arXiv:2611.33066v1 [math.RA] 24 Nov 2026

S预克隆与伽罗瓦连接${}^{S}\mathrm{Pol}$–${}^{S}\mathrm{Inv}$，第二部分：布尔 $\pm$预克隆

Peter Jipsen 查普曼大学数学系，
加利福尼亚州奥兰治（美国）

Erkko Lehtonen 代数研究所，约翰内斯·开普勒林茨大学（奥地利）

Reinhard P¨oschel 代数研究所 德累斯顿工业大学数学系（德国）

2026年11月17日

摘要

我们继续研究第一部分中开始探讨的 S 预克隆，并专门研究布尔 $\pm$ 预克隆的情形，其中 $S=\{+,-\}$ 是二元群，基集为 $A=\{0,1\}$。主要结果包括对所有布尔 $\pm$ 预克隆构成的格 ${}^{\pm}\mathcal{L}_2$ 中极大和极小布尔 $\pm$ 预克隆的完整分类。我们证明，极大布尔 $\pm$ 预克隆恰有九个。

由此，我们得到关于 $\pm$ 预克隆的完备性定理：一组 $\pm$ 运算生成所有 $\pm$ 运算，当且仅当其中包含一个不保持极大 $\pm$ 预克隆的九个定义性 $\pm$ 关系中任何一个的运算。接下来，我们对二十个极小布尔 $\pm$ 预克隆（格的原子）进行分类，并分别通过一个生成 $\pm$ 运算加以描述。

我们还研究自对偶 $\pm$-预克隆，刻画了八个极大和九个极小自对偶 $\pm$-预克隆，并证明了相应的完备性定理。此外，我们纳入了 Vojtˇech David 得出的结果：格 ${}^{\pm}\mathcal{L}_2$ 是不可数的，这与经典布尔克隆 Post 格的可数性形成对照。该结果通过将一个不可数的克隆子偏序集嵌入 ${}^{\pm}\mathcal{L}_2$ 得以证明。

最后，我们研究经典布尔克隆在 ${}^{\pm}\mathcal{L}_2$ 中的原像类，并完整描述了一元情形以及若干非一元极小克隆。我们还证明了一个关于含多数运算的 ±-预克隆的 Baker–Pixley 型定理，表明此类 ±-预克隆由其二元 ±-关系所确定。

引言

一种 S-预克隆在前文《第一部分》 [JipLP2024], 中被引入，它是一个 S-运算的集合 $f : A^n \to A$ 其中每个参数都被赋予一个符号 $s \in S$，而 S 是一个决定这些符号在复合下行为的幺半群。S-预克隆推广了经典克隆，并且是预克隆（算子）的子类。

在第一部分中，我们建立了 S-运算、 S-预克隆、 S-关系和 S-关系克隆的定义。我们证明了这些概念通过由 S-保持性质（$f \overset{S}{\triangleright} \varrho$）诱导的伽罗瓦连接 ${}^{S}\mathrm{Pol}–{}^{S}\mathrm{Inv}$ 相互配对。第一部分的核心结果是，当 A 为有限时， S-预克隆和 S-关系克隆恰好是伽罗瓦闭集（定理 4.1[I] 和 4.6[I]）[1]。第一部分还证明了所有 S-预克隆的格（${}^{S}\mathcal{L}_A$）结构的基本事实，表明该格既是原子的也是余原子的，并且具有有限多个原子和余原子（命题 5.1[I]，命题 5.2[I]）。

其中， $S = \{+, -\}$ 为配备乘法的二元群这一特例在第一部分中被确定为动机示例。在此情形下，S-运算被称为 ±-运算，由此得到的结构称为 ±-预克隆。

在本研究的第二部分中，我们专门研究 ±-预克隆情形，并将基集限制为布尔集 $A = \{0, 1\}$。布尔±-预克隆所成的格记为 ${}^{\pm}\mathcal{L}_2$。

关于 ${}^{\pm}\mathcal{L}_2$ 的一个主要问题是其基数： ${}^{\pm}\mathcal{L}_2$ 的大小是可数的还是不可数的（见第 12 节）？ 这一问题意义重大，因为 Post 格中有可数多个经典布尔克隆，而一般而言，布尔克隆前序列子有不可数多个（定理 12.1）。

本文对格 ${}^{\pm}\mathcal{L}_2$ 进行了详细的结构分析。我们在第 7 节简要回顾预备知识，并在 ±-预克隆的框架下介绍伽罗瓦连接 ${}^{S}\mathrm{Pol}–{}^{S}\mathrm{Inv}$。我们还引入了后续各节证明所需的 S-代数和 S-项的概念。此外，本文还提供了关于 S-预克隆和 S-关系克隆基本定义的更多细节与示例

[1]为在第一部分和第二部分之间保持统一的编号体系，各节以及所有带编号数学陈述的编号均从第一部分结束处继续。对第一部分材料的引用还会以右上标 (I) 的形式特别标示。

在第一部分中。

在第8节中，我们对极大的布尔 ±-预克隆进行了分类。基于第一部分中刻画极大 S-预克隆的结果（命题 5.3[I]），我们发现恰好存在九个极大的布尔 ±-预克隆（定理 8.5）。这一列表使我们能够为 ±-预克隆提出并证明完备性定理（定理 8.7）。

我们在第10节中对极小的布尔 ±预克隆进行了分类。这些是格 $^{\pm}\mathcal{L}_2$ 的原子。我们证明共有二十个极小的布尔 ±预克隆，它们按其最小符号序列分类为：(+, +, +, −)、(+, +, −, −)、(+, +, −) 和 (+, −)（定理 10.11）。

在第11节中，我们研究自对偶 ±预克隆。我们刻画了八个极大的自对偶 ±预克隆和九个极小的自对偶 ±预克隆（命题 11.2）。由于自对偶 ±预克隆的格（$^{\pm}\mathcal{L}_2^{\mathrm{sd}}$）既是原子的又是余原子的（命题 11.3），因此我们得出了关于自对偶 ±预克隆的完备性定理（定理 11.4）。

我们将在最后的第 12 节进一步讨论 $^{\pm}\mathcal{L}_2$ 这一格的相关方面，包括其基数（Vojtˇech David 的定理 12.1）、针对 $F \in \mathcal{L}_2$的原像类（$F^{\boxdot}$）这一概念，以及关于 ±-预克隆的 Baker–Pixley 定理（命题 12.12）。

7 预备知识

在本节中，我们首先简要回顾与 S-预克隆相关的基本概念和记号，并以一种专门针对所谓±-预克隆的形式给出这些定义。有关更多细节和示例，请参阅第一部分。

我们令 S 表示二元群。更具体地说，我们选取带有乘法的 $S = \{+1, -1\}$，简记为 $S = \{+, -\}$ （参见我们的“动机性示例”，示例 2.5[I]）。因此， $+$ 是 S的单位元。在许多记号和术语中，我们使用符号 $\pm$ 来指代所选的 S。

集合 A 上所有 n 元运算的集合记为 $\mathrm{Op}^{(n)}(A)$，而 $\mathrm{Op}(A) := \bigcup_{n\in\mathbb{N}_+} \mathrm{Op}^{(n)}(A)$。一个 ±-运算是一个运算 $f\colon A^n \to A$，并配有一个符号函数 $\mathrm{sgn}(f) = (s_1, \ldots, s_n) \in \{+, -\}^n$，为 f 的自变量标记 $+$ 或 $-$ （符号）。集合 A 上所有 n 元 ±-运算的集合记为 $^{\pm}\mathrm{Op}^{(n)}(A)$，而 $^{\pm}\mathrm{Op}(A) := \bigcup_{n\in\mathbb{N}_+} {}^{\pm}\mathrm{Op}^{(n)}(A)$。 ±-运算 f° 的底层函数是运算 f，它是通过忽略符号函数得到的。（参见定义 2.2[I]。）平凡的 ±-运算或（平凡）投影是底层运算为投影且本质参数的符号为 $+$ 的 ±-运算。

一个 ±-预克隆 是一个集合 $F \subseteq {}^{\pm}\mathrm{Op}(A)$，由 ±-运算组成，其中包含带有符号 $+$ 的恒等运算 id_A，并且在以下运算 ζ （循环移位）下封闭，

τ（前两个自变量的转置）、∇^s（在第一个位置添加带有符号 $s \in \{+,-\}$ 的虚假自变量）、Δ（如果前两个自变量具有相同符号，则进行变量识别）以及 $\circ$（复合）。由 $F \subseteq {}^{\pm}\mathbf{Op}(A)$ 生成的 ±-预克隆记为 ${}^{\pm}\langle F\rangle$ 或 ${}^{\pm}\langle F\rangle_A$。$A$ 上的 ±-预克隆所成的格记为 ${}^{\pm}\mathcal{L}_A$。（见定义 2.3[I]。）

在 A 上的 m 元 ±-关系 是一个有序对 $\varrho = (\varrho_+, \varrho_-)$，其中包含两个 m 元关系 ϱ_+, $\varrho_- \subseteq A^m$。A 上所有 m 元 ±-关系的集合记为 ${}^{\pm}\mathbf{Rel}^{(m)}(A)$，而 ${}^{\pm}\mathbf{Rel}(A) := \bigcup_{m\in\mathbb{N}_+} {}^{\pm}\mathbf{Rel}^{(m)}(A)$。（参见定义 2.8[I]。）若某个 m 元关系 $\varrho = (\varrho_+, \varrho_-)$ 满足 $\varrho_+ = \varrho_- = \delta^m_\top := \emptyset$，或对于 $\{1,\dots,m\}$ 上的某个等价关系ε 满足 $\varrho_+ = \varrho_- = \delta^m_\varepsilon$，则称其为 ±-对角，其中 δ^m_ε 是对角关系

$$\delta^m_\varepsilon := \{\, (a_1,\dots,a_m) \in A^m \mid (i,j) \in \varepsilon \implies a_i = a_j \,\}.$$

（见定义 2.9[I] 和注释 2.10[I]。）
通常将一个 m 元关系表示为一个有 m 行的矩阵，其列为属于该关系的元组。这样，我们可以将这些元组中特定位置上的元素统称为该关系的“行”（另见定义 2.7[I]）。接下来我们将介绍关系上的若干运算，其中许多运算都可以直观地描述为矩阵上的简单行操作。

7.1 定义（±关系克隆（参见定义 2.11[I]、注释 2.14(A)[I]））。若一个 ±关系集合包含 $\delta^{\pm}$，并且对运算 ζ、τ、pr、$\times$和 $\cap$（在定义 2.11[I] 中记作 $\wedge$）封闭，同时对运算 μ_- 封闭，则称其为一个 ±关系克隆；我们将运算 μ_- 称为通过‘−’进行指标平移，它只是交换 ϱ的正部分和负部分。这些运算定义如下。对于 ${}^{\pm}\mathbf{Rel}(A)$ 中的 $\varrho =$（ϱ_+，ϱ_-）和 $\varrho' =$（ϱ'_+，ϱ'_-），我们令

(1) $\delta^{\pm} := (\Delta_A, \Delta_A)$，(2) $\zeta(\varrho) = \zeta((\varrho_+,\varrho_-)) := (\zeta\varrho_+, \zeta\varrho_-)$（循环移位），(3) $\tau(\varrho) = \tau((\varrho_+,\varrho_-)) := (\tau\varrho_+, \tau\varrho_-)$（前两行的转置），(4) $\mathbf{pr}(\varrho) = \mathbf{pr}((\varrho_+,\varrho_-)) := (\mathbf{pr}\ \varrho_+, \mathbf{pr}\ \varrho_-)$（删除第一行），(5) $\varrho \times \varrho' = (\varrho_+,\varrho_-) \times (\varrho'_+,\varrho'_-) := (\varrho_+ \times \varrho'_+, \varrho_- \times \varrho'_-)$（笛卡尔积），(6) $\varrho \cap \varrho' = (\varrho_+,\varrho_-) \cap (\varrho'_+,\varrho'_-) := (\varrho_+ \cap \varrho'_+, \varrho_- \cap \varrho'_-)$（交集），(7) $\mu_-(\varrho) = \mu_-((\varrho_+,\varrho_-)) := (\varrho_-,\varrho_+)$（按“−”进行指标平移）。

对于 $Q \subseteq {}^{\pm}\mathbf{Rel}(A)$，由 Q 生成的 ±-关系克隆，即包含 Q的最小 ±-关系克隆，记作 ${}^{\pm}[Q]$ 或 ${}^{\pm}[Q]_A$。

利用定义 7.1 中的运算，可以构造出许多其他运算，使得一个 ±-关系克隆在这些运算下封闭（参见注 2.14[I]）。特别是，在后续定理的证明中，我们需要将一个 m元关系 ϱ投影到行 $z_1, \ldots, z_t \in \{1, \ldots, m\}$，得到的 t元关系

$$\mathrm{pr}_{z_1,\ldots,z_t}(\varrho) := \{\, (a_{z_1}, \ldots, a_{z_t}) \in A^t \mid (a_1, \ldots, a_m) \in \varrho \,\}.$$

通过逐分量应用，这自然扩展到 ±关系：对于 $\varrho = (\varrho_+, \varrho_-) \in {}^{\pm}\mathrm{Rel}^{(m)}(A)$, $\mathrm{pr}_{z_1, \ldots, z_t}(\varrho) := (\mathrm{pr}_{z_1, \ldots, z_t}(\varrho_+), \mathrm{pr}_{z_1, \ldots, z_t}(\varrho_-))$。

7.2 定义。 设 $f \in {}^{\pm}\mathrm{Op}^{(n)}(A)$，其中 $\mathrm{sgn}(f) = (s_1, \ldots, s_n)$，且 $\varrho = (\varrho_+, \varrho_-) \in {}^{\pm}\mathrm{Rel}^{(m)}(A)$。我们称 f ±-保持 ϱ，或称 f 是 ϱ的 ±-多态，或称 ϱ对 f不变，并记作 $f \overset{\pm}{\triangleright} \varrho$，如果

$$\forall s \in \{+, -\} : f(\varrho_{s_1 s}, \ldots, \varrho_{s_n s}) \subseteq \varrho_s$$

（见定义 3.4[I]）。换言之，如果 $\mathrm{sgn}(f) = (+, -, \ldots)$，那么 $f \overset{\pm}{\triangleright} \varrho$ 当且仅当

$$f(\varrho_+, \varrho_-, \ldots) \subseteq \varrho_+ \qquad \text{and} \qquad f(\varrho_-, \varrho_+, \ldots) \subseteq \varrho_-.$$

±-保持关系在 ±-运算${}^{\pm}\mathrm{Op}(A)$与 ±-关系 ${}^{\pm}\mathrm{Rel}(A)$之间诱导出一个伽罗瓦连接，相应的算子分别是 ${}^{\pm}\mathrm{Pol}\, Q$(±-关系 $F \subseteq {}^{\pm}\mathrm{Rel}(A)$ 的多态运算)和 ${}^{\pm}\mathrm{Inv}\, F$（ $F \subseteq {}^{\pm}\mathrm{Op}(A)$ 的不变 ±-关系）（参见定义 3.6[I]）。第一部分中（参见定理 4.1[I] 和 4.6[I]）已证明，当 A为有限时，伽罗瓦闭包分别与 ±-预克隆和 ±-关系克隆重合：对于所有 $F \subseteq {}^{\pm}\mathrm{Op}(A)$ 以及所有 $Q \subseteq {}^{\pm}\mathrm{Rel}(A)$,

$$\begin{aligned} {}^{\pm}\langle F \rangle &= {}^{\pm}\mathrm{Pol}\, {}^{\pm}\mathrm{Inv}\, F, \\ {}^{\pm}[Q] &= {}^{\pm}\mathrm{Inv}\, {}^{\pm}\mathrm{Pol}\, Q. \end{aligned}$$

根据伽罗瓦连接 ${}^{\pm}\mathrm{Pol}$–${}^{\pm}\mathrm{Inv}$ 的性质， ${}^{\pm}\mathcal{L}_A$ ±-预克隆的格与 ±-关系克隆的格对偶同构。投影是那些 ±-保持每个 ±-关系的 ±-运算，而 ±-对角是那些对每个 ±-运算都不变的 ±-关系。（参见第 3[I] 节。）

设 F 是一个 ±-预克隆。 F 的正部分 F_+ $(= F^{[+]})$ 是所有满足 $\mathrm{sgn}(f) = (+, \ldots, +)$ 的 $f \in F$ 的集合； F 的负部分 F_- $(= F^{[-]})$ 是所有满足 $\mathrm{sgn}(f) = (-, \ldots, -)$ 的 $f \in F$ 的集合；而 F 的混合部分 $F_\pm$ 是 $F_\pm := F \setminus (F_+ \cup F_-)$。

以下是命题 3.10[I] 和 4.7[I] 的推论。

7.3 命题。 令 $Q \subseteq {}^{\pm}\mathrm{Rel}(A)$。那么， ±-预克隆$F := {}^{\pm}\mathrm{Pol}\, Q$ 的正部分 F_+ 是一个克隆，其定义为

$$F_+ = \mathrm{Pol}\{\sigma \in \mathrm{Rel}(A) \mid \exists \sigma' \colon (\sigma, \sigma') \in Q \text{ or } (\sigma', \sigma) \in Q\}.$$

°由函数 $f \in F$（忽略符号）生成的克隆 $\langle F\rangle$ 为

$$\langle \overset{\circ}{F}\rangle = \mathrm{Pol}\{\sigma \in \mathrm{Rel}(A) \mid (\sigma,\sigma) \in {}^{\pm}[Q]\}.$$

7.4 引理。若 $f \overset{\pm}{\triangleright} (\sigma,\emptyset)\,(\sigma \neq \emptyset)$，则 $+ \in$ 符号函数(f)（f 不可能具有纯负符号函数）。

证明。若对 $s = -$ 有 $\mathrm{sgn}(f) = (-,\dots,-) = (s,\dots,s)$，则 $f \overset{\pm}{\triangleright} \varrho = (\sigma,\emptyset)$ 蕴含 $\emptyset \neq f(\sigma,\dots,\sigma) = f(\varrho_{ss},\dots,\varrho_{ss}) \subseteq \varrho_s = \emptyset$，矛盾。 □

从现在起，我们将进一步专门讨论 $A = \{0,1\}$ 的情形。在这一特殊情形下，A 上的 ±-预克隆称为 布尔 ±-预克隆。布尔 ±-预克隆所成的格记作 ${}^{\pm}\mathcal{L}_2$。

由于在 $A = \{0,1\}$ 上只有一个非平凡置换，此处记为 ∂: $0 \mapsto 1 \mapsto 0$，因此我们称之为对偶（函数或关系，参见定义 5.6(I)），而不称为 ∂-对偶。回忆一下 $f^{\partial}(x_1,\dots,x_n) := (f(x_1^{\partial},\dots,x_n^{\partial}))^{\partial}$，其中 $x^{\partial} := \partial(x)$。显然，我们有（参见命题 5.10(I)）：

7.5 引理。A ±-运算 f 生成一个极小（或极大，分别地）±-预克隆，当且仅当 f^{∂} 也如此。

8 极大布尔 ±-预克隆

命题 5.3(I) 给出了极大 S-预克隆的条件。我们在下述命题中将这些条件专门化到布尔情形 $A = \{0,1\}$ 和 $S = \{e, s_0\} := \{+,-\}$。

8.1 命题。每个极大 ±-预克隆 $F \leq {}^{\pm}\mathrm{Op}(A)$ 都可以表示为 $F = {}^{\pm}\mathrm{Pol}\,\varrho$，其中存在某个 $\varrho = (\varrho_+, \varrho_-) \in {}^{\pm}\mathrm{Rel}(A)$，使得$(*)_+$和$(*)_-$按如下方式定义(对于 $s \in \{+,-\}$)：

$(*)_s$: ϱ_s 是一个对角关系，或者$\mathrm{Pol}\,\varrho_s$ 是一个极大克隆，且$\mathrm{ar}(\varrho) = \mathrm{ar}(\varrho_s)$ 是 $[\varrho_s] = \mathrm{Inv}\,\mathrm{Pol}\,\varrho_s$中非平凡关系的最小元数。

8.2 注。我们回顾一个众所周知的结果：存在五个极大布尔克隆（分别由保 0、保 1、单调、自对偶和线性运算组成），它们可表示为针对以下关系的 $\mathrm{Pol}\ \sigma_i$ $(i \in \{0,1,2,3,4\})$：

- $\sigma_0 := \{0\}$, $\sigma_1 := \{1\}$ (unary),
- $\sigma_2 := \leq := \{(x,y) \in A^2 \mid x \leq y\}$, $\sigma_3 := \{(0,1),(1,0)\}$ (binary),

- $\sigma_4 := \{(x,y,z,u) \in A^4 \mid x+y+z+u = 0\}$ (quaternary).

这些关系可用于命题 8.1 中的 ϱ_+ 和 ϱ_-，尤其是它们具有最小元数。

在定理 8.5 中，我们将列出命题 8.1 中所有真正极大的 $\pm$-预克隆。为此，我们需要以下结果。

8.3 引理。 ${}^{\pm}\mathrm{Pol}(\sigma,\sigma)$ 在 ${}^{\pm}\mathcal{L}_A$ 中是极大的，当且仅当 $(\sigma)\,\mathrm{Pol}$在$\mathcal{L}_A$中是极大的。

证明。 由命题 5.5[(1)]，我们得出映射 $\Phi\colon \mathcal{L}_2 \to {}^{\pm}\mathcal{L}_2$ 满足 $\Phi(F) = \{f \in {}^{\pm}\mathrm{Op}(A) \mid \mathring{f} \in F\}$，且是到 ${}^{\pm}\mathcal{L}_2$ 的一个滤子的嵌入（这里用到了幺半群 $S = \{+,-\}$ 是群这一事实）。因此，只要 $\mathrm{Pol}\,\sigma$ 是极大的，$\Phi(\mathrm{Pol}\,\sigma)$ 就是极大的 $\pm$- 预克隆。我们有 $\Phi(\mathrm{Pol}\,\sigma) = \{f \in {}^{\pm}\mathrm{Op}(A) \mid \mathring{f} \triangleright \sigma\} = \{f \in {}^{\pm}\mathrm{Op}(A) \mid f \overset{\pm}{\triangleright} (\sigma,\sigma)\} = {}^{\pm}\mathrm{Pol}(\sigma,\sigma)$，由此完成证明。注意，$\mathring{f} \triangleright \sigma \iff f \overset{\pm}{\triangleright} (\sigma,\sigma)$ 可由引理 3.5(i)[(1)] 得出。□

回顾定义 2.2[(1)]，$\neg^- \in {}^{\pm}\mathrm{Op}^{(1)}(A)$ 是一元布尔函数$\neg\colon\ 0 \mapsto 1,\ 1 \mapsto 0$（否定），其符号为（–）。对于关系 σ，我们使用记号 $\neg(\sigma)$ 表示将运算 $\neg$应用于 σ 中的所有元组（而不是对偶补集 σ，后者在其他语境中有时记作 $\neg\sigma$）。这里，$\neg(\sigma)$ 与对偶关系 σ^∂重合；参见第 7 节。对于置换$\partial\colon\ A \to A\colon 0 \mapsto 1 \mapsto 0$）。

8.4 引理。 令 $\neg^- \overset{\pm}{\triangleright} \varrho = (\sigma,\sigma')$。则有：

(a) $\sigma' = \neg(\sigma)$ *and* ${}^{\pm}[\varrho] = \{(\alpha,\neg(\alpha)) \mid \alpha \in [\{\sigma,\sigma'\}]_A\}$.

(b) ${}^{\pm}\mathrm{Pol}\,\varrho$ 是 ${}^{\pm}\mathcal{L}_2$ 中的极大 $\pm$-预克隆，当且仅当 $\mathrm{Pol}\,\sigma$ 是 $\mathcal{L}_2$ 中的极大克隆。

证明。（a）：根据 $\pm$-保持的定义，我们有 $\neg(\sigma') \subseteq \sigma$ 和 $\neg(\sigma) \subseteq \sigma'$，因此 $\sigma' = \neg\neg(\sigma') \subseteq \neg(\sigma) \subseteq \sigma'$。于是，对于每个 $(\alpha,\alpha') \in {}^{\pm}[\varrho]$，都有 $\alpha' = \neg(\alpha)$（因为 $\neg^-$ 也必须 $\pm$-保持 (α,α')）。此外，$(\alpha,\alpha') \in {}^{\pm}[\varrho]$ 蕴含 $\alpha \in [\sigma,\sigma']_A$（根据定义 7.1 中的生成规则进行归纳，注意根据定义 7.1(7)，$(\alpha',\alpha) \in {}^{\pm}[(\alpha,\alpha')]$）。反之，若 $\alpha \in [\sigma,\sigma']_A$，则必存在一个 pp-公式 φ，使得 $\alpha = t_\varphi(\sigma,\sigma')$（相关记号见备注 2.14(C)[(1)]）。对于$\alpha' := t_\varphi(\sigma',\sigma)$，我们得到 $(\alpha,\alpha') = t_\varphi((\sigma,\sigma'),(\sigma',\sigma)) \in {}^{\pm}[(\alpha,\alpha')]$。这就证明了（a）的第二部分。

(b)：如果 σ 是一个对角 d，那么 $\varrho = (d,\ \neg(d)) = (d,\ d)$ 就会是平凡的。因此 σ 是非平凡的，正向蕴含由命题 8.1 得出。

关于逆向蕴含，设 $\mathrm{Pol}\,\sigma$ 是一个极大克隆。那么克隆 $\mathrm{Pol}\,\sigma'$ （带有 $\sigma' = \neg(\sigma)$）也是极大的。由于 $\mathcal{L}_2$ 众所周知（尤其是极大克隆），可以验证，$\mathrm{Pol}\,\sigma$ 和 $\mathrm{Pol}\,\sigma'$ 是包含 $\mathrm{Pol}\{\sigma, \sigma'\}$ 的仅有的极大克隆；或者从关系的角度来看，$[\sigma]$ 和 $[\sigma']$ 是包含于 $[\sigma, \sigma']$ 中的仅有的极小关系克隆。

设 $(\alpha, \alpha') \in {}^{\pm}[\varrho]$ 是非平凡的（由 (a) 可知 $\alpha' = \neg(\alpha)$）。我们证明 $\varrho \in {}^{\pm}[(\alpha, \alpha')],$，由此可得 ${}^{\pm}[\varrho]$ 的极小性，从而得到 ${}^{\pm}\mathrm{Pol}\,\varrho$ 的极大性。由 (a) 可知 $\alpha \in [\sigma, \sigma']_A$。因此，极小关系克隆 $[\sigma]$ 或 $[\sigma']$ 至少有一个包含于 $[\alpha]$ 中；于是存在 σ''，使得 $(\sigma, \sigma'') \in {}^{\pm}[(\alpha, \alpha')]$ 或 $(\sigma', \sigma'') \in {}^{\pm}[(\alpha, \alpha')],$，分别成立（如上所述，对 α' 使用与对 α 相同的 pp-公式，以得到 σ''）。由于 $\neg^{-} \overset{\pm}{\triangleright} (\alpha, \alpha')$，由 (a) 可知 $\sigma'' = \neg(\sigma) = \sigma'$ 或 $\sigma'' = \neg(\sigma') = \sigma$，分别成立。因此 $\varrho \in {}^{\pm}[(\alpha, \alpha')]$，证毕。 □

8.5 定理。如下所列，共有九个极大的布尔 $\pm$-预克隆。每个这样的预克隆都具有 $F = {}^{\pm}\mathrm{Pol}\,\varrho$ 的形式，其中 $\pm$-关系为 $\varrho = (\varrho_+, \varrho_-)$：

(a) ${}^{\pm}$*Pol*(σ, σ)，其中 $\sigma \in \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4\}$，参见注 *8.2*。注意 ${}^{\pm}\ \sigma\ \sigma = \{f^{\lambda} \in {}^{\pm}\ A \mid f \in {}^{(n)}\sigma\ \lambda \in S^n\ n \in \mathbb{N}_+\} = \{h \in {}^{\pm}$ *Pol*$(\ ,\ )$ *Op*$(\ )$ *Pol*$(\ ,\ ,$ *Op*$(A) \mid \mathring{h} \in$ *Pol* $\sigma\}$。*(b)* ${}^{\pm}$*Pol*$(\leq, \geq)$（所有函数中，每个具有正符号的自变量都是保序的，而每个具有负符号的自变量都是逆序的），参见例 *3.7*(1)。*(c)* ${}^{\pm}$*Pol*$(A, \emptyset) = {}^{\pm}$*Op*$(A)_+ \cup {}^{\pm}$*Op*$(A)_{\pm} = \{f \in {}^{\pm}$*Op*$(A) \mid + \in$ *Sgn*$(f)\}$（所有具有正符号或混合符号的函数）。*(d)* ${}^{\pm}$*Pol*(∇_A, Δ_A)（由所有布尔 $\pm$-函数组成，其中每个负自变量都是虚假的（包括所有负常数）），$\nabla_A = A^2$, $\Delta_A = \{(x, x) \mid x \in A\}$。*(e)* ${}^{\pm}$*Pol*$(\{0\}, \{1\})$。

证明。首先我们证明，所有列出的 $\pm$-预克隆确实都是极大的。

(a)：根据引理 8.3，(a) 中所有的 $\pm$-预克隆都是极大的，因为 $\mathrm{Pol}\ \sigma_i$ ($i \in \{0, \ldots, 4\}$) 是 $\mathcal{L}_A$ 中众所周知的极大布尔克隆（参见注 8.2）。

(b)：由于 $\neg^{-} \overset{\pm}{\triangleright} (\leq, \geq)$ 和 $\neg(\leq) = \geq$，由引理 8.4(b) 可得，${}^{\pm}\mathrm{Pol}(\leq, \geq)$ 是极大的。不过，${}^{\pm}\mathrm{Pol}(\leq, \geq)$ 的极大性也将在接下来的定理 8.6 中，在更一般的背景下证明。

(c)：将定义 7.1 中的（$\pm$-关系克隆闭包）规则 (2)–(7) 应用于 $(A, \emptyset)$，可知 ${}^{\pm}[(A, \emptyset)]$ 中每个非对角 $\pm$-关系 (σ, σ') 都具有形式 $(d, \emptyset)$ 或 $(\emptyset, d)$，其中某个 $d \in D_A$ 是非空对角关系。显然

$(A,\emptyset) \in {}^{\pm}[(d,\emptyset)]$，因此 ${}^{\pm}[(A,\emptyset)]$ 是一个极小的 $\pm$-关系克隆，因此${}^{\pm}\mathrm{Pol}(A,\emptyset)$是极大的。

(d)：容易看出，${}^{\pm}[(\nabla_A,\Delta_A)]$ 由 $(\emptyset,\emptyset)$ 和所有非空对角线 $d,d'\in D_A$构成的对 (d,d') 组成。如下文情形 3 所示，我们有 $(\nabla_A,\Delta_A)\in{}^{\pm}[(d,d')]$。因此，${}^{\pm}[(\nabla_A,\Delta_A)]$ 是极小的，所以 ${}^{\pm}\mathrm{Pol}(\nabla_A,\Delta_A)$ 是极大克隆。

(e)：由于 $\neg^{-}\overset{\pm}{\triangleright}(\{0\},\{1\})$，由引理 8.4(b)可知，${}^{\pm}\mathrm{Pol}(\{0\},\{1\})$ 是极大克隆。

现在我们证明这个列表是完备的，也就是说，不存在其他极大克隆。设 $F={}^{\pm}\mathrm{Pol}\,\varrho$ 是一个极大 $\pm$-预克隆，$\varrho=(\sigma,\sigma')$。根据命题 8.1 所刻画的可能候选对象，我们区分几种情形：候选对象要么在列表中，即克隆 (a)–(e) 之一；要么我们找到某个更大的克隆（例如，指出一个可由 ϱ 推导出的 $\pm$-关系 ϱ'，即 $\varrho'\in{}^{\pm}[\varrho]$，因此 ${}^{\pm}\mathrm{Pol}\ \varrho\subseteq{}^{\pm}\mathrm{Pol}\,\varrho'$）。

Case 1: $\sigma=\sigma'$。

根据引理 8.3，只有当 $\mathrm{Pol}\,\sigma$ 是极大克隆时，${}^{\pm}\mathrm{Pol}(\sigma,\ \sigma)$ 才是极大的。因此，我们得到 (a) 中的 $\pm$-预克隆。

Case 2: $\sigma\neq\sigma'$, $\sigma'=\emptyset$.

那么 σ 非空，并且根据引理 7.4，我们有 $F_{-}=\emptyset$（没有负部分）。显然，这类最大的 F 包含符号为正或混合符号的 *all* $\pm$-函数。这就是 (c) 中的 $\pm$-预克隆。容易验证，每个符号为正或混合符号的 $\pm$-函数都 $\pm$-保持 $(A,\ \emptyset)$。

因此，从现在起我们可以假设 $\emptyset\neq\sigma\neq\sigma'\neq\emptyset$。

根据命题 8.1，我们需要逐一考察其余所有可能的候选项 $\varrho=(\sigma,\ \sigma')$（注意，由 7.1(7)，${}^{\pm}\mathrm{Pol}(\sigma,\ \sigma')={}^{\pm}\mathrm{Pol}(\sigma',\ \sigma)$，因此只需考虑两对中的一对：$(\sigma,\ \sigma')$ 或 $(\sigma',\ \sigma)$）：

Case 3: $\varrho=(d,d')$，其中 d 和 d' 都是非空对角关系。

对于 $m:=\mathrm{ar}(\varrho)=1$，我们会得到对角 $\varrho=(A,A)$。因此 $m\geq 2$。由于$d\neq d'$必定存在两个自变量 $i,j\in\{1,\ldots,m\}$，使得 $\mathrm{pr}_{i,j}(d)\neq\mathrm{pr}_{i,j}(d')$，因此 $\{\mathrm{pr}_{i,j}(d),\mathrm{pr}_{i,j}(d')\}=\{\nabla_A,\Delta_A\}$，也就是说，${}^{\pm}\mathrm{Pol}\,\varrho$包含于 (d) 中的极大 $\pm$-预克隆 ${}^{\pm}\mathrm{Pol}(\nabla_A,\Delta_A)$。

还需考察可能的候选项 $\varrho=(\sigma,\sigma')$，其中 σ 是非平凡的，因此根据命题 8.1，$\mathrm{Pol}\,\sigma$ 是一个极大克隆。

Case 4: $\mathrm{ar}(\varrho)=1$（一元关系）

有两个一元关系确定一个极大克隆，分别为 σ_0 和 σ_1，以及一个非空一元平凡关系，即 A。因此，还需考虑以下几对：

Case 4a: $\varrho=(\sigma_0,\ \sigma_1)$。

这给出了最大的 $\pm$-预克隆 (e)。

Case 4b: $\varrho = (\sigma_0, A)$ 或 $\varrho = (\sigma_1, A)$。那么 $^{\pm}\mathrm{Pol}\,\varrho$ 包含于 (a) 中的极大$\pm$-预克隆 (σ_i, σ_i)，因为 $\varrho \cap \mu_-(\varrho) = (\sigma_i, A) \cap (A, \sigma_i) = (\sigma_i, \sigma_i)$ $(i \in \{0, 1\})$。

Case 5: $\mathrm{ar}(\varrho) = 2$ (二元关系)

有三个决定极大克隆的二元关系：σ_2、σ_2^{-1}和 σ_3；还有两个非空平凡关系，$\Delta_A = \{(x, x) \mid x \in A\}$ 和 $\nabla_A = A^2$。因此，接下来只需考虑以下几对：

Case 5a: $\varrho = (\sigma_2, \sigma_2^{-1})$.

这给出了极大 $\pm$-预克隆 (b)。

Case 5b: $\varrho = (\sigma_2, \Delta_A)$（等价地，$(\sigma_2^{-1}, \Delta_A)$），或 $\varrho = (\sigma_3, \Delta_A)$。

那么，$^{\pm}\mathrm{Pol}\,\varrho$ 包含于 (a) 中的极大 $\pm$-预克隆 $^{\pm}\mathrm{Pol}(\sigma_i, \sigma_i)$，因为$\varrho \circ \mu_-(\varrho) = (\sigma_i, \sigma_i)$，$i \in \{2, 3\}$。

Case 5c: $\varrho = (\sigma_2, \nabla_A)$（等价地，$(\sigma_2^{-1}, \nabla_A)$）或 $\varrho = (\sigma_3, \nabla_A)$。

与情形 4b 中一样，$^{\pm}\mathrm{Pol}\,\varrho$ 包含于极大 $\pm$-预克隆 $^{\pm}\mathrm{Pol}(\sigma_i, \sigma_i)$，因为$\varrho \cap \mu_-(\varrho) = (\sigma_i, \nabla_A) \cap (\Delta_A, \sigma_i) = (\sigma_i, \sigma_i)$，$i \in \{2, 3\}$。

Case 5d: $\varrho = (\sigma_2, \sigma_3)$。

由于 $\varrho \circ \varrho = (\sigma_2, \Delta_A)$，因此本情形可归约为情形 5b。

Case 6: $\mathrm{ar}(\varrho) = 4$ （四元关系）。

只有一个四元关系能够确定极大克隆，即 σ_4，且我们有非空的平凡关系 $d \in D_A^{(4)}$。因此，接下来只需考虑以下配对：

Case 6a: $\varrho = (\sigma_4, A^4)$。

与情形 4b 和 5c 中一样，$^{\pm}\mathrm{Pol}\,\varrho$ 包含于极大的 $\pm$-预克隆 $^{\pm}\mathrm{Pol}(\sigma_4, \sigma_4)$ 中。

Case 6b: $\varrho = (\sigma_4, d)$，其中 d 是一个四元对角关系，使得存在两个自变量 $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$，满足 $\mathrm{pr}_{i,j}(d) = \Delta_A$。

于是 $\mathrm{pr}_{i,j}(\varrho) = (\nabla_A, \Delta_A)$（因为 $\mathrm{pr}_{i,j}(\sigma_4) = \nabla_A$），也就是说，$^{\pm}\mathrm{Pol}\,\varrho$ 包含于（d）中的极大 $\pm$-预克隆 $^{\pm}\mathrm{Pol}(\nabla_A, \Delta_A)$ 中。因此，$^{\pm}\mathrm{Pol}\,\varrho$ 不是极大的。

□

如前所述，定理 8.5 的 (b) 部分是下面定理的一个特例；在下面的定理中，我们将看到，我们的“动机示例”示例 $2.5^{(1)}$ 不仅对于布尔 $\pm$-预克隆是极大的，而且对于任意有限基集 A 一般而言也是极大的。

8.6 定理。设 $(A, \leq)$ 是一个带有 *0* 和 *1* 且满足 $S = \{+, -\}$ 的有限偏序集。那么 $^{\pm}\mathrm{Pol}(\leq, \geq)$ 是 $^{\pm}\mathcal{L}_A$ 中的一个极大 $\pm$-预克隆。

证明。 此证明是通常的克隆的相应结果之证明的推广，参见 [P¨osK1979, Satz4.3.7]。

设 $\varrho = (\varrho_+, \varrho_-) := (\leq, \geq)$，$F := {}^{\pm}\mathrm{Pol}\,\varrho$，并设 $\sigma = (\sigma_+, \sigma_-) \in {}^{\pm}\mathrm{Inv}^{(m)}\, F \setminus {}^{\pm}D_A$ 是一个非平凡的 (2.9(1)) m元 ±关系。我们将证明 $\varrho \in {}^{\pm}[\sigma]_A$，这将证明 ${}^{\pm}[\varrho]_A$ 是一个极小的 ±关系克隆；因此 ${}^{\pm}\mathrm{Pol}\,\varrho$ 是极大的，证明完毕。

不失一般性，我们可以假设 σ 没有相同行（否则可以删除其中一行，并对得到的 ±关系继续进行），即我们假设对于所有 $i, j \in \{1, \ldots, m\}$，均有 $\mathrm{pr}_{i,j}(\sigma) \not\subseteq (\Delta_A, \Delta_A$。

首先，我们需要为视为矩阵的 σ 引入一些记号。令 $\sigma_+ = \{r_1, \ldots, r_n\}$、$\sigma_- = \{r'_1, \ldots, r'_{n'}\}$（即，我们考虑列 $r_i = (r_i(1) \ldots, r_i(m)) \in A^m$ 和 $r'_i \in A^m$ of ϱ），并令 $(\mathbf{z}_i, \mathbf{z}'_i) := ((r_1(i) \ldots, r_n(i)), (r'_1(i) \ldots, r'_{n'}(i)))$ 表示 σ, $i \in \{1, \ldots, m\}$ 的行。此外，记 $\mathbf{z}_i \leq \mathbf{z}_j$ 时理解为逐分量地，即对于每个 $k \in \{1, \ldots, n\}$，$r_k(i) \leq r_k(j)$；类似地，$\mathbf{z}'_i \geq \mathbf{z}'_j$ 表示对于每个 $k \in \{1, \ldots, n'\}$，$r'_k(i) \geq r'_k(j)$。

我们区分两种情况。

Case 1: 存在 $i, j \in \{1, \ldots, m\}$, $i \neq j$，使得 $\mathbf{z}_i \leq \mathbf{z}_j$ 且 $\mathbf{z}'_i \geq \mathbf{z}'_j$（（等价地，$\mathrm{pr}_{i,j}(\sigma) \subseteq \varrho$）。

我们将证明 $\sigma' := \mathrm{pr}_{i,j}(\sigma) = \varrho$，从而 $\varrho \in {}^{\pm}[\sigma]_A$ 得证。

事实上，由于根据上述假设 σ' 是非平凡的，存在 $(a, b) \in \sigma'_+ \cup \sigma'_-$ 使得 $a \neq b$。先假设 $(a, b) \in \sigma'_+$，于是 $a < b$（因为 $\mathbf{z}_i \leq \mathbf{z}_j$）。那么，对于任意满足 $c \leq d$ 的 $(c, d) \in A^2$，± 运算

$$f(x) := \begin{cases} c & \text{if } x \leq a, \\ d & \text{otherwise} \end{cases}$$

带有 $\mathrm{sgn}(f) = (+)$，属于 F（容易验证它 ±-保持 ϱ），因此 $(c, d) = (f(a)\ f(b)) \in \sigma'_+$。同样，± 运算

$$g(x) := \begin{cases} c & \text{if } x \geq b, \\ d & \text{otherwise} \end{cases}$$

带有符号函数 $g = (-)$ 也属于 F，于是我们得到 $(d, c) = (g(a)\ g(b)) \in \sigma'_-$。由于 $c \leq d$ 是任意选取的，我们有 $\varrho = (\leq, \geq) \subseteq (\sigma'_+, \sigma'_-) = \sigma'$。因此 $\varrho = \sigma'$，因为根据情况 1 的假设有 $\sigma' \subseteq \varrho$，证毕。

在剩余的情形中，$(a, b) \in \sigma'_-$（即 $a > b$），我们可以将上述证明应用于 $\mu_-(\sigma)$ 和 $\sigma'' := \mathrm{pr}_{j,i}(\mu_-(\sigma))$，从而得到 $\varrho = \sigma''$，因此我们也有 $\varrho = \sigma'' \in {}^{\pm}[\sigma]_A$。

Case 2: 所有行都是“不可比较的”，也就是说，若 $\mathbf{z}_i \leq \mathbf{z}_j$ 且 $\mathbf{z}'_i \geq \mathbf{z}'_j$，则 $i = j$（对于 $i, j \in \{1, \ldots, m\}$）。

我们将证明 $\sigma = (A^m, A^m)$，即 σ 是平凡的，这与关于 σ的假设矛盾。因此，这种情况不可能出现。

设 $(b_1, \ldots\ldots, b_m) \in A^m$。考虑带有符号函数 $\operatorname{sgn}(f) = (+, \ldots\ldots, +, -, \ldots\ldots, -)$ 的 $(n + n')$ 元 ± 运算 f（其中有 n 个符号为“+”，以及 n' 个符号为“–”），其定义为

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{x}') := \begin{cases} b_i & \text{if } (\mathbf{x}, \mathbf{x}') = (\mathbf{z}_i, \mathbf{z}'_i) \text{ for } i \in \{1, \ldots, m\}, \\ 0 & \text{if } \exists\, i \in \{1, \ldots, m\} : \mathbf{x} \le \mathbf{z}_i, \mathbf{x}' \ge \mathbf{z}'_i \text{ and } (\mathbf{x}, \mathbf{x}') \ne (\mathbf{z}_i, \mathbf{z}'_i), \\ 1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

这里，$(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = ((x_1, \ldots\ldots, x_n), (x'_1, \ldots\ldots, x'_{n'})) \in A^n \times A^{n'}$。于是 f 是良定义的，并且它 ±-保持 ϱ（即，相对于 $\le$减小某个 x_k 的值，或增大某个 x'_k 的值，都不会增大 f 的值）—— 对于这两个性质，上述各行之间的“不可比性”都是必要且不可或缺的。注意，$(b_1, \ldots\ldots, b_m) = (f(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}'_1) \ldots\ldots, f(\mathbf{z}_m, \mathbf{z}'_m))$ 等于 $f(r_1, \ldots\ldots, r_n, r'_1, \ldots\ldots, r'_{n'})$（$f$ 逐分量地作用），但后者必须属于 σ_+，因为 $f \overset{\pm}{\triangleright} \sigma$ 和 $r_1、\ldots\ldots、 r_n \in \sigma_+$ 和 $r'_1、\ldots\ldots、 r'_{n'} \in \sigma_-$。

类似地，可以证明 $(b_1, \ldots, b_m) \in \sigma_-$ 使用以下带有符号的 ± 元运算g，其符号序列为 $(-, \ldots, -, +, \ldots, +)$（其中有 n 个符号为‘–’，有 n' 个符号为‘+’）

$$g(\mathbf{y}, \mathbf{y}') := \begin{cases} b_i & \text{if } (\mathbf{y}, \mathbf{y}') = (\mathbf{z}_i, \mathbf{z}'_i) \text{ for } i \in \{1, \ldots, m\}, \\ 0 & \text{if } \exists\, i \in \{1, \ldots, m\} : \mathbf{y} \ge \mathbf{z}_i, \mathbf{y}' \le \mathbf{z}'_i \text{ and } (\mathbf{y}, \mathbf{y}') \ne (\mathbf{z}_i, \mathbf{z}'_i), \\ 1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

于是 $(b_1, \ldots, b_m) = (g(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}'_1) \ldots, g(\mathbf{z}_m, \mathbf{z}'_m)) = g(r_1, \ldots, r_n, r'_1, \ldots, r'_{n'}) \in \sigma_-$，因为 $g \overset{\pm}{\triangleright} \varrho$。由于 $(b_1, \ldots, b_m)$ 是任意选取的，因此有 $\sigma = (A^m, A^m)$。

□

定理 8.5 中对极大 ±-预克隆的完整描述，使完备性问题变得可处理。若一个 ± 元运算集合 $F \subseteq {}^{\pm}\operatorname{Op}(A)$ 能生成所有 ± 元运算：${}^{\pm}\langle F\rangle = {}^{\pm}\operatorname{Op}(A)$，则称其为完备 。

8.7 定理（关于 ±-预克隆的完备性定理）。集合 $F \subseteq {}^{\pm}\operatorname{Op}(A)$ 中的±-运算是完备的，当且仅当对于以下九个 ±-关系中的每一个，都存在 F 中的一个 ±-运算不保持该关系：(σ_i, σ_i) 对于$i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$，$(\le, \ge)$，$(A, \emptyset)$，(∇_A, Δ_A)，$(\{0\}, \{1\})$。

证明。格 ${}^{\pm}\mathcal{L}_2$ 是余原子的，依据命题 5.1(3)[1]。因此，F 是完备的，当且仅当 F（因而 ${}^{\pm}\langle F\rangle$也）不包含于某个极大±-预克隆中。由于根据定理 8.5，每个极大 ±-预克隆都具有如下形式：$M = {}^{\pm}\operatorname{Pol}\varrho$，其中 ϱ 是所指示的九个 ±-关系之一，因此只需找到一个±-运算 $f \in F$，使其不保持 ϱ。

□

9 S-代数与 S-项

为了证明后续各节中的一些结果，我们需要S-代数以及 S-代数语言中的项和项运算的概念。这些概念是对通常代数中经典的项和项运算概念相当直接的改编。不过，由于预期的递归定义对于任意幺半群 S并不能很好地发挥作用，因此仍需谨慎处理。

9.1 定义。 设 S 是一个固定的有限幺半群。 S-代数 是一个结构$\mathbf{A} = (A, (f_i)_{i\in I})$，其中 A是一个集合，$(f_i)_{i\in I}$是定义在 A上的一族 S-元运算，每个 f_i的符号函数为 $\lambda_i = (s_1^i, \ldots, s_{n_i}^i)$。族 $(\lambda_i)_{i\in I}$称为 S-代数$\mathbf{A}$的型。

对于型 $\tau = (\lambda_i)_{i\in I}$和变量集 X，令 $(f_i)_{i\in I}$为一组运算符号，并按通常的递归方式定义型为 τ且基于 X 的项。每个变量 $x_i \in X$ 都是一个项；如果 f_i 是一个符号函数为 $\mathrm{sgn}(f_i) = \lambda_i = (s_1^i, \ldots, s_{n_i}^i)$ 的运算符号，且 $t_1, \ldots, t_{n_i}$都是项，那么 $f_i(t_1, \ldots, t_{n_i})$ 也是一个项。（换言之，这些就是通常普遍代数意义下型为 $(n_i)_{i\in I}$ 的项。）这里， f_i称为根符号，而 $t_1, \ldots, t_{n_i}$称为项 $f_i(t_1, \ldots, t_{n_i})$ 的直接子项。项 $x_i \in X$的根符号是 x_i，且该项没有直接子项。

9.2 定义 （S-项）。 对于任意类型为 τ的项 t，我们按照以下递归方式为 t 中变量的每次出现赋予一个符号。如果 $t = x_i$ 是一个变量，那么唯一的变量 x_i 获得符号 e （ S 的单位元）。如果 $t = f_i(t_1, \ldots, t_n)$，其中 f_i 是一个 S-运算符号，其符号函数为 $\mathrm{sgn}(f_i) = (s_1^i, \ldots, s_n^i)$，那么在 t 中，位于直接子项 t_j 内的变量 x 的一次出现获得符号 ss_j^i （ S 中的乘积），其中 s 是 x 在项 t_j 中的符号。若一个项 t 对于每个变量 $x_i \in X$， x_i 在 t 中的每次出现都具有相同的符号，则称 t 为 S-项 。

9.3 定义 （递归 S-项与 S-项运算）。设 $X_n = \{x_1, \ldots, x_n\}$（变量符号集）。带有符号函数（$s_1, \ldots, s_n$）的、在 X_n 上的递归 S-项 t定义如下：

1. 每个变量 $x_i (i \in \{1, \ldots, n\})$ 都是关于 X_n 的递归 S-项，其符号为 $(s_1, \ldots, s_{i-1}, e, s_{i+1}, \ldots, s_n)$，对所有 $s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n \in S$ 均成立。
2. 设 f 是一个 m 元运算符号，其符号函数 $\mathrm{sgn}(f)$ 为 $= (s_1, \ldots, s_m)$；并且对 $j \in \{1, \ldots, m\}$，设 t_j 是关于 X_n 的递归 S-项，其符号为 $(s_{j,1}, \ldots, s_{j,n})$，且满足 $s_{j,i}s_j = s_{j',i}s_{j'} =:$ 对所有 $i \in \{1, \ldots, n\}$ 及 $j, j' \in \{1, \ldots, m\}$ 均成立。那么， $f(t_1, \ldots, t_m)$ 是关于 X_n 的递归 S-项，其符号为 $(s'_1, \ldots, s'_n)$。

带有符号 $(s_1, \ldots, s_n)$ 的递归 S-项 t在 X_n上通过通常的递归诱导出一个 S-项运算 $t^{\mathbf{A}}$，其在 S-代数 $\mathbf{A}$ 上的符号为 $(s_1, \ldots, s_n)$。

1. 如果 $t = x_i (i \in \{1, \ldots, n\})$，则 $t^{\mathbf{A}} = \mathrm{pr}_i^{(m)}$。**2.** 如果 $t = f(t_1, \ldots, t_m)$，其中 f 的符号以及子项 $t_1, \ldots, t_m$ 的符号满足上述定义的条件，则 $t^{\mathbf{A}} = f^{\mathbf{A}}(t_1^{\mathbf{A}}, \ldots, t_m^{\mathbf{A}})$。

9.4 命题。

(i) 每个类型为 τ 、在 X_n 上递归的 S-项都是一个 S-项。此外，若 t的符号函数为 $(s_1, \ldots, s_n)$，那么对于 $i \in \{1, \ldots, n\}$， x_i 的每次出现都在 t中具有符号s_i 。(ii) 若 S 是右消去幺半群，则 S-项的每个子项都是一个S-项。(iii) 若 S 是右消去幺半群，则每个类型为 τ 、在 X_n 上的 S-项都是递归的 S-项。

证明。 **(i)** 我们对项的复杂度进行归纳，证明：若 t 是一个符号函数为$(s_1, \ldots, s_n)$的递归 S-项，那么对于 $i \in \{1, \ldots, n\}$， x_i的每次出现都在 t中具有符号 s_i ；断言由此得证。若 $t = x_i$ 是一个符号函数为$(s_1, \ldots, s_{i-1}, e, s_{i+1}, \ldots, s_n)$的递归 S-项，那么显然 x_i在 t 中具有符号 e。现在设 $t = f(t_1, \ldots, t_m)$，其中 $\mathrm{sgn}(f) = (s_1, \ldots, s_m)$，并且对于 $j \in \{1, \ldots, m\}$， t_j是一个符号函数为$(s_{j,1}, \ldots, s_{j,n})$的递归$S$-项，使得对所有 $i \in \{1, \ldots, n\}$，均有$s_{j,i}s_j = s'_i$。根据归纳假设， x_i 在 t_j 中的每次出现的符号都是$s_{j,i}$; x_i在 t_j中的每次出现都在 t 中具有符号$s_{j,i}s_j = s'_i$——这对所有 $j \in \{1, \ldots, m\}$均成立。

(ii) 只要证明 an S-项的直接子项是 S-项，断言便可成立。设 $t = f(t_1$、.....、$t_n)$ 是一个 S-项，其中 f 是一个符号为 $(s_1$、.....、 $s_n)$ 的运算符号。假设对于某个 $j \in \{1, \ldots, n\}$，直接子项 t_j 中包含变量 x 的两个出现，其符号分别为 s 和 s' （在 t_j 中）。这些 x 的出现，在 t 中的符号分别为 ss_j 和 $s's_j$ 。由于 t 是一个 S-项，我们有 $ss_j = s's_j$。根据右消去性质可得 $s = s'$。因此，t 的每个直接子项 t_j 都是一个 S-项。

(iii) 我们根据项的复杂度进行归纳法证明：如果 t 是一个 S-项，并且 $(s_1, \ldots, s_n) \in S^n$ 满足：对于 $i \in \{1, \ldots, n\}$， x_i 的每次出现，在 t 中的符号都是 s_i，那么 t 是一个符号函数为 $(s_1, \ldots, s_n)$ 的递归 S-项；注意，根据第 **(ii)** 部分，这样的归纳法是可行的。归纳基础显然成立： $t = x_i$ 是一个 S-项，其中 x_i 的唯一一次出现具有符号 e，并且它是每个符号函数 $(s_1, \ldots, s_{i-1}, e, s_{i+1}, \ldots, s_n)$ 的递归 S-项。现在假设 $t = f(t_1, \ldots, t_m)$，其中 $\mathrm{sgn}(f) = (s_1, \ldots, s_m)$，并且对于 $i \in \{1, \ldots, n\}$， x_i 的每次出现，在 t 中的符号都是 s'_i。根据第 **(ii)** 部分，对于 $j \in \{1, \ldots, m\}$， t_j 是一个 S-项，因此，对于 $i \in \{1, \ldots, n\}$， x_i 在 t_j 中的每次出现，在 t_j 中的符号都是 $s_{j,i}$，其中存在某个 $s_{j,i} \in S$ 使得 $s_{j,i}s_j = s'_i$。根据归纳假设， t_j 是一个符号函数为 $(s_{j,1}, \ldots, s_{j,n})$ 的递归 S-项。因此， $t = f(t_1, \ldots, t_m)$ 是一个符号函数为 $(s'_1, \ldots, s'_n)$ 的递归 S-项。

□

9.5 注记。 如果幺半群 S 不是右可消的，则 S-项的子项可能不是 S-项。例如，设 $S = (\{0,1\},\ \wedge)$ 是带中性元 1 的二元素半格，并考虑由一个运算符号 f 组成的 S-代数类型，其符号函数为 $(0,\ 1)$。那么 $f(f(x_1,\ x_1)\ x_2)$ 是一个 S-项，因为 x_1 的两次出现都具有符号 0，而 x_2 的出现具有符号 1；但其子项 $f(x_1,\ x_1)$ 不是 S-项。

即使在非右可消情形下，考虑由 S-项诱导的 S-项运算也是有意义的。然而，我们无法完全用 S-运算来写出递归定义（因为 S-项的子项可能不是 S-项）。不过，我们仍然可以利用基础运算完成递归，并在最后赋予符号。具体而言，若 t 是一个在 X_n 上的 S-项，并且（s_1、.....、 s_n）满足以下条件：对于 $i \in \{1,\dots,n\}$， x_i 的每次出现都在 t 中具有符号 s_i，那么我们可以说 t 具有符号（s_1、.....、 s_n），并且 S-项运算 $t^{\mathbf{A}}$ 具有符号（s_1、.....、 s_n）。

我们主要关注 S 是右可消幺半群的情形。由命题 9.4 可知，在这种情况下， X_n 上的所有 S-项都是递归的。

我们将证明留作读者的练习：对于一个 S-代数 $\mathbf{A} = (A,\ (f_{\mathbf{A}i})_{i\in I})$，由 S-项在 $\mathbf{A}$ 上诱导的所有 S-运算构成一个 S-预克隆。此外，每个 S-预克隆都可由某个 S-代数以这种方式得到。

9.6 定义。非平凡函数 $f \in {}^{S}\mathrm{Op}(A)$ 称为 S-近投影，如果对符号相同的自变量进行变量识别（参见定义 2.3(5)[1] 和注记 2.4[1]），总会得到一个平凡函数，即 ${}^{S}J_A$ 中的一个投影。更确切地说，若对于所有满足 $p \neq q$ 且第 p 个与第 q 个自变量符号相同的 $p,\ q \in \{1,\dots,n\}$，都存在一个 $i \in \{1,\dots,n\}$，使得第 i 个自变量的符号为 e（ S 的单位元），并且只要 $x_p = x_q$，就有 $f(x_1,\ .....,\ x_n) = x_i$。非平凡函数 $f \in {}^{S}\mathrm{Op}_A^{(n)}$ 称为 S-半投影，如果存在 $i \in \{1,\dots,n\}$，使得第 i 个自变量的符号为 e，并且只要存在两个相等且符号相同的自变量，就有 $f(x_1,\ .....,\ x_n) = x_i$。

9.7 引理。 设 S 是一个带单位元 e 的右消去幺半群。设 f 是一个 n 元 S 近投影。则 ${}^{S}\langle f\rangle$ 不包含元数小于 n 的非平凡 S 运算。

证明。 设 f 是一个符号为 $\lambda = (s_1,\dots,s_n)$ 的 n 元 S 近投影。设 $\mathbf{A} = (A, f)$ 是一个类型为 $\tau = (\lambda)$ 的 S-代数。如果我们证明：对于每个小于 n 的正整数 m，类型为 τ 且在 X_m 上的每个 S 项 t 在 $\mathbf{A}$ 上诱导一个平凡的 S 运算，即，对于某个 $i \in \{1,\dots,m\}$， $t^{\mathbf{A}} = \mathrm{pr}_i^{(m)}$，且本质的第 i 个参数的符号为 e，则该命题成立。我们通过对项的复杂度进行归纳法来证明这一点。

若 $t = x_i \in X_m$，则 $t^{\mathbf{A}} = \mathrm{pr}_i^{(m)}$，且本质的第 i 个论元的符号为 e，因为按定义，项 x_i 的唯一变量的符号为 e。

现在考虑 $t = f(t_1, \ldots, t_n)$ 的情形。对于 $j = 1, \ldots, n$，由引理 9.4(ii)，直接子项 t_j 是一个 S-项。根据归纳假设，对于 $j = 1, \ldots, n$，我们有 $t_j^{\mathbf{A}} = \mathrm{pr}_{i_j}^{(m)} = x_{i_j}^{\mathbf{A}}$，其中某个 $i_j \in \{1, \ldots, m\}$ 满足此关系，且变量 x_{i_j} 在 t_j 中的符号为 e。因此，直接子项 t_j 中 t 内的 x_{i_j} 的各次出现，其符号均为 $es_j = s_j$。事实上，t 中 x_{i_j} 的每次出现的符号都是 s_j，因为 t 是一个 S-项。因此，项 $f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$ 是一个 S-项，并且有 $t^{\mathbf{A}} = (f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}))^{\mathbf{A}}$。由于 $m < n$，变量 $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$ 并非两两不同。由于 f 是一个 S- 近投影，因此对某个满足 $s_\ell = e$ 的 $\ell \in \{1, \ldots, n\}$，有 $(f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}))^{\mathbf{A}} = \mathrm{pr}_{i_\ell}^{(m)} = x_{i_\ell}^{\mathbf{A}}$，故本质的第 i_ℓ 个论元的符号为 e。由此可知，$t^{\mathbf{A}}$ 是一个平凡的 S-运算。

□

9.8 注记。引理 9.7 对于并非右可消的幺半群 S 可能不成立。作为一个反例，考虑非右可消幺半群 $(S, \circ)$，其中对所有 $x \in S$ 都有 $S = \{e, a, b\}$ 和 $e \circ x = x \circ e = x$，并且对所有 x、$y \in \{a, b\}$ 都有 $x \circ y = a$；以及定义在 $\{0, 1\}$ 上的符号 (a, b) 的 S 运算 f，其规则为：对所有 x、$y \in \{0, 1\}$，$f(x, y) = 0$。S 运算 f 是一个 S 近投影；定义 9.6 的条件平凡地得到满足。然而，$^{S}\langle f\rangle$ 包含由项 $t = f(x, f(x, x))$ 在 $\mathbf{A} = (\{0, 1\}, f)$ 上所诱导的 S 运算，而该项运算是符号 (a) 的一元常值 0 运算，是一个非平凡的 S 运算，其元数小于 f 的元数。

10 极小布尔 ±-预克隆

在本节中，我们将描述所有极小的 ±-预克隆，即格 $^{\pm}\mathcal{L}_A$的原子。布尔 ±-预克隆 F 的极小性由以下性质刻画：每个非平凡的 ±-运算 $f \in F$都已经生成 F：$^{\pm}\langle f\rangle = F$。首先注意到：

10.1 引理。每个极小的 ±-预克隆 F 都具有平凡的正部分（仅含投影），且负部分为空：$F_+ \subseteq {}^{\pm}J_A$, $F_- = \emptyset$。

证明。如果对于某个具有正符号函数 sgn$(f) = (+, \ldots, +)$ 或负符号函数 sgn$(f) = (-, \ldots, -)$ 的非平凡函数 f，有 $F = {}^{\pm}\langle f\rangle$，那么 $^{\pm}\langle f\rangle$ 包含一个非平凡的真 ±-预克隆，即分别为 $^{\pm}\langle\nabla^- f\rangle \subset {}^{\pm}\langle f\rangle$ 或 $^{\pm}\langle\nabla^+ f\rangle \subset {}^{\pm}\langle f\rangle$（记号见第 7 节或定义 2.3(4)$^{(\mathrm{I})}$）。

□

10.2 定义（最小符号）。回忆一下，ar(f) 表示 f 的元数。令 essar(f) 表示 f 的本质参数个数，称为 f 的本质元数。

极小 ±-预克隆 F 的最小符号是一个具有最小本质元数且等于 $+$的项数最多的 ±-运算$f \in F$ 的符号。于是我们称 f 具有最小符号，并且不妨

设符号的各项排列如下：每个 $+$ 都排在每个 $-$之前（否则相应地置换自变量）。

10.3 注记。 每个具有最小符号的 $\pm$-运算 $f \in F$ 都必须是一个 $\pm$-近投影（参见定义 9.6 在 $S = \pm$ 情形下的特化），否则我们便可以进一步识别符号相同的自变量，从而得到一个元数更小的非平凡 $\pm$-运算。

***10.4* 引理。** 每个极小 $\pm$-预克隆 F 都包含一个 $\pm$-近投影 f，满足$2 \leq ar(f) \leq 4$，且其最小符号序列为以下之一：$(+,+,+,-)$、$(+,+,-,-)$、$(+,+,-)$、$(+,-,-)$、$(+,-)$。此外，当符号为 $(+,+,+,-)$ 时，符号为 $-$ 的自变量是虚假自变量。

证明。 假设 $f \in F$ 的元数为 n，且其最小符号为 $\mathrm{sgn}(f) = (s_1, \ldots, s_n)$。根据注记 10.3，$f$ 必须是一个 $\pm$-近投影。注意，由引理 10.1 可知，符号中至少有一个 $+$，且至少有一个 $-$，因此 $n \geq 2$。此外，注意，如果 f 中有符号为 s 的虚假自变量，那么它必定是唯一一个符号为该符号的自变量（否则我们就可以将这个虚假自变量与另一个符号相同的自变量识别，从而得到一个非平凡函数，这与符号的极小性矛盾）。

断言。 如果 $\mathrm{sgn}(f)$ 有三个相同的符号，那么 $n = 4$，$\mathrm{sgn}(f) = (+, +, +, -)$，且符号为 $-$ 的自变量是虚假的。

断言的证明。 假设 $\mathrm{sgn}(f)$ 有三个相同的符号，即对于某些互不相同的 p、q、$r \in \{1, \ldots, n\}$，有 $s_p = s_q = s_r$。由于 f 是一个 $\pm$-近投影，因此存在指标 i、j 和 k，使得 $s_i = s_j = s_k = +$，并且

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} x_i & \text{whenever } x_p = x_q, \\ x_j & \text{whenever } x_p = x_r, \\ x_k & \text{whenever } x_q = x_r. \end{cases} \tag{10.4.1}$$

由于 $|A| = 2$，x_p、x_q 和 x_r 中总有两个相同的自变量。因此，由 (10.4.1) 可知，f 可能只依赖于由 p、q、r、i、j、k 编号的自变量；其他所有自变量都是虚假的。

先考虑 i、j、k 中有一个不属于 $\{p, q, r\}$ 的情形（注意，当 $s_p = s_q = s_r = -$ 时必然如此），此时考察满足 $x_p = x_q = x_r$ 的元组 $(x_1, \ldots, x_n)$，可得 $i = j = k$。因此，f 是第 i 个投影，这与 f 的非平凡性矛盾。

现在考虑 $i, j, k \in \{p, q, r\}$ 的情形。那么 $s_p = s_q = s_r = +$，且 f 的本质参数只有以 p, q, r 为索引的那些。由于 $\mathrm{sgn}(f)$ 同时包含符号 $+$ 和 $-$，且虚假自变量必须是其符号下唯一的自变量，因此可知 $n = 4$，而剩余的虚假自变量的符号为 $-$，也就是说，$\mathrm{sgn}(f) = (+, +, +, -)$。至此，断言得证。 $\diamond$

现在，若 $n \geq 5$，则根据鸽巢原理的强形式，sgn(*f*) 中必有三个相同的符号，但根据上面的断言， $n = 4$ ，这就产生了矛盾。因此， $n \leq 4$。根据断言，符号 (+, –, –, –) 不是极小的，因此，剩下可能为最小符号的只有以下符号序列：(+, +, +, –)、(+, +, –, –)、(+, +, –)、(+, –, –)、(+, –)。此外，当符号为 (+, +, +, –) 时，根据断言，符号为 – 的自变量是虚假的。

□

10.5 引理。一个具有最小符号 (+、+、+、–) 的极小布尔 ±-预克隆 F，当且仅当 F 由以下两个具有最小符号 (+、+、+、–)的 ±-运算之一生成： f_{maj}(带有符号 + 的变量上的多数运算)或 $f_{\oplus}$ (带有符号 +的变量上的少数运算)：

$$f_{\mathrm{maj}}(x,y,z,u) := (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x), \quad f_{\oplus}(x,y,z,u) := x \oplus y \oplus z.$$

证明。由引理 10.4 可知，如果 F 是一个具有最小符号 (+、+、+、–) 的极小布尔 ±-预克隆，那么 F包含一个符号为 (+、+、+、–) 的 ±-近投影 f，其最后一个自变量（带有符号 –）是虚假的。由于F 由 f生成，因此 F 中的每个 ±-运算$^{\circ}$ $^{\circ}$ $^{\circ}$里符号为 – 的每个自变量都必须是虚假的，并且 F 本质上与 $\langle F \rangle$重合。因此， $\langle F \rangle$必定是一个由本质三元运算 $^{\circ}f$生成的极小布尔克隆。反之，如果一个三元运算 g 生成一个最小克隆，那么由 f(*x*、 *y*、 *z*、 *u*) 给出的、满足 sgn(*f*) =(+、+、+、–) 的四元 ±-运算 f将生成一个最小 ±-预克隆。已知恰好存在两个由三元（但不由二元）运算 g生成的极小布尔克隆，这就得到 F的两个可能生成元 f_{maj} 和 $f_{\oplus}$。 □

10.6 记号。下文中，我们经常需要处理二元布尔函数 $\alpha\colon \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$ 我们将使用记号 $\alpha_{i_1 i_2 i_3 i_4}$对其进行枚举，其中 $i_1 = \alpha$分别为 (0，0)、 $i_2 = \alpha$(0，1)、 $i_3 = \alpha$(1，0)、 $i_4 = \alpha$(1，1)。为简便起见，我们也可以仅用 0–1 序列 $\alpha = i_1 i_2 i_3 i_4 = \alpha(0,0)\alpha(0,1)\alpha(1,0)\alpha(1,1)$来指称 α，尤其是当 α 在下一条引理中的记号 h_α 和 g_α 里作为下标出现时。

10.7 引理。

(i) 设 F是一个具有最小符号 $(+,+,-,-)$的极小布尔 ±-预克隆。那么， F 由一个 ±-近投影 h 生成，其中 $\mathrm{sgn}(h) = (+,+,-,-)$，且满足 $h(x,x,y,z) = x = h(x,y,z,z)$。更明确地说， h 可以表示为如下形式

$$h_\alpha(x,y,z,u) = \begin{cases} x & \text{if } x = y \text{ or } z = u \\ \alpha(x,z) & \text{otherwise, i.e., } x \neq y \text{ and } z \neq u, \end{cases}$$

其中 $\alpha\colon \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$ 是布尔函数，但第一投影除外$\alpha_{0011}(x,z) = x$。

（ii）我们有 $h_{\alpha'}(x,y,z,u) = h_\alpha(x,y,u,z)$ 对于 $\alpha'(x,z) := \alpha(x,\neg z)$（因此${}^{\pm}\langle h_{\alpha'}\rangle = {}^{\pm}\langle h_\alpha\rangle$）。此外，对于对偶运算，我们有 $(h_\alpha)^\partial = h_{\alpha^\partial}$。

(iii) ${}^{\pm}\langle h_{0000}\rangle = {}^{\pm}\langle h_{0001}\rangle = {}^{\pm}\langle h_{0010}\rangle$。

(iv) 每个布尔 ±-运算 h_{0000}、 h_{1111} 和 h_{1100} 都具有最小符号（+、 +、 −、 −）。

证明。(i)：由于 h 是一个 ±-近投影，我们有 $h(x,x,z,u) = x$，且 $h(x,y,z,z) = x$，或者 $h(x,y,z,z) = y$；在后一种情况下，我们可以交换 x 和 y，从而得到一个满足 $h(x,x,z,u) = x = h(x,y,z,z)$的 ±-近投影。
注意到 $x \neq y \iff y = \neg x$。因此，令 $\alpha(x,\ z) := h(x,\ \neg x,\ z,\ \neg z)$，我们得到如上所定义的 $h = h_\alpha$。
(ii)： $h_{\alpha'}(x,\neg x,z,\neg z) = \alpha'(x,z) = \alpha(x,\neg z) = h_\alpha(x,\neg x,\neg z,z)$ 得到 $h_{\alpha'}(x,y,z,u) = h_\alpha(x,y,u,z)$。 $(h_\alpha)^\partial = h_{\alpha^\partial}$这一陈述显然。
(iii)：事实上，

$$\begin{aligned}
&h_{0000}(x,y,z,u) = h_{0001}(h_{0001}(x,y,z,u),y,u,z),\\
&h_{0001}(x,y,z,u) = h_{0010}(x,y,u,z) \qquad (\text{since } (0001)' = (0010)),\\
&h_{0010}(x,y,z,u) = h_{0000}(x,y,h_{0000}(u,z,x,y),z).
\end{aligned}$$

(iv)：我们将证明 h_{0000} 和 h_{1100} 具有最小符号。那么，由于 $h_{1111} = h_{0000^\partial} = h_{0000}^\partial$，$h_{1111}$ 也具有这一最小符号（参见引理 7.5）。
由于每个 ${}^{\pm}\langle h_\alpha\rangle$ 都必须包含一个由四元±-近投影生成的极小 ±-预克隆（见引理 10.4 和 9.7），我们只需验证 h_{0000} 和 h_{1100} 都不能生成 f_{maj} 、 $f_\oplus$，也不能生成任何能够生成另一个 ±-预克隆的 h_α。为了证明一个 ±-运算 h 不能生成某个 f，我们给出一个 ±-关系 S，它由 h 保持，但不由 f保持。

关于 h_{0000}：设 $\varrho := (\varrho_+,\ \varrho_-)$，其中 $\varrho_+ := \left(\begin{smallmatrix}0&0&1&0&1&0\end{smallmatrix}\right)$，且 $\varrho_- := \left(\begin{smallmatrix}0&0&1&1\\0&1&0&1\end{smallmatrix}\right)$。不难验证 $h_{0000} \overset{S}{\triangleright} \varrho$。因此，每个 $h_\alpha \in {}^{\pm}\langle h_{0000}\rangle$也必须 S-保持 ϱ。若 $\alpha(0,\ 0) = 1$，则 $h_\alpha\left(\left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right],\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right],\left[\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right],\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]\right) = \left[\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right] \notin \varrho_+$，这表明 h_α 不 S-保持 ϱ。类似地， $\alpha(0,\ 1) = 1$ 意味着$h_\alpha\left(\left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right],\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right],\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right],\left[\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right]\right) = \left[\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right]$，这表明 h_α不 S-保持 ϱ。剩下的是满足 $\alpha \in \{\alpha_{0011},\alpha_{0001},\alpha_{0010},\alpha_{0000}\}$的 ±-近投影 h_α。

我们排除 h_{0011}，因为它是一个平凡投影。对于其余运算，我们有 ${}^{\pm}\langle h_{0000}\rangle = {}^{\pm}\langle h_{0001}\rangle = {}^{\pm}\langle h_{0010}\rangle$，如上文 (iii) 所示。此外，设三元 ±-关系 $\bar\sigma$ 由 $\bar\sigma_+ := \{0,1\}^3 \setminus \{(1,1,1)\}$ 和 $\bar\sigma_- := \{(0,0,0)\}$ 给出。那么 $h_{0000} \overset{S}{\triangleright} \bar\sigma$，但 f_{maj} 和 $f_\oplus$不保持 $\bar\sigma$，因为 $f_{\mathrm{maj}}\left(\left[\begin{smallmatrix}0\\1\\1\end{smallmatrix}\right],\left[\begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix}\right],\left[\begin{smallmatrix}1\\1\\0\end{smallmatrix}\right],\left[\begin{smallmatrix}0\\0\\0\end{smallmatrix}\right]\right) = \left[\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right] \notin \bar\sigma_+$，且 $f_\oplus\left(\left[\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right],\left[\begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix}\right],\left[\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right],\left[\begin{smallmatrix}0\\0\\0\end{smallmatrix}\right]\right) = \left[\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right] \notin \bar\sigma_+$。

关于 h_{1100}，注意到 h_{1100} 是自对偶的，因为 $1100^\partial = 1100$。因此，$^{\pm}\langle h_{1100}\rangle$ 中的每个四元近投影 h_α 也必定是自对偶的。除平凡投影 h_{0011}外，这样的近投影只有两个，即 h_{0101} 和h_{1010}。此外，它们生成相同的 $\pm$-预克隆，因为 $\alpha_{1010} = \alpha'_{0101}$。我们证明 $^{\pm}\langle h_{1100}\rangle \subseteq {}^{\pm}\langle h_{0101}\rangle$，这意味着 $^{\pm}\langle h_{1100}\rangle$ 不可能真包含由某个其他 h_α生成的 $\pm$-预克隆。事实上，容易验证$h_{1100}(x,y,z,u) = h_{0101}(h_{0101}(x,y,z,u)\ y,u,z)$。此外，$h_{0101} \overset{S}{\triangleright} \bar{\sigma}$，但 f_{maj}和 $f_\oplus$ 不 S-保持 $\bar{\sigma}$（如上文所示），因此结论成立。 □

10.8 引理。

(i) 设 F 是一个最小符号为 $(+,+,-)$ 的极小布尔 $\pm$-预克隆。则 F 由一个 $\pm$-近投影 g 生成，该近投影满足 符号函数$(g) = (+,+,-)$，且 $g(x,x,y) = x$。因此，g 可表示为如下形式：$g = g_\alpha$，其中

$$g_\alpha(x,y,z) = \begin{cases} x & \text{if } x = y \\ \alpha(x,z) & \text{otherwise,} \end{cases}$$

其中 $\alpha\colon \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$ 是一个布尔函数，但 $\alpha_{0011}(x,z) = x$ 或 $\alpha_{1100}(x,z) = \neg x$ (那么 g_α 分别是第一投影或第二投影)。

(ii) 对于 $\alpha^*(x,z) := \alpha(\neg x,z)$ (，我们有 $g_{\alpha^*}(x,y,z) = g_\alpha(y,x,z)$，因而 $^{\pm}\langle g_{\alpha^*}\rangle = {}^{\pm}\langle g_\alpha\rangle$)。此外，我们还有 $(g_\alpha)^\partial = g_{\alpha^\partial}$。

(iii) g_α对每个非平凡的 α （ α_{0110}和α_{1001}除外）具有最小符号 $(+,+,-)$。

(iv) 对于 $\alpha \neq \beta$，除非$\beta = \alpha^*$，否则 $^{\pm}\langle g_\alpha\rangle$ 和 $^{\pm}\langle g_\beta\rangle$ 中任何一个都不包含另一个。

证明。**(i)**：对于满足 $g(x,x,y) = x$的给定 g，定义 $\alpha(x,z) := g(x,\neg x,z)$。于是 $g = g_\alpha$。反之，根据定义，每个满足 $g_\alpha(x,x,y) = x$的 g_α 都满足该条件。
(ii)：$g_{\alpha^*}(x,\neg x,z) = \alpha^*(x,z) = \alpha(\neg x,z) = g_\alpha(\neg x,\neg\neg x,z) = g_\alpha(\neg x,x,z)$表明 $g_{\alpha^*}(x,y,z) = g_\alpha(y,x,z)$。此外，$g^\partial_\alpha(x,\neg x,z) = \neg(g_\alpha(\neg x,x,\neg z)) = \neg(\alpha(\neg x,\neg z)) = \alpha^\partial(x,z) = g_{\alpha^\partial}(x,\neg x,z)$推出 $(g_\alpha)^\partial = g_{\alpha^\partial}$。
(iii)：映射 α、α^* 和 α^∂ 之间的联系如下 :

$$\begin{aligned} \alpha_{0000} = \alpha^*_{0000} &= \alpha^\partial_{1111}, & \alpha_{0001} = \alpha^*_{0100} &= \alpha^\partial_{0111} = (\alpha^\partial_{1101})^*, \\ \alpha_{0110} = \alpha^\partial_{0110} &= \alpha^*_{1001}, & \alpha_{0010} = \alpha^*_{1000} &= \alpha^\partial_{1011} = (\alpha^\partial_{1110})^*, \\ (\text{note } \alpha_{0101} = \alpha^*_{0101} &= \alpha^\partial_{0101}, & \alpha_{1010} = \alpha^*_{1010} &= \alpha^\partial_{1010}). \end{aligned}$$

我们将证明，对于 $\alpha \in \{\alpha_{0000}, \alpha_{0001}, \alpha_{0010}, \alpha_{0101}, \alpha_{1010}\}$，$g_\alpha$具有最小符号（$+$，$+$，$-$）。由于根据引理 7.5，$^{\pm}\langle g_\alpha\rangle = {}^{\pm}\langle g_{\alpha^*}\rangle$ 是极小的当且仅当 $^{\pm}\langle g^\partial_\alpha\rangle$ 是

极小的，这也证明了除 α_{0110}和 α_{1001} 之外所有其他 g_α 的极小性； α_{0110}和 α_{1001} 将在定理 10.11(C) 的证明中处理，届时将证明$^{\pm}\langle g_{0110}\rangle = {}^{\pm}\langle g_{1001}\rangle$ 不是极小的 ±-克隆。

对于这五个 α ，我们首先证明它们不会生成四元近投影。

令 $\sigma := (\sigma_+, \sigma_-)$，其中 $\sigma_+ :=$ (0 0 10 1 1)，且 $\sigma_- :=$ (0 0 1 10 1 0 1)。

于是，直接证明对于上述五个函数 $g_\alpha \overset{S}{\triangleright} \sigma$ 中的每一个都有 α 。然而，没有非平凡的 h_β （参见引理 10.7） S保持 σ；事实上，对于每个 β ，除了 $\beta = 0011$ （其给出平凡的 h_β）之外，都存在 $c \neq d$ 属于 $\{0,1\}$ ，使得$h_\beta(0, 1, c, d) = 1$或 $h_\beta(1, 0, c, d) = 0$。于是， $h_\beta(\left[\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}c\\1\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}d\\1\end{smallmatrix}\right]) = \left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right] \notin \sigma_+$ 或$h_\beta(\left[\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}0\\c\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}0\\d\end{smallmatrix}\right]) = \left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right] \notin \sigma_+$分别表明， h_β不 S保持σ。

此外， $f_\oplus$ 也不保持 σ，因为 $f_\oplus(\left[\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right]) = \left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right] \notin \sigma_+$。最后， g_α 保持以下三元 $\bar{\sigma}$ （如引理 10.7(iv) 的证明中所示）或 $\hat{}\sigma$ （直接验证从略），但 f_{maj} 不保持：

For $\alpha \in \{\alpha_{0000}, \alpha_{0001}, \alpha_{0101}\}$，取 $\bar{\sigma}_+ := \{0,1\}^3 \setminus \{(1, 1, 1)\}$ 以及 $\bar{\sigma}_- := \{(0, 0, 0)\}$.

对于 $\alpha \in \{\alpha_{0010}, \alpha_{1010}\}$，取 $\hat{}\sigma_+ := \bar{\sigma}_+$ 以及 $\hat{}\sigma_- := \{(1, 1, 1)\}$。

Then $f_{\mathrm{maj}}(\left[\begin{smallmatrix}0\\1\\1\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}1\\1\\0\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}0\\0\\0\end{smallmatrix}\right]) = f_{\mathrm{maj}}(\left[\begin{smallmatrix}0\\1\\1\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}1\\1\\0\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right]) = \left[\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right] \notin \bar{\sigma}_+ = \hat{\sigma}_+.$

因此，对于上述每个 g_α， ±-预克隆 $^{\pm}\langle g_\alpha\rangle$ 不可能包含四元近投影。因此，包含于 $^{\pm}\langle g_\alpha\rangle$ 中的每个极小 ±-预克隆都必须包含某个近投影 g_β。

(iv)：

对于 $\alpha = \alpha_{abcd}$，令 $\varrho^\alpha := (\begin{bmatrix}0&1&a&c\\0&1&b&d\\1&0&c&a\\1&0&d&b\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix})$。那么 $\alpha^* = \alpha_{cdab}$ 且 $\varrho^\alpha = \varrho^{\alpha^*}$。

此外， $g_\alpha \overset{S}{\triangleright} \varrho^\alpha$ （这是一个简单的练习），但显然 g_β 不保持 ϱ^α （对于 $\beta \notin \{\alpha, \alpha^*\}$）。这说明 $^{\pm}\langle g_\beta\rangle$ 不包含于 $^{\pm}\langle g_\alpha\rangle$，证毕。 □

10.9 引理。 不存在最小符号为 $(+, -, -)$ 的 ±-元运算。

证明。假设 f 生成了一个极小的 ±-预克隆 F，使得 $\mathrm{sgn}(f) = (+, -, -)$ 是 F 的最小符号。那么 $f(x, y, y) = x$，因为否则 $g(x, y) := f(x, y, y)$ 将是非平凡的，其 $\mathrm{sgn}(g) = (+, -)$，并且 $\mathrm{sgn}(f)$ 不会是 F 的最小符号。因此，存在一个二元布尔函数 β（只需取 $\beta(x, y) := f(x, y, \neg y)$ 即可），它不是第一投影 α_{0011}，使得

$$f(x, y, z) = f^\beta(x, y, z) := \begin{cases} x & \text{if } y = z, \\ \beta(x, y) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

例如，

$$f^{1100}(x,y,z) = x \oplus y \oplus z = \begin{cases} x & \text{if } y = z, \\ \neg x & \text{otherwise.} \end{cases}$$

首先排除 f^{1100}：我们有 $f^{1100}(x,\ f^{1100}(u,\ y,\ z)\ u) = x \oplus (u \oplus y \oplus z) \oplus u = x \oplus y \oplus z = f_{\oplus}(x,\ y,\ z,\ u)$。根据引理 10.5，±运算 $f_{\oplus}$ 具有最小符号 $(+,\ +,\ +,\ -)$。因此，f^{1100} 不能生成极小的 ±预克隆。
现在我们证明，对于所有其余的 f^{β}（具有 $f^{\beta} \notin \{f^{0011}, f^{1100}\}$），$^{\pm}\langle f^{\beta}\rangle$ 中存在一个非平凡的 ±近投影，其符号为 $(+,\ +,\ -)$（具有 $2 > 1$ 个“+”符号）；这表明 $(+,\ -,\ -)$ 不可能是 $^{\pm}\langle f^{\beta}\rangle$ 的最小符号（于是必然会得到定理 10.11(C)所列出的一个 ±预克隆）。

设 $g^{\beta}(x,y,z) := f^{\beta}(x,z,f^{\beta}(z,x,y))$，且 $\beta'(x,y) := \beta(x,\neg y)$。则 $\mathrm{sgn}(g^{\beta}) = (+,+,-)$。此外，$f^{\beta'}(x,y,z) = f^{\beta}(x,z,y)$，因为对于 $y \neq z$，我们有 $f^{\beta'}(x,y,z) = f^{\beta'}(x,\neg z,z) = \beta'(x,\neg z) = \beta(x,z) = g^{\beta}(x,z,\neg z) = f^{\beta}(x,z,y)$，特别是 $^{\pm}\langle g^{\beta'}\rangle = {}^{\pm}\langle g^{\beta}\rangle$。

注意，g^{β} 是一个 ±-近投影，因为 $g^{\beta}(x,\ x,\ z) = f^{\beta}(x,\ z,\ f^{\beta}(z,\ x,\ x)) = f^{\beta}(x,\ z,\ z) = x$。我们将证明 g^{β} 是非平凡的，即既不是第一投影，也不是第二投影。

我们计算 $g^{\beta}(0,1,0) = f^{\beta}(0,0,f^{\beta}(0,0,1)) = f^{\beta}(0,0,\beta(0,0)) = \beta(0,0)$（注意 $f^{\beta}(0,0,0) = 0$ 和 $f^{\beta}(0,0,1) = \beta(0,0)$），同理 $g^{\beta}(1,0,1) = \beta(1,1)$。因此，若 $\beta(0,0) = 1$ 或 $\beta(1,1) = 0$（此时 $g^{\beta}(0,1,0) = 1$ 或 $g^{\beta}(1,0,1) = 0$），则 g^{β} 不是第一投影；若 $\beta(0,0) = 0$ 或 $\beta(1,1) = 1$，则它不是第二投影。因此，以下各项的最小符号均不是 $(+,-,-)$：f^{1ij1}、f^{0ij0} 以及相应的 $f^{\beta'}$，即 f^{i11j}, f^{i00j} $(i,j \in \{0,1\})$。
唯一缺少的 f^{β} 是满足 $f^{ijj'i'}$ 且 $i \neq i'$ 的 $j \neq j'$，即 f^{0011}，f^{1100}（上文已排除）和 $f^{\beta_0} := f^{0101}$ 以及 $f^{\beta'_0} = f^{1010}$。因此还需排除

$$f^{\beta_0}(x,y,z) = \begin{cases} x & \text{if } y = z, \\ y & \text{otherwise.} \end{cases}$$

为此，我们注意到 $g_0(x,y,z) := f^{\beta_0}(x, f^{\beta_0}(z,y,x)\ z)$ 是一个非平凡的 ±-近投影，其符号为 $(+,+,-)$。事实上，我们有 $g_0(x,x,z) = x$，$g_0(0,1,0) = f^{\beta_0}(0, f^{\beta_0}(0,1,0), 0) = f^{\beta_0}(0,1,0) = 1$ 以及 $g_0(1,0,0) = f^{\beta_0}(1, f^{\beta_0}(0,0,1), 0) = f^{\beta_0}(1,0,0) = 1$，这表明 g_0 不是一个平凡的 ±-投影。 □

10.10 引理。 以下五个二元布尔函数，视为带有符号 $(+,-)$ 的 ±-运算，均生成带有最小符号 $(+,-)$ 的极小 ±-预克隆：$\alpha_{0000} = \alpha^{\partial}_{1111}$、$\alpha_{0001} = \alpha^{\partial}_{0111}$、$\alpha_{0101}$、$\alpha_{1010}$、$\alpha_{1100}$。此外，这五个 ±-运算中的每一个，都是其所生成的 ±-预克隆中唯一一个带有符号 $(+,-)$ 的 ±-运算。

证明。对于每个 ±-预克隆 $F = {}^{\pm}\langle\alpha\rangle$（其中 α 如引理中所列），不难看出，对于每个非平凡项运算 $f \in F$，将所有具有相同符号的变量加以识别，便会得到所生成的 ±-运算 α。因此， F 是极小的。

为说明这一点，我们只给出一些提示，细节留给读者完成。对于$\alpha_{0000}(x, y) = 0$, F中的所有函数都是常数 0。对于 $\alpha_{0101}(x, y) = y$，任意项运算 $f(x_1, \ldots, x_n)$ 都等于与该项中最右侧变量相对应的投影。对于 $\alpha_{1010}(x, y) = \neg y$ 以及项运算 $f(x_1, \ldots, x_n)$，设 x_n 是该项中最右侧的变量。如果 x_n 具有符号 $+$，则该项运算等于 x_n，并且是一个平凡投影；否则它等于 $\neg x_n$。对于$\alpha_{1100}(x, y) = \neg x$, 每个项函数 $f(x_1, \ldots, x_n)$ 都等于最左侧变量（记为 x_1）或其否定 $\neg x_1$，具体取决于该变量在项中的深度。最后，对于 $\alpha_{0001}(x, y) = x \wedge y$，每个项函数 $f(x_1, \ldots, x_n)$ 都是若干变量的合取（其中总是既有符号为 $+$ 的变量，也有符号为 $-$的变量）。 □

现在我们已经可以刻画所有极小布尔 ±-预克隆。

10.11 定理 (**极小布尔 ±-预克隆**)。 共有二十个极小布尔 ±-预克隆。它们的形式为 $F = {}^{\pm}\langle f\rangle$，其中 f 是以下列表中的±-元运算之一：

(A) 最小符号函数 $\lambda = (+, +, +, -)$：有两个最小 ±-预克隆具有最小符号函数 λ，分别由 f_{maj} 或 $f_{\oplus}$ (符号函数$(f) = \lambda$ 生成，最后一个自变量是虚设的)，其中 (参见引理 *10.5*)

$$f_{\mathrm{maj}}(x, y, z, u) := (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x), \qquad \text{(majority function on } x, y, z\text{)}$$

$$f_{\oplus}(x, y, z, u) := x \oplus y \oplus z.$$

（B）最小符号 $\lambda = (+, +, -, -)$：有三个最小的 ±-预克隆，其最小符号为 λ，由 $f \in \{h_{0000}, h_{1111}, h_{1100}\}$（符号函数$(f) = \lambda$）生成，其中 （参见引理 *10.7*）

$$h_{0000}(x, y, z, u) = x \wedge (y \vee (z \wedge u) \vee (\neg z \wedge \neg u)) = \begin{cases} x & \text{if } x = y \text{ or } z = u, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$h_{1111}(x, y, z, u) = x \vee (y \wedge (z \vee u) \wedge (\neg z \vee \neg u)) = \begin{cases} x & \text{if } x = y \text{ or } z = u, \\ 1 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$h_{1100}(x, y, z, u) = (x \wedge y) \vee (x \wedge (z \oplus \neg u)) \vee (y \wedge (z \oplus u)) = \begin{cases} x & \text{if } x = y \text{ or } z = u, \\ \neg x\ (= y) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

（C）最小符号 $\lambda = (+,+,-)$：有八个最小的 $\pm$-预克隆，其最小符号为 λ，由一个 $\pm$-近投影 f（符号函数$(f) = \lambda$）生成，其中f 是以下 $\pm$-运算之一（参见引理 *10.8*）：

$$g_{0000}(x,y,z) = x \wedge y = \begin{cases} x & \text{if } x = y \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$g_{1111}(x,y,z) = x \vee y = \begin{cases} x & \text{if } x = y \\ 1 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$g_{0101}(x,y,z) = (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x) = \begin{cases} x & \text{if } x = y \\ z & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$g_{1010}(x,y,z) = (x \wedge y) \vee (y \wedge \neg z) \vee (\neg z \wedge x) = \begin{cases} x & \text{if } x = y \\ \neg z & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$g_{0111}(x,y,z) = x \vee (y \wedge z) = \begin{cases} x & \text{if } x = y \\ x \vee z & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$g_{0001}(x,y,z) = x \wedge (y \vee z) = \begin{cases} x & \text{if } x = y \\ x \wedge z & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$g_{1011}(x,y,z) = x \vee (y \wedge \neg z) = \begin{cases} x & \text{if } x = y \\ x \vee \neg z & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$g_{0010}(x,y,z) = x \wedge (y \vee \neg z) = \begin{cases} x & \text{if } x = y \\ x \wedge \neg z & \text{otherwise.} \end{cases}$$

(D) 最小符号 $\lambda = (+,-)$：有七个最小的 $\pm$-预克隆，其最小符号为 λ，由以下某个 $\pm$-运算生成(其符号为 λ，参见引理*10.10*)：

$$\begin{aligned} &\alpha_{0000}(x,y) = 0, && \alpha_{1111}(x,y) = 1, \\ &\alpha_{0001}(x,y) = x \wedge y, && \alpha_{0111}(x,y) = x \vee y, \\ &\alpha_{0101}(x,y) = y, && \alpha_{1010}(x,y) = \neg y, && \alpha_{1100}(x,y) = \neg x. \end{aligned}$$

证明。 根据引理10.4和10.9，恰好存在（A）–（D）中讨论的4个最小符号序列。引理10.5、10.7、10.8和10.10表明，所有列出的 $\pm$-运算都生成一个极小 $\pm$-预克隆，并且具有最小符号。因此，剩下的工作是证明，其他所有可能作为极小 $\pm$-预克隆生成元的候选者

不会生成极小预克隆，或者生成一个已包含在列表中的 $\pm$-运算。

(A)：这已在引理 10.5 中完成。
(B)：我们证明，每个符号为 $(+,+,-,-)$ 的非平凡 $\pm$-运算 h_α 都生成一个 $\pm$-运算 f_α，它是引理 10.7 中具有最小符号的 $\pm$-运算 $h_{0000}, h_{1111}, h_{1100}$ 之一。根据引理 10.7，只需检验布尔函数 α 和 α' 中的一个。

由引理10.7(iii)，我们知道 h_{0000}, h_{0001} 和 h_{0010} 生成相同的（极小） $\pm$-预克隆。因此，对偶 $\pm$-运算 h_{1111}, h_{0111} 和 h_{1011} 也生成相同的极小 $\pm$-预克隆。

剩下需要检验四种情况 $\alpha \in \{\alpha_{1000}, \alpha_{1101}, \alpha_{0110}, \alpha_{0101}\}$（注意此时 $\alpha' \in \{\alpha_{1110}, \alpha_{0100}, \alpha_{1001}, \alpha_{1010}\}$ 成立，因此 α 的所有候选项都已涵盖）。对于这四种情况，令 $f_\alpha(x,y,z,u) := h_\alpha(h_\alpha(x,y,z,u)\ y,u,z)$。接下来显然可以检验 $f_\alpha(x,y,z,u) = h_{1100}(x,y,z,u)$；后者生成一个极小$\pm$-预克隆，至此便完成证明。

(C)：首先我们证明

$$g_{0110}(x,y,z) = (x \wedge \neg z) \vee (y \wedge z) = \begin{cases} x & \text{if } x = y \\ (x \wedge \neg z) \vee (\neg x \wedge z) & \text{otherwise} \end{cases}$$

(因此也 g_{1001} 因为 $\alpha_{1001} = \alpha^*_{0110}$)不能 生成一个极小$\pm$-预克隆。事实上，我们有 $g_{0110}(g_{0110}(x,y,u)\ g_{0110}(y,x,u)\ z) = h_{1100}(x,y,z,u)$（参见 (B)）。

根据引理10.8，所有剩余的 $^{\pm}\langle g_\alpha\rangle$ 都是极小 $\pm$-预克隆，并且 $^{\pm}\langle g_\alpha\rangle = {}^{\pm}\langle g_\beta\rangle$当且仅当 $\beta \in \{\alpha, \alpha^*\}$成立。借助引理10.8证明中给出的所有 α 和 α^* 的列表，我们看到，剩下的恰好是 (C) 中列出的八个不同的 $\pm$-预克隆，它们由一个具有最小符号（$+,+,-$）的 $\pm$-运算生成。

（D）：根据引理 10.10，所列出的全部七个 $\pm$运算生成一个极小$\pm$预克隆（同时考虑对偶运算），并且所有这些 $\pm$预克隆彼此不同（因为在 $^{\pm}\langle\alpha\rangle$中，$\alpha$ 是唯一一个具有符号（$+$，$-$）的非平凡运算，见引理 10.10）。现在我们证明，不存在具有极小符号（$+$，$-$）的其他极小$\pm$预克隆。

事实上，对于其余八个非平凡布尔 $\pm$运算α中的每一个，我们证明：将 $\{0,1\}^2 \to \{0,1\}$ 视为一个符号为（$+$，$-$）的 $\pm$运算时，$^{\pm}\langle\alpha\rangle$包含一个已经列出的 $\pm$运算 f，其具有极小的 $\pm$预克隆 $^{\pm}\langle f\rangle$。下面我们指出 f 以及生成 f 的项（检验其正确性是很容易的练习）：

α 等于 $\alpha_{0110}(x,y) = x \oplus y$ 或 $\alpha_{1001}(x,y) = 1 \oplus x \oplus y$:
则 $f(x,y) := \alpha(x,\alpha(y,x)) = y = \alpha_{0101}(x,y)$。

α 等于 $\alpha_{1101}(x,y) = \neg x \vee y$：则 $f(x,y) = \alpha(x, \alpha(y,x)) = 1 = \alpha_{1111}(x,y)$。
α 等于 $\alpha_{0100}(x,y) = \neg x \wedge y$：
那么 $f(x,y) = \alpha(x, \alpha(y,x)) = 0 = \alpha_{0000}(x,y)$。
α 等于 $\alpha_{1011}(x,y) = x \vee \neg y$：
那么 $f(x,y,z) = \alpha(x, \alpha(z,y)) = x \vee (y \wedge \neg z) = g_{1011}(x,y,z)$（参见引理10.8）。
α 等于 $\alpha_{0010}(x,y) = x \wedge \neg y$：那么 $f(x,y,z) = \alpha(x, \alpha(z,y)) = x \wedge (y \vee \neg z) = g_{0010}(x,y,z)$（参见引理10.8）。
α 等于 $\alpha_{1110}(x,y) = \neg x \vee \neg y$：
那么 $\alpha(x, \alpha(y,x)) = \neg x \vee y = \alpha_{1101}(x,y)$，而这个 ±-元运算已在上文讨论过。

α 等于 $\alpha_{1000}(x,y) = \neg x \wedge \neg y$：
那么 $\alpha(\alpha(x,y)\ y) = x \wedge \neg y = \alpha_{0010}(x,y)$，而这个 ±-元运算已在上文讨论过。
□

11 自对偶 ±-预克隆

本节考虑自对偶 ±-预克隆。回顾一下，若 $F = F^\partial$，则 ±-预克隆 F是自对偶的。自对偶的 ±-预克隆构成 ${}^{\pm}\mathcal{L}_2$的一个子格 ${}^{\pm}\mathcal{L}_2^{\mathrm{sd}}$，因为自对偶的 ±-预克隆的交与并仍然自对偶——前者显然成立，后者则由以下事实推出：
${}^{\pm}\langle F\rangle^\partial = {}^{\pm}\langle F^\partial\rangle$，因为$f \mapsto f^\partial$ 是一个“内自同构”（更多细节参见注 5.7[1] ）。

11.1 命题。 设 $F \in {}^{\pm}\mathcal{L}_2$ 是任意一个布尔 ±-预克隆。那么$F \cap F^\partial$和 ${}^{\pm}\langle F \cup F^\partial\rangle$ 都是自对偶的 ±-预克隆。我们有 $F \cap F^\partial \subseteq F \subseteq {}^{\pm}\langle F \cup F^\partial\rangle$，其中每个包含关系为等号当且仅当 F 是自对偶的。

证明。 由于 $f^{\partial\partial} = f$我们得到 $(F \cap F^\partial)^\partial = F^\partial \cap F$以及 ${}^{\pm}\langle F \cup F^\partial\rangle^\partial = {}^{\pm}\langle (F \cup F^\partial)^\partial\rangle = {}^{\pm}\langle F^\partial \cup F\rangle$。所述的子集包含关系以及关于等式的双条件陈述显然成立。
□

11.2 命题。

(a) 一个非平凡的自对偶 ±-预克隆 H 在 ${}^{\pm}\mathcal{L}_2^{\mathrm{sd}}$中是极大的，当且仅当存在一个极大的 ±-预克隆 F使得 $H = F \cap F^\partial$。

恰好有八个极大自对偶 ±-预克隆，即（关于记号，参见注 *8.2* 和定理 *8.5*）：

$$
\begin{aligned}
&{}^{\pm}\mathrm{Pol}(\sigma_0,\sigma_0) \cap {}^{\pm}\mathrm{Pol}(\sigma_1,\sigma_1), \quad {}^{\pm}\mathrm{Pol}(\sigma_i,\sigma_i) \text{ for } i \in \{2,3,4\},\\
&{}^{\pm}\mathrm{Pol}(\leq,\geq), \quad {}^{\pm}\mathrm{Pol}(A,\emptyset), \quad {}^{\pm}\mathrm{Pol}(\nabla_A,\Delta_A), \quad {}^{\pm}\mathrm{Pol}(\{0\},\{1\}).
\end{aligned}
$$

（b）非平凡自对偶 ±-预克隆 H 只有在 ${}^{\pm}\mathcal{L}_2^{\mathrm{sd}}$ 中存在一个极小的 ±-预克隆 F 使得 $H = {}^{\pm}\langle F \cup F^{\partial}\rangle$时，才是极小的。

恰好有九个极小自对偶 ±-预克隆，即 (记号见定理 *10.11*)：

$$
\begin{aligned}
&{}^{\pm}\langle f_{\mathrm{maj}}\rangle, \quad {}^{\pm}\langle f_{\oplus}\rangle, \quad {}^{\pm}\langle h_{1100}\rangle, \quad {}^{\pm}\langle g_{0101}\rangle, \quad {}^{\pm}\langle g_{1010}\rangle,\\
&{}^{\pm}\langle \alpha_{0101}\rangle, \quad {}^{\pm}\langle \alpha_{1010}\rangle, \quad {}^{\pm}\langle \alpha_{1100}\rangle, \quad {}^{\pm}\langle \alpha_{0000}, \alpha_{1111}\rangle.
\end{aligned}
$$

证明。 (a) “⇒”：设 H 是一个极大的自对偶 ±-预克隆，并设 F 是一个包含 H 的极大 ±-预克隆（由命题 5.1(3)可知F 存在[(1)]）。那么 $H' := F \cap F^{\partial}$ 不是完整的 ±-预克隆 ${}^{\pm}\mathrm{Op}(A)$，它是自对偶的（根据命题 11.1），且包含 H。由 H的极大性可知， $H = H'$。

“⇐”：我们需要证明，对于每个极大的 ±-预克隆 F， ±-预克隆$F \cap F^{\partial}$在 ${}^{\pm}\mathcal{L}_2^{\mathrm{sd}}$中是极大的。列出的八个 ±-预克隆，正是当 F为九个极大的 ±-预克隆之一时，所有可能的交集 $F \cap F^{\partial}$（如定理 8.5 所列）。注意， $F = {}^{\pm}\mathrm{Pol}(\sigma_0, \sigma_0)$和 $F = {}^{\pm}\mathrm{Pol}(\sigma_1, \sigma_1)$这两种情况会产生相同的自对偶 ±-预克隆 $F \cap F^{\partial}$，因为$(\sigma_0, \sigma_0)^{\partial} = (\sigma_1, \sigma_1)$。

对于其余七个极大 ±-预克隆 F，有 $F = F^{\partial}$。（对于带有 $i \in \{2, 3, 4\}$ 的定理 8.5(a) 中的情形，这一点显然，因为 ${}^{\pm}\mathrm{Pol}(\sigma_i,\ \sigma_i)$ 对应于自对偶克隆 $\mathrm{Pol}\,\sigma_i$。在所有其他情形中，定义关系$\varrho = (\sigma,\ \sigma')$ 满足 ${}^{\pm}\mathrm{Pol}\ \varrho = {}^{\pm}\mathrm{Pol}\,\varrho^{\partial}$（因为 $\varrho = \varrho^{\partial}$适用于定理 8.5(c)、(d) 中的情形，而 $(\sigma,\ \sigma')^{\partial} = (\sigma',\ \sigma)$ 适用于定理 8.5(b)、(e) 中的情形，并且我们可以应用命题 5.11(3)[(1)] 和定义 7.1(7)）。因此， $F \cap F^{\partial} = F$；又因为 F 是一个极大 ±-预克隆， F 显然在 ${}^{\pm}\mathcal{L}_2^{\mathrm{sd}}$ 中是极大的。

还需证明 ${}^{\pm}\mathrm{Pol}(\sigma_0, \sigma_0) \cap {}^{\pm}\mathrm{Pol}(\sigma_1, \sigma_1)$ 在 ${}^{\pm}\mathcal{L}_2^{\mathrm{sd}}$ 中也是极大的。为此，只需证明它不包含于任何极大 ±-预克隆中，除了 ${}^{\pm}\mathrm{Pol}(\sigma_0, \sigma_0)$ 和 ${}^{\pm}\mathrm{Pol}(\sigma_1, \sigma_1)$ 之外。由于 ${}^{\pm}\mathrm{Pol}(\sigma, \sigma)$ 包含所有满足 $\mathring{f} \in \mathrm{Pol}(\sigma)$ 的 ±-元运算 f，由 Post 格可知，显然 ${}^{\pm}\mathrm{Pol}(\sigma_0, \sigma_0) \cap {}^{\pm}\mathrm{Pol}(\sigma_1, \sigma_1)$ 不包含于满足 $i \in \{2, 3, 4\}$ 的 ${}^{\pm}\mathrm{Pol}(\sigma_i, \sigma_i)$ 中。

对于其余的非包含关系，我们注意到 ${}^{\pm}\mathrm{Pol}(\sigma_0, \sigma_0) \cap {}^{\pm}\mathrm{Pol}(\sigma_1, \sigma_1)$ 包含每个非平凡投影（其本质参数的符号为 $-$ 的投影），但很容易验证， ${}^{\pm}\mathrm{Pol}(\leq, \geq)$、 ${}^{\pm}\mathrm{Pol}(A, \emptyset)$、${}^{\pm}\mathrm{Pol}(\nabla_A, \Delta_A)$ 和 ${}^{\pm}\mathrm{Pol}(\{0\}, \{1\})$ 均不包含非平凡投影。

(b)：设 H 是一个极小自对偶的 ±-预克隆，并设 F 是包含于 H 中的一个极小 ±-预克隆（F 由命题 5.1(3) 保证存在[(1)]）。那么 $H' := {}^{\pm}\langle F \cup F^{\partial}\rangle$ 是非平凡、自对偶的（由命题 11.1 可知），且包含于 H 中。由 H 的极小性可知， $H = H'$。

现在我们来确定在 ${}^{\pm}\mathcal{L}_2^{\mathrm{sd}}$ 中极小的那些 ±-预克隆。形如 ${}^{\pm}\langle F \cup F^{\partial}\rangle$ 的 ±-预克隆恰有十四个，其中 F 是二十个极小±-预克隆之一（如定理 10.11 所列）：

$^{\pm}\langle f_{\mathrm{maj}}\rangle$, $^{\pm}\langle f_{\oplus}\rangle$, $^{\pm}\langle h_{1100}\rangle$, $^{\pm}\langle g_{0101}\rangle$, $^{\pm}\langle g_{1010}\rangle$, $^{\pm}\langle \alpha_{0101}\rangle$, $^{\pm}\langle \alpha_{1010}\rangle$, $^{\pm}\langle \alpha_{1100}\rangle$,
$^{\pm}\langle h_{0000}, h_{1111}\rangle$, $^{\pm}\langle g_{0000}, g_{1111}\rangle$, $^{\pm}\langle g_{0111}, g_{0001}\rangle$, $^{\pm}\langle g_{1011}, g_{0010}\rangle$,
$^{\pm}\langle \alpha_{0000}, \alpha_{1111}\rangle$, $^{\pm}\langle \alpha_{0001}, \alpha_{0111}\rangle$.
所列出的前八个由一个生成元 g 生成的 ±预克隆，是极小 ±预克隆（$g^{\partial} = g$）中的自对偶者；因此，它们显然在$^{\pm}\mathcal{L}_2^{\mathrm{sd}}$中是极小的。其余由两个生成元 g, g' 生成的预克隆满足 $g' = g^{\partial}$，因此它们是自对偶的（根据命题 11.1），并且具有所需的形式 $^{\pm}\langle F \cup F^{\partial}\rangle$。

然而，除了 $^{\pm}\langle \alpha_{0000}, \alpha_{1111}\rangle$ 之外，含有两个生成元的那些预克隆都不是极小的，因为每个都包含某些只有一个生成元的自对偶 ±-预克隆。
事实上，我们有 $h_{1111}(h_{0000}(x, y, z, u)\ y, u, z) = h_{1100}(x, y, z, u)$（这很容易验证，例如只需使用 h_α 的定义）。因此，$^{\pm}\langle h_{1100}\rangle \subseteq {}^{\pm}\langle h_{0000}, h_{1111}\rangle$；由此可知 $^{\pm}\langle h_{0000}, h_{1111}\rangle$ 在 $^{\pm}\mathcal{L}_2^{\mathrm{sd}}$ 中不是极小的。
同理，$^{\pm}\langle g_{0111}, g_{0001}\rangle$、$^{\pm}\langle g_{1011}, g_{0010}\rangle$、$^{\pm}\langle g_{0000}, g_{1111}\rangle$ 和 $^{\pm}\langle g_{1011}, g_{0010}\rangle$ 在 $^{\pm}\mathcal{L}_2^{\mathrm{sd}}$ 中都不是极小的，原因是下列等式；利用定理 10.11 中给出的表示极小 ±-预克隆生成元的项，可以更容易地验证这些等式：

$$
\begin{aligned}
&g_{0111}(g_{0001}(x, y, z), y, z) = (x \wedge (y \vee z)) \vee (y \wedge z)\\
&= (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x) = g_{0101}(x, y, z),\\
&g_{1011}(g_{0010}(x, y, z), y, z) = (x \wedge (y \vee \neg z)) \vee (y \wedge \neg z)\\
&= (x \wedge y) \vee (y \wedge \neg z) \vee (\neg z \wedge x) = g_{1010}(x, y, z),\\
&g_{1111}(g_{1111}(g_{0000}(x, y, u), g_{0000}(y, z, u), u), g_{0000}(z, x, u), u)\\
&= ((x \wedge y) \vee (y \wedge z)) \vee (z \wedge x) = f_{\mathrm{maj}}(x, y, z, u),\\
&\alpha_{0111}(\alpha_{0001}(x, y), y) = (x \wedge y) \vee y = y = \alpha_{0101}(x, y).
\end{aligned}
$$

最后，我们看到 $^{\pm}\langle \alpha_{0000},\ \alpha_{1111}\rangle$ 是 $^{\pm}\mathcal{L}_2^{\mathrm{sd}}$中的极小者，因为它只包含平凡投影和常值函数，因此不可能包含带有一个生成元的前八个 ±-预克隆中的任何一个。
□

根据命题 11.2，了解格 $^{\pm}\mathcal{L}_2^{\mathrm{sd}}$中的极小和极大 ±-预克隆特别重要，因为 $^{\pm}\mathcal{L}_2^{\mathrm{sd}}$ 既是原子的又是余原子的。特别地，我们得到一个完备性判据，它对定理 8.7作了略微的特化。

命题 11.3。 格 $^{\pm}\mathcal{L}_2^{\mathrm{sd}}$既是原子的又是余原子的，即每个自对偶±-预克隆都包含于某个极大的自对偶 ±-预克隆中，并且包含某个极小的自对偶 ±-预克隆。

证明。 设 $H = H^{\partial}$ 是一个自对偶 ±-预克隆。则存在一个包含 H 的极大 ±-预克隆 F（因为 $^{\pm}\mathcal{L}_2$ 是余原子的），因此 F^{∂} 也包含 $H^{\partial} = H$,

即 $H \subseteq F \cap F^{\partial}$；后者由于命题 11.2(a) 而是一个极大的自对偶 $\pm$-预克隆。类似地，H 包含某个极小的自对偶 $\pm$-预克隆 ${}^{\pm}\langle F \cup F^{\partial} \rangle$，其中 F 是某个极小 $\pm$-预克隆。 □

11.4 定理（自对偶 $\pm$-预克隆的完备性定理）。集合 $F \subseteq {}^{\pm}Op(A)$ 满足性质 $F = F^{\partial}$，当且仅当对于下列八种 $\pm$-关系中的每一种，F 中都存在一个不 $\pm$-保持该关系的 $\pm$-运算，此时该集合是完备的（即它生成整个（自对偶）$\pm$-预克隆 ${}^{\pm}Op(A)$）：(σ_i, σ_i)（当 $i \in \{0,2,3,4\}$ 时）、$(\leq, \geq)$、$(A, \emptyset)$、(∇_A, Δ_A)、$(\{0\}, \{1\})$。

证明。我们可以应用定理 8.7。因此，剩下要证明的是，(σ_1, σ_1) 未必出现在列出的 $\pm$-关系中。这是由以下事实得出的：对于一个 $\pm$-运算$g \in F$ 及其对偶 $f := g^{\partial} \in F^{\partial} = F$，有如下结论：$g$ 不 $\pm$-保持 (σ_0, σ_0)，当且仅当 f 不 $\pm$-保持 (σ_1, σ_1)（参见命题 5.11(i)$^{(I)}$，其中$h := \partial$）。 □

12 布尔 $\pm$-预克隆的格 ${}^{\pm}\mathcal{L}_2$

布尔 $\pm$-预克隆是布尔克隆的推广，也是特殊的预克隆（关于这一概念，见注 2.4(D)$^{(I)}$）。众所周知，布尔克隆有可数多个（Post 格）。尽管 $\pm$-预克隆在所有预克隆中与克隆相对接近，但我们现在将看到，格 ${}^{\pm}\mathcal{L}_2$ 已经是不可数的。这个结果归功于 Vojtˇech David（个人通信，2026 年 9 月）

12.1 定理 (V.David)。布尔 $\pm$-预克隆有不可数多个。

在开始证明之前，我们需要了解一些与克隆子有关的概念、记号和事实。

对于集合 $K, L \subseteq \mathrm{Op}(A)$，$K$ 和 L 的复合 是集合

$$KL := \{\, h \in Op(A) \mid \exists m \in \mathbb{N}_+ \, \exists n \in \mathbb{N}_+ \, \exists f \in K^{(n)} \, \exists g_1, \ldots, g_n \in L^{(m)} : \\ h = f(g_1, \ldots, g_n) \,\}$$

其中包含所有可能的运算复合，外层函数取自K，所有内层函数均取自 L。借助函数类复合这一概念，我们可以轻松讨论进一步的代数概念。例如，A 上的克隆是集合 $C \subseteq \mathrm{Op}(A)$，它包含所有投影以及 $CC \subseteq C$。

现在，设 C_1 和 C_2 是定义在 A 上的两个克隆，分别称为源克隆和目标克隆。集合 $K \subseteq \mathrm{Op}(A)$ 被称为一个（C_1，C_2）-克隆子，如果$KC_1 \subseteq K$ 且 $C_2K \subseteq K$。所有（C_1，C_2）-克隆子的集合构成一个闭包

系统，即 $\mathsf{Op}(A)$ 是一个（C_1，C_2）-克隆子，并且任意多个（C_1，C_2）-克隆子的交集仍然是（C_1，C_2）-克隆子。
我们需要 $A=\{0,1\}$ 上的以下两个克隆。

- $\mathsf{U}^\infty := \{\, f \in \mathsf{Op}(\{0,1\}) \mid \bigwedge f^{-1}(1) \neq (0,\ldots,0) \,\}$ (这里，交是相对于元组的逐分量序定义的，其中 $0<1$),
- $\wedge$ 是合取与常数克隆。

12.2 定理 ([Leh2026b，定理 5.5], 另见 [Leh2026a，定理 5.3，表 2])。存在不可数多个$(\mathsf{U}^\infty, \wedge)$-克隆子。

我们将证明，$(\mathsf{U}^\infty, \wedge)$-克隆子的偏序集可嵌入布尔 $\pm$-预克隆的偏序集中。为此，我们需要以下两个映射。

12.3 定义。对于元数为 n 的 $f \in \mathsf{Op}(A)$，令 $f^\sharp$ 为 $(n+1)$ 元 $\pm$-运算

$$f^\sharp(x^+, y_1^-, \ldots, y_n^-) := x^+ \wedge f(y_1^-, \ldots, y_n^-),$$

对于 $C \subseteq \mathsf{Op}(A)$，令 $C^\sharp$ 为由 $\{\, f^\sharp \mid f \in C \,\}$ 生成的 $\pm$-预克隆。反过来，对于 $P \subseteq {}^{\pm}\mathsf{Op}(A)$，令 $P^\flat := \{\, f \in \mathsf{Op}(A) \mid f^\sharp \in P \,\}$。

12.4 命题(V. David)。若 C 是非空的（$\mathsf{U}^\infty, \wedge$）-克隆子，则 $C^\sharp$ 是一个布尔 $\pm$-预克隆，且 $(C^\sharp)^\flat = C$。

证明。根据定义 12.3，包含关系 $C \subseteq (C^\sharp)^\flat$ 显然成立。
对于反向包含，令 D 为由变量 u_1、……、u_n 表示的 $\pm$-运算 h 的集合，这些运算可以表示为

$$h(u_1,\ldots,u_n) = x \wedge g(z_1 \wedge \varphi_1(u_1,\ldots,u_n), \ldots, z_m \wedge \varphi_m(u_1,\ldots,u_n)), \quad (12.4.1)$$

其中

- g 是从 C 到 $m \geq 1$ 的 m元运算,
- $x \in \{u_1,\ldots,u_n\}$ 是一个正变量,
- 每个 z_j 都是常数 0 或来自 $\{u_1,\ldots,u_n\}$ 的负变量,
- $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ 是符号适当的任意 n元 $\pm$运算。

命题1. </style}如果 $f \in C$，则 $f^\sharp \in D$。

命题*1*的证明。我们可以将 $f^\sharp$ 写成

$$f^\sharp(x^+, y_1^-, \ldots, y_n^-) = x^+ \wedge f(y_1^-, \ldots, y_n^-) = x^+ \wedge f(y_1^- \wedge y_1^-, \ldots, y_n^- \wedge y_n^-),$$

显然，它具有（12.4.1）的形式。 ◇

断言 *2.* id_A （带符号函数 $+$）属于 D。

断言 2 的证明。我们可以将 id_A 写成

$$\mathsf{id}_A(x^+) = x^+ \wedge 1(0 \wedge 0),$$

它具有 (12.4.1) 的形式。注意，一元常值函数 1 属于 $(\mathrm{U}^\infty, \wedge)$-克隆子 C，因为 $1 \in \wedge$，因此 $1 \in \wedge C \subseteq C$ （注意 $C \neq \emptyset$）。 ◇

断言 *3.* D 对复合封闭。

断言 *3* 的证明。设 $f \in D^{(n)}$ 和 $g_1, \dots, g_n \in D^{(m)}$ 满足 $\mathrm{sgn}(f) = (s_1, \dots, s_n) \in \{+,-\}^n$，且对某个 $(s'_1, \dots, s'_m) \in \{+,-\}^m$，若 $s_i = +$，则 $\mathrm{sgn}(g_i) = (s'_1, \dots, s'_m)$；若 $s_i = -$，则 $\mathrm{sgn}(g_i) = (-\cdot s'_1, \dots, -\cdot s'_m)$，其中 $i \in \{1, \dots, m\}$。不失一般性，$s_n = +$ 且 $s_1 = \cdots = s_\ell = -$，其中某个 $\ell < n$ 和

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_n \wedge \gamma(x_1 \wedge \varphi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, x_\ell \wedge \varphi_\ell(x_1, \dots, x_n), 0, \dots, 0)$$

对于某个元数为 r 的 $\gamma \in C$，满足 $\ell \leq r < n$，以及某些具有合适符号的 ±-元运算 φ_1，……，φ_ℓ，并且对于 $i \in \{1, \dots, n\}$，

$$g_i(x_1, \dots, x_m) = \\ x_{j_i} \wedge \gamma_i(x_{j_{i,1}} \wedge \varrho_{i,1}(x_1, \dots, x_m), \dots, x_{j_{i,\ell_i}} \wedge \varrho_{i,\ell_i}(x_1, \dots, x_m), 0, \dots, 0)$$

对于某个元数为 r_i 的 $\gamma_i \in C$，满足 $\ell_i \leq r_i < m$；对于某些 j_i，$j_{i,1}$，……，$j_{i,\ell_i} \in \{1, \dots, m\}$，使得 x_{j_i} 在 g_i 中的符号为 $+$，且 $x_{j_{i,1}}$，……，$x_{j_{i,\ell_i}}$ 中每一个的符号均为 $-$；再取某些具有合适符号的 ±-元运算 $\varrho_{i,1}$，……，ϱ_{i,ℓ_i}，那么

$$\begin{aligned}
&f(g_1, \dots, g_n)(x_1, \dots, x_m) \\
&= g_n(x_1, \dots, x_m) \\
&\quad \wedge \gamma(g_1(x_1, \dots, x_m) \wedge \varphi_1(g_1, \dots, g_n)(x_1, \dots, x_m), \dots, \\
&\qquad g_\ell(x_1, \dots, x_m) \wedge \varphi_\ell(g_1, \dots, g_n)(x_1, \dots, x_m), 0, \dots, 0) \\
&= x_{j_n} \wedge \gamma_n(x_{j_{n,1}} \wedge \varrho_{n,1}(x_1, \dots, x_m), \dots, x_{j_{n,\ell_n}} \wedge \varrho_{n,\ell_n}(x_1, \dots, x_m), 0, \dots, 0) \\
&\quad \wedge \gamma(g_1(x_1, \dots, x_m) \wedge \varphi_1(g_1, \dots, g_n)(x_1, \dots, x_m), \dots, \\
&\qquad g_\ell(x_1, \dots, x_m) \wedge \varphi_\ell(g_1, \dots, g_n)(x_1, \dots, x_m), 0, \dots, 0) \\
&= x_{j_n} \wedge \hat{\gamma}(x_{j_n} \wedge \gamma_n(x_{j_{n,1}} \wedge \varrho_{n,1}(x_1, \dots, x_m), \dots, x_{j_{n,\ell_n}} \wedge \varrho_{n,\ell_n}(x_1, \dots, x_m), \\
&\qquad\qquad 0, \dots, 0, x_{j_1} \wedge \zeta_1(x_1, \dots, x_m), \dots, x_{j_\ell} \wedge \zeta_\ell(x_1, \dots, x_m), 0, \dots, 0),
\end{aligned}$$

其中

$$\hat{\gamma}(x_1, \dots, x_{r_n}, y_1, \dots, y_r) = \gamma_n(x_1, \dots, x_{r_n}) \wedge \gamma(y_1, \dots, y_r),$$

并且对于 $i \in \{1, \dots, \ell\}$，

$$\begin{aligned}
\zeta_i(x_1, \dots, x_m) = \gamma_i(&x_{j_{i,1}} \wedge \varrho_{i,1}(x_1, \dots, x_m), \dots, x_{j_{i,\ell_i}} \wedge \varrho_{i,\ell_i}(x_1, \dots, x_m), 0, \dots, 0) \\
&\wedge \varphi_i(g_1, \dots, g_n)(x_1, \dots, x_m)
\end{aligned}$$

由于 C 对子式和 $\Lambda C \subseteq C$封闭，因此可得 $\hat{}\gamma \in C$。因此，$f(g_1, \ldots\ldots, g_n) \in D$。
◇

断言 *4*. $D^\flat \subseteq C$.

Pr断言 *4* 的证明。令 $q \in D^\flat$ 为 n元的，也就是说，是一个（$n+1$）元的 ± 运算

$$q^\sharp(x^+, y_1^-, \ldots, y_n^-) = x \wedge q(y_1, \ldots, y_n)$$

是 D 的一个元素。注意，由于 x 是 $q^\sharp$ 中唯一的正变量，在表示 $q^\sharp$的任何形如 (12.4.1) 的表达式中，第一个变量（在 $\wedge$ 的左侧）必定是 x。固定这样一个表达式；因此，对于某个 $g \in C$ 以及某些 ± 元运算 $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$，

$$x \wedge q(y_1, \ldots, y_n) = x \wedge g(z_1 \wedge \varphi_1(x, y_1, \ldots, y_n), \ldots, z_m \wedge \varphi_m(x, y_1, \ldots, y_n)),$$

w这里每个 z_i 不是常数 0，就是负变量 $y_1, \ldots, y_n$ 之一 .
在两边将 x 替换为 1，得到

$$q(y_1, \ldots, y_n) = g(z_1 \wedge \varphi_1(1, y_1, \ldots, y_n), \ldots, z_m \wedge \varphi_m(1, y_1, \ldots, y_n)),$$

n元运算 $z_j \wedge \varphi_j$(1， y_1，……， y_n)要么是常数 0，要么在其每个满足赋值中变量 z_j 都等于 1；在这两种情况下，它都属于 U∞。因此 $q \in C\mathrm{U}^\infty \subseteq C$。 ◇

根据断言 2 和 3， D 是一个 ±-预克隆，并结合断言 1，可得 $C^\sharp \subseteq D$。断言 4 随即给出 $(C^\sharp)^\flat \subseteq D^\flat \subseteq C$，如所要求。 □

定理 *12.1* 的证明。 命题 12.4 表明，映射 $C \mapsto C^\sharp$ 是从非空 (U∞， Λ)-克隆子的偏序集到布尔 ±-预克隆的偏序集的一个嵌入。根据定理 12.2，(U∞， Λ)-克隆子的格是不可数的，因此结论成立。 □

现在我们来构建一些工具，以研究格 ${}^{\pm}\mathcal{L}_2$ 的部分结构。

12.5 定义。设 $F \leq \mathrm{Op}(A)$ 是一个布尔克隆，即 $F \in \mathcal{L}_2$。若 ±-预克隆 $P \leq {}^{\pm}\mathrm{Op}(A)$ 满足 $\langle \mathring{P} \rangle = F$，则称其为 F 的原像；也就是说，取出 P 中的所有运算并忽略符号 a，即可生成 F 中的所有运算。令 $F^{\boxdot}$ 表示 F 的所有原像的集合，称为 F 的原像类。

°关于 $\langle P \rangle$ 的不变关系刻画已在命题 7.3 中给出。° °可以看出，只需添加虚变量并进行变量识别，就能从 P 得到 $\langle P \rangle$ 。

显然， $\{F^{\boxdot} \mid F \in \mathcal{L}_2\}$ 是 ${}^{\pm}\mathcal{L}_2$ 的一个原像类划分。因此，我们接下来考察这些原像类的结构。

12.6 命题。设 $F \in \mathcal{L}_2$，并设 G 是布尔克隆 F的一个生成系统。每个原像类 $F^{\boxdot}$都是 ${}^{\pm}\mathcal{L}_2$中的一个半区间：它有一个最大元，即 ±-预克隆

$$P_F := \{f \in {}^{\pm}\mathrm{Op}(A) \mid \mathring{f} \in F\} = {}^{\pm}\langle\{\mathsf{id}_A^-\} \cup \{g^{(+,\dots,+)} \mid g \in G\}\rangle$$

不过，一般来说，$F^{\boxdot}$中可能存在多个极小元。

证明。不难看出，左侧 P_F 是一个 ±-预克隆，显然也是 $F^{\boxdot}$中最大的 ±-预克隆。所示的生成系统生成 P_F，因为通过与 id_A^- 复合，可以任意改变每个变量的符号。

°此外，区间性质显而易见，因为对于满足 $\langle P'\rangle = F$的 ${}^{\pm}$ $P \le P'$ $\langle P\rangle =$-预克隆，我们显然有：对于每个 ±-预克隆 °$P \le P'' \le P'$，$\langle P''\rangle = F$。°
$F^{\boxdot}$ 并不总是一个区间，如例子 $F = \langle\neg\rangle$ 所示（见图 2 ）. □

根据定理 4.1[(I)]，每个 ±-预克隆都可以由不变关系 $\varrho = (\varrho_+, \varrho_-)$刻画。下面的命题给出了原像类 $F^{\boxdot}$的关系刻画。

12.7 命题。设 $F \in \mathcal{L}_2$ 是一个布尔克隆。那么，±-预克隆 $H \in {}^{\pm}\mathcal{L}_2$属于 $F^{\boxdot}$，当且仅当 $\mathrm{Inv}\ F = \{\sigma \in \mathrm{Rel}(A) \mid H \overset{\pm}{\triangleright} (\sigma, \sigma)\}$。

证明。注意 $H \in F^{\boxdot} \iff \langle\mathring{H}\rangle = F \iff \mathrm{Inv}\langle\mathring{H}\rangle = \mathrm{Inv}\ F$。由命题 3.10[(I)]可得 $\langle\mathring{H}\rangle = \mathrm{Pol}\{\sigma \in \mathrm{Rel}(A) \mid (\sigma,\sigma) \in {}^{\pm}\mathrm{Inv}\ H\}$。因此，$\mathrm{Inv}\langle\mathring{H}\rangle = \mathrm{Inv}\ \mathrm{Pol}\{\sigma \in \mathrm{Rel}(A) \mid (\sigma,\sigma) \in {}^{\pm}\mathrm{Inv}\ H\} = \{\sigma \in \mathrm{Rel}(A) \mid (\sigma,\sigma) \in {}^{\pm}\mathrm{Inv}\, H\}$，这就完成了证明（后一个等式源于集合 $\{\sigma \in \mathrm{Rel}(A) \mid (\sigma,\sigma) \in {}^{\pm}\mathrm{Inv}\ H\}$ 是一个关系克隆（参见定义 2.7[(I)]）；而这一点可由 S-关系克隆 H的定义 2.11[(I)] 直接推出）。 □

我们将描述 $F^{\boxdot}$ 特殊的布尔克隆 F。

°首先，我们处理一元布尔 ±-预克隆 P，即 ±-预克隆，其中对于每个 $f \in P$，f 本质上都是一元的。正如引理 12.8 将要说明的，这类 ±-预克隆完全由其一元或二元 ± 运算刻画。
对于一元运算 $g \in \mathrm{Op}^{(1)}(A)$，我们考虑以下相关的 ±-运算（$x, y \in A$）：

$$g^+(x) := g(x),\ \mathrm{sgn}(g^+) = (+), \qquad g^{\pm_1}(x,y) := g(x),\ \mathrm{sgn}(g^{\pm_1}) = (+,-),$$
$$g^-(x) := g(x),\ \mathrm{sgn}(g^-) = (-), \qquad g^{\pm_2}(x,y) := g(y),\ \mathrm{sgn}(g^{\pm_2}) = (+,-).$$

当 c_i 为一元布尔运算常数 i (针对 $i \in \{0,1\}$) 时，我们有$c_i^{\pm_1} = c_i^{\pm_2}$。因此，我们将这个 ±-运算记为 $c_i^{\pm}$ ($i \in \{0,1\}$)。此外，为简便起见，我们用 id 代替 id_A。

注意，所有一元极小 ±-预克隆的生成元都属于上述 ±-运算（关于记号，参见定理 10.11(D)）： $\alpha_{0000} = c_0^{\pm}$, $\alpha_{1111} = c_1^{\pm}$,$\alpha_{0101} = \mathrm{id}^{\pm_2}$, $\alpha_{1100} = \neg^{\pm_1}$, $\alpha_{0101} = \neg^{\pm_2}$。它们生成图 2 中一元布尔 ±-预克隆格的极小元。

12.8 引理。设 P 是一个一元布尔 ±-预克隆。对于 $f \in P$，令 f' 为由 f 通过将同一符号的所有自变量识别而得到的 ± 运算。则 $^{\pm}\langle f'\rangle = {}^{\pm}\langle f\rangle$。

注意， f' 必须具有以下符号之一：(+)、(–)、(+, –)、(–, +)；但通过置换自变量，我们可以排除 (–, +)。

证明。 P 是一个一元 ±-预克隆，因此 f 至多有一个本质参数。这立即推出引理所述结论。 □

因此，为了找出所有一元 ±-预克隆，只需找出所有由形如 g^+， g^-， $g^{\pm_1}$, $g^{\pm_2}$ 的 ±-运算生成的 ±-预克隆，其中 $g \in \mathrm{Op}^{(1)}(A)$。结果见定理 12.10。

12.9 引理。令 $g \in \mathrm{Op}^{(1)}(A)$。那么

(a) $^{\pm}\langle g^{\pm_1}\rangle \subsetneq {}^{\pm}\langle g^+\rangle$ (对于 $g \neq \mathrm{id}$),
(b) $^{\pm}\langle g^{\pm_2}\rangle \subsetneq {}^{\pm}\langle g^-\rangle$, (c)
$^{\pm}\langle g^-\rangle \subsetneq {}^{\pm}\langle g^{\pm_1}, \mathrm{id}^-\rangle$ (对于 $g \neq \mathrm{id}$)。

证明。(a)：我们有 $^{\pm}\langle g^{\pm_1}\rangle \subseteq {}^{\pm}\langle g^+\rangle$，因为 $g^{\pm_1}(x, y) = x = (\nabla^- g^+)(y, x)$。该包含关系是严格的，因为存在 $\varrho \in {}^{\pm}\mathrm{Rel}(A)$，使得 $g^{\pm_1}$ 保留 ±，但 g^+ 不保留（事实上，对于 $g \neq \mathrm{id}$，存在 $a \neq b$ 使得 $g(a) = b$，而一元 ±-关系 $\varrho := (\emptyset, \{a\})$ 就能满足要求）。

(b)：我们有 $^{\pm}\langle g^{\pm_2}\rangle \subseteq {}^{\pm}\langle g^-\rangle$，因为 $g^{\pm_2} = \nabla^+ g^-$。该包含关系是严格的，因为对于 $\varrho = (A, \emptyset)$, $\varrho \in {}^{\pm}\mathrm{Inv}\ g^{\pm_2} \setminus {}^{\pm}\mathrm{Inv}\ g^-$ （参见引理 7.4）。
(c)：我们有 $^{\pm}\langle g^-\rangle \subseteq {}^{\pm}\langle g^{\pm_1}, \mathrm{id}^-\rangle$，因为 $g^-(x) = g^{\pm_1}(\mathrm{id}^-(x)\ x)$。该包含关系是严格的，因为对于二元关系 ±，有 $\varrho \in {}^{\pm}\mathrm{Inv}\ g^- \setminus {}^{\pm}\mathrm{Inv}\{g^{\pm_1}, \mathrm{id}^-\}$，其中 ϱ 满足$\varrho_+ = \{(0,1), (g^2(0)\ g^2(1))\}$，且 $\varrho_- := \{(g(0)\ g(1))\}$（注意， $g^3 = g$且$\varrho_+ \neq \varrho_-$ 若 $g \neq \mathrm{id}$；因此 id^- 不会 ±-保持 ϱ，但 g^- 会）。 □

一元布尔函数的幺半群有六个： $M_{\mathrm{id}} := \{\mathrm{id}_A\}$, $M_0 := \{\mathrm{id}_A, c_0\}$,$M_1 := \{\mathrm{id}_A, c_1\}$, $M_{01} := \{\mathrm{id}_A, c_0, c_1\}$, $M_\neg := \{\mathrm{id}_A, \neg\}$, $M_2 := \{\mathrm{id}_A, c_0, c_1, \neg\} =$

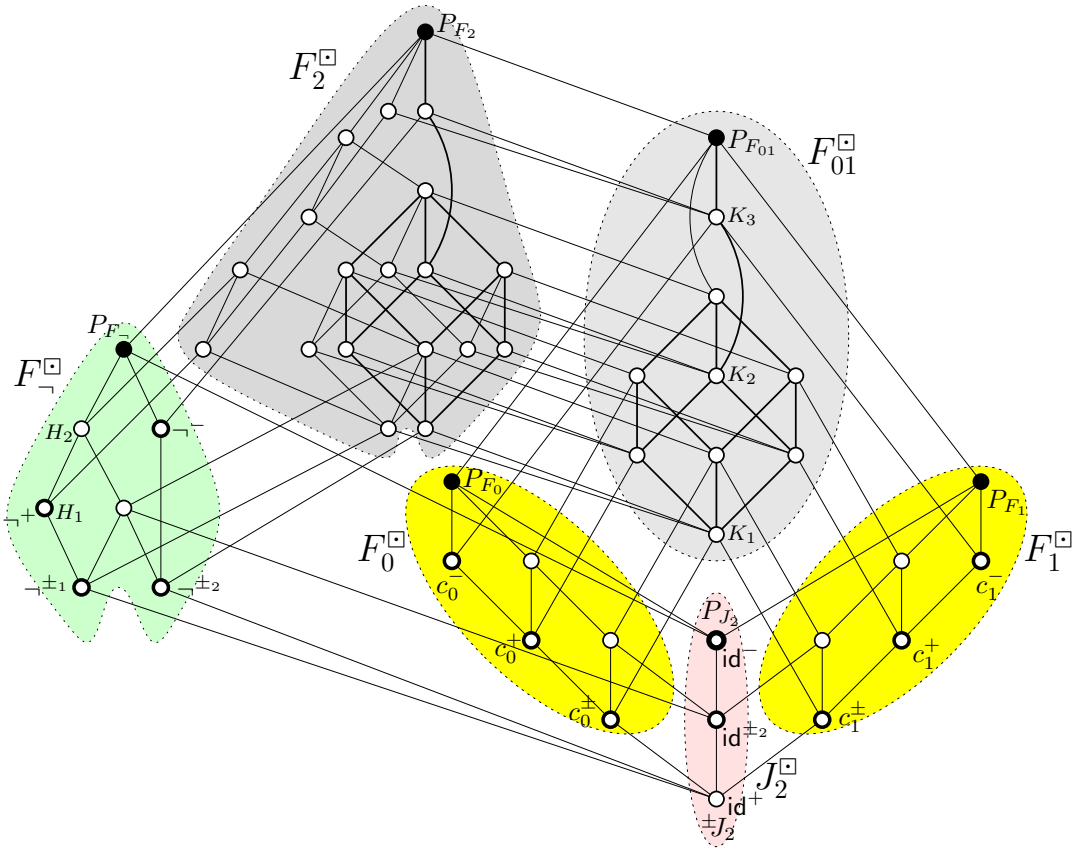


图 2：一元 ±-预克隆的格及其六个原像类 $J_2^{\boxdot}$,$F_0^{\boxdot}$, $F_1^{\boxdot}$, $F_{01}^{\boxdot}$, $F_\neg^{\boxdot}$和 $F_2^{\boxdot}$（每个原像类中的最大元以及不可约元均已标出）

$\mathrm{Op}^{(1)}(A)$。由这些 M_i 生成的布尔克隆与 M_i 相同，忽略虚变量后记为 $F_i := \langle M_i \rangle$，其中 $i \in \{\mathsf{id}\, 0、1、01、\neg、2\}$；参见注释 $F_{\mathsf{id}} = \langle M_{\mathsf{id}} \rangle = J_2$。相应的原像类将在下一个定理中描述（每个类中的每个 ±-预克隆均由一个生成系统给出）。

12.10 定理。一元布尔 ±-预克隆的格总共有 *51* 个元素。由$\mathsf{id}_A^{\pm_2}$、id_A^-, $c_0^\pm$, c_0^+, c_0^-,$c_1^\pm$, c_1^+, c_1^-, $\neg^{\pm_1}$, $\neg^{\pm_2}$, $\neg^+$, $\neg^-$生成的不可约元有 *12* 个，其中包含关系如下：

$$
\begin{aligned}
&{}^{\pm}\langle \mathsf{id}_A^{\pm_2} \rangle < {}^{\pm}\langle \mathsf{id}_A^- \rangle, && {}^{\pm}\langle c_0^\pm \rangle < {}^{\pm}\langle c_0^+ \rangle < {}^{\pm}\langle c_0^- \rangle,\\
&{}^{\pm}\langle \neg^{\pm_1} \rangle < {}^{\pm}\langle \neg^+ \rangle, && {}^{\pm}\langle c_1^\pm \rangle < {}^{\pm}\langle c_1^+ \rangle < {}^{\pm}\langle c_1^- \rangle,\\
&{}^{\pm}\langle \neg^{\pm_2} \rangle < {}^{\pm}\langle \neg^- \rangle. &&
\end{aligned}
$$

每个 ±-预克隆中的一元和二元运算都可以从图 *2* 的格中读出。这六个原像类如下。每个 ±-预克隆都有一个

至多四个 ±-运算的生成系统 （即至多四个不可约元的并）。

(i) $J_2^{\boxdot} = \{{}^{\pm}\langle \mathsf{id}_A^{+}\rangle,\ {}^{\pm}\langle \mathsf{id}_A^{\pm_2}\rangle,\ {}^{\pm}\langle \mathsf{id}_A^{-}\rangle\}$, 注 ${}^{\pm}J_2 = {}^{\pm}\langle \mathsf{id}_A^{+}\rangle,\ P_{J_2} = {}^{\pm}\langle \mathsf{id}_A^{-}\rangle$, $|J_2^{\boxdot}| = 3$,

(ii) $F_0^{\boxdot} = \{{}^{\pm}\langle c_0^{\pm}\rangle, {}^{\pm}\langle c_0^{+}\rangle,$ ${}^{\pm}\langle c_0^{-}\rangle$, ${}^{\pm}\langle$恒等映射$^{\pm_2}, c_0^{\pm}\rangle$, ${}^{\pm}\langle$恒等映射$^{\pm_2}, c_0^{+}\rangle$, ${}^{\pm}\langle$恒等映射$^{\pm_2}, c_0^{-}\rangle\}$, $|F_0^{\boxdot}| = 6$,

(iii) $F_1^{\boxdot} = \{{}^{\pm}\langle c_1^{\pm}\rangle, {}^{\pm}\langle c_1^{+}\rangle, {}^{\pm}\langle c_1^{-}\rangle,$ ${}^{\pm}\langle$恒等映射$^{\pm_2}, c_1^{\pm}\rangle$, ${}^{\pm}\langle$恒等映射$^{\pm_2}, c_1^{+}\rangle$, ${}^{\pm}\langle$恒等映射$^{\pm_2}, c_1^{-}\rangle\}$, $|F_1^{\boxdot}| = 6$,

(iv) $F_{01}^{\boxdot} = \{{}^{\pm}\langle c_0^{\pm}, c_1^{\pm}\rangle, {}^{\pm}\langle \mathsf{id}^{\pm_2}, c_0^{\pm_1}, c_1^{\pm}\rangle,$
${}^{\pm}\langle c_0^{\pm}, c_1^{+}\rangle, {}^{\pm}\langle \mathsf{id}^{\pm_2}, c_0^{\pm}, c_1^{+}\rangle, {}^{\pm}\langle c_1^{\pm}, c_0^{+}\rangle, {}^{\pm}\langle \mathsf{id}^{\pm_2}, c_1^{\pm}, c_0^{+}\rangle,$
${}^{\pm}\langle c_0^{+}, c_1^{+}\rangle, {}^{\pm}\langle \mathsf{id}^{\pm_2}, c_0^{+}\ c_1^{+}\rangle, {}^{\pm}\langle c_0^{-}, c_1^{-}\rangle, {}^{\pm}\langle$编号$^{\pm_2}, c_0^{-}, c_1^{-}\rangle\}$, $|F_{01}^{\boxdot}| = 10$,
注 ${}^{\pm}\langle \mathsf{id}^{\pm_2}, c_0^{-}, c_1^{-}\rangle = P_{F_{01}} = {}^{\pm}\langle \mathsf{id}^{-}, c_0^{+}, c_1^{+}\rangle = P_{F\ \ 0} \vee P_{F_1}$,

(v) $F_{\neg}^{\boxdot} = \{{}^{\pm}\langle \neg^{\pm_1}\rangle, {}^{\pm}\langle \neg^{\pm_2}\rangle, {}^{\pm}\langle \neg^{+}\rangle, {}^{\pm}\langle \neg^{-}\rangle, {}^{\pm}\langle \mathsf{id}^{\pm_2}, \neg^{\pm_1}\rangle, {}^{\pm}\langle \mathsf{id}^{\pm_2}, \neg^{+}\rangle, {}^{\pm}\langle \mathsf{id}^{\pm_2}, \neg^{-}\rangle\}$, $|F_{\neg}^{\boxdot}| = 7$,
note ${}^{\pm}\langle \mathsf{id}^{\pm_2}, \neg^{-}\rangle = P_{F_{\neg}} = {}^{\pm}\langle \mathsf{id}^{-}, \neg^{+}\rangle$,

(vi) $F_2^{\boxdot} = \{{}^{\pm}\langle \neg^{\pm_1}, c_0^{\pm}\rangle, {}^{\pm}\langle \neg^{\pm_1}, c_0^{+}\rangle,$
${}^{\pm}\langle \neg^{\pm_1}, c_1^{+}\rangle, {}^{\pm}\langle \neg^{\pm_1}, c_0^{+}, c_1^{+}\rangle,$
${}^{\pm}\langle \neg^{+}, c_0^{\pm}\rangle, {}^{\pm}\langle \neg^{+}, \mathsf{id}^{\pm_2}, c_0^{\pm}\rangle,$
${}^{\pm}\langle \neg^{+}, c_0^{+}\rangle, {}^{\pm}\langle \neg^{+}, \mathsf{id}^{\pm_2}, c_0^{+}\rangle, {}^{\pm}\langle \neg^{+}, c_0^{-}\rangle,$
${}^{\pm}\langle \neg^{\pm_2}, c_0^{\pm}\rangle, {}^{\pm}\langle \neg^{\pm_2}, \mathsf{id}^{\pm_2}, c_0^{\pm_1}\rangle,$
${}^{\pm}\langle \neg^{\pm_2}, c_0^{+}\rangle, {}^{\pm}\langle \neg^{\pm_2}, \mathsf{id}^{\pm_2}, c_0^{+}\rangle,$
${}^{\pm}\langle \neg^{\pm_2}, c_1^{+}\rangle, {}^{\pm}\langle \neg^{\pm_2}, \mathsf{id}^{\pm_2}, c_1^{+}\rangle,$
${}^{\pm}\langle \neg^{\pm_2}, c_0^{+}, c_1^{+}\rangle, {}^{\pm}\langle \neg^{\pm_2}, \mathsf{id}^{\pm_2}, c_0^{+}, c_1^{+}\rangle,$
${}^{\pm}\langle \neg^{\pm_2}, c_0^{-}\rangle, {}^{\pm}\langle \neg^{\pm_2}, \mathsf{id}^{\pm_2}, c_0^{-}\rangle\}$ $|F_2^{\boxdot}| = 19$,
note ${}^{\pm}\langle \neg^{\pm_2}, \mathsf{id}^{\pm_2}, c_0^{-}\rangle = P_{F_2} = {}^{\pm}\langle \mathsf{id}^{-}, c_0^{+}, c_1^{+}, \neg^{+}\rangle = P_{F_{\neg}} \vee P_{F_{01}}$.

证明概要。 所有必要的计算都或多或少是直接的。为了证明 ${}^{\pm}\langle G_1\rangle \subseteq {}^{\pm}\langle G_2\rangle$ （对于定理中列表里由 G_1 和 G_2生成的 ±-预克隆），对每个 $g_1 \in G_1$，都必须给出一个项（其运算来自 G_2），使其项运算与 g_1一致。为了证明 ${}^{\pm}\langle G_1\rangle \neq {}^{\pm}\langle G_2\rangle$，只需找出一个 ±-关系 $\varrho = (\varrho_+,\ \varrho_-)$，它被 G_1 或 G_2 之一 ±-保持，但不被另一个保持（例如，$\varrho \in {}^{\pm}\mathrm{Inv}\, G_1 \setminus {}^{\pm}\mathrm{Inv}\, G_2$表明上述包含关系是严格的）。通过证明 ${}^{\pm}\langle G_1 \cup G_2\rangle \subseteq {}^{\pm}\langle G_3\rangle$ 和 ${}^{\pm}\langle G_3\rangle \subseteq {}^{\pm}\langle G_1 \cup G_2\rangle$，也可以用这种方式证明 ${}^{\pm}\langle G_1\rangle \vee {}^{\pm}\langle G_2\rangle = {}^{\pm}\langle G_3\rangle$。
最后，为了确认图 2 正确无误，需要检查对于每个下覆盖为 $P_1, \ldots, P_n$ 的 ±-预克隆P，对于所有 $i, j \in \{1, \ldots, n\}$,$i \neq j$，都有 $P = P_i \vee P_j$。由于图 2 中出现了所有可能的不可约元及其并，这就完成了证明。

我们将证明 $^{\pm}\mathcal{L}_2$ 的一般结构，并给出一些精选示例，但不会逐一详述每个细节（这些细节留作练习，例如可以借助计算机程序完成）。

我们从不可约元开始：每个不可约的一元 $\pm$-预克隆都必须由一个本质上一元的 $\pm$-运算生成。由于一元布尔运算只有四种（id_A，c_0，c_1，$\neg$），定理列表中的 12 $\pm$-运算 *all* 是可能的候选项（显然，id_A^+ 和 $\mathrm{id}_A^{\pm 1}$应排除，因为它们生成平凡的 $\pm$-预克隆 $^{\pm}J_2$），并且由于所示包含关系，它们彼此不同，确实都是不可约元。举例验证：我们有$^{\pm}\langle c_0^+\rangle \subsetneq {}^{\pm}\langle c_0^-\rangle$，因为 $c_0^+(x) = c_0^-(c_0^-(x))$，并且对于 $\varrho = (\{0\}, \emptyset)$，$\varrho \in {}^{\pm}\mathrm{Inv}\ c_0^+ \setminus {}^{\pm}\mathrm{Inv}\ c_0^-$。
现在“只剩下”考虑这 12 个不可约元$\pm$-预克隆的所有可能的并。每个 $\pm$-预克隆都属于六个原像类之一，我们现在将更详细地讨论这些原像类。

(i)：$J_2^{\boxdot}$的结构显而易见，可直接由引理 12.9(b) 得出（注意$^{\pm}\langle \mathrm{id}^{\pm 1}\rangle = {}^{\pm}\langle \mathrm{id}^{+}\rangle \subsetneq {}^{\pm}\langle \mathrm{id}^{\pm 2}\rangle$）。
(ii)：$F_0^{\boxdot}$中的每个 $\pm$-预克隆都必须包含某个 c_0^{λ}（对于某个符号 λ），而对于 $f \in P$，我们必须有 $^{\circ}f \in F_0$（包括 $f = \mathrm{id}$）。考虑引理 12.9 后，不可约元的所有并构成子格 $J_2^{\boxdot} \cup F_0^{\boxdot}$，如图 2 所示。唯一需要额外证明的“非平凡”部分是有三个下覆盖 $^{\pm}\langle c_0^-\rangle$、$^{\pm}\langle c_0^+, \mathrm{id}^{\pm 2}\rangle$ 和 $P_{J_2} = {}^{\pm}\langle \mathrm{id}^-\rangle$ 的 $\pm$-预克隆 P_{F_0}。这一情形可归结为证明 $^{\pm}\langle c_0^{\pm}, \mathrm{id}^-\rangle = {}^{\pm}\langle c_0^-, \mathrm{id}^{\pm 2}\rangle$。事实上，由 (i) 可得 $\mathrm{id}^{\pm 2} \in {}^{\pm}\langle \mathrm{id}^-\rangle$，$c_0^-(x) = c_0^{\pm}(\mathrm{id}^-(x)\ x)$，且 $\mathrm{id}^-(x) = \mathrm{id}^{\pm 2}(c_0^-(x)\ x)$、$c_0^{\pm}(x, y) = c_0^-(c_0^-(\mathrm{id}^{\pm 2}(x, y)))$。
(iii)：此情形与 (ii) 对偶（交换 0 和 1）。
(iv)：不难看出，由 $c_0^{\pm}$，c_0^+，$c_1^{\pm}$，c_1^+（生成的）不可约元的所有并，会产生四个新的 $\pm$-预克隆；再加上不可约元 $\mathrm{id}^{\pm 2}$，便得到图 2 的 $F_{01}^{\boxdot}$ 部分中以“立方体”形式呈现的八个 $\pm$-预克隆。与其余不可约元 c_0^-，c_1^-和 id^- 的并，只会在立方体上方产生两个新的 $\pm$-预克隆（这很容易从这些不可约元的特殊性质推出，尤其是它们是幂等的，并且可以通过复合改变符号）。

(v)：$F_{\neg}^{\boxdot}$ 中有四个不可约元，不难证明它们生成图 2 所示的半区间 $F_{\neg}^{\boxdot}$（主要利用引理 12.9 处理 $g = \neg$，并证明 $^{\pm}\langle \neg^{\pm 1}\rangle \vee {}^{\pm}\langle \neg^-\rangle = P_{F_{\neg}}$）。由于 $F_{\neg}$ 是极小的（例如，它不包含常元），$F_{\neg}^{\boxdot}$ 中的 $\pm$-预克隆只能包含来自 $J_2^{\boxdot}$的$\pm$-预克隆；容易看出 $\mathrm{id}^{\pm 2} \in {}^{\pm}\langle \neg^{\pm 1}\rangle \vee {}^{\pm}\langle \neg^{\pm 2}\rangle$（因为 $\mathrm{id}^{\pm 2}(x, y) = y = \neg^{\pm 2}(x, \neg^{\pm 1}(y, x))$），而 id^- 仅包含于 $P_{F_{\neg}}$中。
(vi)：最困难（也是最繁琐）的工作是证明图 2 中 $F_2^{\boxdot}$ 的表示正确。我们手动核查了许多部分，但最终结果是借助计算机程序得出的。这里给出一些提示：$F_2^{\boxdot}$ 中的每个 $\pm$-预克隆都必须

是包含否定和两个常元的不可约元之并，因此必定是一个由 $H \in F^{\boxdot}_{\neg}$ 和 $K \in F^{\boxdot}_{01}$ 构成的并。容易验证，$^{\pm}\langle\neg^{\pm_1}\rangle$ 的并与 $^{\pm}\langle\neg^{\pm_2}\rangle$ 和 $F^{\boxdot}_{01}$ 中的“立方体”（见上文 (iv)）的并，在 $F^{\boxdot}_{2}$ 中形成两个具有相同上表面的“立方体”，总共得到十二个 $\pm$-预克隆（在图 2 中 $F^{\boxdot}_{2}$ 的右下部分“可见”）。$F^{\boxdot}_{2}$ 中其余七个 $\pm$-预克隆是 H_1、$H_2 \in F^{\boxdot}_{\neg}$ 与 K_1、K_2、$K_3 \in F^{\boxdot}_{01}$ 的六个并（在图 2 中明确标出），以及 $^{\pm}\langle\neg^{-}\rangle \vee K_2$ 的并。 □

现在我们考察其他（非一元）极小克隆的原像类：设$F_{\wedge}$、$F_{\vee}$和 $F_{\oplus}$ 分别是由合取（$\wedge$）、析取（$\vee$）和 $g_{\oplus}$生成的极小克隆。这里，$g_{\oplus}$ 是三元布尔少数函数，定义为$^{\circ}$ $g_{\oplus}(x,y,z) := x \oplus y \oplus z (= f_{\oplus}(x,y,z,0)$，参见 10.11(A))

原像类如下述命题所示。

回顾一下，对于布尔函数 $f: A^n \to A$，我们用 f^{λ} 表示相应的 $\pm$-运算，其符号为 $\lambda \in \{+,-\}^n$（我们有$(f^{\lambda})^{\circ} = f$）。算子 ∇^{+} 和 ∇^{-} 分别在首位添加一个符号为 $+$ 或 $-$的虚变量（参见定义 2.3(4)$^{(1)}$），例如，$\nabla^{-}(\wedge^{(+,+)}) = (\nabla(\wedge))^{(-,+,+)}$。注意，$\pm$-预克隆 $^{\pm}\langle\nabla^{-}(\wedge^{(+,+)})\rangle$ 和 $^{\pm}\langle\nabla^{-}(g_{\oplus}^{(+,+,+)})\rangle$ 是极小的 $\pm$-预克隆，因为$^{\pm}\langle\nabla^{-}(\wedge^{(+,+)})\rangle = {}^{\pm}\langle g_{0000}^{(+,+,-)}\rangle$（参见定理 10.11(C)），且 $^{\pm}\langle\nabla^{-}(g_{\oplus}^{(+,+,+)})\rangle = {}^{\pm}\langle f_{\oplus}\rangle$（参见定理 10.11(A)）。

12.11 命题。

$$\begin{aligned}
&\text{(a)}\ F^{\boxdot}_{\wedge} = \{{}^{\pm}\langle\nabla^{-}\wedge^{(+,+)}\rangle, {}^{\pm}\langle\wedge^{(+,-)}\rangle, {}^{\pm}\langle\wedge^{(+,+)}\rangle, {}^{\pm}\langle\nabla^{+}\wedge^{(-,-)}\rangle, {}^{\pm}\langle\wedge^{(-,-)}\rangle,\\
&\qquad {}^{\pm}\langle\nabla^{-}\wedge^{(+,+)}, \wedge^{(+,-)}\rangle, {}^{\pm}\langle\wedge^{(+,+)}, \wedge^{(+,-)}\rangle, {}^{\pm}\langle\wedge^{(+,+)}, \mathsf{id}^{\pm_2}\rangle\} \qquad |F^{\boxdot}_{\wedge}| = 8,\\
&\text{(b)}\ F^{\boxdot}_{\vee} = \{{}^{\pm}\langle\nabla^{-}\vee^{(+,+)}\rangle, {}^{\pm}\langle\vee^{(+,-)}\rangle, {}^{\pm}\langle\vee^{(+,+)}\rangle, {}^{\pm}\langle\nabla^{+}\vee^{(-,-)}\rangle, {}^{\pm}\langle\vee^{(-,-)}\rangle,\\
&\qquad {}^{\pm}\langle\nabla^{-}\vee^{(+,+)}, \vee^{(+,-)}\rangle, {}^{\pm}\langle\vee^{(+,+)}, \vee^{(+,-)}\rangle, {}^{\pm}\langle\vee^{(+,+)}, \mathsf{id}^{\pm_2}\rangle\} \qquad |F^{\boxdot}_{\vee}| = 8,\\
&\text{(c)}\ F^{\boxdot}_{\oplus} = \{{}^{\pm}\langle\nabla^{-} g_{\oplus}^{(+,+,+)}\rangle, {}^{\pm}\langle g_{\oplus}^{(+,-,-)}\rangle, {}^{\pm}\langle g_{\oplus}^{(+,+,-)}\rangle, {}^{\pm}\langle g_{\oplus}^{(+,+,+)}\rangle, {}^{\pm}\langle g_{\oplus}^{(-,-,-)}\rangle,\\
&\qquad {}^{\pm}\langle g_{\oplus}^{(+,+,+)}, g_{\oplus}^{(+,-,-)}\rangle, {}^{\pm}\langle g_{\oplus}^{(+,+,+)}, g_{\oplus}^{(+,+,-)}\rangle\} \qquad |F^{\boxdot}_{\oplus}| = 7.
\end{aligned}$$

证明。(a)：所列出的五个单生成元 $\pm$-预克隆彼此不同，并满足以下包含关系：$^{\pm}\langle\nabla^{-}\wedge^{(+,+)}\rangle \subset {}^{\pm}\langle\wedge^{(+,+)}\rangle \subset {}^{\pm}\langle\wedge^{(-,-)}\rangle$ and $^{\pm}\langle\wedge^{(+,-)}\rangle \subset {}^{\pm}\langle\nabla^{+}\wedge^{(-,-)}\rangle \subset {}^{\pm}\langle\wedge^{(-,-)}\rangle$（这一点很容易看出，例如，具有混合符号的 $\pm$-运算永远无法生成具有纯符号的 $\pm$-运算；而混合或纯正符号也永远无法生成纯负符号）。不难看出，这些 $\pm$-预克隆的并构成了图 3 中的“格”。

此外，n元布尔函数 $f \in F_{\wedge}(n \geq 2)$ 具有如下形式：$f(x_1,\ldots,x_n) = x_1 \wedge \ldots \wedge x_n$（相差虚变量）。事实证明，对于任意符号函数$\lambda \in \{+,-\}^n$，如果 f 没有虚变量，那么对应的 $\pm$元运算

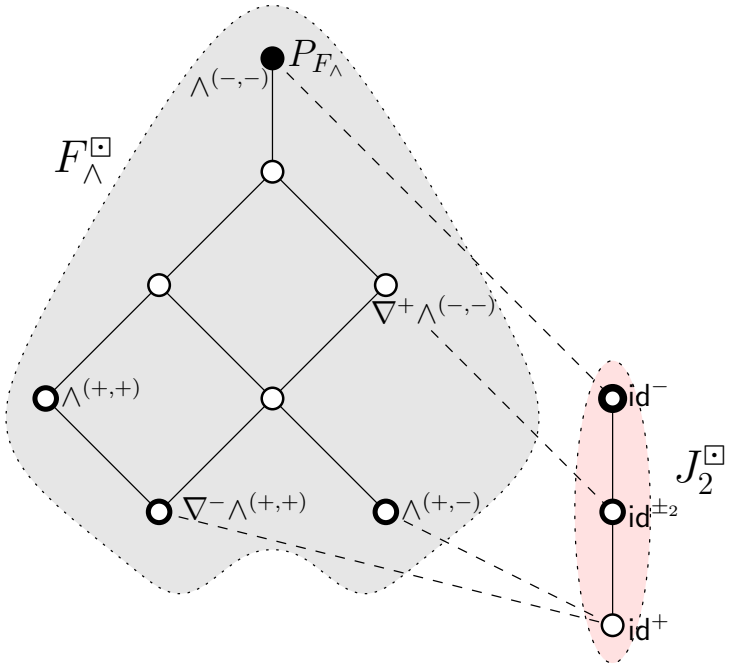


图 3：原像类 $F^{\boxdot}_{\wedge}$及其与 $J^{\boxdot}_{2}$的联系（ $F^{\boxdot}_{\vee}$情形类似）

f^λ 生成所列出的某个（一元生成的） ±-预克隆，从而完成证明。事实上，我们有：

$^{\pm}\langle f^\lambda\rangle = {}^{\pm}\langle\wedge^{(+,+)}\rangle$ 对于 $\lambda =$(+、.....、 +)（纯正符号型），
$^{\pm}\langle f^\lambda\rangle = {}^{\pm}\langle\wedge^{(+,-)}\rangle$ 对于 $\lambda =$(+、.....、 +、 −、.....、 −)（混合符号），$^{\pm}\langle f^\lambda\rangle = {}^{\pm}\langle\wedge^{(-,-)}\rangle$ 对于 $\lambda =$(−、.....、 −)（纯负符号函数）。

为了考虑虚变量，只需考虑纯符号的 ±-元运算（在混合符号的 ±-元运算中添加一个虚变量，可以通过将其与另一个具有相同符号的变量进行变量识别来消除）。令$\lambda =$(+、.....、 +、 −、.....、 −)（其中出现 + 有 m 次， $1 \le m < n$）。剩下的工作是检验以下 ±-元运算 f(x_1、.....、 x_m、.....、 x_n): $= x_1 \wedge \ldots \wedge x_m$ 以及h(x_1、.....、 x_{m+1}、.....、 x_n) $= x_{m+1}\wedge\ldots\wedge x_n$。但此时我们有 $^{\pm}\langle f^\lambda\rangle = {}^{\pm}\langle\nabla^{-}\wedge^{(+,+)}\rangle$ 和 $^{\pm}\langle h^\lambda\rangle = {}^{\pm}\langle\nabla^{+}\wedge^{(-,-)}\rangle$，从而完成了 (a) 的证明。

(b)：显然，可以利用 $\wedge$ 与 $\vee$ 的对偶性，仿照 (a) 证明这一点。

(c)：每个 n 元项运算 $h \in F_\oplus$ 都有奇数个本质变量（若其非平凡，则至少是三元的）。识别两个变量会使它们变成虚变量（因为 $x \oplus x = 0, y + 0 = y$）。令 $h_n(x_1, \ldots, x_n) := x_1 \oplus \ldots \oplus x_n$ 和 $\lambda =$(+,. . . , + $\underbrace{\qquad}_{m}$ −,. . . , −)，其中 $0 \le m \le n, 3 \le n$。于是我们有：

$^{\pm}\langle h^\lambda_n\rangle = {}^{\pm}\langle g^{(+,-,-)}_{\oplus}\rangle$ 如果 $m \ne n$ 为奇数，

$^{\pm}\langle h_n^{\lambda}\rangle = {}^{\pm}\langle g_{\oplus}^{(+,+,-)}\rangle$ if $m \neq 0$ is even,
$^{\pm}\langle h_n^{\lambda}\rangle = {}^{\pm}\langle g_{\oplus}^{(+,+,+)}\rangle$ if $m = n$,
$^{\pm}\langle h_n^{\lambda}\rangle = {}^{\pm}\langle g_{\oplus}^{(-,-,-)}\rangle$ if $m = 0$.
利用变量识别和复合即可轻松验证这一点，例如，$g_{\oplus}^{(+,-,-)}(x_1, x_2, x_3)$ $= h_5^{(+,+,+,-,-)}(x_1, x_1, x_1, x_2, x_3)$，$h_5^{(+,+,+,-,-)}(x_1, \ldots\ldots, x_5) = g_{\oplus}^{(+,-,-)}(x_1, x_4, g_{\oplus}^{(+,-,-)}(x_5, x_2, x_3))$。
因此，每个不含虚变量的 n 元项运算都会生成上述某个 $\pm$-预克隆。考虑虚变量后，还需加入 $^{\pm}\langle\nabla^{-} g_{\oplus}^{(+,+,+)}\rangle$ 和 $^{\pm}\langle\nabla^{+} g_{\oplus}^{(-,-,-)}\rangle$。然而 $^{\pm}\langle\nabla^{+} g_{\oplus}^{(-,-,-)}\rangle = {}^{\pm}\langle g_{\oplus}^{(+,+,-)}\rangle$，因为按记号 $h := \nabla^{+} g_{\oplus}^{(-,-,-)}$（注意，符号函数$(h) = (+, -, -, -)$），我们有：

$$\begin{aligned} h(x_1, x_2, x_3, x_4) &= g_{\oplus}^{(-,-,-)}(x_2, x_3, x_4) \\ &= g_{\oplus}^{(+,+,-)}(x_1, g_{\oplus}^{(+,+,-)}(x_1, x_1, x_2), g_{\oplus}^{(+,+,-)}(x_3, x_4, x_1)), \\ g_{\oplus}^{(+,+,-)}(x_1, x_2, x_3) &= h(x_1, h(x_4, h(x_1, x_3, x_3, x_3), x_1, x_2), x_3, x_3). \end{aligned}$$

因此，原像类 $F_{\oplus}^{\boxdot}$ 中的每个元素都是列出的某个由单个元素生成的 $\pm$-预克隆，或是其中若干个的并。最终结果见图 4。这些包含关系都是严格的，并且可以再次利用复合来证明；为说明这一点，我们给出一个典型情形的证明，即 $^{\pm}\langle g_{\oplus}^{(+,-,-)}\rangle \subset {}^{\pm}\langle g_{\oplus}^{(+,+,-)}\rangle$。事实上，

$$g_{\oplus}^{(+,-,-)}(x_1, x_2, x_3) = g_{\oplus}^{(+,+,-)}(x_1, x_1, g_{\oplus}^{(+,+,-)}(x_2, x_3, x_1)) \quad = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3.$$

此外，$^{\pm}\langle g_{\oplus}^{(+,-,-)}\rangle$ 中的每个 $\pm$运算都具有奇数个符号为“+”的本质变量，因此永远无法生成 $g_{\oplus}^{(+,+,-)}$。
如图 4 所示，$F_{\oplus}^{\boxdot}$ 中还只有另外两个元素，它们是两个由单个元素生成的 $\pm$预克隆的并（分别是 $g_{\oplus}^{(+,+,+)}$ 与 $g_{\oplus}^{(+,-,-)}$，以及 $g_{\oplus}^{(+,+,-)}$）。我们省略这部分（直接但繁琐的）证明细节。

□

还有一个尚未讨论的最小布尔克隆，即由多数运算 $m(x, y, z) := (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x)$生成的最小克隆 F_{maj}。原像类 $F_{\mathrm{maj}}^{\boxdot}$ 的结构仍未得到完整描述，但显然 $^{\pm}\langle f_{\mathrm{maj}}\rangle$ 属于这个原像类（f_{maj} 等于 m，但多了一个符号为“–”的虚变量；见定理10.11(A)）。

Baker–Pixley 定理表明，$(d+1)$ 元近一致运算 g 的多态克隆由其 d元不变关系决定，因此包含 g 的克隆只有有限多个。这一结论可以推广到 $\pm$-克隆。这里我们仅针对布尔

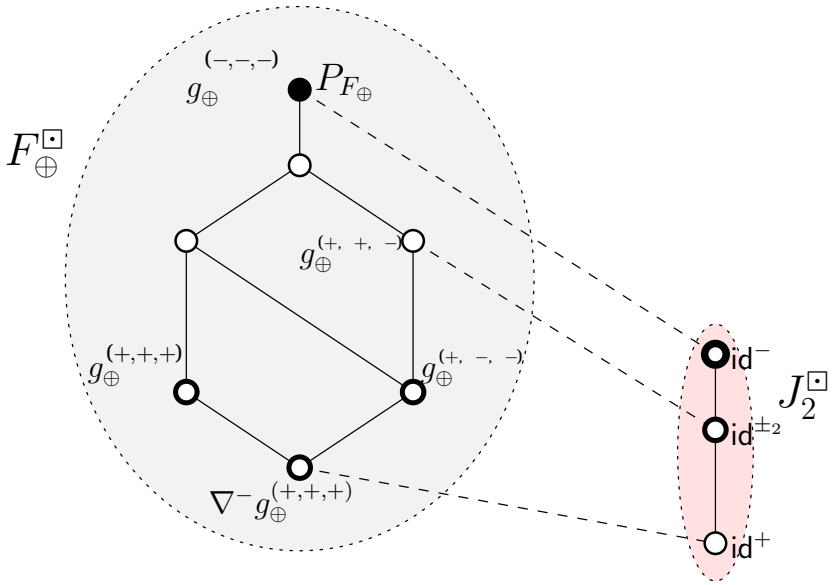


图 4：原像类 $F^{\boxdot}_{\oplus}$及其与 $J_2^{\boxdot}$的联系

$\pm$-克隆包含多数 $\pm$元运算 f_{maj} 的特殊情形来表述（因此， $d=2$，三元近一致运算就是多数运算）。不过，如果 A 是任意有限集，且 f_{maj} 是带有一个符号为‘–’的额外虚变量的任意多数运算，证明仍然成立。此外，将这一结果推广到带有一个负号（对应额外虚变量）的 $(d+1)$ 元近一致运算也很直接。

12.12 命题 (布尔 $\pm$-预克隆的 Baker–Pixley 定理)。 设 P 是一个包含 f_{maj} 的 $\pm$-预克隆。那么， P 由其二元 $\pm$-关系确定：$P = {}^{\pm}\mathrm{Pol}\,{}^{\pm}\mathrm{Inv}^{(2)}\,P$。特别地，区间 $[{}^{\pm}\langle f_{\mathrm{maj}}\rangle, {}^{\pm}\mathrm{Op}(A)]_{\pm\mathcal{L}_2}$ 是有限的。

证明。 显然 $P \subseteq {}^{\pm}\mathrm{Pol}\,{}^{\pm}\mathrm{Inv}^{(2)}\,P$。因此，只需证明反向包含。设 $f^\lambda \in {}^{\pm}\mathrm{Pol}^{(\lambda)}\,{}^{\pm}\mathrm{Inv}^{(2)}\,P$，其符号为 $\lambda = (s_1,\dots,s_n) \in \{+,-\}^n$。我们将证明 $f^\lambda \in P$，从而完成证明。假设 λ至少包含一个符号 $-$ （纯正符号型的情况稍后讨论），比如$s_{i_0} = -$。令

$$\mathcal{M} := \{B \subseteq A^n \mid \exists g_B \in P^{(\lambda)} : f\restriction_B = g_B\restriction_B\}.$$

我们对基数 t 作归纳法来证明 $A^n \in \mathcal{M} :\!= |B|$。于是 $f = g_{A^n} \in P$，证毕。

设 $t=2$，即 B的形式为 $B = \{(a_1,\dots,a_n),(b_1,\dots,b_n)\}$。
考虑由 $\varrho :\!= \left(\begin{smallmatrix} a_1 & \cdots & a_n \\ b_1 & \cdots & b_n \end{smallmatrix}\right)$ 生成的（针对 P） $\pm$-关系 $\Gamma_P(\varrho)$（参见定义 3.11[1]），其中 $\boldsymbol{\lambda}_\varrho :\!= \lambda$（关于记号，参见定义 2.8[1]）。由于

$\Gamma_P(\varrho) \in {}^{\pm}\mathrm{Inv}^{(2)} P$我们有 $f \overset{\pm}{\triangleright} \Gamma_P(\varrho)$，特别是 $(a, b) := (f(a_1, \ldots\ldots, a_n), f(b_1, \ldots\ldots, b_n)) \in (\Gamma_P(\varrho))_+$。

由命题 3.13(iii)[(1)] 可得 $(\Gamma_P(\varrho))_+ = \{g(r_1, \ldots\ldots, r_n) \mid g \in P^{(\boldsymbol{\lambda}_\varrho)}\}$，其中$r_i = \binom{a_i}{b_i}$（注意，此处 $+$ 是 $S = \pm$ 的单位元 e）。因此，存在一个 ±-元运算 $g_B \in P^{(\lambda)}$（注意，按构造可知 $\lambda = \boldsymbol{\lambda}_\varrho$），使得 $(a, b) = (g_B(a_1, \ldots\ldots, a_n)\ g_B(b_1, \ldots\ldots, b_n))$, 即 $f{\restriction}_B = g_B{\restriction}_B$。

（注意，上述论证对 $t = 1$ 也成立；此时有 $(a_1, \ldots\ldots, a_n) = (b_1, \ldots\ldots, b_n)$。）

现在假设，对于所有含有 t 个元素的 B'，都有 $B' \in \mathcal{M}$ $(2 \le t \le |A^n| - 1)$。我们证明，对于所有含有 $t+1$ 个元素的 B，都有 $B \in \mathcal{M}$。于是，根据对 t 的归纳法，$A^n \in \mathcal{M}$, 证毕。

设 $B \subseteq A^n$，其中 $|B| = t + 1$。选取三个互不相同的元素 $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3 \in B$（这是可能的，因为 $|B| = t + 1 \ge 3$），并令 $B_i := B \setminus \{\mathbf{b}_i\}$ $(i = 1, 2, 3)$。于是 $|B_i| = t$，因此根据假设，$B_i \in \mathcal{M}$。由此存在满足 f 的 $g_{B_i} \in P^{(\lambda)}$: 对于所有 $\mathbf{b} \in B_i$（$i = 1, 2, 3$），均有 $(\mathbf{b}) = g_{B_i}(\mathbf{b})$。

于是，由规则给出的 g 符号函数 λ 的 $\pm$ 元运算（回想一下，根据假设 $s_{i_0} = -$）

$$g(\mathbf{x}) = f_{\mathrm{maj}}(g_{B_1}(\mathbf{x}), g_{B_2}(\mathbf{x}), g_{B_3}(\mathbf{x}), x_{i_0}) \quad \text{for all } \mathbf{x} \in A^n$$

属于 P，并且对于所有 $\mathbf{b} \in B$，都有 $f(\mathbf{b}) = g(\mathbf{b})$。事实上，对于 $\mathbf{b} = \mathbf{b}_i$ with $\{i, i', i''\} = \{1, 2, 3\}$，我们有 $g_{B_{i'}}(\mathbf{b}) = g_{B_{i''}}(\mathbf{b}) = f(\mathbf{b})$（因为 $\mathbf{b}_i \in B_j$ for $j \ne i$），因此 $g(\mathbf{b}) = f(\mathbf{b})$，这是因为 f_{maj} 在前面三个自变量上是多数运算，而第四个自变量是虚假的。对于 $\mathbf{b} \in B \setminus \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$，显然有 $g_{B_1}(\mathbf{b}) = g_{B_2}(\mathbf{b}) = g_{B_3}(\mathbf{b}) = f(\mathbf{b})$，并且再次有 $g(\mathbf{b}) = f(\mathbf{b})$。这说明 $f{\restriction}_B = g{\restriction}_B$。

最后，我们必须考虑 $\mathrm{sgn}(f) = (+, \ldots, +)$ 的情形。如果 f 是一个投影，那么 $f \in P$，结论即得，因此假设 f 不是投影。那么

$$\circ f \in F_{\mathrm{maj}} = \langle m \rangle,$$

从而（因为 F_{maj} 是一个极小克隆）有 $m \in \langle f \rangle$，这意味着 $m^{+++} \in {}^{\pm}\langle f \rangle \subseteq P$（注意，$P$的正部分 $P^{[+]}$是一个克隆，参见命题 4.7[(1)]，此处 $\mathring{P}^{[+]} = F_{\mathrm{maj}}$）。现在我们可以像上面一样（对于经典 Baker–Pixley 定理），使用 m^{+++} 代替 f_{maj}继续进行:

$$f(\mathbf{b}) = m^{+++}(g_{B_1}(\mathbf{b}), g_{B_2}(\mathbf{b}), g_{B_3}(\mathbf{b})),$$

这（由归纳法）意味着 $f \in P$，至此证明完毕。 □

13 结束语

我们描述了格 ${}^{\pm}\mathcal{L}_2$ 中布尔 ±-预克隆的全部 9 个余原子和 20 个原子，并得到了自对偶 ${}^{\pm}\mathcal{L}_2^{\mathrm{sd}}$子格的类似结果

布尔 $\pm$-预克隆。与布尔克隆的 Post 格不同，$^{\pm}\mathcal{L}_2$ 是不可数的。布尔 $\pm$-预克隆被划分为相应布尔克隆的原像类；我们还描述了所有一元布尔克隆以及除多数克隆外的极小布尔克隆的原像类。对于包含多数运算的 $\pm$-预克隆，Baker–Pixley 型定理表明，$^{\pm}\mathcal{L}_2$ 的某些子区间仍然是有限且性质良好的。这些结果为格 $^{\pm}\mathcal{L}_2$提供了一些结构方面的见解，这里我们还提出了若干进一步的问题。

- 在下文的极大布尔 $\pm$-预克隆 $^{\pm}\mathcal{L}_2$ 中，哪些理想是可数的，哪些是不可数的?
- 求自对偶 $\pm$-预克隆子格 $^{\pm}\mathcal{L}_{\mathrm{sd2}}$ 的基数。虽然我们已经分类了它的极大元和极小元，但其整体结构仍有待确定。
- 描述多数克隆 F_{maj} 的原像类。
- 虽然我们重点研究了布尔情形 $A = \{0, 1\}$，但我们的一些结果，例如有限偏序集上 $^{\pm}$Pol$(\leq, \geq)$ 的极大性，以及关于多数运算的 Baker–Pixley 定理，对于任意有限基集都成立。还有哪些结果对于任意基集仍然成立?
- 将极大 $\pm$-预克隆的分类推广到一般有限集 A。

最后，我们请参阅第一部分第 $6^{(1)}$ 节中提到的未解决问题列表。

参考文献

[JipLP2024] P. Jipsen, E. Lehtonen, and R. Pöschel, S-预克隆与伽罗瓦连接 ^{S}Pol–^{S}Inv，第一部分。Algebra Universalis 85(3)，(2024)，第 34 号文章，共 29 页。[Leh2026a] E. Lehtonen, 具有线性源克隆以及半格或0-或1-分离目标克隆的布尔函数克隆子。Algebra Uni- versalis 87(2), (2026)，第 15 号文章，共 26 页。[Leh2026b] E. Lehtonen，具有本质一元、线性、半格或0-或1-分离源克隆和目标克隆的布尔函数克隆子。Inter- nat. J. Algebra Comput. 36(1)，(2026)，第 17–50 页。[P¨osK 1979] R. Pöschel and L.A. Kalužnin, 函数与关系代数。Deutscher Verlagder Wissenschaften，柏林，1979，（Birkh¨auser Verlag Basel, Math. Reihe Bd. 67，1979）。