设 $\mathcal{S}$ 是由二进立方体组成的可数稀疏族。则，

$$\|\mathcal{A}_{\mathcal{S}} f\|_{p(\cdot),w} \lesssim \|f\|_{p(\cdot),w},$$

对所有 $f \in L_c^\infty$，其中隐含常数依赖于 p_-、 $[w]_{A_{p(\cdot)}}$、 $\|h\|_{L^1}$、 $[w^{-1} h^{p'(\cdot)}]_{A_1}$、 $[w h^{p'(\cdot)}]_{A_1}$ —— $_1$.

定理 3.1 的证明使用了下面的局部模估计，该估计可视为 $L^{p'(\cdot)}\ w^{-1}$ 中的詹森型不等式，其误差项由 $\int_E h$控制，并且在稀疏族上可求和。在本文定稿期间，我们注意到，Shalukhina [Sha26]曾使用一个类似的詹森型不等式（其误差项在不相交族上可求和），从而简短地证明了齐性型空间上的 Diening 平均判别准则。

引理 3.2。 设 $p(\cdot)$ 满足 (1.1)，并设 w 为满足 $[w]_{A_{p(\cdot)}} < \infty$的权。设 h 为二元组 $(p(\cdot)\ w)$ 的相容密度。设 Q 为一个立方体，且 $E \subseteq Q$ 满足 $|E| \geq |Q|/2$。那么，对于所有满足 $\int_E (f(x)/w(x))^{p'(x)} \mathrm{d}x \leq 1$ 的 $f \geq 0$，均有

$$\int_Q \left(\frac{\langle f 1_E \rangle_Q}{w(x)} \right)^{p'(x)} \mathrm{d}x \lesssim \int_E \left(\frac{f(x)}{w(x)} \right)^{p'(x)} + h(x)\, \mathrm{d}x, \tag{3.1}$$

其中，隐含常数取决于 p_-、 $[w]_{A_{p(\cdot)}}$、 $\|h\|_{L^1}$、 $[w^{-1} h^{1/p(\cdot)}]_{A_1}$、 $[w h^{1/p'(\cdot)}]_{A_1}$。

注 3.3。变指数版本的 Jensen不等式 $\int_Q \langle f\rangle_Q^{p(x)}\,dx \lesssim \int_Q f\ (x)^{\ p(x)}\,dx$并不在所有立方体上一致成立。Kopaliani [Kop07，引理 2。4] 和 Lerner [Ler10，引理 3。1], 采用了詹森型不等式，但他们没有使用可求和误差，而是对 f 的平均值和范数大小施加限制。带有可积误差项的詹森型不等式这一思想，被用于证明 log-H¨older 连续性足以保证 $M:\ L^{p(\cdot)}\to L^{p(\cdot)}$ [DHHR11，推论 4.2。5]。他们的可求和误差采取可积幂权的形式；我们在定理 4.2 的证明中明确揭示了这一联系。

假设引理 3.2成立，现在我们证明定理 3.1。

定理 *3.1* 的证明。由命题 2.1可假设 $\mathcal{S}$是有限的。在对 $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}f\le\mathcal{A}_{\mathcal{S}}|f|$进行估计后，可假设 $f\ge 0$. 于是，由引理 2.6,

$$\|\mathcal{A}_{\mathcal{S}}f\|_{p(\cdot),w}\simeq \sup_{\substack{g\ge 0\\ \|g\|_{p'(\cdot),w^{-1}}=1}}\int_{\mathbb{R}^n}\mathcal{A}_{\mathcal{S}}fg. \tag{3.2}$$

固定右侧上确界中这样的一个 a g，并令

$$\mathcal{A}_{\mathcal{S}}^*g:=\sum_{Q\in\mathcal{S}}\langle g1_{E_Q}\rangle_Q 1_Q$$

表示 $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$. 的伴随算子。由托内利定理和引理 2.4 可得

$$\int_{\mathbb{R}^n}\mathcal{A}_{\mathcal{S}}fg=\sum_{Q\in\mathcal{S}}\langle f\rangle_Q\int_{E_Q}g\,\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^n}f\Big(\sum_{Q\in\mathcal{S}}\langle g1_{E_Q}\rangle_Q 1_Q\Big)=\int f\mathcal{A}_{\mathcal{S}}^*g\lesssim\|f\|_{p(\cdot),w}\|\mathcal{A}_{\mathcal{S}}^*g\|_{p'(\cdot),w^{-1}}.$$

因此，只需证明

$$\|\mathcal{A}_{\mathcal{S}}^*g\|_{p'(\cdot),w^{-1}}\lesssim\|g\|_{p'(\cdot),w^{-1}}. \tag{3.3}$$

由于 $\mathcal{S}$是有限的，我们有 $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}^*g\in L_c^\infty$。因此，$\|\mathcal{A}_{\mathcal{S}}^*g\|_{p'(\cdot)\ w^{-1}}\le\|\mathcal{A}_{\mathcal{S}}^*g\|_\infty\|1_{\mathrm{supp}(\mathcal{A}_{\mathcal{S}}^*g)}\|_{p'(\cdot)\ w^{-1}}<\infty$，利用假设 $w^{-p'(\cdot),}\in L^1_{\mathrm{loc}}$见备注 2.5。因此，假设 $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}^*g\ne 0$（否则无需证明），我们看到，（3.3）经过重新归一化后等价于

$$1=\|\mathcal{A}_{\mathcal{S}}^*\tilde g\|_{p'(\cdot),w^{-1}}\lesssim\|\tilde g\|_{p'(\cdot),w^{-1}},\quad\text{where}\quad\tilde g:=\frac{g}{\|\mathcal{A}_{\mathcal{S}}^*g\|_{p'(\cdot),w^{-1}}}. \tag{3.4}$$

为完成证明，我们验证（3.4）。

固定 x，并将（由 $\mathcal{S}$ 有限性可知）包含 x 的（可能为空的）有限立方体序列按$Q_1\subsetneq\cdots\subsetneq Q_J$排序，记为

$$S_j:=\sum_{\substack{P\in\mathcal{S}\\ P\supseteq Q_j}}\langle\tilde g1_{E_P}\rangle_P,\qquad j=1,\dots,J,\qquad S_{J+1}:=0.$$

于是 $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}^*\tilde g(x)=S_1$且 $S_j-S_{j+1}=\langle\tilde g1_{E_{Q_j}}\rangle_{Q_j}$。注意到初等估计 $t^r-s^r\le r(t-s)t^{r-1}$，其对 $0\le s\le t$ 和 $r\ge 1$成立。（该估计可由中值定理立即得到。）我们将其应用于代换 $t=S_j$ 和 $s=S_{j+1}$ 以及 $r=p'(x)$。因此，

$$\begin{aligned}\big(\mathcal{A}_{\mathcal{S}}^*\tilde g(x)\big)^{p'(x)}&=S_1^{p'(x)}-S_{J+1}^{p'(x)}=\sum_{j=1}^J\big(S_j^{p'(x)}-S_{j+1}^{p'(x)}\big)\\&\le p'(x)\sum_{j=1}^J\langle\tilde g1_{E_{Q_j}}\rangle_{Q_j}S_j^{p'(x)-1}\lesssim_{p_-}\sum_{Q\in\mathcal{S}}\langle\tilde g1_{E_Q}\rangle_Q\Big(\sum_{\substack{P\in\mathcal{S}\\ P\supseteq Q}}\langle\tilde g1_{E_P}\rangle_P\Big)^{p'(x)-1}1_Q(x),\end{aligned} \tag{3.5}$$

其中我们有界地

$$p'(x)=\Big(1-\frac{1}{p(x)}\Big)^{-1}\le\Big(1-\frac{1}{p_-}\Big)^{-1}\lesssim_{p_-}1. \tag{3.6}$$

将式（3.5）$\|\tilde{g}\|_{p'\cdot()\,w^{-1}}^{-1} w^{-p'(\cdot)}$ 两边相乘并积分可得

$$\frac{1}{\|\tilde{g}\|_{p'(\cdot),w^{-1}}} = \frac{1}{\|\tilde{g}\|_{p'(\cdot),w^{-1}}} \int \left(\mathcal{A}_{\mathcal{S}}^{*}\tilde{g}\right)^{p'(\cdot)} w^{-p'(\cdot)} \lesssim_{p_-} \sum_{Q\in\mathcal{S}} \int_Q \left\langle \frac{\tilde{g}1_{E_Q}}{\|\tilde{g}\|_{p'(\cdot),w^{-1}}} \right\rangle_Q \left(\sum_{\substack{P\in\mathcal{S}\\ P\supseteq Q}} \langle \tilde{g}1_{E_P}\rangle_P\right)^{p'(\cdot)-1} w^{-p'(\cdot)}. \tag{3.7}$$

接下来，我们将被积函数改写为与引理3.2相容的形式。由于 $\sum_{\substack{P\in\mathcal{S}\\ P\supseteq Q}} \langle \tilde{g}1_{E_P}\rangle_P$ 在 Q 上为常数，且 $|E_Q| \geq \frac{1}{2}|Q|$ 因此我们有

$$\sum_{\substack{P\in\mathcal{S}\\ P\supseteq Q}} \langle \tilde{g}1_{E_P}\rangle_P = \left\langle \sum_{\substack{P\in\mathcal{S}\\ P\supseteq Q}} \langle \tilde{g}1_{E_P}\rangle_P \right\rangle_{E_Q} \leq 2\left\langle 1_{E_Q} \sum_{\substack{P\in\mathcal{S}\\ P\supseteq Q}} \langle \tilde{g}1_{E_P}\rangle_P \right\rangle_Q \leq 2\left\langle 1_{E_Q}\mathcal{A}_{\mathcal{S}}^{*}\tilde{g}\right\rangle_Q.$$

因此，记

$$G := \frac{1}{2}\frac{\tilde{g}}{\|\tilde{g}\|_{p'(\cdot),w^{-1}}} + \frac{1}{2}\mathcal{A}_{\mathcal{S}}^{*}\tilde{g}$$

我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{RHS}(3.7) &\leq \sum_{Q\in\mathcal{S}} \int_Q \left\langle \frac{\tilde{g}1_{E_Q}}{\|\tilde{g}\|_{p'(\cdot),w^{-1}}} \right\rangle_Q \left(2\left\langle 1_{E_Q}\mathcal{A}_{\mathcal{S}}^{*}\tilde{g}\right\rangle_Q\right)^{p'(\cdot)-1} w^{-p'(\cdot)} \\ &\leq \sum_{Q\in\mathcal{S}} \int_Q \left\langle 2G1_{E_Q}\right\rangle_Q \left(2\left\langle 2G1_{E_Q}\right\rangle_Q\right)^{p'(\cdot)-1} w^{-p'(\cdot)} \lesssim_{p_-} \sum_{Q\in\mathcal{S}} \int_Q \left(\frac{\langle G1_{E_Q}\rangle_Q}{w}\right)^{p'(\cdot)},\end{aligned}$$

其中最后一步再次使用了界（3.6）。因此，

$$\frac{1}{\|\tilde{g}\|_{p'(\cdot),w^{-1}}} = \mathrm{LHS}(3.7) \lesssim_{p_-} \mathrm{RHS}(3.7) \lesssim_{p_-} \sum_{Q\in\mathcal{S}} \int_Q \left(\frac{\langle G1_{E_Q}\rangle_Q}{w}\right)^{p'(\cdot)}. \tag{3.8}$$

为说明引理3.2 可应用于 G，由（2.5）可得

$$\rho_{p'(\cdot),w^{-1}}(G) \leq \frac{1}{2}\rho_{p'(\cdot),w^{-1}}\left(\frac{\tilde{g}}{\|\tilde{g}\|_{p'(\cdot),w^{-1}}}\right) + \frac{1}{2}\rho_{p'(\cdot),w^{-1}}(\mathcal{A}_{\mathcal{S}}^{*}\tilde{g}) = 1.$$

因此，由引理3.2，我们将估计式（3.8）继续写为

$$\frac{1}{\|\tilde{g}\|_{p'(\cdot),w^{-1}}} \lesssim_{p_-} \sum_{Q\in\mathcal{S}} \int_{E_Q} \left(\frac{G}{w}\right)^{p'(\cdot)} + h \leq \rho_{p'(\cdot),w^{-1}}(G) + \|h\|_1 \lesssim 1.$$

因此$\|\tilde{g}\|_{p'(\cdot)\,w^{-1}} \gtrsim 1$，这就证明了（3.4）。 □

引理3.2的证明。接下来只需证明引理3.2。我们先概述证明思路，随后给出证明。

固定一个立方体 Q 和一个模预算 $\rho_{p'(\cdot)\,w^{-1}}(f1_{E_Q}) =: t$。理想情况下，我们希望对所有 $t \leq 1$，都能得到 $\rho_{p'(\cdot)\,w}(\langle f1_{E_Q}\rangle_Q 1_Q) \lesssim t$ 的估计（此时式（3.1）右端将不含因子 $\int_E h$）。然而，这个估计仅在某个预算范围 $t \in [\epsilon_Q, 1]$ 内成立（见式（3.12））；而在预算较低时（即对于 $t < \epsilon_Q$），我们利用 t-预算包含于 ϵ_Q-预算这一点。因此，

$$\rho_{p'(\cdot),w^{-1}}(\langle f1_{E_Q}\rangle_Q 1_Q) \lesssim \begin{cases}\rho_{p'(\cdot),w^{-1}}(f1_{E_Q}), & \epsilon_Q \leq \rho_{p'(\cdot),w^{-1}}(f1_{E_Q}) \leq 1,\\ \epsilon_Q, & 0 \leq \rho_{p'(\cdot),w^{-1}}(f1_{E_Q}) < \epsilon_Q.\end{cases} \tag{3.9}$$

由于 $\epsilon_Q \lesssim \int_E h$（直接由定义可得），（3.9）将推出（3.1），从而完成证明引理3 2.

证明预算为 $t \in [\epsilon_Q, 1]$ 时可得界 $\rho_{p'(\cdot)\,w^{-1}}(\langle f1_{E_Q}\rangle_Q 1_Q) \lesssim t$（引理 3.5）的关键工具是 t-可容许对（定义 3.4）；这是该界成立的充分条件。因此，我们希望证明对于所有预算 $t \in [\epsilon_Q, 1].$，都存在 t-可容许对。当预算为“$t = 1$”时，$A_{p(\cdot)}$ 条件给出一个 1-可容许对（引理 3.7）；而当预算为“$t = \epsilon_Q$”时，相容密度给出一个 ϵ_Q-可容许对（引理 3.7）。通过插值（引理 3.6），我们可以从端点 $t = 1$ 和 $t = \epsilon_Q$ 构造出适用于所有预算 $t \in [\epsilon_Q, 1]$ 的可容许对。以上便是证明思路的概述。

接下来进入证明本身。在本节余下部分，我们记

$$L := \max\{1, [w^{-1}h^{1/p(\cdot)}]_{A_1}, [wh^{1/p'(\cdot)}]_{A_1}\}. \tag{3.10}$$

定义 3.4. 设 $1 < r(\cdot) < \infty$ 且 $[w]_{A_{r(\cdot)}} < \infty$。对于立方体 Q 及常数 $a, b, t > 0$，若满足以下条件，则称 (a, b) 是 t-可容许对，定义在 Q 上，对应于 $(r(\cdot)\ w)$：

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \int_Q \big(aw(x)\big)^{r(x)}\,\mathrm{d}x \le Lt, \qquad \text{(ii)} \int_Q \Big(\frac{b}{w(x)}\Big)^{r'(x)}\,\mathrm{d}x \le Lt, \\ &\text{(iii)}\ ab \ge \frac{t}{2[w]_{A_{r(\cdot)}}|Q|}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

在此情形下，我们称 Q 对于 $(r(\cdot)\ w)$ 允许一个 t-可容许对。

引理 3.5. 设 $1 < r(\cdot) < \infty$ 满足 $r_+ < \infty$ 且 $[w]_{A_{r(\cdot)}} < \infty$。设 Q 对 $(r(\cdot)\ w)$ 允许一个 t-可容许对。那么，对于 Q 上的所有 $F \ge 0$，均有：

$$\int_Q (F(x)w(x))^{r(x)}\,\mathrm{d}x \le t \Longrightarrow \int_Q \big(w(x)\langle F\rangle_Q\big)^{r(x)}\,\mathrm{d}x \lesssim_{r_+, [w]_{A_{r(\cdot)}}, L} t.$$

证明。设 (a, b) 是针对 t-可容许对，且对应于 $(r(\cdot)\ w)$。将杨氏不等式应用于 $F(x)w(x)$ 和 $b/w(x)$，再结合 (3.11) 的 (ii) 和 (iii)，可得

$$b|Q|\langle F\rangle_Q \le \int_Q (Fw)^{r(x)}\,\mathrm{d}x + \int_Q (b/w)^{r'(x)}\,\mathrm{d}x \le (1+L)t \le 2[w]_{A_{r(\cdot)}}(1+L)ab|Q|.$$

因此，$\langle F\rangle_Q \le 2[w]_{A_{r(\cdot)}}(1+L)a$。因此，根据 (i)，

$$\int_Q \big(w(x)\langle F\rangle_Q\big)^{r(x)}\,\mathrm{d}x \le \big(2[w]_{A_{r(\cdot)}}(1+L)\big)^{r_+} Lt \lesssim_{r_+, [w]_{A_{r(\cdot)}}, L} t. \qquad \square$$

可容许对可以按如下方式进行插值。

引理 3.6。 设 $1 < r(\cdot) < \infty$。假设 (a_i, b_i) 在 Q 上对于 $(r(\cdot)\ w)$，$i = 0, 1$ 是 t_i-可容许的。那么，对于所有 $\eta \in [0, 1]$，对 $(a_0^\eta a_1^{1-\eta}, b_0^\eta b_1^{1-\eta})$ 在 Q 上对于 $(r(\cdot)\ w)$ 是 $t_0^\eta t_1^{1-\eta}$-可容许的。

证明。对于常数 $0 < \eta < 1$，利用指数 $1/\eta$ 和 $1/(1-\eta)$ 的 H¨older 不等式可得

$$\begin{aligned} \int_Q \big(wa_0^\eta a_1^{1-\eta}\big)^{r(x)}\,\mathrm{d}x &= \int_Q \big((wa_0)^{r(x)}\big)^\eta \big((wa_1)^{r(x)}\big)^{1-\eta}\,\mathrm{d}x \\ &\le \left(\int_Q (wa_0)^{r(x)}\,\mathrm{d}x\right)^\eta \left(\int_Q (wa_1)^{r(x)}\,\mathrm{d}x\right)^{1-\eta} \le Lt_0^\eta t_1^{1-\eta}. \end{aligned}$$

这证明了 (3.11) 的 (i)。同样的论证可证明 (ii)，而将两个下界的相应幂相乘可证明 (iii)。情形 $\eta = 0$ 和 $\eta = 1$ 直接由假设得到。$\square$

相容密度给出一个 ϵ_Q-可容许对，其中 $\epsilon_Q \le 1$（经过重新缩放 h；见下文（3.13））， 而 $[w]_{A_{r(\cdot)}} < \infty$ 给出一个 1-可容许对。我们将通过引理 3.6 对这些对进行插值，以证明引理3.2。

引理 3.7。 设 $1 < p(\cdot) < \infty$ 满足 $[w]_{A_{p(\cdot)}} < \infty$，且 h 是（$p(\cdot)\ w$）的相容密度。设Q 为一个固定的立方体。

- *The pair* $(a_0, b_0) := \left(\left\langle \frac{wh^{1/p'(\cdot)}}{L}\right\rangle_Q, \left\langle \frac{w^{-1}h^{1/p(\cdot)}}{L}\right\rangle_Q\right)$ *is* ϵ_Q*-admissible on* Q *for* $(p'(\cdot), w^{-1})$*, where*

$$\epsilon_Q := |Q| \left\langle \frac{wh^{1/p'(\cdot)}}{L}\right\rangle_Q \left\langle \frac{w^{-1}h^{1/p(\cdot)}}{L}\right\rangle_Q. \tag{3.12}$$

此外，若 $E \subset Q$ 满足 $|E| \ge \frac{1}{2}|Q|$ 和 $\int_E h \le \frac{1}{2}$，则

$$\epsilon_Q \le \min\left\{\frac{1}{2}, 2\int_E h\,\mathrm{d}x\right\} \le 1. \tag{3.13}$$

- 数对(a_1, b_1)：$= \big(\|\mathbf{1}_Q\|^{-1}_{p'(\cdot)\ w^{-1}}, \|\mathbf{1}_Q\|^{-1}_{p(\cdot)\ w}\big)$ 在 Q 上对$(p'(\cdot)\ w^{-1})$是1-可容许的。

证明。我们首先验证 (3.13)。由于 h 是 $(p(\cdot)\ w)$ 的相容密度，我们有 $a_0 \le w(x)h(x)^{1/p'(x)}$以及 $b_0 \le w(x)^{-1}h(x)^{1/p(x)}$，因此

$$\frac{\epsilon_Q}{|Q|} := a_0 b_0 \le \big(w(x)h(x)^{1/p'(x)}\big)\big(w(x)^{-1}h(x)^{1/p(x)}\big) = h(x).$$

对 Q 和 E 积分，得到

$$\epsilon_Q \le \int_Q h\,\mathrm{d}x \le \frac{1}{2} \qquad \text{and} \qquad \epsilon_Q \le 2\int_E h\,\mathrm{d}x$$

因此（3.13）成立。

为验证这对（a_0，b_0）的可容许性，我们需要检查定义3.4中的三个条件。关于 a_0 的界给出

$$\begin{aligned}\int_Q \big(a_0/w(x)\big)^{p'(x)}\,\mathrm{d}x &= a_0\int_Q a_0^{p'(x)-1}w(x)^{-p'(x)}\,\mathrm{d}x\\ &\le a_0\int_Q \big(w(x)h(x)^{1/p'(x)}\big)^{p'(x)-1}w(x)^{-p'(x)}\,\mathrm{d}x = a_0\int_Q w(x)^{-1}h(x)^{1/p(x)}\,\mathrm{d}x = L\epsilon_Q,\end{aligned}$$

这验证了（i）。交换 p（·）与 p'（·），以及 w 和 w^{-1}，即可验证（ii）。为验证（iii），由 H¨older 不等式（引理2.4），可得

$$1 = \langle ww^{-1}\rangle_Q \le 2\frac{\|\mathbf{1}_Q w\|_{p(\cdot)}\|\mathbf{1}_Q w^{-1}\|_{p'(\cdot)}}{|Q|} \le 2[w]_{A_{p(\cdot)}}$$

因此

$$a_0 b_0 =: \frac{\epsilon_Q}{|Q|} \ge \frac{\epsilon_Q}{2[w]_{A_{p(\cdot)}}|Q|}.$$

接下来我们验证该对（a_1，b_1）的 1-可容许性。将（2.4）应用于（p（·） w）和（p'（·） w^{-1}），可得

$$\int_Q \left(\frac{w(x)}{\|\mathbf{1}_Q\|_{p(\cdot),w}}\right)^{p(x)}\mathrm{d}x = \int_Q \left(\frac{w(x)^{-1}}{\|\mathbf{1}_Q\|_{p'(\cdot),w^{-1}}}\right)^{p'(x)}\mathrm{d}x = 1 \le L.$$

这就是 (i) 和 (ii)。由此 $[w]_{A_{p(\cdot)}} < \infty$ 得到 (iii)。 □

下面的引理允许对相容密度进行重新缩放，从而可以使用（3.13）。

引理 3.8。若 h 是（p（·） w）的相容密度，其中 $1 < p$（·）$< \infty$，则对所有 $c > 0.$，ch 也是相容密度。证明：若 $c \ge 1$，则 $c^{1/p(\cdot)} \le c$；若 $c \le 1$，则 $c^{1/p(\cdot)} \le 1$；因此，$c^{1/p(\cdot)} \le \max(1,\ c)$。因此，

$$\begin{aligned}\langle w^{-1}(ch)^{1/p(\cdot)}\rangle_Q &\le \max(1,c)\langle w^{-1}h^{1/p(\cdot)}\rangle_Q\\ &\le \max(1,c)\left[w^{-1}h^{1/p(\cdot)}\right]_{A_1}\operatorname*{ess\,inf}_Q w^{-1}h^{1/p(\cdot)}\\ &\lesssim \max(1,c)\max(1,c^{-1})\left[w^{-1}h^{1/p(\cdot)}\right]_{A_1}\operatorname*{ess\,inf}_Q w^{-1}(ch)^{1/p(\cdot)}.\end{aligned} \tag{3.14}$$

用 $p(\cdot)$ 替代 $p'(\cdot)$，并用 w^{-1} 替代 w 时，同样的界成立。 □

引理 3.2 的证明。设 $p(\cdot)$ 具有相容密度 h，并满足 $[w]_{A_{p(\cdot)}} < \infty$。由引理 3.8，将 $\frac{1}{2}\|h\|_{L^1}^{-1}\cdot h$ 代入 h，可不失一般性地假设 $\int h \le \frac{1}{2}$.。令 (a_0, b_0) 为引理 3.7 中的 ϵ_Q-可容许对，(a_1, b_1) 为其中的 1-可容许对。由 $|E| \ge \frac{1}{2}|Q|$（常设假设）和 $\int h \le \frac{1}{2}$，可知 (3.13) 成立，即 $\epsilon_Q \le 1$。结合 $\int_E (f(x)/\bar{w}(x))^{p'(x)}\,\mathrm{d}x \le 1$（常设假设），得到

$$\epsilon_Q \le t := \max\left\{\int_E \left(\frac{f(x)}{w(x)}\right)^{p'(x)}\mathrm{d}x, \epsilon_Q\right\} \le 1.$$

现在取 $\eta \in [0,1]$ 使得 $t = \epsilon_Q^{\eta}$。由引理 3.6，存在一个定义在 Q 上的 t-可容许对 Q，对于 $p'(\cdot)$ w^{-1}。因此，由引理 3.5，取 $F = f1_E$，可得

$$\int_Q \left(\frac{\langle f1_E\rangle_Q}{w(x)}\right)^{p'(x)}\mathrm{d}x \lesssim_{(p')_+,[w]_{A_{p(\cdot)}},L} t \le \int_E \left(\frac{f(x)}{w(x)}\right)^{p'(x)}\mathrm{d}x + \epsilon_Q \le \int_E \left(\frac{f(x)}{w(x)}\right)^{p'(x)}\mathrm{d}x + 2\int_E h(x)\,\mathrm{d}x,$$

其中最后一步使用了（3.13）。 □

3.2. 必要性。假设 M 在 $L^{p(\cdot)}_w$上有界，我们证明 $[w]_{A_{p(\cdot)}}<\infty$，并为（$p(\cdot)$ w）构造一个相容密度 h。Muckenhoupt 型条件源于无权情形中 Kopaliani [Kop07]所使用的对偶性论证；另见 [CUF13，推论 4.50]。事实上，这一必要性在更一般的情形下仍然成立：Berezhnoi [Ber99] 证明了，如果 M 在理想巴拿赫空间 X上有界，则 $\sup_Q |Q|^{-1}\|\mathbf{1}_Q\|_X\|\mathbf{1}_Q\|_{X'}<\infty$。为完整起见，我们给出这一事实的简短证明，针对 $X=L^{p(\cdot)}_w$。为构造相容密度，我们使用基于 Rubio de Francia 算法的非线性迭代（见 Rubio de Francia [RdF82，定理 1 及第 3] 节，以及 Coifman、Jones 和 Rubio de Francia [CJRdF83，定理 II]的证明）。Rutsky [Rut14，定理 8], 的证明中也出现了相关构造；在那里，他寻求 A_q 中的一个主函数，其 δ 次方属于 A_1，其中 $q>1$ 和$\delta>0$固定。

定理 *1.2* 的证明；必要性。对固定的立方体 Q，令 $E_m:=Q\cap\{m^{-1}\le w\le m\}$, $m\ge 1$。由于 w和 w^{-1} 在 E_m上有界，下面两个示性函数范数均有限。应用引理2.6计算$\|1_{E_m}\|_{p'(\cdot)\,w^{-1}}$，得到

$$\begin{aligned}\frac{\|1_{E_m}\|_{p(\cdot),w}\|1_{E_m}\|_{p'(\cdot),w^{-1}}}{|Q|}&\simeq\sup_{\|f\|_{p(\cdot),w}\le 1}\big\|\langle|f|1_{E_m}\rangle_Q 1_{E_m}\big\|_{p(\cdot),w}\\&\le\sup_{\|f\|_{p(\cdot),w}\le 1}\|M(f1_{E_m})\|_{p(\cdot),w}\le\|M\|_{L^{p(\cdot)}_w\to L^{p(\cdot)}_w}.\end{aligned}$$

由于 $E_m\uparrow Q$，命题 2.1 允许我们令 $m\to\infty$。对所有立方体取上确界，得到 $[w]_{A_{p(\cdot)}}<\infty$。

由于 $w\in A_{p(\cdot)}$ 和 $1<p_-\le p_+<\infty$，注记 2.5 推出 $w^{p(\cdot)}$，$w^{-p'(\cdot)}\in L^1_{\mathrm{loc}}$。因此，由定理 2.9，$M$ 在 $L^{p'(\cdot)\,w^{-1}}$ 上有界，故

$$N:=\max\big\{\|M\|_{L^{p(\cdot)}_w\to L^{p(\cdot)}_w},\|M\|_{L^{p'(\cdot)}_{w^{-1}}\to L^{p'(\cdot)}_{w^{-1}}}\big\}<\infty.$$

取一个正函数 $\varphi\in L^1(\mathbb{R}^n)$，使得 $\int_{\mathbb{R}^n}\varphi\mathrm{d}x=1/3$。从 $H_0:=\varphi$ 开始，递归定义

$$H_{k+1}:=\max\left\{\varphi,\left(\frac{wM\big(w^{-1}H_k^{1/p(\cdot)}\big)}{3N}\right)^{p(\cdot)},\left(\frac{w^{-1}M\big(wH_k^{1/p'(\cdot)}\big)}{3N}\right)^{p'(\cdot)}\right\}=:\Phi(H_k).\tag{3.15}$$

通过 $3N$ 进行归一化可确保对所有 $k\ge 0$ 都有 $\int_{\mathbb{R}^n}H_k\mathrm{d}x\le 1$，下面我们将用归纳法证明这一点。$k=0$ 的情形由 φ 的选取可知。假设 $\int_{\mathbb{R}^n}H_k\mathrm{d}x\le 1$。对于以下任一种选择——$s(\cdot)=p(\cdot)$ 和 $u=w$，或 $s(\cdot)=p'(\cdot)$ 和 $u=w^{-1}$——我们有

$$\rho_{s,u}\big(u^{-1}H_k^{1/s(\cdot)}\big)=\int_{\mathbb{R}^n}H_k\,\mathrm{d}x\le 1.\tag{3.16}$$

由引理 2.2 的（2.2）式，得到 $\|u^{-1}H_k^{1/s(\cdot)}\|_{s(\cdot),\,u}\le 1$。因此，根据 N 的定义，$\|M(u^{-1}H_k^{1/s(\cdot)})/N\|_{s(\cdot),\,u}\le 1$，进而再次应用 2.2，得到$\rho_{s(\cdot),\,u}\big(M(u^{-1}H_k^{1/s(\cdot)})/N\big)\le 1$。由于 $s(x)$ 在几乎处处成立，因此可得

$$\rho_{s,u}\left(\frac{M\big(u^{-1}H_k^{1/s(\cdot)}\big)}{3N}\right)\le\frac{1}{3}\rho_{s,u}\left(\frac{M\big(u^{-1}H_k^{1/s(\cdot)}\big)}{N}\right)\le\frac{1}{3}.\tag{3.17}$$

将最大值界定为总和，并使用（3.17）可得

$$\int_{\mathbb{R}^n}H_{k+1}\,\mathrm{d}x\le\int_{\mathbb{R}^n}\varphi\,\mathrm{d}x+\rho_{p(\cdot),w}\left(\frac{M\big(w^{-1}H_k^{1/p(\cdot)}\big)}{3N}\right)+\rho_{p'(\cdot),w^{-1}}\left(\frac{M\big(wH_k^{1/p'(\cdot)}\big)}{3N}\right)\le\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1,$$

这就完成了归纳法。

然后我们验证 $H_k\le H_{k+1}$。显然，对于基例，$H_0=\varphi\le H_1$。对于归纳步骤，我们利用：如果 $0\le f\le g$，那么 $Mf\le Mg$，从而得到 $\Phi(f)\le\Phi(g)$，其中 Φ如第（3.15）行所示。因此，利用归纳假设 $H_{k-1}\le H_k$，我们有 $H_k:=\Phi(H_{k-1})\le\Phi(H_k)=:H_{k+1}$.

由于 H_k 递增，逐点极限

$$H:=\lim_{k\to\infty}H_k\tag{3.18}$$

存在于 $[0,\infty]$中。根据单调收敛定理和（3.16），

$$\int_{\mathbb{R}^n}H\,\mathrm{d}x=\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}H_k\,\mathrm{d}x\le 1.$$

因此，$H<\infty$ 几乎处处成立，且 $H\in L^1$。

由于 $H \geq H_0 = \varphi > 0$， $w^{-1}H^{1/p(\cdot)}$ 和 $wH^{1/p'(\cdot)}$均为正。为证明它们属于 A_1，我们首先检验局部可积性。无论取 $s(\cdot) = p(\cdot)$和 $u = w$，还是取 $s(\cdot) = p'(\cdot)$和 $u = w^{-1}$，都有$\rho_{s(\cdot),u}(u^{-1}H^{1/s(\cdot)}) = \int_{\mathbb{R}^n} H \leq 1$. 因此，由(2.2)可得 $\|u^{-1}H^{1/s(\cdot)}\|_{s(\cdot),u} \leq 1$，进而根据 $L_u^{s(\cdot)} \subset L^1_{\mathrm{loc}}$ (见注 2.5)，有 $u^{-1}H^{1/s(\cdot)} \in L^1_{\mathrm{loc}}$. 。于是，由单调收敛和(3.15)，对于固定的立方体Q 以及几乎处处的 $x \in Q$，有

$$\begin{aligned}(3.19)\quad \left\langle u^{-1}H^{1/s(\cdot)}\right\rangle_Q &= \lim_{k\to\infty}\left\langle u^{-1}H_k^{1/s(\cdot)}\right\rangle_Q \leq \lim_{k\to\infty} M\left(u^{-1}H_k^{1/s(\cdot)}\right)(x)\\ &\leq \lim_{k\to\infty} 3Nu(x)^{-1}H_{k+1}^{1/s(x)} = 3Nu(x)^{-1}H(x)^{1/s(x)}.\end{aligned}$$

因此 $w^{-1}H^{1/p(\cdot)}$， $wH^{1/p'(\cdot)} \in A_1$，由（1.2）。 □

4. Applications and examples

本节通过在相容密度的框架下重新证明某些已知定理，并在一些情况下对其进行推广，来举例说明定理1.2 的一些应用。正如我们将要展示的，这样可以得到相当简短而清晰的证明。这并非一个穷尽性的介绍，而更应视为一种概念验证。

我们首先给出一个新的证明，说明 $p(\cdot) \in LH_\infty$ 和 $1 \in A_{p(\cdot)}$ 蕴含 $M\colon L^{p(\cdot)} \to L^{p(\cdot)}$。这一结论是已知的；它可由 [CUF13中的定理4推出。52], 其中 LH_∞ 被 N_∞ Nekvinda [Nek04]的较弱条件所替代。（我们还要指出，$1 \in A_{p(\cdot)}$ 的另一种记号是 $p(\cdot) \in K_{0\infty}$ ）

定义 4.1. 给定一个指数函数 $p(\cdot)$，若存在常数 $C > 0$ 和$p_\infty \in [p_-, p_+]$，使得对几乎处处的 $x \in \mathbb{R}^n$，

$$(4.1)\qquad \left|\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{p_\infty}\right| \leq \frac{C}{\log(e + |x|)}.$$

其思路是，仅凭 LH_∞ 就可以通过幂权构造出相容密度。

定理 4.2. 设 $1 < p_- \leq p_+ < \infty$。若 $p(\cdot) \in LH_\infty$ 且 $1 \in A_{p(\cdot)}$，则 $M\colon L^{p(\cdot)} \to L^{p(\cdot)}$ 有界。证明。设 $p(\cdot) \in LH_\infty$，并令 C, p_∞ 如 (4.1) 所示。令 $p'_\infty := (p_\infty)'$，则我们也有 $p'(\cdot) \in LH_\infty$，因为

$$(4.2)\qquad \left|\frac{1}{p'(x)} - \frac{1}{p'_\infty}\right| = \left|\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{p_\infty}\right| \leq \frac{C}{\log(e + |x|)}.$$

取满足 $n < N < n\min\{p_\infty, p'_\infty\}$ 的 N，并定义 $h(x) := \min\{1, |x|^{-N}\}$。我们声称 h 是 $p(\cdot)$ 的相容密度。

显然，由于 $N > n$，有 $h \in L^1$。对于 $q(\cdot) \in \{p(\cdot)\ p'(\cdot)\}$，注意到 $h^{1/q(\cdot)} = \min\{1, |x|^{-N/q(\cdot)}\}$。因此，对于 $|x| > 1$，假设 $q(\cdot) \in LH_\infty$ 意味着

$$\frac{h^{1/q(x)}}{|x|^{-N/q_\infty}} = |x|^{-N\left(\frac{1}{q(x)} - \frac{1}{q_\infty}\right)} = e^{-t(x)}, \qquad t(x) := N\left(\frac{1}{q(x)} - \frac{1}{q_\infty}\right)\log|x|.$$

根据（4.2），

$$|t(x)| \leq CN\frac{\log|x|}{\log(e + |x|)} \leq CN,$$

因此 $\frac{h^{1/q(x)}}{|x|^{-N/q_\infty}} \gtrsim 1$。以相同方式进行估计，得到 $\frac{|x|^{-N/q_\infty}}{h^{1/q(x)}} \gtrsim 1$。由此可知

$$h^{1/q(\cdot)} \simeq \min\{1, |x|^{-N/q_\infty}\}.$$

众所周知，如果 $0 \leq \alpha < n$，那么 $|x|^{-\alpha} \in A_1$。因此，由于 $0 < N/q_\infty < n$， $|x|^{-N/q_\infty} \in A_1$。回想一下， A_1 在取最小值下是稳定的，并且与 A_1 权相当的函数本身也是 A_1 权，我们得出 $h^{1/q(\cdot)} \in A_1$。□

我们还可以得到 Lerner 的一个结果 [Ler26a，推论 6。5]这里我们给出一个基于更精简工具的简短证明，并去掉关于 $1/n$ 的条件中的因子 α。

定理 4.3。 假设 $p(\cdot)$ 是一个径向指数，满足 $1 < p_- \leq p_+ < \infty$ 且 $1 \in A_{p(\cdot)}$. 。若存在 $N > 1$ 和 α 满足

$$(4.3)\qquad 0 < \alpha < p_-\min\{1, (p_- - 1)\}$$

使得对所有 $|x| \geq |y| \geq N$，

$$(4.4)\qquad |p(x) - p(y)| \leq \alpha\frac{1}{\log|y|}\log\frac{|x|}{|y|},$$

那么 $M\colon L^{p(\cdot)} \to L^{p(\cdot)}$。

我们将使用以下关于径向 A_1 权的初等引理。这个结果基本上众所周知；为求完整起见，我们附上简短证明。

引理 4.4. 设 $w(x) = W(|x|)$，且 $W > 0$ 在 $[0, R_0]$上有上界和下界。假设在$[R_0, \infty)$ 上，函数 W非递增，且 $r^\gamma W(r)$ 对某个 $\gamma < n$非递减。那么 $w \in A_1$。

证明。由于 W 在 $[0, R_0]$ 上有上界和下界，且在 $[R_0, \infty)$ 上非递增，因此 W在 $[0, \infty)$ 上“几乎非递增”，即对 $s \le r$， $W(r) \lesssim W(s)$。此外， $r^\gamma W(r)$ 在 $[R_0, \infty)$ 上非递减，这意味着

$$\left(\frac{r}{s}\right)^{-\gamma} \le \frac{W(r)}{W(s)} \le 1, \qquad R_0 \le s \le r.$$

结合假设 W 在 $[0, R_0]$上有下界和上界，可知 W 是倍增的：对 $s \le r \le 2s$， $W(r) \simeq W(s)$。

固定 $x \in \mathbb{R}^n$ 以及一个包含 x 的立方体 Q，其边长为 ℓ。假设 $\sqrt{n}\ell \le |x|/2$。则$Q \subset \{y : |x|/2 \le |y| \le 2|x|\}$。根据上述估计，这意味着对于所有 $y \in Q$， $w(y) \simeq w(x)$，因此$\langle w\rangle_Q \simeq w(x)$。现在假设 $\sqrt{n}\ell > |x|/2$。则 $Q \subset B := B(0, \rho)$，其中 $\rho = 3\sqrt{n}\ell$。如果 $\rho \le R_0$，那么在 Q上， w 有上下界，因此显然有 $\langle w\rangle_Q \lesssim w(x)$。所以，假设 $\rho > R_0$。由于 $|Q| \simeq |B(0, \rho)|$ 且$w > 0$，我们有

$$\langle w\rangle_Q \lesssim \langle w\rangle_B = \frac{1}{|B|}\int_B w(x)\,\mathrm{d}x \lesssim \rho^{-n}\int_0^\rho W(r) r^{n-1}\,dr = \rho^{-n}\left(\int_0^{R_0} + \int_{R_0}^\rho\right) W(r) r^{n-1}\,dr.$$

由于 W在 $[0, R_0]$上有界， $\rho \ge R_0$， $\gamma < n$，并且 $r^\gamma W(r)$ 在 $[R_0, \infty)$ 上是非递减的，

$$\int_0^{R_0} W(r) r^{n-1}\,dr \lesssim 1 \sim W(R_0)R_0^n \le W(R_0)R_0^\gamma \rho^{n-\gamma} \le W(\rho)\rho^\gamma \rho^{n-\gamma} = W(\rho)\rho^n.$$

由于 $r^\gamma W(r)$ 在 $[R_0, \infty)$ 上单调不减，且 $\gamma < n$，

$$\int_{R_0}^\rho W(r) r^{n-1}\,dr \le W(\rho)\rho^\gamma \int_{R_0}^\rho r^{n-\gamma-1}\,dr \lesssim W(\rho)\rho^n.$$

因此 $\langle w\rangle_Q \lesssim W(\rho)$。由于 W几乎处处单调不增，对于 $s \le r$，有 $W(r) \lesssim W(s)$，从而对所有 $x \in Q$，有$\langle w\rangle_Q \lesssim w(x)$。这证实了 $w \in A_1$。□

定理的证明 *4.3*。 由于我们假设 $1 \in A_{p(\cdot)}$，根据定理 1.2 只需证明 (4.4) 为 $p(\cdot$提供相容密度。我们将证明 $h(x)$：=最大值$\{|x|, N\}^{-\beta}$是所有$\beta \in (n, n/\kappa)$ 的相容密度，其中

$$\kappa := \max\left\{\frac{p_- + \alpha}{p_-^2}, 1 - \frac{p_- - \alpha}{p_- p_+}\right\} < 1.$$

事实上，由 (4.3) 可知，最大值中的第一项严格小于 1。 显然，$h \in L^1$ 因为 $\beta > n$。令 $q(\cdot) \in \{p(\cdot)\ p'(\cdot)\}$ 并定义

$$W = h^{1/q(\cdot)} = \max\{|x|, N\}^{-\beta/q(\cdot)}.$$

我们通过验证 $W \in A_1$ 满足 W 的假设，从而证明4.4。

在 $[0, N]$ 上， W 有上下界。在 $[N, \infty)$ 上，我们有 $W = |x|^{-\beta/q(\cdot)}$.。为证明其非增和非减性质，我们首先对 W 作一些逐点估计。对于 $N \le s \le r$，我们有

$$-\frac{1}{\beta}\log\frac{W(r)}{W(s)} = \frac{1}{q(r)}\log r - \frac{1}{q(s)}\log s = \frac{1}{q(r)}\log\frac{r}{s} + \left(\frac{1}{q(r)} - \frac{1}{q(s)}\right)\log s.$$

通过计算指数并利用界（4.4），可知对于两者 q（·） $= p$（·） p'（ ·），

$$\left|\frac{1}{q(r)} - \frac{1}{q(s)}\right| = \frac{|p(s) - p(r)|}{p(r)p(s)} \le \frac{\alpha}{p(r)p(s)}\frac{1}{\log(s)}\log\frac{r}{s}.$$

由此可得

$$\left(\frac{1}{q(r)} - \frac{\alpha}{p(r)p(s)}\right)\log\frac{r}{s} \le -\frac{1}{\beta}\log\frac{W(r)}{W(s)} \le \left(\frac{1}{q(r)} + \frac{\alpha}{p(r)p(s)}\right)\log\frac{r}{s}.$$

乘以 $-\beta$ 并取指数，得到

$$\left(\frac{r}{s}\right)^{-\beta\left(\frac{1}{q(r)} + \frac{\alpha}{p(r)p(s)}\right)} \le \frac{W(r)}{W(s)} \le \left(\frac{r}{s}\right)^{-\beta\left(\frac{1}{q(r)} - \frac{\alpha}{p(r)p(s)}\right)}. \tag{4.5}$$

为了证明 W 在 $[N,\infty)$ 上单调不增，只需证明右侧 (4.5) 中的指数为负。我们分别对 $p(\cdot)$ 和 $p'(\cdot)$ 进行证明。根据关于 α 的假设，

$$\frac{\alpha}{p(r)p(s)} \le \frac{p_-}{p(r)p(s)} \le \frac{1}{p(r)},$$

and

$$\frac{\alpha}{p(r)p(s)} \le \frac{p_-(p_- - 1)}{p(r)p(s)} \le \frac{p(s)(p(r)-1)}{p(r)p(s)} = \frac{1}{p'(r)}.$$

为完成证明，我们证明 $r^\gamma W$（r）关于 $\gamma = \beta\kappa < n$是非递减的。根据（4.5）中的下界，只需证明

$$\gamma \ge \beta\left(\frac{1}{q(r)} + \frac{\alpha}{p(r)p(s)}\right),$$

根据我们对 γ 的定义，这等价于证明

$$\kappa \ge \frac{1}{q(r)} + \frac{\alpha}{p(r)p(s)}.$$

我们分别对 $p(\cdot)$ 和 $p'(\cdot)$ 验证这一点。根据我们对 κ 的定义，

$$\frac{1}{p(r)} + \frac{\alpha}{p(r)p(s)} \le \frac{1}{p_-} + \frac{\alpha}{p_-^2} = \frac{p_- + \alpha}{p_-^2} \le \kappa,$$

由于 $\alpha \le p_-$，

$$\frac{1}{p'(r)} + \frac{\alpha}{p(r)p(s)} = 1 - \frac{1}{p(r)}\left(1 - \frac{\alpha}{p(s)}\right) \le 1 - \frac{1}{p_+}\left(1 - \frac{\alpha}{p_-}\right) = 1 - \frac{p_- - \alpha}{p_- p_+} \le \kappa.$$

□

5. Lp(·)w 的 Diening 条件失效

Diening [Die05，定理 8。1] 证明了，对于 $1 < p_- \le p_+ < \infty$， M 在 $L^{p(\cdot)}$ 上的有界性等价于算子的一致有界性

$$T_{\mathcal{F}} f := \sum_{Q\in\mathcal{F}} \langle |f| \rangle_Q 1_Q,$$

其中 $\mathcal{F}$ 遍历由两两不相交的立方体组成的有限族。在巴拿赫函数空间 $T_{\mathcal{F}}$ 上 X 的一致有界性被称为 X 满足强 Muckenhoupt 条件（参见 [Nie26，定义 3。5]）。正如我们在下一个命题中所证明的，强 Muckenhoupt 条件并不能刻画 M在加权变指数勒贝格空间上的有界性。尽管该条件在 $L_w^{p(\cdot)}$上仍然是必要的（因为 $T_{\mathcal{F}} f \le Mf$），以下例子表明它已不再是充分条件。这一失败进一步促使我们给出定理 1.2中的刻画，该刻画在加权情形下仍然成立。它还对 [Nie26]中紧接在猜想 D 之后提出的另一个问题给出了否定答案。

命题 5.1。 存在一个指数函数 $p(\cdot)$ 和一个定义在 $\mathbb{R}$ 上的权 w，满足 $1 < p_- \le p_+ < \infty$ 和 $w^{p(\cdot)}, w^{-p'(\cdot)} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$，使得

$$\sup_{\mathcal{F}} \|T_{\mathcal{F}}\|_{L_w^{p(\cdot)} \to L_w^{p(\cdot)}} < \infty,$$

但 M 在 $L_w^{p(\cdot)}$ 上无界。

证明。定义

$$p(x) = \begin{cases} 2, & x \le 0, \\ 4, & x > 0, \end{cases} \qquad w(x) = \begin{cases} 1, & x \le 0, \\ x^{1/4}, & x > 0. \end{cases}$$

局部可积性假设对 w 成立，因为 $w^{p(\cdot)} = x$ 且 $w^{-p'(\cdot)} = x^{-1/3}$ 在 $(0,\infty)$ 上。于是

$$\rho_{p(\cdot),w}(f) = \int_{-\infty}^0 |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x + \int_0^\infty |f(x)|^4 x \,\mathrm{d}x. \tag{5.1}$$

取一个有限不相交族 $\mathcal{F}$ 以及 $f \ge 0$ 满足 $\rho_{p(\cdot),\,w}(f) \le 1$。由齐次性和引理 2.2，只需证明 $\rho_{p(\cdot),\,w}(T_{\mathcal{F}} f) \lesssim 1$，且该结论对 f和 $\mathcal{F}$一致成立。对于 $J = (a,\ b) \subset (0,\ \infty)$,

$$\langle x \rangle_J \le b, \qquad \langle x^{-1/3} \rangle_J = \frac{3(b^{2/3} - a^{2/3})}{2(b-a)} \le \frac{3}{2} b^{-1/3}.$$

因此，H¨older 不等式给出

$$\rho_{p(\cdot),w}(\langle f\rangle_J 1_J) = \langle f\rangle_J^4 \int_J x\,dx \le \frac{1}{|J|^4}\int_J f(x)^4 x\,dx \left(\int_J x^{-1/3}\,dx\right)^3 \left(\int_J x\,dx\right) \lesssim \rho_{p(\cdot),w}(f1_J).$$

根据 Jensen不等式，可得到 $J \subset (-\infty, 0)$ 的相同估计；

$$\rho_{p(\cdot),w}(\langle f\rangle_J 1_J) = \int_J \langle f\rangle_J^2\,dx \le \int_J f(x)^2\,dx = \rho_{p(\cdot),w}(f1_J).$$

对于 $I=(-a,\ b)$，当 $a,\ b>0$ 时，我们将其拆分为

$$\langle f\rangle_I = \frac{1}{|I|}\left(\int_{-a}^0 f(x)\,dx + \int_0^b f(x)\,dx\right).$$

第一个积分可由 H¨older 不等式估计；

$$\int_{-a}^0 f(x)\,dx \le a^{1/2}\left(\int_{-a}^0 f(x)^2\,dx\right)^{1/2} \le |I|^{1/2}\rho_{p(\cdot),w}(f1_{(-a,0)})^{1/2} \le |I|^{1/2}.$$

类似地，对于第二个积分，

$$\int_0^b f(x)\,dx \le \left(\int_0^b f(x)^4 x\,dx\right)^{1/4}\left(\int_0^b x^{-1/3}\,dx\right)^{3/4} \lesssim |I|^{1/2}.$$

综上可得 $\langle f\rangle_I \lesssim |I|^{-1/2}$。因此，令 $I=(-a,\ 0]\cup(0,\ b)$，并应用（5.1），

$$\rho_{p(\cdot),w}(\langle f\rangle_I 1_I) = a\langle f\rangle_I^2 + \frac{b^2}{2}\langle f\rangle_I^4 \lesssim \frac{a}{|I|} + \frac{b^2}{|I|^2} \le 1.$$

由于不相交族 $\mathcal{F}$ 至多包含一个同时与两条半直线相交的区间，因此这些估计给出

$$\rho_{p(\cdot),w}(T_{\mathcal{F}} f) = \sum_{J\in\mathcal{F}} \rho_{p(\cdot),w}(\langle f\rangle_J 1_J) \lesssim \rho_{p(\cdot),w}(f) + 1 \lesssim 1.$$

为了证明 M在 $L^{p(\cdot)}_w$上不有界，令 $f(x) = (x\log(e/x))^{-1/2}1_{(0,1)}(x)$。那么

$$\rho_{p(\cdot),w}(f) = \int_0^1 \frac{dx}{x\log^2(e/x)} = 1.$$

由于 f 在(0,1)上递减，对 $0<t<1$ 有

$$Mf(-t) \ge \frac{1}{2t}\int_0^t f(x)\,dx \ge \frac{1}{2}f(t).$$

因此，

$$\int_{-1}^0 Mf(t)^2\,dt \ge \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{dx}{x\log(e/x)} = \infty,$$

所以 $Mf \notin L^{p(\cdot)}_w$。 □

Acknowledgments

我们谨此感谢 EmielLorist 告知我们命题 5.1 中的反例，该反例是借助大语言模型发现的。

AI disclosure statement

我们使用了大语言模型来探索 M 在非加权变指数勒贝格空间中的有界性刻画。更确切地说，在与大语言模型进行的一次漫长初始对话中，我们反复构建了定理1.1的一个非常粗略的证明。值得注意的是，该证明使用了 Diening 条件，而未使用稀疏支配。随后，我们致力于将证明简化为当前证明的非加权版本。之后，我们使用大语言模型从定理1.2 的证明中获得了定理1.1的证明，并且这一推广过程十分顺利。

在整个过程中，我们都使用了大语言模型来查找错误、笔误和相关参考文献 .

所有数学论证的最终版本均由作者撰写并核实，作者对本文中的所有主张和论证承担全部责任。

References

[AM02] E. Acerbi 和 G. Mingione。定常电流变流体的正则性结果。 *Arch. Ration. Mech.* , ( ): –259, *Anal.* 164 3 213 2002。[Ber99] E. Berezhnoi。理想巴拿赫空间中 Hardy–Littlewood极大函数的双权估计。*Proc. Amer. Math. Soc.*, 127(1):79–87, 1999。[CF74] R. Coifman 和 C. Fefferman。极大函数和奇异积分的加权范数不等式。 *Studia Math.* 51 3 241 250, 1974 *Studia* , ( ): – 。[CJRdF83] R. Coifman、P. Jones 和 J. Rubio de Francia。BMO函数的构造性分解与权的因子分解。 *Proc. Amer. Math. Soc.*, 87(4):675–676, 1983。[CUDH11] D. Cruz-Uribe、L. Diening 和 P. H ¨ ¨ *Fract.* asto。加权 *Calc. Appl. Anal.* 14 3 361 374, 2011 变指数勒贝格空间上的极大算子。 , ( ): – 。[CUF13] D. Cruz-Uribe 和 A. Fiorenza。 *Variable Lebesgue Spaces: Foundations and Harmonic Analysis*。应用与数值调和分析。Birkh¨auser，巴塞尔，2013。[CUFN03] D. Cruz-Uribe、A. Fiorenza 和 C. Neugebauer。变指数空间上的极大函数。 , ( ): –238, 2003。[CUFN04] D. Cruz-Uribe、A. Fiorenza 和 C. Neugebauer。对《变指数空间上的极大函数》的勘误。*Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, 29(1):247–249, 2004。[CUFN12] D. Cruz-Uribe、A. Fiorenza 和 C. Neugebauer。变指数勒贝格空间上极大算子的加权范数不等式。 *J. Math. Anal. Appl.*, 394(2):744–760, 2012。[DHHR11] L. Diening、P. Harjulehto、P. H¨ast¨o 和 M. R ̊u ˇzi ˇcka。 *Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents*，第2017卷，收录于 *Lecture Notes in Mathematics*。Springer，海德堡，2011。[Die04] L. Diening。广义勒贝格空间上的极大函数 $L^{p(\cdot)}$。 *Math. Inequal. Appl.*, 7(2):245–253, 2004。[Die05] L. Diening。Musielak–Orlicz空间和广义勒贝格空间上的极大函数。 *Bull. Sci. Math.*, 129 8 657 700, 2005 ( ): – 。[DR03] L. Diening 和 M. R ̊u ˇzi ˇcka。广义勒贝格空间上的 Calder´on–Zygmund 算子及与流体动力学相关的问题。 *J. Reine Angew. Math.*, 563:197–220, 2003。[FZ03] X.-L. Fan 和 Q.-H. Zhang。 $p(x)$-Laplacian Dirichlet 问题解的存在性。 *Nonlinear Anal.*, 52 8 1843( ): –1852, 2003。[HHLN10] P. Harjulehto、P. H¨ast¨o、 ´U. Lˆe 和 M. Nuortio。非标准增长微分方程综述。*Nonlinear Anal.*, 72(12):4551–4574, 2010。[HL30] G. Hardy 和 J. Littlewood。具有函数论应用的极大定理。 *Acta Math.*, 54(1):81– 116, 1930。[Jon80] P. Jones。权的因子分解。 *Ann. of Math. (2)*, 111(3):511–530, 1980。[Kop07] T. Kopaliani。变指数空间中的下确界卷积与 Muckenhoupt 条件。 *Arch. Math. (Basel)*, 89 2 185( ): –192, 2007。[Kop08] T. Kopaliani。关于变指数勒贝格空间中的 Muckenchaupt 条件。 *Proc. A. Razmadze Math. Inst.*, 148 29: –33, 2008。[KS04] V. Kokilashvili 和 S. Samko。加权空间中的极大算子和分数阶算子。 *Rev. Mat. Iberoam.*, 20 2 493 515, 2004 ( ): – 。[Ler05] A. Lerner。关于变指数空间上的 Hardy–Littlewood极大函数的若干评注。 *Math. Z.*, 251 3 509( ): –521, 2005。[Ler10] A. Lerner。关于变指数空间上极大算子的若干相关问题。 , ( ): – 。[Ler17] A. Lerner。关于加权变指数空间上极大算子的一个对偶性质。载于 M. Cwikel 和 M. Milman 编， *Functional Analysis Harmonic Analysis and Image Processing: A Collection of Papers in Honor of Björn Jawerth* , , , 第 卷, 693 *Contemp. Math.* 283 300 收录于，页码 – 。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2017。[Ler26a] A. Lerner。变指数勒贝格空间上极大算子的有界性判据。 *J. Anal. Math.*, 158 1 65( ): –110, 2026。[Ler26b] A. Lerner。凹巴拿赫函数空间上极大算子的对偶有界性。arXiv:2608 01140, 2026。[Ler26c] A. Lerner。变指数勒贝格空间上的极大算子：一种 $\mathcal{A}_\infty$ 2603 09388, -刻画。 2026 arXiv: 。[LLP10] F. Li、Z. Li 和 L. Pi。图像复原中的变指数泛函。 *Appl. Math. Comput.*, 216(3):870– 882, 2010。[Min06] G. Mingione。极小值的正则性：邀您走进变分法的黑暗面。 *Appl. Math.*, 51 4 355 426, 2006 ( ): – 。[Muc72] B. Muckenhoupt。Hardy极大函数的加权范数不等式。 *Trans. Amer. Math. Soc.*, 165 207 226, 1972 : – 。[Nek04] A. Nekvinda。 $L^{p(x)}(\mathbb{R})$上的 Hardy–Littlewood 极大算子。 *Math. Inequal. Appl.*, 7(2):255–265, 2004。[Nie26] Z. Nieraeth。Muckenhoupt 条件。 *J. Funct. Anal.*, 290(1):111209, 2026。[RdF82] J. Rubio de Francia。权的因子分解与外推。 *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 7 395, 1982 2 393( ): – 。[Rut14] D. Rutsky。 A_1 ´ 221 3 231 247, -正则性与 2014 Calderon–Zygmund 算子的有界性。 *Studia Math.*, ( ): – 。[Rut16] D. Rutsky。可测函数巴拿赫格中的 A_1 *Zap.* -正则性与 *Nauchn. Sem. POMI* 447 113 229 5 561 Riesz变换的有界性。 , : –122, 2016。俄文；英文译本见《数学科学杂志（纽约）》, ( ): – 567, 2018。

[R˚uˇz00] M. R
˚ *Electrorheological Fluids: Modeling and Mathematical Theory* 1748 *Lecture Notes in* uˇziˇcka. , *Mathematics* 2000
第 卷。施普林格出版社，柏林，。[Sha26] A. Shalukhina. 齐性型空间中 Diening 平均判别准则的简便证明，2026年。
arXiv:2611.15808.Delft Institute of Applied Mathematics, Delft University of Technology, P.O. Box 5031, 2600 GA Delft,The Netherlands*Email address*: f.g.j.diasdecarvalho@tudelft.nlAalto University, Department of Mathematics and Systems Analysis, P.O. Box 11100, FI-00076 Aalto, Fin-land*Email address*: tuomas.oikari@aalto.fi

Washington University in St. Louis、 Department of Mathematics、 One Brookings Drive、 St. Louis、 MO、63130、 USA*Email address*: r.troy@wustl.edu