arXiv:2611.33076v1 [math.DG] 24 Nov 2026

非俘获边界下的 DEC 填充、Bartnik–Bray 内质量与正质量定理

AHMED ELLITHY、VISHNU KAKKAT 和 STEPHEN MCCORMICK

Abstract. 给定一个配备指定时空 Bartnik 数据的闭合 $n-1$ 维流形，我们探讨何时它可以实现为满足主导能量条件（DEC）的紧致 n 维初始数据集的边界。这是非负标量曲率填充问题的一种自然推广；在该问题中，边界度量和平均曲率是预先指定的。我们给出 Bartnik 数据满足的若干条件，这些条件足以证明存在具有内侧 MOTS 边界的此类 DEC 填充，并给出这些填充的一些应用。

我们的首个应用是为 Bartnik–Bray 内质量建立一个下界；在此我们稍作改写，使其成为一个真正的时空定义。其他应用包括证明一个适用于边界不必为俘获边界的自旋初始数据的正质量定理，以及一个时空 Penrose 型不等式：假设时空 Penrose 不等式成立，该不等式便能根据边界 Bartnik 数据，为带边界初始数据集的质量给出一个正下界。

Contents

1. 引言 2 2. 设定与定义 6 2.1. Bartnik 数据 6 2.2. DEC 填充 6 2.3. Bartnik–Bray 内质量 7 3. DEC 填充的构造 9 3.1. 领子构造 10 3.2. 一般 Bartnik 数据 13 3.3. 带有 $P = 0$ 16 3.4. 带有 P 正比于 H 17 的 Bartnik 数据 3.5. 小数据的存在性 21 4. 内质量估计 22 5. 在带边界的正质量定理和类 Penrose 不等式中的应用 25 5.1. 带边界的正质量定理 25 5.2. 一个类 Penrose 不等式 28 附录 A. 定理 5.2 的证明概要 33 参考文献 38

1. Introduction

给定一个配备正函数 H 的闭流形 $(\Sigma,\ \gamma)$，标量曲率几何中的一个问题是：何时存在一个具有非负标量曲率的流形 $(\Omega\ g)$，其边界与 $(\Sigma,\ \gamma)$ 等距，且平均曲率为 H （相对于外法向）。通常也允许 $(\Omega\ g)$ 具有非连通边界，前提是其中一个边界分支与 $(\Sigma,\ \gamma)$ 等距，而其余边界分支均为极小曲面。Gromov 的工作（例如参见 [14]）凸显了围绕这一问题的诸多问题；尽管仍有一些问题尚未解决，但人们如今已经对何时存在这样的填充有了一定了解。粗略地说，只要 H 不太大，预期就应当存在填充。关于这一方向已有一些不存在性结果，其实质是：如果存在一个具有较大 H 的非负标量曲率填充，那么这将与正质量定理相矛盾（例如参见 Shi 和 Tam 关于 Brown–York 质量正性的工作 [37]）。这种与正质量定理的联系源于以下事实：对于广义相对论中的时间对称初始数据集，标量曲率非负等价于满足主导能量条件（**DEC**）。

本文考虑这一填充问题的一种自然推广，将其扩展到广义相对论背景下的初始数据集，并以主导能量条件取代非负标量曲率。初始数据集是一个三元组 $(\Omega\ g,\ K)$，其中 $(\Omega\ g)$ 是一个黎曼 n维流形，K 是 Ω 上的对称二阶张量。若初始数据集满足以下条件，则称其满足主导能量条件：

$$\mu(g,K)\geq|J(g,K)|_g, \tag{1.1}$$

其中

$$2\mu(g,K)=R_g-|K|_g^2+(\mathrm{tr}_gK)^2 \tag{1.2}$$

$$J_i(g,K)=\nabla^jK_{ij}-\nabla_i(\mathrm{tr}_gK). \tag{1.3}$$

若 $(g,\ K)$ 满足 (1.1) 中的严格不等式，则称其满足严格主能量条件。正质量定理是数学广义相对论中的一项核心结果，涉及渐近平坦初始数据集。回顾一下，若初始数据集 $(M,\ g,\ K)$ 满足以下条件，则称其为渐近平坦：M 去掉一个紧集后，与有限个去掉闭球的 $\mathbb{R}^n$ 同胚；并且在这些渐近端的欧氏坐标中，有

$$|g-\delta|=O_2(|x|^{-q}),\qquad |K|=O_1(|x|^{-q-1}), \tag{1.4}$$

其中，$q>\frac{n-2}{2}$ 和 O_k 表示第一个 k 导数比前一个多衰减一个 $|x|$ 阶。若进一步假设 $\mu,\ J\in L^1$ 则每个端的 ADM能量E 和动量 p都有定义，且由下式给出

$$E(M,g,K)=\lim_{r\to\infty}\frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}}\oint_{S_r}(\partial_jg_{ij}-\partial_ig_{jj})\,\nu^i\,dS, \tag{1.5}$$

$$p_k(M,g,K)=\lim_{r\to\infty}\frac{1}{(n-1)\omega_{n-1}}\oint_{S_r}(K_{ki}-(\mathrm{tr}_gK)g_{ki})\,\nu^i\,dS, \tag{1.6}$$

其中 ν 是坐标球面的外向单位法向量，$S_r=\{|x|=r\}$是单位（$n-1$）球面的体积，重复指标默认求和。正质量定理指出，若满足主导能量条件，则 $E\geq|p|$。

这一结果历史悠久而丰富，始于 Schoen 和 Yau [35, 36], 以及 Witten [39] 的最初证明，并于最近由 Brendle 和 Wang [7, 8]最终解决了所有维数的情形。如上所述，正质量定理与正标量曲率及主导能量条件填充问题密切相关。事实上，作为我们所构造填充的一个应用，我们证明了一个关于具有外部非俘获边界的初始数据集的新正质量定理（见下文定理 C）。

对于这个填充问题，除了规定边界条件（Σ, γ, H）之外，我们还要求为 K规定边界条件。对于主导能量条件，一个自然的选择是固定*Bartnik* 数据（Σ, γ, H, P, $\omega^\perp$），其中包括 Ω 上的一个函数 P和 1-形式 $\omega^\perp$，并要求填充（Ω g, K）满足 $\mathrm{tr}_{\partial\Omega}K = P$以及 K（ν, ·）$= \omega^\perp$ 在 Ω 上成立，其中ν 是外向单位法向量。于是，DEC 填充的问题如下。

问题。 给定的 Bartnik 数据（Σ, γ, H, P, $\omega^\perp$）何时能够实现为满足主导能量条件的紧致初始数据集（Ω g, K）的某个边界分支上所诱导的 Bartnik 数据?

注 1.1。 对于数学广义相对论中的应用，正标量曲率填充问题通常允许填充具有其他作为极小曲面的边界分支。DEC 填充问题的对应做法是允许存在其他边界分支，条件是它们为边际外俘获面（MOTS）或边际内俘获面（MITS）。这意味着在所有其他边界分支上，$H + \mathrm{tr}_{\partial\Omega}K = 0$ 或 $H - \mathrm{tr}_{\partial\Omega}K = 0$。这种广义填充称为带视界的 DEC 填充，与 Bray 的内部 Bartnik 质量有关，我们也将在本文中对此进行讨论。

与相应的非负标量曲率填充问题相比，人们对这个问题的了解要少得多，但近来已经得出了一些不存在性结果。例如，Tsang [38] 和 Raulot [33] 在不同假设下证明，如果

$$H - \sqrt{P^2 + |\omega^\perp|_\gamma^2}$$

足够大，则不存在 DEC 填充。我们还请读者参阅 B¨ar、Brendle、Chow 和 Hanke [2] 的近期工作，以及 Kazaras、Khuri 和 Lin [22], 的工作；Raulot [34], 最近的工作也证明了精神相近、密切相关的不存在性结果。

本文转而关注存在性结果。据我们所知，除了时间对称情形（例如参见 [27, 28]）外，这些是关于 DEC 填充问题的首批存在性结果；在时间对称情形下，该问题会归结为上文提到的正标量曲率填充问题。下面我们陈述本文主要结果的简化版本，并在括号中注明本文后文给出的完整陈述所在位置。

定理 A (定理 3.5)。设 $\mathcal{D} = (\Sigma, \gamma, H, P, \omega^\perp)$ 为 Bartnik 数据，且 $H > 0$ 满足

$$\begin{aligned}\frac{n-2}{n-1}H^2 < R_\gamma - 2H\Delta_\gamma H^{-1} - 2|\omega^\perp|_\gamma^2 \\ - 2\Big[\big(\nabla^\gamma \cdot \omega^\perp - 2\langle \nabla \log H, \omega^\perp\rangle_\gamma\big)^2 + \big(H|\omega^\perp|_\gamma + |\nabla P|_\gamma\big)^2\Big]^{\frac{1}{2}}.\end{aligned} \tag{1.7}$$

那么 $\mathcal{D}$ 存在一个带视界的 DEC 填充。

作为推论，我们还给出了一个关于小型 Bartnik 数据的存在性结果，这与 Jauregui [20]关于时间对称情形的结果类似：如果 $R_\gamma > 0$，那么 $(\Sigma,\ \gamma,\ \lambda H,\ \lambda P,\ \lambda\omega^\perp)$ 对所有充分小的 $\lambda > 0$ 都存在带视界的 DEC 填充（见推论 3.14）。

注意，定理 A 不假设 H 与 P 之间存在任何关系，并且对 P 的大小没有限制，只限制其梯度。例如，如果 P 是常数，那么无论 $|P|$ 有多大，(1.7) 都与 $P = 0$ 的条件相同，因此 Σ 甚至可以是一个俘获曲面，即 $H < |P|$。这与上文提到的不存在性结果是一致的；这些结果要求 $H - \sqrt{P^2 + |\omega^\perp|^2_\gamma}$ 足够大，因此较大的 $|P|$ 反而只会减弱这一障碍。

在 3 维中，我们可以延伸穿过视界，从而得到一个满足主导能量条件且除 Σ 外没有其他边界分支的紧致初始数据集；也就是说，这是一个不含视界的 DEC 填充（命题 3.12）。然而，在高维中，尚不清楚何时能够确切实现这一点。

带视界的填充构造使我们能够从下方估计 Bartnik–Bray 内质量，因此我们还构造了适用于这一用途的填充。这里我们考虑一种广义的内质量概念（定义 2.3），它基于 Kazaras、Khuri 和 Lin [22]，对通常 Bartnik 质量所作的类似推广。在第4节中，我们得到了几个彼此密切相关的内质量估计。

定理 B（定理 4.3）。考虑 Bartnik 数据 $\mathcal{D} = (\Sigma、\ \gamma、\ H、\ P、\ \omega^\perp)$。假设$\theta_\pm = \max_\Sigma(H \pm P) > 0$ 并且

$$\overline{\theta}_+\overline{\theta}_- < \frac{n-1}{n-2}\overline{\Phi}, \tag{1.8}$$

其中，$\overline{\Phi}$由下式给出

$$\overline{\Phi} = \min_\Sigma \left(R_\gamma - 2|\omega^\perp|^2_\gamma - 2\Big((\nabla^\gamma \cdot \omega^\perp)^2 + \overline{\theta}_+\overline{\theta}_-|\omega^\perp|^2_\gamma\Big)^{\frac{1}{2}} \right). \tag{1.9}$$

则内质量 $\mathfrak{m}_{BB}$ 满足

$$\mathfrak{m}_{BB}(\mathcal{D}) \geq \frac{r_o^{n-2}}{2}\left(1 - \frac{n-2}{n-1}\frac{\overline{\theta}_+\overline{\theta}_-}{\overline{\Phi}}\right), \tag{1.10}$$

其中，r_o 是 γ的面积半径。

第4节给出了内质量的另外两个相似但不同的估计（推论 4.1 和推论4.5）。

作为对所构造填充的另一项应用，我们能够证明带边界流形的正质量定理，而这些流形的边界不必是俘获曲面。回顾一下，通常要求边界是俘获曲面，正质量定理才能成立（参见 [12, 23]）。每个不同的填充都会给出正质量定理成立的略有不同的条件，因此我们这里只陈述其中一个，并请读者参阅第 5 节，了解另外两个类似结果（定理 5.3 和定理 5.7）。

定理 C (定理 5.5)。设 (M, g, K) 是满足主导能量条件的自旋渐近平坦初始数据集，其边界为 ∂M，并相对于指向内侧的法向量诱导出 Bartnik 数据 $(\Sigma, \gamma, H, P, \omega^\perp)$。那么，如果 $\theta_\pm = \max_\Sigma(H \pm P) > 0$ 且

$$\frac{n-2}{n-1}\overline{\theta}_+\overline{\theta}_- < R_\gamma - 2|\omega^\perp|^2_\gamma - 2\Big((\nabla^\gamma \cdot \omega^\perp)^2 + \overline{\theta}_+\overline{\theta}_-|\omega^\perp|^2_\gamma\Big)^{\frac{1}{2}} \tag{1.11}$$

则可得 $E(M,g,K) \geq |p(M,g,K)|$。

我们的正质量定理是将 Kazaras、Khuri 和 Lin [22] 提出的带折痕正质量定理应用于这样一个流形而得出的：该流形由把我们的填充附加到一个带边界的渐近平坦初始数据集上构成。

注记 1.2。 在时间对称情形下，非俘获内边界意味着边界的（指向内侧的）平均曲率在某处为正。针对时间对称初始数据，已有若干允许边界具有正平均曲率的正质量定理，包括 Herzlich [16], Hirsch 和 Miao[17], 以及 Miao 与第三作者 [28]的结果。然而，据我们所知，这是第一个针对具有非俘获边界的非时间对称初始数据的正质量定理。

在第 5 节中，我们还应用 Lin [24] 的一项结果，将某些 DEC 填充平滑地粘合到一个带边界的渐近平坦初始数据集上。假设彭罗斯不等式成立（正如 OpenAI [31, 32], 最近所声称的那样），那么本文构造的填充便给出了 Miao 与第三作者 [28] 提出的类 Penrose 不等式的时空类比。

定理 D （定理 5.11 和推论 5.12）。 设 (M,g,K) 是一个满足主导能量条件、具有面积外极小边界的渐近平坦初始数据集，该边界相对于内法向诱导出 Bartnik 数据 $(\Sigma,\gamma,H_+,P_+,\omega_+^\perp)$。我们假设 $H_+ > |P_+| > 0$，并定义

$$\widehat{H} = |P_+| \max_\Sigma \frac{H_+}{|P_+|}.$$

假设

$$\widehat{H}^2 - P_+^2 < \frac{n-1}{n-2}\widehat{\Psi} \qquad \text{on } \Sigma, \tag{1.12}$$

其中

$$\widehat{\Psi} = R_\gamma - 2\widehat{H}\Delta_\gamma \widehat{H}^{-1} - 2|\omega_+^\perp|_\gamma^2 - 2\Big((\nabla^\gamma \cdot \omega_+^\perp - 2\langle \nabla \log \widehat{H}, \omega_+^\perp\rangle)^2 + \widehat{H}^2\left(|\omega_+^\perp|_\gamma + |\nabla \log \widehat{H}|\right)^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

那么，对于任意 $\varepsilon > 0$，存在一个满足主导能量条件的渐近平坦初始数据集，在某个紧集之外与 (M,g,K) 相同，且具有面积外极小的 MOTS 或 MITS 边界，其面积 $|\Sigma_H|$ 满足

$$\frac{1}{2}\left(\frac{|\Sigma_H|}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{n-2}{n-1}} \geq \min_\Sigma \frac{r_o^{n-2}}{2}\left(1 - \frac{n-2}{n-1}P_+^2 \frac{\max_\Sigma \frac{H_+^2}{P_+^2} - 1}{\widehat{\Psi}}\right) - \varepsilon. \tag{1.13}$$

其中 $r_o := \left(\frac{|\Sigma|_\gamma}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{1}{n-1}}$ 是 (Σ,γ) 的面积半径。特别地，若时空 Penrose 不等式在维数 n 下成立，则 (M,g,K) 的 ADM 质量 $\mathfrak{m}$ 满足

$$\mathfrak{m} \geq \min_\Sigma \frac{r_o^{n-2}}{2}\left(1 - \frac{n-2}{n-1}P_+^2 \frac{\max_\Sigma \frac{H_+^2}{P_+^2} - 1}{\widehat{\Psi}}\right) > 0. \tag{1.14}$$

本文结构如下。第2节中，我们给出全文所用的基本定义，包括区分 DEC 填充与带有

视界的 DEC 填充，以及本文所考虑的 Bartnik–Bray 内质量的时空定义。第3节中，我们构造 DEC 填充，并在第4节中用它们估计内质量，在第 5 节中证明我们的正质量定理。附录 A 概述了如何将 [22] 的带折痕的正质量定理轻易推广至带有俘获边界的初始数据集；这是我们在第 5 节中需要的结果。

Acknowledgements

AE 由 Knut and Alice Wallenberg 基金会（KAW 2022.0285）资助。VK 由 Kempe 基金会（JCSMK24-507）资助。SM 由 Olle Engkvist 基金会（239-0644）、Magnus Bergvall 基金会以及瑞典皇家科学院管理的基金会资助。

AI Disclosure

本文所呈现的数学工作主要是在人工智能工具近期取得数学应用方面的进展之前完成的，并未使用人工智能工具。不过，在提交至 arXiv 之前，我们使用人工智能工具协助校对和检查正确性，并据此修改了论文。特别是，我们发现了定理 5.8 的应用中有一处小的遗漏，而 Claude Opus 5.5 建议加入引理 5.9。

2. Setup and Definitions

本节将确定 Bartnik 数据的约定，定义本文讨论的两类主导能量条件填充，并定义时空 Bartnik–Bray 内质量。

全文中，$n \geq 3$，所有流形和张量均为光滑的，并且 Σ 是一个闭、连通且可定向的（$n-1$）维流形。

2.1. **Bartnik 数据**。设（M, g, K）为一个初始数据集，且 $\Sigma \subset M$ 是一个闭嵌入超曲面，也可能是 M 的一个边界分支。相对于选定的单位法向量 ν，在 Σ 上诱导的 Bartnik 数据为（$\Sigma, \gamma, H, P, \omega^{\perp}$），其中

$$\gamma = g|_{T\Sigma}, \qquad H = \mathrm{div}_{\Sigma}\nu, \qquad P = \mathrm{tr}_{\Sigma}K, \qquad \omega^{\perp} = K(\nu, \cdot)|_{T\Sigma}. \tag{2.1}$$

更一般地，我们将任意由黎曼度量 γ、函数 H 和 P 以及定义在 Σ 上的 1-形式 $\omega^{\perp}$ 组成的 $\mathcal{D} = (\Sigma, \gamma, H, P, \omega^{\perp})$ 称为 ***Bartnik*** 数据；若一个超曲面诱导出的 Bartnik 数据为 $\mathcal{D}$，则称该超曲面诱导 $\mathcal{D}$。

全文中我们将使用以下记号

$$\theta_{\pm} = H \pm P \tag{2.2}$$

表示 Σ 的零膨胀量；若 Σ 满足 $\theta_{+} = 0$，则称其为边际外俘获面（MOTS）；若满足 $\theta_{-} = 0$，则称其为边际内俘获面（MITS）。

2.2. **DEC 填充**。现在，我们将引言中讨论的填充问题的两个版本精确表述如下。

定义2.1。设 $\mathcal{D} = (\Sigma, \gamma, H, P, \omega^{\perp})$ 为 Bartnik 数据，且 $(\Omega\ g, K)$ 是满足主导能量条件的紧致连通初始数据集，其边界有一个边界分支$\Sigma \subset \partial\Omega$，并且相对于外法向量诱导出 $\mathcal{D}$。

(i) 如果 $\partial\Omega = \Sigma$，则称 (Ω, g, K) 为 $\mathcal{D}$ 的主导能量条件填充。(ii) 如果 $\partial\Omega = \Sigma \sqcup \Sigma_H$，其中 $\Sigma_H \neq \emptyset$ 且 Σ_H 的每个分支相对于指向 Ω 内部的单位法向量都是 MOTS 或 MITS，则称 (Ω, g, K) 为 $\mathcal{D}$ 的带视界的主导能量条件填充，并称 Σ_H 为其视界。

注记 2.2。 在填充的定义中允许 MOTS 和 MITS，这类似于标量曲率填充问题允许存在极小曲面边界分支；这是一种适用于填充问题和正质量类问题的自然边界条件。一般来说，只要内边界是零余边，就应当可以在 MOTS 或 MITS 内边界之外继续填充，从而得到一个除 Σ 外无其他边界的 DEC 填充。例如，在 3 维中，假设 MOTS 或 MITS[1] 是一个球面且满足某个特定的稳定性条件，则 [24, 第 2] 章中构造的领圈可以将 MOTS/MITS 边界连接到一个极小曲面，而该曲面很容易封帽，从而得到没有内边界的 DEC 填充。例见命题 3.12。

2.3. **Bartnik–Bray 内质量**。 带视界的 DEC 填充与 Bray [5, 6], 引入的内质量密切相关；粗略来说，该内质量衡量给定 Bartnik 数据所能包围的最大视界。受 Bartnik 质量的现代研究（参见 [21, 26]）以及 Kazaras、Khuri 和 Lin [22], 关于带折痕初始数据集的正质量定理的启发，我们对内质量的定义稍作修改，以允许可容许填充在 Σ处沿折痕与给定的 Bartnik 数据相匹配。下面介绍这一修改后的内质量。

根据 [22, 定义 1。1], Bartnik 数据可以看作定义在 Σ上的平凡秩二 Lorentz 向量丛上的数据，该向量丛刻画时空中 Σ 的法丛。更准确地说，在正交标架 $\{\nu, \tau\}$ 中，其中 ν为类空、 τ为类时， $\vec{H} = H\nu - P\tau$是平均曲率向量， $\omega^\perp$ 是联络 1-形式。以双曲角 $f \in C^\infty(\Sigma)$ 进行 Boost 变换，相当于在同一时空中使用不同的初始数据集来描述 Σ 。这种 Boost 变换按照下式变换 Bartnik 数据:

$$(H, P, \omega^\perp) \mapsto (H\cosh f + P\sinh f, H\sinh f + P\cosh f, \omega^\perp + \mathrm{d}f), \tag{2.3}$$

或等价地,

$$\theta_\pm \mapsto e^{\pm f}\theta_\pm, \qquad \omega^\perp \mapsto \omega^\perp + \mathrm{d}f.$$

按照 [22], 如果两组 Bartnik 数据通过这样的 Boost 变换相差得到，我们就称它们是等价的。

最后，设 (Ω, g, K) 是一个带视界的 DEC 填充。我们称闭嵌入超曲面 $S \subset \Omega \setminus \partial\Omega$（不一定连通）将 Σ与 Σ_H分隔开，如果对于某个满足 $W \cap \Sigma_H = \emptyset$的紧区域 $W \subset \Omega$，有 $\Sigma \cup S = \partial W$ 。

定义 2.3。 设 $\mathcal{D} = (\Sigma, \gamma, H, P, \omega^\perp)$ 为 Bartnik 数据，并设 $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ 为 Bartnik 数据 $\mathcal{D}_\Omega = (\Sigma, \gamma, H_\Omega, P_\Omega, \omega_\Omega^\perp)$ 的所有具有视界 (Ω, g, K) 的主导能量条件填充所组成的集合

[1]Lin重点研究MOTS，但从论证中可以清楚看出，同样的结果也适用于MITS。

其中存在函数 $f \in C^\infty(\Sigma)$，使得

$$H_\Omega \cosh f + P_\Omega \sinh f - H \geq \sqrt{(H_\Omega \sinh f + P_\Omega \cosh f - P)^2 + \left|\omega_\Omega^\perp + \mathrm{d}f - \omega^\perp\right|^2}. \quad (2.4)$$

Bartnik–Bray 内质量 $\mathcal{D}$ 为

$$\mathfrak{m}_{BB}(\mathcal{D}) := \sup_{(\Omega,g,K)\in\mathcal{A}(\mathcal{D})} \inf_S \frac{1}{2}\left(\frac{|S|_g}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{n-2}{n-1}}, \quad (2.5)$$

其中，下确界取遍所有分隔 Σ 与 Σ_H 的超曲面 S，且$\mathfrak{m}_{BB}(\mathcal{D}) = -\infty$ 当且仅当 $\mathcal{A}(\mathcal{D}) = \emptyset$。

折痕条件 (2.4) 源自 Kazaras、Khuri 和 Lin [22] 关于带折痕初始数据集的正质量定理。假设 $\mathcal{D}$ 是初始数据集 (M, g_M, K_M) 边界上相对于指向 M 内部的单位法向量诱导的度量，这与具有紧边界的渐近平坦初始数据集的情形相同。沿 Σ 将填充 $(\Omega, g, K) \in \mathcal{A}(\mathcal{D})$ 与 (M, g_M, K_M) 粘合后，得到一个沿 Σ带有折痕的初始数据集；$\mathcal{D}_\Omega$ 和 $\mathcal{D}$ 均相对于同一单位法向量计算，该法向量指向 Ω 外部及 M 内部。折痕条件 (2.4) 确保对 $\mathcal{D}_\Omega$ 进行 Boost 变换（双曲角为 f）后，主导能量条件在 Σ 两侧以分布意义成立。这正是 [22,定义 1.2] 中给出的 DEC 折痕条件，双曲角为 f；该条件也是 Kazaras、Khuri 和 Lin 建立带折痕自旋初始数据集正质量定理 [22, 定理 1.3]的前提。我们将在第 5 节以定理 5.2 的形式陈述本文所用的该定理。当 $f = 0$ 时，(2.4) 化为

$$H_\Omega - H \geq \sqrt{(P_\Omega - P)^2 + |\omega_\Omega^\perp - \omega^\perp|^2},$$

Tsang 在 3 维 [38]以及 Jang 和 Wood 在高维 [19], 的带角正质量定理中的条件，尽管后者采用了稍强的角点条件。此外，在时间对称情形下，该条件就简化为熟知的带角正质量定理条件 $H_\Omega \geq H$ [30]。

$\mathcal{D}$ 的每个带视界的 DEC 填充都属于 $\mathcal{A}(\mathcal{D})$，因为当 $\mathcal{D}_\Omega = \mathcal{D}$时，折痕条件 (2.4) 在 $f = 0$ 下显然成立；更一般地，Bartnik 数据等价于 $\mathcal{D}$ 的每个带视界的 DEC 填充也都如此。(2.5) 中的归一化采用彭罗斯不等式的标准，即质量为 m 的 Schwarzschild 初始数据集的视界面积为 $\omega_{n-1}(2m)^{\frac{n-1}{n-2}}$。

不难看出

$$\mathfrak{m}_{BB}(\mathcal{D}) \leq \frac{r_o^{n-2}}{2}, \qquad \text{where} \quad r_o = \left(\frac{|\Sigma|_\gamma}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{1}{n-1}} \quad (2.6)$$

是 (Σ, γ) 的面积半径。同样，若在 $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ 中存在一个具有外部极小视界的填充 Σ_H，则

$$\mathfrak{m}_{BB}(\mathcal{D}) \geq \frac{1}{2}\left(\frac{|\Sigma_H|_g}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{n-2}{n-1}}, \quad (2.7)$$

这就是我们在第4节中获得内质量下界的方法。

注：2.4。 我们在此使用的内质量定义仅取决于 Σ 作为时空中的一个曲面。事实上，写作 $\theta^{\Omega}_{\pm} = H_\Omega \pm P_\Omega$，并利用当且仅当 $a \pm b \geq 0$ 且 $(a+b)(a-b) \geq c^2$ 时 $a \geq \sqrt{b^2+c^2}$，可知 (2.4) 等价于

$$e^f\theta^{\Omega}_{+} \geq \theta_+, \quad e^{-f}\theta^{\Omega}_{-} \geq \theta_-, \quad \left(e^f\theta^{\Omega}_{+} - \theta_+\right)\left(e^{-f}\theta^{\Omega}_{-} - \theta_-\right) \geq \left|\omega^{\perp}_{\Omega} + \mathrm{d}f - \omega^{\perp}\right|^2. \quad (2.8)$$

特别地，当 $\omega^{\perp}_{\Omega} = \omega^{\perp}$ 时，(2.4) 中的 $f = 0$ 成立，当且仅当 $\theta^{\Omega}_{\pm} \geq \theta_{\pm}$。此外，若 $\mathcal{D}'$ 是由 $\mathcal{D}$ 经双曲角为 h 的 Boost 变换 (2.3) 得到的，则由 (2.8) 可知， $\mathcal{D}_\Omega$ 和 $\mathcal{D}$ 满足 (2.4) 中的 f，当且仅当 $\mathcal{D}_\Omega$ 和 $\mathcal{D}'$ 满足 (2.4) 中的 $f+h$。因此， $\mathcal{A}\left(\mathcal{D}'\right) = \mathcal{A}\left(\mathcal{D}\right)$，且 $\mathfrak{m}_{BB}\left(\mathcal{D}'\right) = \mathfrak{m}_{BB}\left(\mathcal{D}\right)$。也就是说，内质量仅取决于 $\mathcal{D}$ 的等价类，因此取决于作为时空中曲面的 Σ，而非用于描述它的初始数据集。例如，若 $H > |P|$，则取 $f = -\tanh^{-1}(P/H)$ 的 Boost 变换会得到满足 $P = 0$ 且具有相同内质量的 Bartnik 数据，我们将在推论 4.1 中使用这一结论。类似地，由于 $(\Omega\ g,\ K) \mapsto (\Omega\ g,\ -K)$ 将 $\mathcal{A}\left(\mathcal{D}\right)$ 映射到 $\mathcal{A}\left(\Sigma,\ \gamma,\ H,\ -P,\ -\omega^{\perp}\right)$，且在 (2.4) 中以 $-f$ 替换 f，内质量在时间反演下保持不变。

注记 2.5。 定义 2.3 并非 Bray [5, 6], 最初定义的原样照搬，事实上，我们的定义有两处不同。首先，在 Bray 的原始定义中，给定初始数据集内 Σ 的区域由一个包含其他渐近平坦端的填充取代，并取包围这些端所需的最小面积。这里的填充具有视界边界，而不是延伸至视界之外。第二处不同在于，我们的填充只需匹配 $\mathcal{D}$ 直至折痕，这类似于 Kazaras、Khuri 和 Lin 对 Bartnik 质量 [22]的重新表述。具体而言， $\mathfrak{m}_{BB}(\mathcal{D})$ 只取决于 $\mathcal{D}$，而根据注记 2.4，它只取决于作为时空中曲面的 Σ，而不一定取决于取出 Bartnik 数据的初始数据切片。由于按照 Bray 原始定义的每个填充都必须包含一个视界，因此我们的填充类更大，我们的定义也就不小于 Bray 的原始定义。我们指出，如果 Bartnik 数据并非取自渐近平坦初始数据集，那么可能存在我们这类填充，但不存在能够延伸至无穷远端的填充。例如，如果 Σ 不是零余边，那么任何填充都无法延伸至渐近平坦端，因为其一点紧化会产生一个边界为 Σ的紧流形。不过，我们猜想，如果 Bartnik 数据是由满足主导能量条件的渐近平坦初始数据集中的一个超曲面诱导而来，那么这两种定义实际上是一致的。

3. Construction of DEC fill-ins

本节将在领圈 $\Omega = [s_o, 0] \times \Sigma$ 上构造带有视界的主导能量条件填充。第 3.2 至 3.4 节中的填充采用相同的试探形式来描述 $(g,\ K)$，我们将在第 3.1 节中介绍这一形式以及相应的能量和动量密度。第 3.5 节中的填充则是圆柱的共形变形。

我们的主要结果是第3.2节中的定理 3.5。该定理表明，满足某个逐点条件的 Bartnik 数据——该条件涉及 γ、 H、 $\omega^{\perp}$ 以及 P 的梯度——存在一个带视界的主导能量条件填充，且无需假设 H 与 P 之间存在任何关系。在这一构造中，视界是全测地的，因此若要使其成为 MOTS 或 MITS，迹必须

在此处消失，而我们通过在视界附近将迹截断来实现这一点。截断会在动量密度中增加一项；与能量密度相比，该项正比于视界的大小，因此主导能量条件要求视界足够小。

在第3.3节和第3.4节中，我们针对更特殊的 Bartnik 数据构造了另外两类填充，并将其用于第4节和第5节中的应用。在第3.3节中，我们考察 $P = 0$ 的特殊情形。在这种情况下无需使用截断函数，因此视界不必很小；再结合折痕条件，这些填充便给出了第4节中的内质量估计。在第3.4节中，我们考察 P 与 H 成比例的 Bartnik 数据。在这种情况下，尽管迹在视界处不为零，视界仍是 MOTS 或 MITS，因此同样无需使用截断函数，视界也不必很小。这些填充与 P 和 $\omega^\perp$ 完全匹配，而这正是第5节中与渐近平坦外部区域进行光滑拼接所要求的。最后，在第3.5节中，我们证明，将 H 和 P 缩小后，Bartnik 数据仅需满足一个关于 γ 和 $\omega^\perp$ 的条件，便可存在带视界的主导能量条件填充；这与 Jauregui 的时间对称结果 [20] 相同。

3.1. 领子构造。在本节中，(Σ, γ) 是一个面积半径为 r_o 的闭黎曼 $(n-1)$-流形，其定义为

$$r_o = \left(\frac{|\Sigma|_\gamma}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{1}{n-1}},$$

且 $\omega^\perp$ 是 Σ 上的一个 1-形式。在 $\Omega = [s_o, 0] \times \Sigma$ 上，取 $s_o < 0$，我们考虑如下形式的初始数据

$$\begin{aligned} g &= A(y)^2 ds^2 + u(s)^2 r_o^{-2} \gamma \\ K &= A(y) x'(u(s)) ds^2 + A(y)^{-1} x(u(s)) u(s) r_o^{-2} \gamma + 2A(y) \omega_\alpha^\perp dy^\alpha ds \\ &\quad + \frac{\mathcal{P}(s,y)}{n-1} g \end{aligned} \tag{3.1}$$

其中 $A(y) > 0$ 是 Σ 上的光滑正函数，x 是定义在包含 u 值域的某个区间上的光滑函数，$\mathcal{P}$ 是 Ω 上的光滑函数，并且 u 满足

$$u'(s) = \sqrt{1 - \frac{2m}{u(s)^{n-2}} + x(u(s))^2}, \tag{3.2}$$

对于某个常数 $m \in (0, \frac{1}{2} r_o^{n-2})$，且 $u' > 0$ 在 $(s_o, 0]$ 上。

对 (3.2) 求导得

$$u''(s) = \frac{(n-2)m}{u(s)^{n-1}} + x(u(s)) x'(u(s)) \tag{3.3}$$

在 $(s_o, 0]$，因而由连续性可知在 $[s_o, 0]$ 上也成立。此试探形式改编自 Wolff 和第三位作者的时空 Bartnik 延拓 [29], ，并以 Schwarzschild 的（非时间对称）初始数据为模型。事实上，若 γ 是圆的，$A \equiv 1$ 且 $\omega^\perp = 0 = \mathcal{P}$，则 (g, K) 局部上是 Schwarzschild 质量为 m 的时空中某个球对称超曲面所诱导的数据，而 u 是球面 $\{s\} \times \Sigma$ 的面积半径。此外，当 $x \equiv 0$ 时，该超曲面为时间对称的，且 $g = ds^2 + u(s)^2 r_o^{-2} \gamma$ 是以距离 s 表示的、质量为 m 的黎曼施瓦西度量。在这个模型数据中，MOTS 或 MITS 是满足

其中 u 等于

$$r_h := (2m)^{\frac{1}{n-2}}, \tag{3.4}$$

施瓦西视界的面积半径，以及 $r_h < r_o$ 因为 $m < \frac{1}{2} r_o^{n-2}$。我们将施加 $u(0) = r_o$，并将 s_o 定义为使得 $u(s_o) = r_h$，因此在此处的填充中，$s = s_o$ 也将对应于一个 MOTS 或 MITS，其面积半径为 r_h（见下文 (3.12)）。我们必须选择 $x(u)$、$\mathcal{P}$ 以及参数 m，使得 $(\Omega\ g,\ K)$ 满足主导能量条件，并在边界上诱导出正确的 Bartnik 数据。

函数 x 和 $\mathcal{P}$ 是指定切片 $\{s\} \times \Sigma$ 上 K 的迹 P 的两种方式。x 通过 (3.2) 与 u 相关联，而 $\mathcal{P}$ 不受约束。我们不会同时使用二者。在第3.2节和第3.3节中，我们取 $x \equiv 0$，使得 g 以黎曼施瓦西度量为模型，而 P 仅由 $\mathcal{P}$ 指定，其中 $\mathcal{P} \equiv 0$ 用于第3.3节。在第3.4节中，我们取 $\mathcal{P} \equiv 0$，使得 P 仅由 x 指定。因此，我们始终假设 $x \equiv 0$ 或 $\mathcal{P} \equiv 0$成立。

我们首先注意到，唯一非零的 Christoffel符号为（参见 [29]）

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\alpha}_{s\beta} &= \frac{u'}{u}\delta^{\alpha}_{\beta}, \\
\Gamma^{s}_{\alpha\beta} &= -\frac{uu'}{A^2 r_o^2}\gamma_{\alpha\beta}, \\
\Gamma^{s}_{s\alpha} &= \nabla_\alpha \log A, \\
\Gamma^{\alpha}_{ss} &= -\frac{r_o^2 A^2}{u^2}\gamma^{\alpha\beta}\nabla_\beta(\log A), \\
\Gamma^{\alpha}_{\beta\delta} &= \Gamma^{\alpha}_{\beta\delta}(\gamma),
\end{aligned}$$

其中 α，β，.....表示局部坐标 y^α 在 Σ上的指标。注意，为了简化记号，在上文及下文中，我们将 $u = u(s)$、$x = x(u(s))$、$x' = x'(u(s))$、$A = A(y)$ 和 $\mathcal{P} = \mathcal{P}(s,\ y)$ 简写为上述形式。这里，u 上的撇号表示关于 s的微分，而 x' 和 x'' 分别表示 x 关于其自变量的导数。

命题 3.1。设 $(\Omega\ g、\ K)$ 如上所述。由 （1.3）给出的动量密度 J_i（g、K）计算如下：

$$\begin{aligned}
J_s &= \frac{Ar_o^2}{u^2}\left[\nabla^\gamma \cdot \omega^\perp + 2\langle \nabla \log A, \omega^\perp\rangle_\gamma\right] - \partial_s \mathcal{P} \\
J_\alpha &= \frac{(n-1)}{Au}\left[u'\omega^\perp_\alpha + x\nabla_\alpha \log A\right] - \nabla_\alpha \mathcal{P}.
\end{aligned}$$

特别地，

$$\begin{aligned}
|J|_g = \frac{r_o^2}{u^2}\Bigg(\Big(\nabla^\gamma \cdot \omega^\perp + 2\langle \nabla \log A, \omega^\perp\rangle_\gamma - \frac{u^2}{Ar_o^2}\partial_s \mathcal{P}\Big)^2 \\
+ \Big|\frac{n-1}{Ar_o}\big(u'\omega^\perp + x\nabla \log A\big) - \frac{u}{r_o}\nabla \mathcal{P}\Big|^2_\gamma\Bigg)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned} \tag{3.5}$$

其中，$\nabla\mathcal{P}$ 是 $\mathcal{P}$（s、$\cdot$）关于 γ的梯度。

证明。由于 J 关于 K 是线性的，我们可以单独处理项 $\frac{\mathcal{P}}{n-1}g$。对于 Ω 上的任意函数 φ，张量 φg 对 J_i 的贡献为 $\nabla^j(\varphi g_{ij}) - \nabla_i(n\varphi) = -(n-1)\nabla_i\varphi$，因此该项的贡献为 $-\nabla_i\mathcal{P}$。对于剩余部分 $K_0 = K - \frac{\mathcal{P}}{n-1}g$，首先注意到 ——

that

$$\mathrm{tr}_g(K_0) = A^{-1}x' + (n-1)A^{-1}\frac{x}{u}, \tag{3.6}$$

因此

$$\begin{aligned} d(\mathrm{tr}_g(K_0)) = A^{-1}u'\left(x'' + (n-1)\frac{x'}{u} - (n-1)\frac{x}{u^2}\right)ds \\ - A^{-1}\nabla_\alpha(\log A)\big(x' + u^{-1}x(n-1)\big)dy^\alpha. \end{aligned} \tag{3.7}$$

直接计算可得

$$\begin{aligned} \nabla^i(K_0)_{is} &= A^{-1}u'x'' + 2u^{-2}r_o^2A\langle\nabla\log A, \omega^\perp\rangle_\gamma + \frac{Ar_o^2}{u^2}\left(\nabla^\gamma\cdot\omega^\perp\right) \\ &\quad + \frac{u'x'(n-1)}{Au} - \frac{u'x(n-1)}{Au^2}, \\ \nabla^i(K_0)_{i\alpha} &= -A^{-1}x'\nabla_\alpha(\log A) + \frac{(n-1)u'\omega_\alpha^\perp}{Au}. \end{aligned}$$

于是，由于

$$J_i = \nabla^j\big((K_0)_{ij} - (\mathrm{tr}_g K_0)g_{ij}\big) - \nabla_i\mathcal{P},$$

结论随即得出，其中对于 (3.5)，我们使用 $|J|_g^2 = A^{-2}J_s^2 + r_o^2u^{-2}\gamma^{\alpha\beta}J_\alpha J_\beta$。 □

命题 3.2。 设$(\Omega\ g, K)$ 如上所述。那么，由(1.2) 给出的能量密度 $\mu(g, K)$ 计算为

$$\begin{aligned} \mu = \frac{r_o^2}{2u^2}\left(R_\gamma - 2A^{-1}\Delta_\gamma A\right) - \frac{(n-1)(n-2)}{2A^2u^2} - \frac{r_o^2}{u^2}|\omega^\perp|_\gamma^2 \\ + \frac{n}{2(n-1)}\mathcal{P}^2. \end{aligned} \tag{3.8}$$

证明。 形式为 (3.1) 的度量的标量曲率由下式给出（参见 [9, 28]）

$$R_g = \frac{r_o^2}{u^2}\left(R_\gamma - 2A^{-1}\Delta_\gamma A\right) - \frac{(n-1)(n-2)u'^2}{A^2u^2} - \frac{2(n-1)u''}{A^2u}.$$

直接代入（3.2）和（3.3）中的 u' 和 u''，再使用（3.6），即可得 $\mathrm{tr}_g(K) = \mathrm{tr}_g(K_0) + \frac{n}{n-1}\mathcal{P}$ 和

$$|K|^2 = \frac{x'^2}{A^2} + \frac{(n-1)x^2}{A^2u^2} + \frac{2r_o^2}{u^2}|\omega^\perp|_\gamma^2 + \frac{n}{(n-1)^2}\mathcal{P}^2,$$

其中我们用到了 $x \equiv 0$ 或 $\mathcal{P} \equiv 0$，故命题得证。 □

推论 3.3。 设$(\Omega\ g, K)$ 如上所述。则$(\Omega\ g, K)$ 在某点满足主导能量条件，当且仅当

$$\begin{aligned} R_\gamma - 2A^{-1}\Delta_\gamma A - \frac{(n-1)(n-2)}{A^2r_o^2} - 2|\omega^\perp|_\gamma^2 + \frac{nu^2}{(n-1)r_o^2}\mathcal{P}^2 \\ \geq 2\Bigg[\left(\nabla^\gamma\cdot\omega^\perp + 2\langle\nabla\log A, \omega^\perp\rangle_\gamma - \frac{u^2}{Ar_o^2}\partial_s\mathcal{P}\right)^2 \\ + \left|\frac{n-1}{Ar_o}\big(u'\omega^\perp + x\nabla\log A\big) - \frac{u}{r_o}\nabla\mathcal{P}\right|_\gamma^2\Bigg]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{3.9}$$

该式在该点成立，并且它在某点满足严格主能量条件，当且仅当(3.9) 在该点为严格不等式。

证明。 将 $\mu \geq |J|_g$ 乘以 $2u^2/r_o^2$，并代入 (3.8) 和 (3.5)。 □

对于每个切片 $\Sigma_s = \{s\} \times \Sigma$，令 $\nu = A^{-1}\partial_s$ 为 Σ_s 的单位法向量。在 $s = 0$ 处，它是 Ω 的外向单位法向量；在 $s = s_o$ 处，它指向 Ω 内部，因此给出了定义2.1中使用的法向量。我们可以直接计算 Σ_s 相对于 ν 的平均曲率 $H = H(s, y)$ 和 $P = P(s, y) = \mathrm{tr}_{\Sigma_s}(K)$。

引理 3.4。切片 Σ_s 的诱导度量为 $u^2 r_o^{-2}\gamma$，第二基本形式为 $\frac{u'}{Au} u^2 r_o^{-2}\gamma$，面积为 $|\Sigma_s|_g = (u/r_o)^{n-1}|\Sigma|_\gamma$，且在 Σ_s 上有 $K(\nu, \cdot) = \omega^\perp$。此外，

$$\begin{aligned} H &= \frac{n-1}{Au}\sqrt{1 - \frac{2m}{u^{n-2}} + x^2} \\ P &= \frac{(n-1)x}{Au} + \mathcal{P}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

特别地，Σ_s 恰好在 $u'(s) = 0$ 时是全测地的。

证明。Σ_s 的第二基本形式为 $\frac{1}{2A}\partial_s(u^2 r_o^{-2}\gamma)$，由此得到前述结论以及 $H = \frac{(n-1)}{Au} u'$，因此 H 的公式可由 (3.2) 得出。将 K 的切向部分关于 $u^2 r_o^{-2}\gamma$ 取迹，得到 P。最后，只有 K 中的项 $2A(y)\omega_\alpha^\perp dy^\alpha ds$ 具有混合分量，因此在 $T\Sigma_s$ 上有 $K(\nu, \cdot) = \omega^\perp$。□

由 (3.10) 可知，在每个 $\mathcal{P}$ 消失的切片上，

$$H^2 - P^2 = \frac{(n-1)^2}{A^2 u^2}\left(1 - \frac{2m}{u^{n-2}}\right). \tag{3.11}$$

特别地，若 $\mathcal{P} \equiv 0$，则对除 $H(s_o)^2 - P(s_o)^2 = 0$ 之外的每个叶都有 $H^2 - P^2 > 0$；又由于 $H \geq 0$，可知对于 $s \neq s_o$，$H(s) \pm P(s) > 0$。也就是说，取决于 $P(s_o)$ 的符号，Σ_{s_o} 或是 MOTS，或是 MITS；并且通过标准的最大值原理论证（在 s 取最大值的点处，将一个超曲面与切片 Σ_s 作比较），它是 Ω 中唯一的 MOTS 或 MITS。

由于 $u(s_o) = r_h$，引理 3.4 和 r_o 的定义给出 $|\Sigma_{s_o}|_g = (r_h/r_o)^{n-1}|\Sigma|_\gamma = \omega_{n-1} r_h^{n-1}$，因此视界的面积半径为 r_h；根据 (3.4) 中 r_h 的定义，

$$\frac{1}{2}\left(\frac{|\Sigma_{s_o}|_g}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{n-2}{n-1}} = \frac{1}{2} r_h^{n-2} = m. \tag{3.12}$$

最后，当 $u' \geq 0$ 时，视界 Σ_{s_o} 是面积外极小的，这适用于下文所有的填充。事实上，单位法向量场 ν 满足 $\mathrm{div}_g \nu = H \geq 0$，因为 $H = \frac{(n-1)}{Au} u'$。设 S 是一条将 Σ_0 与 Σ_{s_o} 分隔开的超曲面，因此对于一个满足 $W' \cap \Sigma_{s_o} = \emptyset$ 的紧区域 $W' \subset \Omega$，有 $\Sigma_0 \cup S = \partial W'$；设 W 为 $\Omega \setminus W'$ 的闭包，因此 $\partial W = \Sigma_{s_o} \cup S$。若 ν_S 是 S 的单位法向量，且指向 W 的外侧，则由散度定理可得

$$|S|_g \geq \int_S \langle \nu, \nu_S \rangle_g dA_g = |\Sigma_{s_o}|_g + \int_W H dV_g \geq |\Sigma_{s_o}|_g. \tag{3.13}$$

3.2. **一般 Bartnik 数据**。我们首先证明，对于正的 H_o 和任意的 P_o，只要满足一个逐点条件，Bartnik 数据就存在带视界的 DEC 填充。P_o 没有符号条件，P_o 与 H_o 之间也没有任何关系，并且这些填充精确诱导出给定的 Bartnik 数据。我们取 $x \equiv 0$，使得 g 以黎曼施瓦西度量为模型。于是，由 (3.2) 可得视界上有 $u' = 0$，其中 $u = r_h$（见 (3.4)），因此根据引理 3.4，视界具有 $H = 0$，且只有在此处也有 $P = 0$ 时，它才是 MOTS 或 MITS。因此，我们使用 $\mathcal{P}$ 开启迹，

并取其为在视界附近截断的 P_o 。截断函数的导数会给动量密度增加一项；与能量密度相比，该项的量级为 r_h/r_o，因此视界必须足够小（见下文 (3.19)）。

定理 3.5。 设 $\mathcal{D}=(\Sigma,\gamma,H_o,P_o,\omega^\perp)$ 为满足 $H_o>0$ 的 *Bartnik* 数据，并假设

$$H_o^2<\frac{n-1}{n-2}\widetilde{\Psi}\qquad on\ \Sigma, \tag{3.14}$$

其中

$$\begin{aligned}\widetilde{\Psi}&=R_\gamma-2H_o\Delta_\gamma H_o^{-1}-2|\omega^\perp|_\gamma^2\\&\quad-2\Big[\big(\nabla^\gamma\cdot\omega^\perp-2\langle\nabla\log H_o,\omega^\perp\rangle_\gamma\big)^2+\big(H_o|\omega^\perp|_\gamma+|\nabla P_o|_\gamma\big)^2\Big]^{\frac{1}{2}}.\end{aligned} \tag{3.15}$$

那么 $\mathcal{D}$ 存在一个带视界的主导能量条件填充，该视界既是 *MOTS*，也是 *MITS*。事实上，视界是全测地的。

证明。 我们对 $x\equiv 0$ 使用试探形式 (3.1)，并取满足 $r_h=(2m)^{\frac{1}{n-2}}\le\frac{1}{2}r_o$ 的质量 m ；我们将在最后将其选得足够小。我们希望视界 Σ_{s_o} 是全测地的，且满足 $H=P=0$，从而它既是 MOTS，也是 MITS。根据引理 3.4， Σ_{s_o} 恰在 $u'(s_o)=0$ 时为全测地的；由于 $u'=\sqrt{1-2m/u^{n-2}}$，这只需选取 $s_o<0$ 使得 $u(s_o)=r_h$。注意，对于 $m\in(0,\ \frac{1}{2}r_o^{n-2})$，这始终可以做到，因为 u 只是质量为 m 的黎曼施瓦西度量的径向函数（见第 3.1 节）。因此，边界分支 $\{s=s_o\}$ 是全测地的，尤其是其平均曲率为零。

为了使 $P(s_o)=\mathcal{P}(s_o,\ \cdot)$ 也为零，我们将选择 $\mathcal{P}$，使其在Σ_{s_o}附近为零。首先注意，在外边界处， $u'(0)=\sqrt{1-2m/r_o^{n-2}}$，因此在引理 3.4 中要求$H(0)=H_o$ ，即可确定 A,

$$A=\frac{n-1}{r_oH_o}\sqrt{1-\frac{2m}{r_o^{n-2}}}. \tag{3.16}$$

为了定义 $\mathcal{P}$，我们先固定一个光滑非减函数 χ： $[0,\infty)\to[0,1]$ ，使得

$$\chi=0\ \text{ on }\ \big[0,\tfrac{3}{2}\big],\qquad \chi=1\ \text{ on }\ [2,\infty),\qquad |\chi'|\le 3, \tag{3.17}$$

这是可行的，因为 χ 只需在长度为$1\ 2$的区间上增加 1，而 le – t

$$\mathcal{P}(s,y)=\chi\Big(\frac{u(s)}{r_h}\Big)P_o(y),$$

使得

$$g=A(y)^2ds^2+u(s)^2r_o^{-2}\gamma,\qquad K=2A(y)\omega_\alpha^\perp dy^\alpha ds+\frac{\mathcal{P}(s,y)}{n-1}g.$$

由于 $u(0)=r_o\ge 2r_h$，我们有 $\mathcal{P}=P_o$ 在 Σ_0上，因此根据引理 3.4， $H(0)=H_o$、 $P(0)=P_o$ ，且$K(\nu,\ \cdot)=\omega^\perp$ 在 Σ_0 上；也就是说， Σ_0 诱导出 $\mathcal{D}$。另一方面， $\mathcal{P}=0$在 $u\le\frac{3}{2}r_h$成立的任何地方都成立，特别是在 Σ_{s_o}附近；并且 $u'(s_o)=0$，因此根据引理 3.4， Σ_{s_o} 是全测地的，且 $H(s_o)=0=P(s_o)$。

剩下要做的是利用推论 3.3 和 $x \equiv 0$验证主导能量条件。根据 (3.16)，由于 A 是 H_o^{-1}的常数倍，我们有

$$\begin{aligned} A^{-1}\Delta_\gamma A &= H_o \Delta_\gamma H_o^{-1}, \\ \nabla \log A &= -\nabla \log H_o, \\ \frac{(n-1)^2}{A^2 r_o^2} &= \frac{H_o^2}{1-2m/r_o^{n-2}}. \end{aligned} \tag{3.18}$$

注意，(3.9) 的左端有如下界

$$R_\gamma - 2H_o\Delta_\gamma H_o^{-1} - 2|\omega^\perp|_\gamma^2 - \frac{n-2}{n-1}H_o^2\Big(1-\frac{2m}{r_o^{n-2}}\Big)^{-1},$$

因为 $\mathcal{P}^2$ 的系数非负。

在右端，$\nabla\mathcal{P} = \chi(u/r_h)\nabla P_o$。由于 $u \le r_o$、$0 \le \chi \le 1$ 和 $0 \le u' \le \sqrt{1-2m/r_o^{n-2}}$，(3.16) 给出

$$\Big|\frac{n-1}{Ar_o}u'\omega^\perp - \frac{u}{r_o}\nabla\mathcal{P}\Big|_\gamma \le H_o|\omega^\perp|_\gamma + |\nabla P_o|_\gamma,$$

and

$$\frac{u'}{A} \le \frac{r_o H_o}{n-1}.$$

此外，$\partial_s\mathcal{P} = \chi'(u/r_h)u'P_o/r_h$ 除非 $\frac{3}{2}r_h \le u \le 2r_h$ 否则为零，因此由 (3.17) 以及上面对 u'/A 的界，

$$\frac{u^2}{Ar_o^2}|\partial_s\mathcal{P}| \le \frac{4r_h^2}{r_o^2}\cdot\frac{3}{r_h}\cdot\frac{r_oH_o}{n-1}|P_o| = \frac{12}{n-1}\frac{r_h}{r_o}H_o|P_o|.$$

利用 $\big((a-b)^2+c^2\big)^{\frac12} \le (a^2+c^2)^{\frac12} + |b|$，我们得出 (3.9) 的右端有如下上界

$$2\Big[\big(\nabla^\gamma\cdot\omega^\perp - 2\langle\nabla\log H_o,\omega^\perp\rangle_\gamma\big)^2 + \big(H_o|\omega^\perp|_\gamma + |\nabla P_o|_\gamma\big)^2\Big]^{\frac12} + \frac{24}{n-1}\frac{r_h}{r_o}H_o|P_o|.$$

由于这两个界与 s 无关，将它们与 (3.15) 进行比较可知，当

$$\frac{n-2}{n-1}H_o^2\Big(1-\frac{2m}{r_o^{n-2}}\Big)^{-1} + \frac{24}{n-1}\frac{r_h}{r_o}H_o|P_o| \le \widetilde{\Psi} \tag{3.19}$$

在 Σ 上成立，并且当 (3.19) 在 Σ 上严格成立时，严格主能量条件在 Ω 上成立。(3.19) 的左端关于 m 连续且递增，并且当 $m \to 0$ 时趋于 $\frac{n-2}{n-1}H_o^2$。因此，根据 (3.14) 以及 Σ 的紧致性，对于所有充分小的 $m > 0$，(3.19) 在 Σ 上严格成立；对于这样的 m，领圈 $(\Omega\ g, K)$ 是一个带视界的 DEC 填充，其 $\mathcal{D}$ 满足严格主能量条件。□

注记 3.6. 该证明为每个 $m > 0$ 构造了一个填充，其中 $r_h \le \frac12 r_o$，且 (3.19) 在 Σ 上成立；由 (3.13) 和 (3.12) 可知，其视界是面积外极小的，并且

$$\frac12\left(\frac{|\Sigma_{s_o}|_g}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{n-2}{n-1}} = m.$$

例如，对 $t \in [0, \frac{1}{2}]$ 使用 $(1-t)^{-1} \leq 1+2t$ ，对 $\beta = r_h/r_o \leq \frac{1}{2}$ 使用 $\beta^{n-2} \leq \beta$，可验证对于每个 $m \leq \frac{1}{2} r_o^{n-2} \min\{\frac{1}{2}, \delta/\kappa\}^{n-2}$，(3.19) 均成立，其中

$$\delta = \min_{\Sigma} \Big(\widetilde{\Psi} - \frac{n-2}{n-1} H_o^2 \Big), \qquad \kappa = \frac{2(n-2)}{n-1} \max_{\Sigma} H_o^2 + \frac{24}{n-1} \max_{\Sigma} H_o |P_o|.$$

根据 (2.7)，这为 $\mathcal{D}$ 的 Bartnik–Bray 内质量给出了一个下界 $\mathfrak{m}_{BB}(\mathcal{D}) \geq \frac{1}{2} r_o^{n-2} \min\{\frac{1}{2}, \delta/\kappa\}^{n-2}$，但这个下界相当小。由于内质量定义中的填充不必恰好诱导出 $\mathcal{D}$ ，因此可以从其他填充中得到更简洁的估计；我们将在第4节中这样做。若 P_o 为常数，则无论 P_o 的大小如何，$\sim\Psi$ 都是下文 (3.21) 中的函数 Ψ，而 P_o 的大小只影响视界的大小。若 $P_o \equiv 0$，则无需使用截断函数；下文的定理 3.7 去掉了限制 $r_h \leq \frac{1}{2} r_o$，因此视界仅受主导能量条件限制，在这种情况下视界可以大得多。

3.3. **具有 $P = 0$ 的 Bartnik 数据**。当 $P_o \equiv 0$时，定理 3.5 的构造中无需使用截断函数，视界也不必很小。也就是说，在（3.1）中取 $x \equiv 0$ 和$\mathcal{P} \equiv 0$ ，使得 K 仅由混合项组成，并将质量m（因而视界）选取得尽可能大，受主导能量条件所允许。结合折痕条件，这些填充给出了第4节的内质量估计。

定理 3.7。设 $\mathcal{D} = (\Sigma, \gamma, H_o, 0, \omega^\perp)$ 为满足 $H_o > 0$的 *Bartnik* 数据，并假设

$$H_o^2 < \frac{n-1}{n-2} \Psi \qquad on\ \Sigma, \tag{3.20}$$

其中

$$\begin{aligned} \Psi = {} & R_\gamma - 2 H_o \Delta_\gamma H_o^{-1} - 2|\omega^\perp|_\gamma^2 \\ & - 2 \Big[\big(\nabla^\gamma \cdot \omega^\perp - 2 \langle \nabla \log H_o, \omega^\perp \rangle_\gamma \big)^2 + H_o^2 |\omega^\perp|_\gamma^2 \Big]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{3.21}$$

那么 $\mathcal{D}$ 存在一个带视界 Σ_H的 *DEC* 填充；事实上，该视界是全测地的，因此既是 *MOTS*，也是 *MITS*。此外， Σ_H 是面积外极小的，且满足

$$\frac{1}{2} \left(\frac{|\Sigma_H|_g}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n-2}{n-1}} = \min_{\Sigma} \frac{r_o^{n-2}}{2} \left(1 - \frac{n-2}{n-1} \frac{H_o^2}{\Psi} \right) > 0. \tag{3.22}$$

证明。我们采用定理 3.5 证明中的构造，并令 $P_o \equiv 0$。也就是说，取 $x \equiv 0$ 和 $\mathcal{P} \equiv 0$，使得

$$g = A(y)^2 ds^2 + u(s)^2 r_o^{-2} \gamma, \qquad K = 2A(y) \omega_\alpha^\perp dy^\alpha ds,$$

其中 u 和 s_o 与该证明中相同，但现在取待选质量 $m \in (0, \frac{1}{2} r_o^{n-2})$，并令 A 如（3.16）所示。由于不存在截断函数，我们不再需要 $r_h \leq \frac{1}{2} r_o$。如该证明中一样， Σ_0 诱导出 $\mathcal{D}$，且 Σ_{s_o} 是全测地的，并满足 $H(s_o) = 0 = P(s_o)$。此外，根据（3.13），Σ_{s_o} 是面积外极小的，其面积由（3.12）给出；特别地，$|\Sigma_{s_o}|_g = (r_h/r_o)^{n-1} |\Sigma|_\gamma = \omega_{n-1} r_h^{n-1}$ ，因此

$$\frac{1}{2} \left(\frac{|\Sigma_{s_o}|_g}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n-2}{n-1}} = m.$$

剩下的工作是将 m 取为主导能量条件所允许的最大值。根据推论 3.3（取 $x \equiv 0$ 和 $\mathcal{P} \equiv 0$），并由（3.18）可知， Σ_s 中一点满足主导能量条件，当且仅当

$$\begin{aligned} R_\gamma - 2H_o\Delta_\gamma H_o^{-1} - 2|\omega^\perp|_\gamma^2 - \frac{n-2}{n-1}H_o^2\Big(1-\frac{2m}{r_o^{n-2}}\Big)^{-1} \\ \geq 2\Big[\big(\nabla^\gamma\cdot\omega^\perp - 2\langle\nabla\log H_o,\omega^\perp\rangle_\gamma\big)^2 \\ + H_o^2(u')^2\Big(1-\frac{2m}{r_o^{n-2}}\Big)^{-1}|\omega^\perp|_\gamma^2\Big]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{3.23}$$

左端不依赖于 s。由于 u递增， $0 \leq (u')^2 = 1-2m/u^{n-2} \leq 1-2m/r_o^{n-2}$，且右端在 $s=0$处取等，因此右端在 Σ_0上最大。在此处，(3.23) 写作

$$\Psi \geq \frac{n-2}{n-1}H_o^2\Big(1-\frac{2m}{r_o^{n-2}}\Big)^{-1}, \qquad \text{that is,} \qquad m \leq \frac{r_o^{n-2}}{2}\left(1-\frac{n-2}{n-1}\frac{H_o^2}{\Psi}\right).$$

特别地，取

$$m_0 = \min_\Sigma \frac{r_o^{n-2}}{2}\left(1-\frac{n-2}{n-1}\frac{H_o^2}{\Psi}\right),$$

对于每个 $m \in (0,\ m_0]$，DEC 条件在 Ω 上均成立。取 $m = m_0$ ，由 (3.12) 可得 (3.22)。□

注 3.8。 在证明中取略小于 m_0 的 m ，可得到一个满足严格主能量条件的填充，其视界面积可以任意接近 (3.22) 中的值。定理 3.7 中的条件和面积表达式略显复杂，但在时间对称情形 $\omega^\perp = 0$下，当 $K = 0$时，它们恰好化简为文献 [28]中的定理 1.3。

如果 H_o 为常数，则定理 3.7 中的表达式会大大简化，因此我们在此简要记录这一情形。这正是定理 4.3 以及第 5 节正质量定理中所采用的形式。

推论 3.9。 设 $\mathcal{D} =$（Σ、 γ、 H_o、0、 $\omega^\perp$）为 *Bartnik* 数据，其中 $H_o > 0$ 为常数，并设

$$H_o^2 < \frac{n-1}{n-2}\zeta, \tag{3.24}$$

其中

$$\zeta = \min_\Sigma\left(R_\gamma - 2|\omega^\perp|_\gamma^2 - 2\Big((\nabla^\gamma\cdot\omega^\perp)^2 + H_o^2|\omega^\perp|_\gamma^2\Big)^{\frac{1}{2}}\right). \tag{3.25}$$

则 $\mathcal{D}$ 具有一个带视界的 *DEC* 填充，其视界 Σ_H 是全测地的，且满足 $P = 0$，因此它既是 *MOTS* 又是 *MITS*，并且是面积外极小的，满足

$$\frac{1}{2}\left(\frac{|\Sigma_H|_g}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{n-2}{n-1}} = \frac{r_o^{n-2}}{2}\left(1-\frac{n-2}{n-1}\frac{H_o^2}{\zeta}\right). \tag{3.26}$$

证明。 对于常数 H_o，式（3.21）中含有 H_o 导数的项均消失，因此 ζ 是其中函数 Ψ 的最小值。于是（3.24）就是定理 3.7 的假设（3.20）；又由于 H_o 为常数，（3.22）中的最小值在 Ψ 最小处取得，从而得到（3.26）。□

3.4. 满足 P 与 H成比例的 Bartnik 数据。 现在考虑 P 与平均曲率 H成比例的情形。这些填充是

第 5 节进行光滑拼接所必需的，该拼接要求 P 和 $\omega^\perp$ 完全匹配。这里我们在 (3.1) 中取 $\mathcal{P} \equiv 0$，因此切片的迹 $P = {}^{(n-1)}_{Au}{}^{x}$ 仅由 x 决定。与第 3.2 节中的 $\mathcal{P}$ 不同，函数 x 在视界处无需消失：在视界上，$u = r_h$，由 (3.2) 得到 $u' = |x|$，因此根据 (3.10)，$H = |P|$，且即使此处存在 $P \neq 0$，视界仍是 MOTS 或 MITS。因此无需使用截断函数，动量密度中也就没有截断函数的导数，而这正是第 3.2 节中视界必须较小的原因。与第 3.3 节一样，视界的大小仅受主导能量条件限制。

由于 $u'(0)$ 和 $x(r_o)$ 是常数，(3.10) 中切片的平均曲率和迹的公式表明，$H(0)$ 和 $P(0)$ 都是 $A(y)^{-1}$ 的常数倍。这正是要求 H_o 与 P_o 成比例的原因。具体而言，我们令 $\lambda H_o = P_o$ 为某个 $\lambda \in (-1, 1)$。式 (3.10) 中 $H(0)$ 和 $P(0)$ 的表达式，连同 (3.11)，还用 Bartnik 数据给出了 $A = A(y)$ 和 $x(r_o)$，

$$\begin{aligned} A &= \frac{n-1}{r_o\sqrt{H_o^2 - P_o^2}}\sqrt{1 - \frac{2m}{r_o^{n-2}}} \\ &= \frac{n-1}{r_o H_o\sqrt{1-\lambda^2}}\sqrt{1 - \frac{2m}{r_o^{n-2}}}, \end{aligned} \tag{3.27}$$

and

$$\begin{aligned} x(r_o)^2 &= \frac{P_o^2}{H_o^2 - P_o^2}\left(1 - \frac{2m}{r_o^{n-2}}\right) \\ &= \frac{\lambda^2}{1-\lambda^2}\left(1 - \frac{2m}{r_o^{n-2}}\right). \end{aligned} \tag{3.28}$$

现在我们给出成比例数据的填充构造。

定理 3.10。设 $\mathcal{D} = (\Sigma, \gamma, H_o, P_o, \omega^\perp)$ 为 *Bartnik* 数据，其中 H_o, P_o 满足

$$\lambda H_o = P_o, \quad H_o > 0$$

对于某个 $\lambda \in (-1,1)$，并假设

$$H_o^2 - P_o^2 < \frac{n-1}{n-2}\widehat{\Psi} \qquad on\ \Sigma, \tag{3.29}$$

其中

$$\begin{aligned} \widehat{\Psi} = R_\gamma &- 2H_o\Delta_\gamma H_o^{-1} - 2|\omega^\perp|_\gamma^2 \\ &- 2\Big[\big(\nabla^\gamma \cdot \omega^\perp - 2\langle \nabla \log H_o, \omega^\perp\rangle_\gamma\big)^2 \\ &\quad + H_o^2(|\omega^\perp|_\gamma + |\nabla \log H_o|_\gamma)^2\Big]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{3.30}$$

那么，$\mathcal{D}$ 存在一个带视界的 *DEC* 填充，其视界 Σ_H 在 $\lambda \leq 0$时为 *MOTS*，在 $\lambda \geq 0$时为 *MITS*，且面积外极小，并满足

$$\frac{1}{2}\left(\frac{|\Sigma_H|_g}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{n-2}{n-1}} = \min_\Sigma \frac{r_o^{n-2}}{2}\left(1 - \frac{n-2}{n-1}\frac{H_o^2 - P_o^2}{\widehat{\Psi}}\right). \tag{3.31}$$

证明。如果 $\lambda = 0$，那么 $P_o = 0$；由于 (3.21) 中的函数至少与 (3.30) 中的函数 $\widehat{\Psi}$ 一样大，定理 3.7 的假设成立，因此 (3.31) 的右端

至多为 m_0。由于定理 3.7 的证明对每个 $m \in (0, m_0]$ 都给出了一个带视界的 DEC 填充，因此令其中的 m 等于 (3.31) 的右端即可得到所有结论。于是我们假设 $\lambda \neq 0$。上述构造实际上已经基本完成：我们采用试探形式 (3.1)，其中 $\mathcal{P} \equiv 0$ 和 A 由 (3.27) 给出，剩下的工作是选择 x、u、s_o 以及参数 $m \in (0, \frac{1}{2} r_o^{n-2})$，其中 $r_h = (2m)^{\frac{1}{n-2}}$。

我们选择 x 以确保 $u'(s)$ 为常数，从而简化 DEC 表达式 n 由推论 3.3 给出。也就是说，我们选择

$$x(r) = \pm \sqrt{C - 1 + \frac{2m}{r^{n-2}}}, \tag{3.32}$$

其中 x 的符号选为与 λ 的符号一致，而 C 由条件 (3.28) 确定。也就是说

$$u'(s)^2 = C = \frac{H_o^2}{H_o^2 - P_o^2} \left(1 - \frac{2m}{r_o^{n-2}}\right) = \frac{A^2 r_o^2 H_o^2}{(n-1)^2} > 0. \tag{3.33}$$

我们希望视界 Σ_{s_o} 是 MOTS 或 MITS。由于 $\mathcal{P} \equiv 0$，(3.11) 表明，$H^2 = P^2$ 在 Σ_s 上成立，当且仅当 $u(s) = r_h$。因此，我们令 $u(s) = r_o + \sqrt{C}\, s$ 且 $s_o = (r_h - r_o)/\sqrt{C}$，从而 $u(0) = r_o$ 且 $u(s_o) = r_h$。上面的被开方数从 $r = r_h$ 处的 C 递减至 $r = r_o$ 处的 $\lambda^2 C > 0$，因此 x 在 $[r_h, r_o]$附近光滑，并且 $1 - 2m/u^{n-2} + x(u)^2 = C = u'(s)^2$, ，所以 u 满足 (3.2)。然后，由引理 3.4 和 (3.33)，Σ_0 诱导出$\mathcal{D}$，因为 $x(r_o) = \lambda\sqrt{C}$，且 $H(s_o)^2 = P(s_o)^2$。由于 x和 P 与 λ同号，若 $\lambda < 0$，则 Σ_{s_o} 是 MOTS；若 $\lambda > 0$，则是 MITS。此外，根据 (3.13)，Σ_{s_o} 是面积外极小的，其面积由 (3.12)给出：$1\,2\,(|\Sigma_{s_o}|_g/\omega_{n-1})^{\frac{n-2}{n-1}} = m$。

由推论 3.3 可知，若满足

$$\begin{aligned} R_\gamma - 2A^{-1}\Delta_\gamma A - \frac{(n-1)(n-2)}{A^2 r_o^2} - 2|\omega^\perp|_\gamma^2 \\ \geq 2\Bigg[\Big(\nabla^\gamma \cdot \omega^\perp + 2\langle \nabla \log A, \omega^\perp \rangle_\gamma\Big)^2 \\ + \frac{(n-1)^2}{A^2 r_o^2}(|u'\omega^\perp|_\gamma^2 + 2|u'x||\langle \omega^\perp, \nabla \log A\rangle| + |x\nabla \log A|_\gamma^2)\Bigg]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

由于 $u \geq r_h$，我们看到 $|x| \leq u'$，因此利用 (3.33)，通过施加以下条件即可确保主导能量条件成立

$$\begin{aligned} R_\gamma - 2H_o\Delta_\gamma H_o^{-1} - \frac{n-2}{n-1}(H_o^2 - P_o^2)\left(1 - \frac{2m}{r_o^{n-2}}\right)^{-1} - 2|\omega^\perp|_\gamma^2 \\ \geq 2\left[\Big(\nabla^\gamma \cdot \omega^\perp - 2\langle \nabla \log H_o, \omega^\perp\rangle_\gamma\Big)^2 + H_o^2(|\omega^\perp|_\gamma + |\nabla \log H_o|_\gamma)^2\right]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

这里我们现在代入了 A 的选取，并使用了柯西–施瓦茨不等式。由于根据 (3.29) 有 $\Psi > 0$，由 (3.30) 可知，这等价于

$$m \leq \frac{r_o^{n-2}}{2}\left(1 - \frac{n-2}{n-1}\frac{H_o^2 - P_o^2}{\widehat{\Psi}}\right) \qquad \text{on } \Sigma,$$

因此，我们可以将 m 选为 Σ 上右端的最小值；根据 (3.29)，该值属于 $(0, \frac{1}{2} r_o^{n-2})$。如此选择后，主导能量条件在 Ω 上成立，且 (3.31) 也成立。

□

注 3.11。与注 3.8 一样，在证明中将 m 取稍小一些，可得到一个满足严格主能量条件的领圈，其视界面积可任意接近 (3.31) 中的值。证明中的估计 $|x| \le u'$ 也可以避免。对于 $\lambda \neq 0$，由 (3.33) 和推论 3.3 可知，主导能量条件在 Σ_s 的某一点成立，当且仅当

$$R_\gamma - 2H_o\Delta_\gamma H_o^{-1} - \frac{n-2}{n-1}(H_o^2 - P_o^2)\left(1 - \frac{2m}{r_o^{n-2}}\right)^{-1} - 2|\omega^\perp|_\gamma^2$$
$$\ge 2\Big[\big(\nabla^\gamma \cdot \omega^\perp - 2\langle \nabla \log H_o, \omega^\perp\rangle_\gamma\big)^2 + H_o^2|\omega^\perp - \vartheta\nabla\log H_o|_\gamma^2\Big]^{\frac{1}{2}},$$

其中 $\vartheta = x(u(s))/\sqrt{C}$ 从 λ 在 $s = 0$ 处单调变化至 sgn(λ) 在 $s = s_o$处。由于 $z \mapsto |\omega^\perp - z\nabla\log\ H_o|_\gamma^2$是凸函数，如果将 (3.30) 中的 $(|\omega^\perp|_\gamma + |\nabla\log\ H_o|_\gamma)^2$替换为较小的量

$$\max\big\{|\omega^\perp - \lambda\nabla\log H_o|_\gamma^2,\ |\omega^\perp - \mathrm{sgn}(\lambda)\nabla\log H_o|_\gamma^2\big\}.$$

我们主要关注具有视界的填充，因为它们可用于建立正质量型结果。不过，至少对于 Σ 与球面微分同胚的情形，预计可以封闭 MOTS 内边界，从而得到一个无视界的主导能量条件填充。这可由 3 维中的已知结果推出，应用于我们构造具有视界填充的一般方法（定理 3.5）即可，具体如下。

命题 3.12. 设 $\mathcal{D} = (\Sigma, \gamma, H_o, P_o, \omega^\perp)$ 为维数为 $n = 3$ 的 *Bartnik* 数据，且满足 $H_o > 0$

$$H_o^2 < 2\widetilde{\Psi} \qquad on\ \Sigma,$$

其中

$$\widetilde{\Psi} = R_\gamma - 2H_o\Delta_\gamma H_o^{-1} - 2|\omega^\perp|_\gamma^2$$
$$- 2\Big[\big(\nabla^\gamma \cdot \omega^\perp - 2\langle \nabla \log H_o, \omega^\perp\rangle_\gamma\big)^2 + \big(H_o|\omega^\perp|_\gamma + |\nabla P_o|_\gamma\big)^2\Big]^{\frac{1}{2}}.$$

那么 Σ 是一个球面，并且 $\mathcal{D}$ 存在一个满足主导能量条件的 *DEC* 填充。

证明。 这基本上是定理 3.5 的直接推论，再结合 Lin [24] 将数据连接到时间对称数据的构造，以及 Mantoulidis 和 Schoen [25] 将其连接到圆球数据的构造。这些论证都相当标准，源自已有论证，我们在此略作概述。

根据假设，定理 3.5 给出了一个满足严格主能量条件的填充，其 MOTS 内边界严格稳定且全测地。这与 [24, 定理 3.3], 中的情形完全相同；该定理允许在保持主导能量条件的同时，光滑拼接另一个领圈，其内边界为极小边界，且该边界附近具有 $K \equiv 0$ 。按照 Lin [24, 定理 3.7], ，Mantoulidis 和 Schoen [25] 的领圈随后将这个极小边界连接到一个圆球面。接着，可通过将球冠拼接到圆球边界分支上来封闭该结构；根据 Lin 的相同论证，这也可以光滑完成（拼接结论见下文定理 5.8）。 □

请注意，如果存在一条从 γ 到圆度量的度量的连续路径，并且在此过程中保持 $-\Delta + \frac{1}{2}R_\gamma > 0$ 或 $R_\gamma^- > 0$不变，那么就可以将 [25] 的构造应用于高维，因此上述构造也能在高维中以相同方式完成，从而封闭这些填充。不过，众所

周知，在高维中，球面上的正标量曲率度量空间未必是路径连通的（例如，参见 [15]），因此我们不尝试在此寻找这样的路径。

3.5. **小数据的存在性**。在时间对称巴特尼克数据的语境下（Σ，γ，H），Jauregui[2] [20] 证明了，只要 γ 具有正标量曲率，就存在某个 $\lambda_o > 0$，使得（Σ，γ，λH）对于所有 $\lambda \in$（0，λ_o）都具有非负标量曲率的填充。我们在主导能量条件填充的语境下考虑一个类似的问题。具体而言，我们证明如下结论，该结论不要求H 与 P之间存在任何关系。

定理 3.13。设（Σ，γ，H，P，$\omega^\perp$）是满足以下条件的 *Bartnik* 数据

$$R_\gamma - 2|\omega^\perp|_\gamma^2 > 2|\nabla^\gamma \cdot \omega^\perp|. \tag{3.34}$$

那么，对于所有 $\lambda \in$（0，λ_o），存在 $\lambda_o > 0$，使得（Σ，γ，λH，λP，$\omega^\perp$）具有带视界的主导能量条件填充。

证明。设 $\Omega = \Sigma \times [-1, 0]$，并定义

$$g_0 = dt^2 + \gamma, \qquad \text{and} \qquad K_0 = 2\omega_\alpha^\perp dx^\alpha dt. \tag{3.35}$$

注意，这是极限 Bartnik 数据（Σ，γ，0，0，$\omega^\perp$）的一个填充，直接计算可知，（3.34）等价于（Ω g_0，K_0）满足严格主能量条件。

令 f 为 Ω 上任意满足 $f = 0$ 且在 $\Sigma_0 = \Sigma \times \{0\}$ 上有 $\partial_\nu f = 2^{\frac{n-2}{n-1}} H$ 的光滑函数，并在 $\Sigma_{-1} = \Sigma \times \{-1\}$ 的一个邻域内满足 $f = 0$。对于足够小的 $\lambda > 0$，定义 $\varphi_\lambda = 1 + \lambda f > 0$ 和

$$g_\lambda = \varphi_\lambda^{\frac{4}{n-2}} g_0, \qquad \text{and} \qquad K_\lambda = K_0 + \frac{\lambda \chi P}{n-1}\gamma,$$

其中 χ 是光滑截断函数，在 Σ_0 上等于 1，并在 Σ_{-1} 的一个邻域内为零。根据通常的共形变换平均曲率公式，Σ_0 相对于 g_λ 的平均曲率为 λH，且容易验证 $\mathrm{tr}_{\Sigma_0}(K_\lambda) = \lambda P$，因此 Σ_0 上的 Bartnik 数据为 $(\Sigma, \gamma, \lambda H, \lambda P, \omega^\perp)$。另请注意，在 Σ_{-1} 的一个邻域内，每个 $\Sigma_t = \Sigma \times \{t\}$ 上的 K_λ 的平均曲率和迹都恒为零。特别地，Σ_{-1} 是一个（弱）稳定 MOTS。最后，由于 (Ω, g_0, K_0) 严格满足主导能量条件，且 DEC 标量显然在 λ 上连续，因此当 λ 足够小时，$(\Omega, g_\lambda, K_\lambda)$ 满足主导能量条件。□

推论 3.14。设 $(\Sigma, \gamma, H, P, \omega^\perp)$ 是满足 $R_\gamma > 0$ 的 *Bartnik* 数据。那么存在 $\lambda_o > 0$，使得 $(\Sigma, \gamma, \lambda H, \lambda P, \lambda\omega^\perp)$ 对所有$\lambda \in (0, \lambda_o)$都存在带视界的 *DEC* 填充。

证明。我们将使用定理 3.13 证明中的构造，不过现在取 $K_\lambda = \lambda\big(2\omega_A^\perp dx^A dt + \frac{\chi P}{n-1}\gamma\big)$。与定理 3.13 的证明完全相同，$\Sigma_0$ 上的 Bartnik 数据为 $(\Sigma, \gamma, \lambda H, \lambda P, \lambda\omega^\perp)$，且 Σ_{-1} 既是 MOTS，也是 MITS。由于 $\lambda \to 0$，(g_λ, K_λ) 光滑收敛到 $(dt^2 + \gamma, 0)$，后者满足严格主能量条件，因为其能量密度为 $\frac{1}{2}R_\gamma > 0$，且动量密度为零。因此，按要求，当 $\lambda > 0$ 充分小时，$(\Omega, g_\lambda, K_\lambda)$ 满足主导能量条件。□

[2]Jauregui 只研究了 3 维情形，但显然这一结果对所有维数 ≥ 3 都成立

对于非负标量曲率填充问题，Jauregui 将边界数据分类为正类型、负类型或零类型：若边界数据存在一种以内边界为极小曲面的此类填充，则为正类型；若不存在此类填充，则为负类型；若存在非负标量曲率填充，但没有任何此类填充包含闭极小曲面 [20]，则为零类型。在此，他证明了若边界数据属于零类型，那么任何非负标量曲率填充实际上都必须是静态的。其论证大致如下：若其不是静态的，则 Corvino [10] 的一项结果表明，可以在局部提高标量曲率；随后，可将这一严格为正的标量曲率变形成一个极小曲面。然而，对于主导能量条件和初始数据集，情况要微妙一些。Corvino 和 Huang [11], 证明了初始数据集的一个类似结果：若真空初始数据不是定常的（即不具有 Killing 初始数据），则可以在局部提高主导能量标量 $\mu - |J|$。Huang 和 Lee [18] 表明，对于非真空初始数据，若 DEC 标量不可改进，则该数据必为零型完美流体 Killing 初始数据。也就是说，该初始数据的发展包含在一个具有全局 Killing 场的零型完美流体时空之中。因此，我们应当能够以类似方式利用主导能量标量的正性来构造一个 MOTS。我们提出如下猜想。

猜想 3.15。 如果 $(\Sigma, \gamma, H, P, \omega^{\perp})$ 存在 DEC 填充，但不存在带视界的 DEC 填充，那么该 Bartnik 数据的每个 DEC 填充都是定常的，尤其是零型完美流体 Killing 初始数据。

4. Inner mass estimates

现在，我们利用上文构造的填充，得到时空 Bartnik–Bray 内质量的估计。定理 3.5 的填充会精确诱导给定的 Bartnik 数据$\mathcal{D}$ ，但其视界必须足够小，因此它们给出的估计（见注 3.6）相当弱。不过， $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ 中填充的 Bartnik 数据只需满足带有 $\mathcal{D}$ 的折痕条件 (2.4)。因此，对于具有 $P = 0$ 的适当 Bartnik 数据，我们可以改用定理 3.7 的填充，其视界仅受主导能量条件限制。这正是定义 2.3 中折痕所允许的，也使时空 Bartnik–Bray 质量的估计简洁得多。

如前所述， r_o是（Σ， γ）的面积半径，因此 $\mathfrak{m}_{BB}(\mathcal{D}) \leq \frac{1}{2} r_o^{n-2}$。本节的两个主要估计均以相同方式得到。设 Bartnik 数据$\mathcal{D}_\Omega$ = （Σ， γ， H_Ω，0， $\omega_\Omega^{\perp}$）满足定理 3.7 的假设，并且 $\mathcal{D}_\Omega$和$\mathcal{D}$ 对某个 f满足折痕条件 (2.4)。那么，由定理 3.7 给出的 $\mathcal{D}_\Omega$ 的填充属于 $\mathcal{A}(\mathcal{D})$，且其视界是面积外极小的，并对 $\mathcal{D}_\Omega$满足 (3.22)，因此根据 (2.7)， $\mathfrak{m}_{BB}(\mathcal{D})$ 至少等于 (3.22) 的右端（对应 $\mathcal{D}_\Omega$）。如果$H > |P|$，我们可以令 $\mathcal{D}_\Omega$ 为满足 $P = 0$ 的 Bartnik 数据，它与 $\mathcal{D}$等价。由于它由 $\mathcal{D}$ 经过 Boost 变换得到，因此它与 $\mathcal{D}$满足折痕条件，从而得到推论 4.1。一般而言，我们可以令 H_Ω 为适当的常数，并取$\omega_\Omega^{\perp} = \omega^{\perp}$，然后在折痕条件中使用具有恒定双曲角的 Boost 变换，从而得到定理 4.3。

推论 4.1. 设 $\mathcal{D} = (\Sigma, \gamma, H, P, \omega^{\perp})$ 是满足 $H > |P|$ 的 *Bartnik* 数据，并设

$$\mathcal{H} = \sqrt{H^2 - P^2}, \qquad \beta = \omega^{\perp} - \frac{H \, \mathrm{d}P - P \, \mathrm{d}H}{H^2 - P^2}, \tag{4.1}$$

使得 $(\Sigma, \gamma, \mathcal{H}, 0, \beta)$ 是满足 $P = 0$、等价于 $\mathcal{D}$ 的 *Bartnik* 数据。假设 t

$$\mathcal{H}^2 < \frac{n-1}{n-2}\Psi \qquad on\ \Sigma,$$

其中

$$\Psi = R_\gamma - 2\mathcal{H}\Delta_\gamma \mathcal{H}^{-1} - 2|\beta|_\gamma^2 - 2\Big[\big(\nabla^\gamma \cdot \beta - 2\langle \nabla \log \mathcal{H}, \beta\rangle_\gamma\big)^2 + \mathcal{H}^2|\beta|_\gamma^2\Big]^{\frac{1}{2}}$$

是对于$(3.21)\,\Sigma$、 γ、 $\mathcal{H}$、0、 β)的函数。

Then

$$\mathfrak{m}_{BB}(\mathcal{D}) \geq \min_\Sigma \frac{r_o^{n-2}}{2}\left(1 - \frac{n-2}{n-1}\frac{\mathcal{H}^2}{\Psi}\right).$$

证明。 由于 $(\Sigma,\ \gamma,\ \mathcal{H},\ 0,\ \beta)$ 与 $\mathcal{D}$ 等价，因此，如定义 2.3 后所述，其每个带有视界的 DEC 填充都属于 $\mathcal{A}(\mathcal{D})$。根据定理 3.7，其中存在一个视界为面积外极小的 DEC 填充，并且对于 $(\Sigma,\ \gamma,\ \mathcal{H},\ 0,\ \beta)$ 满足 (3.22)，其右端正是该估计的右端，因此由 (2.7) 可得该估计。 □

当 $P = 0$ 时，我们有 $\mathcal{H} = H$ 和 $\beta = \omega^\perp$，而推论 4.1 正是定理 3.7 和 (2.7) 对 $\mathcal{D}$ 本身给出的估计。

注 4.2。 设 $n = 3$， Σ 为一个球面， H、 P 和 R_γ 为常数且满足 $H > |P|$，并且 $\omega^\perp = 0$。则根据 Gauss–Bonnet 定理， $\mathcal{H}$ 为常数， $\beta = 0$，且 $\Psi = R_\gamma = 8\pi/|\Sigma|_\gamma$，因此推论 4.1 的估计恰好就是 Bartnik 数据的时空 Hawking 能量，

$$\mathfrak{m}_{BB}(\mathcal{D}) \geq \sqrt{\frac{|\Sigma|_\gamma}{16\pi}}\left(1 - \frac{1}{16\pi}\int_\Sigma \left(H^2 - P^2\right) dA_\gamma\right),$$

而推论 4.1 的假设表明，霍金能量为正。

由推论 3.9（定理 3.7 在常数 H_o 下的情形）可得另一个更简洁的内质量估计。与推论 4.1 不同，它不要求 $H > |P|$，也不涉及 H 和 P 的导数。

定理 4.3。 考虑 *Bartnik* 数据 $\mathcal{D} = (\Sigma, \gamma, H, P, \omega^\perp)$ 并定义

$$\overline{\theta}_+ = \max_\Sigma (H + P),\ \ and\ \overline{\theta}_- = \max_\Sigma (H - P). \tag{4.2}$$

假设

$$\overline{\theta}_+ > 0, \qquad and \qquad \overline{\theta}_- > 0 \tag{4.3}$$

and

$$\overline{\theta}_+\overline{\theta}_- < \frac{n-1}{n-2}\overline{\Phi}, \tag{4.4}$$

其中 $\overline{\Phi}$ 由下式给出

$$\overline{\Phi} = \min_\Sigma \left(R_\gamma - 2|\omega^\perp|_\gamma^2 - 2\Big((\nabla^\gamma \cdot \omega^\perp)^2 + \overline{\theta}_+\overline{\theta}_-|\omega^\perp|_\gamma^2\Big)^{\frac{1}{2}}\right). \tag{4.5}$$

Then

$$\mathfrak{m}_{BB}(\mathcal{D}) \geq \frac{r_o^{n-2}}{2}\left(1 - \frac{n-2}{n-1}\frac{\overline{\theta}_+\overline{\theta}_-}{\overline{\Phi}}\right). \tag{4.6}$$

证明。 根据 (2.7)，只需在 $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ 中构造一个带有面积外极小视界 Σ_H的填充，使得 $\frac{1}{2}(|\Sigma_H|_g/\omega_{n-1})^{\frac{n-2}{n-1}}$为 (4.6) 的右端。为此，

let

$$H_o = \frac{\overline{\theta}_+ + \overline{\theta}_-}{2}, \qquad P_o = \frac{\overline{\theta}_+ - \overline{\theta}_-}{2}, \qquad \Theta = \sqrt{\overline{\theta}_+ \overline{\theta}_-},$$

并注意到 $H_o \pm P_o = \theta_\pm \geq H \pm P$，因此我们有 $H_o - H \geq |P_o - P|$。此外，$\Theta^2 = H_o^2 - P_o^2 = \overline{\theta}_+ \overline{\theta}_- < \frac{n-1}{n-2}\overline{\Phi}$ 根据假设，且 Φ 是 Bartnik 数据 $(\Sigma, \gamma, \Theta, 0, \omega^\perp)$ 在 (3.25) 中的量。因此，推论 3.9 给出了该 Bartnik 数据的一个带视界的 DEC 填充 $(\Omega\ g, K)$，其视界面积外极小并满足 (3.26)，其中右端现在是 (4.6) 的右端。

为说明这个填充属于 $\mathcal{A}(\mathcal{D})$，令

$$f = \tanh^{-1}\left(\frac{P_o}{H_o}\right),$$

该量为常数，且由 (4.3) 可知 $H_o > |P_o|$，因此定义良好。这保证了 $\cosh(f) = H_o/\Theta$ 且 $\sinh(f) = P_o/\Theta$，于是取 $H_\Omega = \Theta$、$P_\Omega = 0$、$\omega_\Omega^\perp = \omega^\perp$ 和 $df = 0$，折痕条件 (2.4) 化为

$$H_o - H \geq |P_o - P|,$$

由构造可知该条件成立。因此 $(\Omega\ g, K) \in \mathcal{A}(\mathcal{D})$，所需估计随即得出。

□

注 4.4. 以常数双曲角 f 对 $\mathcal{D}$ 作 Boost 变换，不会改变定理 4.3 的假设或估计，正如它不会改变 $\mathfrak{m}_{BB}(\mathcal{D})$ 一样。事实上，这种 Boost 变换会将 θ_+ 乘以 e^f，并将 θ_- 乘以 e^{-f}，因此其乘积不变，且 $\omega^\perp$ 也不变。不过，采用非常数 f 的 Boost 变换会改变估计，而 $\mathfrak{m}_{BB}(\mathcal{D})$ 保持不变，因此将定理 4.3 应用于 $\mathcal{D}$ 的 Boost 变换，而非直接应用于 $\mathcal{D}$，可以得到 $\mathfrak{m}_{BB}(\mathcal{D})$ 更好的下界。例如，若 $H > |P|$，将其应用于推论 4.1 中的 Bartnik 数据 $(\Sigma, \gamma, \mathcal{H}, 0, \beta)$，便会以 $\max_\Sigma(H^2 - P^2)$ 替代 $\theta_+\theta_-$，该值不大于原值；同时以 β 替代 $\omega^\perp$。

最后，我们考虑定理 3.10 的填充，它们恰好诱导出所需的 P 和 $\omega^\perp$，以便在第 5 节中进行光滑拼接。

当 $H > |P| > 0$ 但 P 不与 H 成比例时，我们仍然可以使用定理 3.10，方法是增大 H，直到它与 P 成比例为止。这会保持 P 和 $\omega^\perp$，因此折痕条件 (2.4) 对 $f = 0$ 成立。这些就是定理 5.11 中所使用的填充。

推论 4.5。令 $\mathcal{D} = (\Sigma、\ \gamma、\ H、\ P、\ \omega^\perp)$ 为 *Bartnik* 数据，且满足 $H > |P| > 0$，从而 P 具有恒定符号，并令

$$\lambda = \operatorname{sgn}(P) \min_\Sigma \frac{|P|}{H}, \qquad \widehat{H} = \lambda^{-1} P,$$

使得 $\widehat{H} \geq H$ 和 $P = \lambda \widehat{H}$ 满足 $0 < |\lambda| < 1$。假设

$$\widehat{H}^2 - P^2 < \frac{n-1}{n-2}\widehat{\Psi} \qquad on\ \Sigma,$$

其中

$$\widehat{\Psi} = R_\gamma - 2\widehat{H}\Delta_\gamma \widehat{H}^{-1} - 2|\omega^\perp|_\gamma^2 - 2\Big[\big(\nabla^\gamma \cdot \omega^\perp - 2\langle \nabla \log \widehat{H}, \omega^\perp \rangle_\gamma\big)^2 + \widehat{H}^2\big(|\omega^\perp|_\gamma + |\nabla \log \widehat{H}|_\gamma\big)^2\Big]^{\frac{1}{2}}$$

是函数(3.30)，其自变量为$(\Sigma, \gamma, \widehat{H}, P, \omega^{\perp})$。那么

$$\mathfrak{m}_{BB}(\mathcal{D}) \geq \min_{\Sigma} \frac{r_o^{n-2}}{2}\left(1 - \frac{n-2}{n-1}\frac{\widehat{H}^2 - P^2}{\widehat{\Psi}}\right).$$

证明。由于 $|P| > 0$ 和 Σ 连通，P 符号恒定，因此 λ 是一个非零$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$常数，且 $|\lambda| < 1$，因为 $H > |P|$。于是 $P = \lambda H$，并且 $H = |P|/|\lambda| \geq H$，因为 $|\lambda| \leq |P|/H$。根据定理 3.10，Bartnik 数据（Σ，γ，$\widehat{H}$，P，$\omega^{\perp}$）存在一个带视界的 DEC 填充，其视界是面积外极小的，面积由 (3.31) 给出$\widehat{\ }$，其中 H_o 和 P_o 分别替换为 H 和 P，也就是估计式的右端。$\widehat{\ }$由于 $H \geq H$，折痕条件 (2.4) 在 $f = 0$ 下成立，因此这个填充属于$\mathcal{A}(\mathcal{D})$，结论由 (2.7) 得出。□

注记4.6。对于成比例数据 $\lambda H_o = P_o$，等价巴特尼克数据 (4.1) 为 $\mathcal{D}' = (\Sigma,\ \gamma,\ \sqrt{1-\lambda^2}\, H_o,\ 0,\ \omega^{\perp})$，其平均曲率平方为 $H_o^2 - P_o^2$，且 $\mathcal{D}'$ 的函数 (3.21) 在 (3.30) 中至少为 $\widehat{\Psi}$。因此，定理 3.10 的假设蕴含推论 4.1 的假设，而后者给出的内质量估计至少与 (3.31) 右端一样好。定理 3.10 的意义在于，与定理 3.5 一样，其填充诱导的是 $\mathcal{D}$ 本身，而非其 Boost 变换版本，同时又不要求视界很小。与注记 4.2 一样，可以验证，在 3 维中，假设 H_o、P_o 和 R_γ 均为常数且 $\omega^{\perp} = 0$，则 (3.31) 的右端恰好是该巴特尼克数据的时空 Hawking 能量。

5. Application to the positive mass theorem and a Penrose-like inequality

正质量定理为填充的存在提供了一个标准障碍，既适用于正标量曲率填充问题，也适用于更一般的主导能量条件填充问题。具体而言，如果给定的 Bartnik 数据能够实现为某个负质量渐近平坦初始数据集边界上的诱导数据，那么主导能量条件填充的存在就会与正质量定理相矛盾。例如，Shi 和 Tam 关于 Brown–York 质量正性的工作 [37] 为正标量曲率填充提供了一个障碍；而 Raulot[33] 近期的工作则通过时空正质量定理，为主导能量条件填充的存在提供了一个障碍。依照同样的推理，对于诱导于渐近平坦初始数据集边界上的 Bartnik 数据，若存在主导能量条件填充，则意味着该初始数据集满足正质量定理。事实上，沿着 Miao 和第三位作者的思路 [28]，可以借助彭罗斯不等式得到质量的一个正下界。本节记录第3节中构造的填充的一些推论，由此得到适用于具有紧边界的初始数据集的正质量定理，以及一个类 Penrose 不等式。首先简要回顾一下，初始数据集的 ADM能量 E 和动量 p_i 分别由 (1.5) 和 (1.6) 给出。此外，当 $E \geq |p|$时，我们还会用到由 $\mathfrak{m} = \sqrt{E^2 - |p|^2}$给出的总 ADM 质量。

5.1. **带边界的正质量定理**。第2节中引入的折痕条件源自 Kazaras、Khuri 和 Lin [22] 提出的带折痕的正质量定理。该定理强化了通常的带角正质量定理，使 Bartnik 数据只需在 Boost 变换下匹配即可。尽管 Kazaras、

Khuri 和 Lin 考虑的是没有内边界的完备初始数据，但众所周知，旋量正质量定理的证明（例如他们所采用的证明）可以推广到具有俘获边界的初始数据。因此，我们在允许存在俘获边界的情形下陈述他们的结果，并在附录 A 中说明如何将他们的证明调整到这种情形。我们还用本文采用的标准 Bartnik 数据重新表述该结果。首先按照本文的约定给出带折痕初始数据集的定义。

定义 5.1. 渐近平坦 DEC 带折痕初始数据集是由带边界的光滑初始数据集组成的一对 $(M_{\pm}, g_{\pm}, K_{\pm})$，满足：

(1) M_+ 渐近平坦，具有任意数量的端和边界 ∂M_+；(2) M_- 紧致；(3) ∂M_+ 与 ∂M_-的一个子集（记为 ∂M_-）等于一个公共流形 (Σ, γ)，其诱导 Bartnik 数据为 $(\Sigma, \gamma, H_{\pm}, P_{\pm}, \omega_{\pm}^{\perp})$，由指向 M_+ 内部的单位法向量ν_+ 以及指向 M_- 外部的单位法向量 ν_- 诱导；(4) 存在函数 $f \in C^{\infty}(\Sigma)$，使得

H_- 双曲余弦 $f + P_-$ 双曲正弦 $f - H_+$

$$\geq \sqrt{(H_- \sinh f + P_- \cosh f - P_+)^2 + \left|\omega_-^{\perp} + \mathrm{d}f - \omega_+^{\perp}\right|^2}. \quad (5.1)$$

定理 5.2 ([22], 另见附录 A)。 设$(M_{\pm}, g_{\pm}, K_{\pm})$ 是一个渐近平坦 *DEC* 带折痕初始数据集， Σ_0 是折痕曲面， $M = M_+ \cup M_-$ 是通过沿着 Σ_0识别边界分支得到的流形。假设M 是自旋的， $\partial M_+ = \Sigma_0$，且 $\partial M_- = \Sigma_0 \cup \mathcal{S}_- \cup \mathcal{S}_+$。假设 *DEC* 在$(M_{\pm}, g_{\pm}, K_{\pm})$ 和

$$\theta_{\pm} \leq 0 \ on \ \mathcal{S}_{\pm}. \quad (5.2)$$

(M_+, g_+, K_+) 的每个端的 *ADM* 四动量都是非类空的， $E \geq |p|$。

请注意，在定理 5.2 中， θ 和 $\mathcal{S}$ 上的下标 $\pm$ 不应与用于表示折痕侧面的 $\pm$ 混淆。

有了这一结果，我们的正质量定理便可由所构造的填充直接推出若干推论。第一个是定理 3.5 的推论；该定理只要求带角正质量定理，而不要求折痕条件，因为双曲角 f 可以取为零。

定理 5.3。 设(M, g, K) 是一个满足主导能量条件的渐近平坦自旋初始数据集，其边界 ∂M 相对于指向内侧的法向量诱导出 *Bartnik* 数据$(\Sigma, \gamma, H, P, \omega^{\perp})$ 。

那么，如果 $H > 0$ 且

$$\begin{aligned} \frac{n-2}{n-1} H^2 < R_\gamma - 2H\Delta_\gamma H^{-1} - 2|\omega^{\perp}|_\gamma^2 \\ - 2\Big[\big(\nabla^\gamma \cdot \omega^{\perp} - 2\langle \nabla \log H, \omega^{\perp} \rangle_\gamma\big)^2 + \big(H|\omega^{\perp}|_\gamma + |\nabla P|_\gamma\big)^2\Big]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

则可推出 $E \geq |p|$。

证明。根据假设， ∂M 上诱导的 Bartnik 数据满足 (3.14)，因此由定理 3.5 可构造一个初始数据集 $(\Omega\ g,\ K)$，使得相对于外法向，Ω ∂上的 Bartnik 数据与 ∂M给出的数据完全一致。由于

Bartnik 数据完全一致，折痕条件 (5.1) 显然满足$f \equiv 0$，因此定理 5.2 适用。□

注记 5.4。这里的自旋限制几乎肯定可以去除，不过这需要应用另一种正质量定理。事实上，下面用于证明定理 5.11 的相同论证，可用于将 $(M,\ g,\ K)$ 平滑地粘合到一个带视界的填充上，然后便可应用平滑正质量定理。例如，利用 Lee、Lesourd 和 Unger 的正质量定理 [23]，可以改用这一论证，在维数为 $3 \leq n \leq 7$ 时得到不要求自旋假设的结果。此外，可以预期，Brendle 和 Wang 在所有维数下的正质量定理 [7, 8] 也可以扩展到允许内边界为俘获曲面的情形。不过，我们在此不作探讨。

或者，由于我们不要求折痕条件，Jang 和 Wood [19]所建立的这类带角正质量定理是一个不错的替代选择。不过，他们的证明不适用于以内边界为视界的情形，因此需要像我们在附录 A 中处理带折痕的正质量定理 [22] 那样，对其作相应调整；而这超出了本文的范围。

表达式 (5.3) 有些繁杂，不过我们注意到，当 P 和$\omega^{\perp}$ 为零时，它就化为 Miao 和第三位作者 [28] 在时间对称情形下的条件。然而，我们可以利用证明定理 4.3 时采用的同一填充构造，得到一个更简洁的正质量条件。

定理 5.5。设 (M, g, K) 是一个满足主导能量条件的自旋渐近平坦初始数据集，其边界为 ∂M，并且相对于指向内侧的法向量诱导出 *Bartnik* 数据 $(\Sigma, \gamma, H, P, \omega^{\perp})$。定义以下量

$$\overline{\theta}_{+} = \max_{\Sigma}(H + P),\ \textit{and}\ \overline{\theta}_{-} = \max_{\Sigma}(H - P). \tag{5.4}$$

那么，若 $\overline{\theta}_{\pm} > 0$ 且

$$\frac{n-2}{n-1}\overline{\theta}_{+}\overline{\theta}_{-} < R_{\gamma} - 2|\omega^{\perp}|_{\gamma}^{2} - 2\Big((\nabla^{\gamma}\cdot\omega^{\perp})^{2} + \overline{\theta}_{+}\overline{\theta}_{-}|\omega^{\perp}|_{\gamma}^{2}\Big)^{\frac{1}{2}} \tag{5.5}$$

便可推出 $E(M, g, K) \geq |p(M, g, K)|$。

证明。令 $\Theta = \sqrt{\overline{\theta}_{+}\overline{\theta}_{-}}$，于是推论 3.9 给出 Bartnik 数据 $(\Sigma, \gamma, \Theta, 0, \omega^{\perp})$ 的一个 DEC 填充（M_{-}, g_{-}, K_{-}），其带有 MOTS 内边界。令 (M_{+}, g_{+}, K_{+}) 为 (M, g, K)，我们计划将 M_{+} 和 M_{-}的公共边界粘合，得到一个流形，并在其上应用定理 5.2。为此，令

$$f = \tanh^{-1}\left(\frac{P_o}{H_o}\right),$$

其中 $H_o = \frac{1}{2}(\overline{\theta}_{+} + \theta_{-})$ 和 $P_o = \frac{1}{2}(\theta_{+} - \overline{\theta}_{-})$。这确保了

$$\cosh(f) = \frac{H_o}{\Theta},\ \text{and}\ \sinh(f) = \frac{P_o}{\Theta},$$

因此，(5.1) 左侧在 $H_{-} = \Theta$、$P_{-} = 0$ 和 $\omega_{\pm}^{\perp} = \omega^{\perp}$ 的取值下变为

$$H_o - H \geq |P_o - P|,$$

根据构造，这一条件成立。由于 M 是自旋的，附加领圈后得到的流形也具有自旋结构。也就是说，定理 5.2 适用于通过用 Boost 变换后的 Bartnik 数据（Σ， γ， Θ，0， $\omega^{\perp}$）填充 ∂M 的过去部分而得到的带折痕初始数据，结论由此得证。□

注 5.6。限制在 3 维，并假设 R_γ, H 和 P 均为常数，且 $\omega^{\perp} = 0$，则条件 (5.5) 可化为（时空）霍金能量的正性。从这个意义上说，它可以视为边界上的一种逐点正能量条件。

通过应用定理 3.7而非推论 3.9，上述相同论证可得出一个类似但不等价的结果。

定理 5.7。设 (M, g, K) 是一个带边界、满足主导能量条件的渐近平坦自旋初始数据集，其在 ∂M 上的 ***Bartnik*** 数据为 $(\Sigma, \gamma, H, P, \omega^{\perp})$，且满足$H > |P|$，并定义

$$\mathcal{H} = \sqrt{H^2 - P^2} > 0,$$
$$\beta = \omega^{\perp} - \frac{HdP - PdH}{H^2 - P^2}.$$

If

$$\frac{n-2}{n-1}\mathcal{H}^2 < R_\gamma - 2\mathcal{H}\Delta_\gamma \mathcal{H}^{-1} - 2|\beta|_\gamma^2 - 2\Big((\nabla^\gamma \cdot \beta - 2\langle \nabla \log \mathcal{H}, \beta\rangle_\gamma)^2 + \mathcal{H}^2|\beta|_\gamma^2\Big)^{\frac{1}{2}},$$

则 $E \geq |p|$。

证明。与定理 5.5 的证明类似，我们构造某些 Bartnik 数据的填充 $(\Sigma, \gamma, H_-, P_-, \omega^{\perp})$，并将其与 (M, g, K) 拼接，以得到一个折痕初始数据集。

令 $H_+ = H$ 和 $P_+ = P$，并且由于 $H > |P|$，我们可以再次令

$$f = \tanh^{-1}\left(\frac{P_+}{H_+}\right),$$

尽管此时 f 不再是常数。因此我们有

$$\cosh(f) = \frac{H_+}{\mathcal{H}} \qquad \text{and} \qquad \sinh(f) = \frac{P_+}{\mathcal{H}},$$

其中 $\mathcal{H} = \sqrt{H_+^2 - P_+^2}$。我们再次选取 $P_- = 0$ 并令 $H_- = \mathcal{H}$。由于 f 不是常数，我们也需要修改 $\omega^{\perp}$。特别地，我们令

$$\omega_-^{\perp} = \beta = \omega_+^{\perp} - \frac{H_+ dP_+ - P_+ dH_+}{H_+^2 - P_+^2}, \tag{5.6}$$

从而使条件 (5.1) 两边均为零。根据假设，定理 3.7 关于 $H_o = H_-$ 和 $\omega^{\perp} = \omega_-^{\perp}$ 的条件均得到满足，因此确实可以构造出填充，随后再次由定理 5.2 得出结论。□

5.2. **一种类 Penrose 不等式**。如果不在上述构造中应用正质量定理，而是应用彭罗斯不等式，那么我们将得到关于质量的正下界。我们不知道有任何关于时空 Penrose 不等式的结果允许存在折痕或角点，并且我们认为，将光滑情形下的证明推广到带折痕的情形将极其

非平凡。因此，我们旨在通过光滑拼接结果，利用填充获得带边界的光滑渐近平坦初始数据集。为此，我们将使用 Lin 的以下定理 [24, 定理 2.13 和注 2.12]。我们陈述该定理的一个略加专门化的版本，以适用于这里的目的。

定理 5.8 (Lin [24])。 设(M, g_+, K_+)是一个满足主导能量条件、边界为 $\Sigma_+ \subset M$ 的初始数据集。在边界的一个分支上诱导出 *Bartnik* 数据$(\Sigma, \gamma_+, H_+, P_+, \omega_+^\perp)$，其定向由 M 的向内单位法向量给出（指向无穷远）。设$(\Omega\ g_-, K_-)$ 是另一个满足主导能量条件的初始数据集，其边界的一个分支 $\Sigma_- \subset\Omega$ 上诱导出 *Bartnik* 数据$(\Sigma, \gamma_-, H_-, P_-, \omega_-^\perp)$，定向由Ω的外向单位法向量给出。

进一步假设，在 Σ_- 和 Σ_+ 的邻域内均满足严格主能量条件，且两个流形的 *Bartnik* 数据满足：

- γ_- 与 γ_+ 等距，
- $P_- = P_+$ 和 $\omega_-^\perp = \omega_+^\perp$
- $H_- > H_+$。

于是存在一个满足主导能量条件的初始数据集 (N, g, K)，其中 $N = \Omega \cup M$（通过沿 $\Sigma_- \cong \Sigma_+$ 识别），使得 (g, K) 在 Ω 上与 (g_-, K_-) 一致，并且在 M 去掉 ∂M 的一个紧邻域后与 (g_+, K_+) 一致。

此外，对于任意 $\varepsilon > 0$，我们都可以构造该初始数据集，使得$\|g - g_+\|_{C^0(M)} < \varepsilon$。

下面的引理表明，定理 5.8 中 M 边界附近的严格主导能量条件可以放宽：实质上，可以用边界附近少量的平均曲率换取标量曲率。

引理 5.9。 设 (M, g, K)是一个满足主导能量条件的初始数据集，其边界$\partial M = \Sigma$关于指向内侧的法向量诱导出 *Bartnik* 数据 $(\Sigma, \gamma, H, P, \omega^\perp)$，且满足 $H > 0$。那么，对于每个 $\delta > 0$ 以及 ∂M 的任意邻域 U，存在一个满足主导能量条件的初始数据集 $(M, \widetilde{g}, K)$，使得

(i) $(\widetilde{g}, K) = (g, K)$ 在 U，的某个紧子集之外；***(ii)*** $(\widetilde{g}, K)$ 在 ∂M的邻域内满足严格主能量条件；***(iii)*** ∂M对某个常数 $c \in (0, \delta)$诱导出 *Bartnik* 数据 $(\Sigma, \gamma, (1 + c)H, P, \omega^\perp)$；以及 ***(iv)*** 对每个超曲面 $S \subset M$，$|S|_{\widetilde{g}} \geq (1 - \delta)|S|_g$。

证明。 取足够小的 $s_1 > 0$，我们在 $[0, s_1) \times \Sigma \subset U$ 上写作 $g = ds^2 + \gamma_s$，其中s_1 足够小，以确保每个切片 $\Sigma_s = \{s\} \times \Sigma$ 的平均曲率 H 为正。考虑一个待在下文中选取的光滑函数 $N = N(s)$，满足 $\frac{1}{2} \leq N \leq 1$、$N' \geq 0$ 和 $N = 1^-$（当 $s \geq s_2$ 时），其中 $s_2 \in (0, s_1)$ 将在下文中选取，并令$t = \int_0^s N(\sigma)\, d\sigma$。在领圈上，我们定义 $\widetilde{g} = dt^2 + \gamma_s$，并要求其相对于 (t, y^α) 的分量与 K 相对于 (s, y^α) 的分量相同，以此定义 $\widetilde{K}$。在领圈之外，我们令 $(\widetilde{g}, K) = (g, K)$。也就是说，如果

$$K = K_{ss}\, ds^2 + 2K_{s\alpha}\, dy^\alpha ds + K_{\alpha\beta}\, dy^\alpha dy^\beta,$$

then

$$\widetilde{K} = K_{ss}\, dt^2 + 2K_{s\alpha}\, dy^\alpha dt + K_{\alpha\beta}\, dy^\alpha dy^\beta.$$

这确保了 $|\widetilde{K}|_{\widetilde{g}} = |K|_g$、$\mathrm{tr}_{\widetilde{g}}\widetilde{K} = \mathrm{tr}_g K$ 以及 $\partial_t = N^{-1}\partial_s$。设 $\mathrm{II}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\partial_s\gamma_{\alpha\beta}$ 为 Σ_s 的第二基本形式，从而 $H = \gamma_s^{\alpha\beta}\mathrm{II}_{\alpha\beta}$，并令 $P = \gamma_s^{\alpha\beta}K_{\alpha\beta}$。下文中，指标用 γ_s 升降，而 ∇ 是 γ_s 的 Levi-Civita联络。在这些坐标下，$\Gamma^s_{\alpha\beta} = -\mathrm{II}_{\alpha\beta}$、$\Gamma^\alpha_{s\beta} = \mathrm{II}^\alpha{}_\beta$，其中 $\Gamma^\alpha_{\beta\delta}$ 是 γ_s 的 Christoffel符号，所有其他 Christoffel符号均为零。直接计算并利用 Gauss方程和平均曲率变分可得

$$\begin{aligned} R_g &= R_{\gamma_s} - 2\partial_s H - H^2 - |\mathrm{II}|^2, \\ J_s(g,K) &= \nabla^\alpha K_{s\alpha} + HK_{ss} - \mathrm{II}^{\alpha\beta}K_{\alpha\beta} - \partial_s P, \\ J_\alpha(g,K) &= \partial_s K_{s\alpha} + HK_{s\alpha} + \nabla^\beta K_{\alpha\beta} - \partial_\alpha(K_{ss}+P). \end{aligned}$$

在坐标 $(\widetilde{g},\ K)$ 中，对于 $(t,\ y^\alpha)$，相同的公式仍然成立，其中 $\widetilde{K}$ 和 γ_s 的分量保持不变，但 ∂_s、II 和 H 分别替换为 $N^{-1}\partial_s$、$N^{-1}\mathrm{II}$ 和 $N^{-1}H$。也就是说，我们有

$$\begin{aligned} R_{\widetilde{g}} &= R_{\gamma_s} - 2N^{-1}\partial_s(N^{-1}H) - N^{-2}\big(H^2 + |\mathrm{II}|^2\big) \\ &= R_{\gamma_s} + N^{-2}(R_g - R_{\gamma_s}) + 2N^{-3}N'H, \\ J_t(\widetilde{g},\widetilde{K}) &= N^{-1}J_s(g,K) + (1-N^{-1})\nabla^\alpha K_{s\alpha}, \\ J_\alpha(\widetilde{g},\widetilde{K}) &= N^{-1}J_\alpha(g,K) + (1-N^{-1})\big(\nabla^\beta K_{\alpha\beta} - \partial_\alpha(K_{ss}+P)\big). \end{aligned}$$

由于 $|K|_{\widetilde{g}} = |K|_g$ 和 $\mathrm{tr}_{\widetilde{g}}K = \mathrm{tr}_g K$，并且相对于 $(t,\ y^\alpha)$，$\widetilde{g}$ 的分量与相对于 $(s,\ y^\alpha)$ 的 g 的分量相同，因此由 $\frac{1}{2} \le N \le 1$ 可知，在领圈上存在一个仅依赖于 $(g,\ K)$ 的常数 C，使得

$$\mu(\widetilde{g},\widetilde{K}) - |J(\widetilde{g},\widetilde{K})|_{\widetilde{g}} \ge \mu(g,K) - |J(g,K)|_g + N'H - C(1-N) \ge N'H - C(1-N).$$

现在取 $N = 1 - \eta e^{-1/(s_2-s)}$ 作为 $s < s_2$，其中 $\eta \in (0,\ 1/2)$。于是 $1 - N = (s_2 - s)^2 N' \le s_2^2 N'$，因此右端至少为 $N'(H - Cs_2^2)$。随后我们可以将 s_2 取得足够小，以确保 $Cs_2^2 < \min H$，从而该式在 $[0, s_2) \times \Sigma$ 上为正。这就给出了 (i) 和 (ii)。在 ∂M 上，单位法向量为 ∂_t，因此 γ、P 和 $\omega^\perp$ 保持不变，而 H 变为 $N(0)^{-1}H$。由于 $N \ge N(0)$，我们有 $\widetilde{g} \ge N(0)^2 g$，因此 $|S|_{\widetilde{g}} \ge N(0)^{n-1}|S|_g$。由于当 $\eta \to 0$ 时 $\to 1$ $N(0)$，取足够小的 η，即可得到带有 $c = N(0)^{-1} - 1$ 的 (iii) 和 (iv)。□

这使我们能够将带边界的渐近平坦初始数据集延拓至边界之外，直至一个 MOTS；若假设时空 Penrose 不等式成立，则可得出一个符合 [28] 精神的时空类 Penrose 不等式。我们指出，在准备本文期间，OpenAI 发布了大量人工智能生成的数学结果，其中包括一项声称证明了所有维数下时空 Penrose 不等式的结果 [31, 32]。由于我们无法验证该结果，因此本文独立陈述我们的构造，并另行陈述若其中的结果正确则可得出的结论。我们还指出，大约在同一时期，Bray、Dolmen、Khuri 和 Schmidt 在 arXiv 上发布了一篇证明，针对一类特殊的初始数据 [4]证明了时空 Penrose 不等式，但其界定的是能量而非质量；此外，他们还将完整 Penrose 不等式的证明归结为证明某个偏微分方程系统的存在性。这似乎与 OpenAI 论文采用的方法相同。由于 Penrose 不等式有多种不同表述，我们在此简要将其陈述为一个猜想。

猜想 5.10（彭罗斯不等式）。 设 (M, g, K) 是一个满足主导能量条件的 n 维渐近平坦初始数据集，其边界 $\Sigma = \partial M$ 是一个闭连通的 MOTS 或 MITS，法向指向 M，并设 A为包围 Σ 的超曲面面积的下确界。那么

$$\mathfrak{m}(M, g, K) \geq \frac{1}{2}\left(\frac{A}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{n-2}{n-1}}. \tag{5.7}$$

注意，定理 5.8 要求 $P_\pm$ 与 $\omega_\pm^\perp$完全匹配。事实上，这正是我们构造 P 与 H成比例的填充的主要动机，此类填充由定理 3.10 给出。将填充与外部初始数据集粘合时，这使我们能够构造出在角点两侧均匹配 $P_\pm$ 和 $\omega_\pm^\perp$ 的填充，同时还能良好控制（面积外极小）最外边际外陷俘面的面积。具体而言，我们可以证明以下结果。

定理 5.11. 设 (M, g, K) 是一个满足主导能量条件、具有面积外极小边界，并诱导出相对于内法向的 ***Bartnik*** 数据 $(\Sigma, \gamma, H_+, P_+, \omega_+^\perp)$的渐近平坦初始数据集。假设 $H_+ > |P_+| > 0$，并定义

$$\widehat{H} = |P_+| \max_\Sigma \frac{H_+}{|P_+|}. \tag{5.8}$$

假设

$$\widehat{H}^2 - P_+^2 < \frac{n-1}{n-2}\widehat{\Psi} \qquad on\ \Sigma, \tag{5.9}$$

其中， $\widehat{\Psi}$ 是(3.30) 中对应于$(\Sigma, \gamma, \widehat{H}, P_+, \omega_+^\perp)$的函数，即

$$\widehat{\Psi} = R_\gamma - 2\widehat{H}\Delta_\gamma \widehat{H}^{-1} - 2|\omega_+^\perp|_\gamma^2 - 2\Big((\nabla^\gamma \cdot \omega_+^\perp - 2\langle \nabla \log \widehat{H}, \omega_+^\perp\rangle)^2 + \widehat{H}^2\left(|\omega_+^\perp|_\gamma + |\nabla \log \widehat{H}|\right)^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

那么，对所有 $\varepsilon > 0$，都存在一个渐近平坦初始数据集，在某个紧集之外满足主导能量条件且等于(M, g, K)，其边界为面积外极小的 ***MOTS*** 或 ***MITS***，且其面积 $|\Sigma_H|$ 满足

$$\frac{1}{2}\left(\frac{|\Sigma_H|}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{n-2}{n-1}} \geq \min_\Sigma \frac{r_o^{n-2}}{2}\left(1 - \frac{n-2}{n-1}P_+^2 \frac{\max_\Sigma \frac{H_+^2}{P_+^2} - 1}{\widehat{\Psi}}\right) - \varepsilon. \tag{5.10}$$

证明。 这只需将定理 3.10 构造的填充（并在推论 4.5 中使用）与给定的渐近平坦初始数据拼接起来即可。首先注意，必要时只需允许视界面积任意小幅减小（见注 3.11），便可假设该填充严格满足主导能量条件；这会产生下文（5.11）中的面积亏损。令 $P_- = P_+$, $\omega_-^\perp = \omega_+^\perp$，并按（5.8）设$\widehat{H} = |P_+|\max_\Sigma \frac{H_+}{|P_+|}$，然后对某个待选取为充分小的 $\delta > 0$，选取 $H_- = (1+\delta)\,\widehat{H}$。对某个 $\lambda \in (-1, 1)$，有 $\lambda H_- = P_-$，因此定理 3.10 在 H_- 下给出一个边界为 MOTS 或 MITS 的填充（取决于 P_+ 的符号），其面积满足

$$\frac{1}{2}\left(\frac{|\Sigma_H|}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{n-2}{n-1}} \geq \min_\Sigma \frac{r_o^{n-2}}{2}\left(1 - \frac{n-2}{n-1}\frac{H_-^2 - P_-^2}{\widehat{\Psi}_-}\right) - \delta, \tag{5.11}$$

其中 $\widehat{\Psi}_-$ 表示将 $\widehat{\Psi}$ 中的 H 替换为 H_- 后所得的量。由于（5.9）是严格不等式，显然，取足够小的 δ 可确保将 H_- 替换为$\sim H$后该不等式仍成立。注意，在 H_- 的定义中纳入 δ 可确保严格不等式 $H_- > H_+$ 成立，这是应用定理 5.8 所必需的。根据引理 5.9，我们还可以将 H_+ 替换为 $(1+c)H_+$（其中 $0 < c < \delta$），从而假设角点另一侧也严格满足主导能量条件，这可确保 $(1+c)H_+ < H_-$。随后可直接应用定理 5.8，得到一个边界为 MOTS 或 MITS、且满足主导能量条件的光滑渐近平坦初始数据集。由于角点流形的紧侧在拼接构造中保持不变，并且定理 5.8 中有 g 对 g_+ 的 C^0接近性，因此当 δ 足够小时，可确保边界仍为面积外极小。最后，取足够小的 δ，可确保（5.11）的右端大于（5.10）的右端。□

假设时空彭罗斯不等式成立，例如根据 OpenAI [31, 32], 近期声称的证明，我们立即得到如下符合 [28] 精神的类 Penrose 不等式。

推论 5.12。设 $(M、g、K)$ 是一个满足定理 *5.11* 假设的渐近平坦初始数据集，并假设彭罗斯不等式（猜想 *5.10*）在 n 维成立。则 $(M、g、K)$ 的 *ADM* 质量 $\mathfrak{m}$ 满足

$$\mathfrak{m} \geq \min_{\Sigma} \frac{r_o^{n-2}}{2} \left(1 - \frac{n-2}{n-1} P_+^2 \frac{\max_\Sigma \frac{H_+^2}{P_+^2} - 1}{\widehat{\Psi}} \right) > 0. \tag{5.12}$$

我们指出，代替彭罗斯不等式，可以应用 Allen、Bryden、Kazaras 和 Khuri 的次优彭罗斯不等式 [1]，从而在 3 维中获得质量下界

$$\mathfrak{m}(M,g,K) \geq \mathcal{C} \min_{\Sigma} \frac{r_o}{2} \left(1 - \frac{1}{2} P_+^2 \frac{\max_\Sigma \frac{H_+^2}{P_+^2} - 1}{\widehat{\Psi}} \right), \tag{5.13}$$

对于某个正的普适常数 $\mathcal{C} \ll 1$，其中 $\mathfrak{m} = \sqrt{E^2 - |p|^2}$。在 $\overline{P = \mathrm{tr}_{\partial M} K}$ 消失的情况下，我们可以改用定理 3.7 进行填充，并通过与上文相同的证明得到以下结果。

定理 5.13。设 (M, g, K) 是一个满足主导能量条件且具有面积外极小边界的渐近平坦初始数据集，其相对于内法向诱导的 *Bartnik* 数据为 $(\Sigma, \gamma, H, 0, \omega^\perp)$。

假设 $H > 0$ 和

$$H^2 < \frac{n-1}{n-2} \Psi \qquad on\ \Sigma, \tag{5.14}$$

其中 Ψ如定理 *3.7* 所述，由下式给出

$$\begin{aligned} \Psi = {} & R_\gamma - 2H\Delta_\gamma H^{-1} - 2|\omega^\perp|_\gamma^2 \\ & - 2\Big[\big(\nabla^\gamma \cdot \omega^\perp - 2\langle \nabla \log H, \omega^\perp \rangle_\gamma \big)^2 + H^2 |\omega^\perp|_\gamma^2 \Big]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{5.15}$$

那么，对于任意 $\varepsilon > 0$，都存在一个满足主导能量条件的渐近平坦初始数据集，在紧集之外与(M, g, K) 相同，且具有面积外极小性质

其边界为 *MOTS* 或 *MITS*，且其面积 $|\Sigma_H|$ 满足

$$\frac{1}{2}\left(\frac{|\Sigma_H|}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{n-2}{n-1}} \geq \min_{\Sigma} \frac{r_o^{n-2}}{2}\left(1-\frac{n-2}{n-1}\frac{H^2}{\Psi}\right) - \varepsilon. \tag{5.16}$$

同样，假设彭罗斯不等式成立，则可将其直接应用于该初始数据集，从而得到一个类 Penrose 不等式。

推论 5.14. 设(M, g, K) 是一个满足定理 *5.13* 假设的渐近平坦初始数据集，并假设彭罗斯不等式（猜想 *5.10*）在维数 n 下成立。那么(M, g, K) 的 *ADM* 质量 $\mathfrak{m}$ 满足

$$\mathfrak{m} \geq \min_{\Sigma} \frac{r_o^{n-2}}{2}\left(1-\frac{n-2}{n-1}\frac{H^2}{\Psi}\right) > 0. \tag{5.17}$$

Appendix A. Sketch of proof of Theorem 5.2

专家们都知道，旋量正质量定理的证明（例如 [22] 中的证明）通常允许存在边界，只要边界上满足 (5.2)（例如参见 [3]）。这里的情形也不例外。在本附录中，我们概述为得到定理 5.2 而对 [22] 中的证明所需作出的修改。该证明遵循如今标准的旋量论证，最初由 Witten [39]，提出：在 M 上求解一个狄拉克型方程，然后对 Weitzenb¨ock 公式积分，得到质量的一个表达式。

为了更直接地沿用他们的证明，本附录采用 [22] 的记号与约定。首先，他们从真正的时空视角，而非通常的初始数据视角，引入了 Bartnik 数据的广义概念。他们照常考虑一个闭黎曼流形 (Σ, γ)，但为其赋予一个三元组 $(\mathcal{N}, \vec{H}, \beta)$，其中

- $\mathcal{N}$ 是覆盖 Σ 的一个平凡二阶向量丛，其结构群为 $SO^+(1,1)$，并配备不变的丛度量 $\langle\cdot,\cdot\rangle$，
- $\vec{H}$ 是 $\mathcal{N}$ 的一个截面，
- ，而 β 是 Σ 上的一个 1-形式，为 $\mathcal{N}$ 给出一个联络。

这里，$\mathcal{N}$ 可视为嵌入时空中的 Σ 的法丛，$\vec{H}$ 是时空平均曲率，而 β 扮演 $\omega^\perp$ 的角色。令 $\{\nu,\tau\}$ 为 $\mathcal{N}$ 的一个标架，其中 $\langle\nu,\ \nu\rangle = 1$，$\langle\tau,\ \tau\rangle = -1$，且 $\langle\nu,\ \tau\rangle = 0$。于是

$$\vec{H} = H\nu - P\tau, \tag{A.1}$$

这使我们能够恢复贯穿本文其余部分所采用的标准 Bartnik 数据图景。之所以如此定义 Bartnik 数据，是因为从时空的角度来看，对于某个 Σ 而言，其 Bartnik 数据在某种意义上不应取决于它嵌入在哪个初始数据集之中；通过这种表述，可以定义等价巴特尼克数据的概念，该概念对应于时空中同一 Σ 在 Boost 变换下的 Bartnik 数据。为了用广义 Bartnik 数据来表述这一点，考虑另一个具有相应结构的丛 $\mathcal{N}'$，其带有标架 $\{\nu',\tau'\}$。一个等距丛映射 $F\colon \mathcal{N}\to\mathcal{N}'$ 可以用这些标架表示，在点 $x\in\Sigma$处写成

$$F_x = \begin{bmatrix} \cosh(f(x)) & -\sinh(f(x)) \\ -\sinh(f(x)) & \cosh(f(x)) \end{bmatrix}, \tag{A.2}$$

对于某个 $f \in C^\infty(\Sigma)$，称为 F的双曲角；例如，这就是出现在（2.4）中的同一个 f。Kazaras、Khuri 和 Lin 将两个广义 Bartnik 数据集（$\mathcal{N}$、$\vec{H}$、β）和（$\mathcal{N}'$、$\vec{H}'$、β'）称为等价的，如果存在这样的等距丛映射，使得 $\vec{H}' = F \circ \vec{H}$，且 $\beta' = \beta + df$。

现在，我们采用这些约定和记号来定义带折痕初始数据，并对 [22] 中的定义稍作修改，以纳入本文所考虑的内边界。

定义 A.1。渐近平坦 DEC 带折痕初始数据集是由两个带边界的光滑初始数据集组成的有序对 $(M_\pm, g_\pm, K_\pm)$，满足：

(1) M_+ 是渐近平坦的，具有任意多个端和边界 ∂M_+；(2) M_- 是紧致的；(3) ∂M_+ 及 ∂M_-的一个子集（记为 ∂M_-）与公共流形 (Σ, γ) 相等，其诱导 Bartnik 数据 $(\mathcal{N}_\pm, \vec{H}_\pm, \beta_\pm)$ 由单位法向量 ν_+（指向 M_+ 内部）和 ν_-（指向 M_-外部）诱导；(4) 存在一个等距丛映射 $F: \mathcal{N}_- \to \mathcal{N}_+$，其双曲角为 f，使得

$$\left\langle F(\vec{H}_-) - \vec{H}_+, \nu_+ \right\rangle_{\mathcal{N}_+} \geq \sqrt{\left\langle F(\vec{H}_-) - \vec{H}_+, \tau_+ \right\rangle^2_{\mathcal{N}_+} + |\beta_+ - \beta_- - df|^2_\gamma}. \tag{A.3}$$

在其余边界分支 N 上，定义 ∂M_- 的未来／过去零膨胀量

$$\theta_\pm = H_N \pm \mathrm{tr}_N K, \tag{A.4}$$

其中 H_N 是相对于指向 M_- 内部的法向量而言的。注意，定义 A.1 等价于定义 5.1。

在本附录中，始终假设定理 5.2 的设定。按照 [22,第2节，2], 我们定义 $M_\pm$ 上的旋量丛 $S^\pm_0$，以及一个等距映射 $\Phi_0: S^-_0|_{\Sigma_0} \to S^+_0|_{\Sigma_0}$，它以如下意义保持 Clifford 乘法：对于所有 $X \in T\Sigma_0$ 和 $\Phi_0(\nu_-\psi) = \nu_+\Phi_0(\psi)$，均有 $\Phi_0(X\psi) = X\Phi_0(\psi)$；其中，$\nu_\pm$ 分别表示从 M_- 向外以及指向 M_+ 内部的单位法向量。这本质上是角点处的相容条件。于是，时空旋量丛由 $S_\pm = S^\pm_0 \oplus S^\pm_0$ 给出。回想一下，定义 A.1 中的每个丛 $\mathcal{N}_\pm$ 都有一个标架 $\{\nu_\pm, \tau_\pm\}$。由 $\tau_\pm$ 张成的平凡丛定义在 Σ 上，可将其延拓至 $M_\pm$，进而张成 $\mathrm{span}(\tau_\pm) \oplus TM_\pm$，并赋予其一个洛伦兹丛度量 $h_\pm$，使之延拓 $g_\pm$，从而 $\tau_\pm$ 与 $TM_\pm$ 正交，且$h_\pm(\tau_\pm, \tau_\pm) = -1$。Clifford 乘法作用于 $S_\pm$ 的截面 $\psi = \psi_1 \oplus \psi_2$，其定义如下

$$X\psi = X\psi_1 \oplus (-X\psi_2) \text{ for } X \in TM_\pm \text{ and } \tau_\pm\psi = \psi_2 \oplus \psi_1. \tag{A.5}$$

$S_\pm$ 上的Sen联络定义为

$$\overline{\nabla}^\pm_i \psi = \nabla^\pm_i \psi + \frac{1}{2}(K_\pm)^j_i e_j \tau_\pm \psi, \tag{A.6}$$

Dirac–Witten算子定义为

$$D^\pm_W = e^i \overline{\nabla}^\pm_i, \tag{A.7}$$

我们将其简记为 D_W on M。我们还需要使用边界 Σ 上的边界Dirac算子，其定义为

$$\mathcal{D}^\Sigma = \nu^\Sigma e^A \nabla^\Sigma_A, \tag{A.8}$$

其中 ν^{Σ} 是边界 Σ的外向单位法向量。接下来我们回顾证明核心处的积分 Weitzenb¨ock恒等式,

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega}\left(|\overline{\nabla}\psi|^2-|D_W\psi|^2+\frac{1}{2}\langle\psi,(\mu+J\tau)\psi\rangle\right)dV\\&=\int_{\partial\Omega}\left\langle\psi,\mathcal{D}^{\partial\Omega}\psi-\frac{1}{2}H\psi-\frac{1}{2}\left[(\mathrm{Tr}_{\partial\Omega}K)\nu-K(\nu,e_A)e^A\right]\tau\psi\right\rangle dA,\end{aligned}\tag{A.9}$$

其中 Ω 是一个带边界 $\partial\Omega$ 的紧流形，$\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ 是时空旋量丛上的通常正定厄米内积。如果将 Ω 取为渐近平坦流形，并将 $\partial\Omega$ 理解为趋于无穷远的极限，那么质量便可从边界项中恢复出来；在求解 $D_W\psi=0$ 后，正质量定理基本上就得以推出。在当前 M 具有折痕的情形下，情况则更为有趣。

在 $M_{\pm}$ 上求解 $D_W\psi=0$ 时，折痕两侧都会产生边界项，而定义 5.1 中的折痕条件正是确保边界项具有正确符号所必需的条件。令 M_ℓ（其中 $\ell=1,\ 2$、..、k）表示 M_+ 的每个渐近平坦端，其中 M_1 是选定的一个端，Kazaras、Khuri 和 Lin[22]求解该系统

$$\begin{cases}D_W\psi_+=0 & \text{in } M_+,\\ D_W\psi_-=0 & \text{in } M_-,\\ \Phi(\psi_-)=\left(\cosh(\frac{f}{2})+\sinh(\frac{f}{2})\epsilon_+\right)\psi_+ & \text{on } \Sigma,\\ |\psi_+-\psi_\infty|(x)\to 0 & \text{as } |x|\to\infty \text{ in } M_1,\\ |\psi_+|(x)\to 0 & \text{as } |x|\to\infty \text{ in } M_\ell,\quad \ell\neq 1,\end{cases}\tag{A.10}$$

其中 f 是第 5 节中出现的一个固定双曲角，而 $\epsilon_{\pm}=\nu_{\pm}\tau_{\pm}$ 通过 Clifford 乘法作用。由于我们还希望允许 M_- 具有紧内边界，因此需要在 (A.10) 中加入通常的内边界条件（参见 [3]）。

$$\epsilon_{\mathcal{S}_{\pm}}\psi_-=\pm\psi_-,\tag{A.11}$$

其中 $\epsilon_{\mathcal{S}_{\pm}}=\nu_{\mathcal{S}_{\pm}}\tau_-$，$\nu_{S_{\pm}}$ 表示指向 M_-、且垂直于 $\mathcal{S}_{\pm}$ 的单位法向量。需要检查的主要问题是，在加入边界条件 (A.11) 后，[22] 中求解 (A.10) 的分析过程仍然成立。为此，我们紧密遵循 [22] 的第 4 节。

考虑不交并 $M'=M_-\sqcup M_+$ 以及带权 Sobolev 空间$W^{1,}_{-q^*}{}^{2}(M')$，该空间由旋量 ψ 组成，它们由 $\psi_{\pm}\in W^{1,}_{-q^*}{}^{2}(S_{\pm})$ 给出，其中 $q^*=\frac{n-2}{2}$。定义空间

$$\widehat{\mathcal{H}}=\left\{\psi\in W^{1,2}_{-q^*}(M')\,|\,\Phi(\psi_-)=T\psi_+ \text{ on } \Sigma,\ \text{and } \epsilon_{\mathcal{S}_{\pm}}\psi_-=\pm\psi_- \text{ on } \mathcal{S}_{\pm}\right\},$$

其中

$$T\psi_+=\left(\cosh\left(\frac{f}{2}\right)+\sinh\left(\frac{f}{2}\right)\epsilon_+\right)\psi_+.\tag{A.12}$$

[22] 的引理 4.1证明了，对于没有内部边界的 M'，其中的 $\mathcal{H}$ 的对应物 $\mathcal{H}$，$\mathcal{H}\cap C_c^{\infty}(M')$在 $\mathcal{H}$中是稠密的。论证首先从$C_c^{\infty}(M')$中的 $W^{1,}_{-q^*}{}^{2}$-逼近开始；一般而言，该逼近不满足边界条件（包括折痕的两侧），因此不能确保其属于 $\mathcal{H}$。随后对该逼近进行修改，使其满足边界条件，并且

因此属于 $\mathcal{H}$。为此，他们为折痕条件$\mathcal{K}$定义了一个边界映射： $H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_+ \sqcup \Sigma_-) \to H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_+ \sqcup \Sigma_-)$，该映射满足 $\mathcal{K}^2 = \mathcal{K}$，并且当且仅当 φ 满足折痕边界条件时， $\mathcal{K}\mathcal{T}(\varphi) = 0$ 成立，其中 $\mathcal{T}$是边界迹映射。为了也将 $\mathcal{S}_\pm$ 上的边界条件纳入其中，我们将 $\mathcal{K}$ 替换为

$$\widehat{\mathcal{K}} = \mathcal{K} \oplus \frac{1}{2}\left(1 - \epsilon_{\mathcal{S}_+}\right) \oplus \frac{1}{2}\left(1 + \epsilon_{\mathcal{S}_-}\right), \tag{A.13}$$

它作用于整个边界

$$\widehat{\mathcal{K}} : H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_+ \sqcup \Sigma_- \sqcup \mathcal{S}_+ \sqcup \mathcal{S}_-) \to H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_+ \sqcup \Sigma_- \sqcup \mathcal{S}_+ \sqcup \mathcal{S}_-), \tag{A.14}$$

满足 $\widehat{\mathcal{K}}^2 = \widehat{\mathcal{K}}$，且 $\widehat{\mathcal{K}}\mathcal{T}(\varphi) = 0$ 当且仅当 $\varphi \in \widehat{\mathcal{H}}$。随后，↝[22]中引理 4.1 的证明可完全照搬，只需将 $\mathcal{K}$ 替换为 $\mathcal{K}$。这样，我们便能将^中的元素平滑逼近为 $\mathcal{H}$ 的元素，以便在 (A.9) 中使用。

[22] 中的引理 4.2 和推论 4.3 的证明无需改动即可成立，因为内边界不起作用，因此我们得到估计

$$\|\psi\|_{W^{1,2}_{-q^*}(M')} \leq C\|\overline{\nabla}\psi\|_{L^2(M')}, \tag{A.15}$$

下文将利用它证明 D_W： $\widehat{\mathcal{H}} \to L^2(M')$ 是一个同构。首先，我们记录由 (A.9) 得到的质量公式。

命题 A.2。 设 ψ_0 是定义在 M' 上的光滑时空旋量，并且渐近于^一个常旋量 ψ_∞。对于任意满足 $\psi - \psi_0 \in \mathcal{H}$的旋量 ψ，我们有

$$\begin{aligned}
&\int_{M'} \left(|\overline{\nabla}\psi|^2 - |D_W\psi|^2 + \frac{1}{2}\langle \psi, (\mu + J\tau)\psi \rangle \right) dV \\
&\quad \leq \frac{1}{2}\int_{\mathcal{S}_+} \theta_+ |\psi_-|^2 \, dA + \frac{1}{2}\int_{\mathcal{S}_-} \theta_- |\psi_-|^2 \, dA \\
&\qquad - \frac{1}{2}\int_{\Sigma_0} \mathcal{B}|\psi_+|^2 \, dA + \frac{(n-1)\omega_{n-1}}{2}\left(E|\psi_\infty|^2 - \left\langle \psi_\infty, p_i e^i \tau_+ \psi_\infty \right\rangle \right),
\end{aligned} \tag{A.16}$$

其中

$$\mathcal{B} = \left\langle F(\vec{H}_-) - \vec{H}_+, \nu_+ \right\rangle - \sqrt{\left\langle F(\vec{H}_-) - \vec{H}_+, \tau_+ \right\rangle^2 + |\beta_+ - \beta_- - df|^2_\gamma}$$

并且 E 和 p 分别表示 *ADM*能量和动量。

证明。 这正是 [22] 中的命题 4.4，唯一不同之处是其中加入了 $\mathcal{S}_\pm$上的内边界项。这些项来自 $\mathcal{S}_\pm$上式 (A.9) 中的边界项，其余边界贡献则给出无穷远处的能量—动量，以及与 [22]中完全相同的折痕项。将这些边界项写作

$$\mathcal{I}_\pm = \int_{\mathcal{S}_\pm} \left\langle \psi_-, -\mathcal{D}^\pm\psi_- + \frac{1}{2}H\psi_- + \frac{1}{2}\left[(\mathrm{Tr}_{\mathcal{S}_\pm} K)n^\pm - K(n^\pm, e_A)e^A \right]\tau_-\psi_- \right\rangle dA, \tag{A.17}$$

其中，与（A.9）中的符号差异是因为单位法向量 $n^\pm$ to $\mathcal{S}_\pm$ 被取为指向 M_-，而 H 是相对于此定义的。注意，我们有$\epsilon_{\mathcal{S}_\pm}\psi_- = \pm\psi_-$，这是一个标准事实（例如参见 [3, 13]）

$$\epsilon_{\mathcal{S}_\pm}\mathcal{D}^\pm\psi_- = -\mathcal{D}^\pm(\epsilon_{\mathcal{S}_\pm}\psi_-),$$

因此，注意到 $\epsilon_{\mathcal{S}_\pm}$ 是自伴的，我们有

$$\begin{aligned}\langle\psi_-, \mathcal{D}^\pm\psi_-\rangle &= \pm\langle\psi_-, \mathcal{D}^\pm\epsilon_{\mathcal{S}_\pm}\psi_-\rangle = \mp\langle\psi_-, \epsilon_{\mathcal{S}_\pm}\mathcal{D}^\pm\psi_-\rangle \\ &= \mp\langle\epsilon_{\mathcal{S}_\pm}\psi_-, \mathcal{D}^\pm\psi_-\rangle = -\langle\psi_-, \mathcal{D}^\pm\psi_-\rangle,\end{aligned}$$

因此，(A.17) 中的第一项消失。同样的推理还表明

$$\left\langle\psi_-, K(n^\pm, e_A)e^A\tau_-\psi_-\right\rangle = 0,$$

因此我们得到

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_\pm &= \frac{1}{2}\int_{\mathcal{S}_\pm}\left\langle\psi_-, H\psi_- + \mathrm{Tr}_{\mathcal{S}_\pm}(K)\epsilon_{\mathcal{S}_\pm}\psi_-\right\rangle dA \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathcal{S}_\pm}\theta_\pm|\psi_-|^2 dA.\end{aligned}$$

□

由此可清楚看出，要使正质量定理成立， $\mathcal{S}_\pm$ 上的正确边界条件是 $\theta_\pm \le 0$；特别地，如果我们求解系统 (A.10)–(A.11)，那么定理 5.2 成立。也就是说，剩下需要证明的是该系统可以求解。

令 $\psi \in \mathcal{H}$，则 (A.16) 给出

$$\begin{aligned}&\int_{M'}\left(|\overline{\nabla}\psi|^2 - |D_W\psi|^2 + \frac{1}{2}\langle\psi, (\mu + J\tau)\psi\rangle\right)dV \\ &\quad\le \frac{1}{2}\int_{\mathcal{S}_+}\theta_+|\psi_-|^2\,dA + \frac{1}{2}\int_{\mathcal{S}_-}\theta_-|\psi_-|^2\,dA - \frac{1}{2}\int_{\Sigma_0}\mathcal{B}|\psi_+|^2\,dA. \qquad (A.18)\end{aligned}$$

假设满足定理 5.2 的假设，则有

$$\int_{M'}|\overline{\nabla}\psi|^2\,dV \le \int_{M'}|D_W\psi|^2\,dV, \qquad (A.19)$$

结合 (A.15) 可知 D_W 是单射。事实上，这也表明 $\mathcal{H}$ 上的内积等价于

$$\langle D_W(\cdot), D_W(\cdot)\rangle_{L^2(M')}, \qquad (A.20)$$

与 [22], 中完全相同，我们利用它证明 D_W 是满射。任取 $\eta \in L^2(M')$，则由于 $\psi \mapsto \langle\eta, D_W\psi\rangle_{L^2(M')}$ 是 $\mathcal{H}$上的有界线性泛函，Riesz 表示定理给出唯一的 $\omega \in \mathcal{H}$ 满足

$$\langle D_W\omega, D_W\psi\rangle_{L^2(M')} = \langle\eta, D_W\psi\rangle_{L^2(M')}. \qquad (A.21)$$

设定 $\varphi = D_W\omega - \eta$，我们看到 $D_W\varphi = 0$ 在弱意义下成立。我们必须证明 $\varphi \in \mathcal{H}$，且它确实是一个强解。这是 [22], 中的命题 5.1；同样，该命题不受加入内边界的影响。内部正则性当然不受影响，并可由标准椭圆理论推出；条件 (A.11) 是针对 D_W 的椭圆自伴边界条件（例如参见 [3]），因此 φ满足该条件，并且在 $\mathcal{S}_\pm$上正则。主要工作在于证明折痕处边界条件的椭圆性，但这一点不受影响。一旦我们证明加权 Poincaré 不等式 (A.15) 仍然成立，无穷远处的衰减也与原来相同。也就是说， $\varphi \in \mathcal{H}$ 且 $D_W\varphi = 0$，因此由单射性可知 $D_W\omega = \eta$，于是我们得出结论： D_W 是满射，因而是一个同构 $D_W:\ \widehat{\mathcal{H}} \to L^2(M')$。

为完成定理 5.2 的证明，我们照常寻找满足$\widehat{\psi} - \psi_0 \in \mathcal{H}$ 的 ψ，使其在指定端 M_1上满足 $\psi_0 = \psi_\infty$，在 M_1的某个邻域之外为零，并满足 $D_W\psi = 0$。由于 D_W 是一个同构，我们可以找到满足 $D_W\omega = -D_W\psi_0$的 $\omega \in \mathcal{H}$，因此 $\psi = \psi_0 + \omega$就是所需的旋量。将其代入命题 A.2，立即得到

$$E|\psi_\infty|^2 \geq \langle \psi_\infty, p_i e^i \tau_+ \psi_\infty \rangle \tag{A.22}$$

只要主导能量条件和折痕边界条件 (A.3) 成立即可。然后，采用通常的选择，使 ψ_∞ 满足 $p_i e^i \tau_+ \psi_\infty = |p|\psi_\infty$，便得到

$$E \geq |p|. \tag{A.23}$$

References

[1] B. Allen、E. Bryden、D. Kazaras 和 M. Khuri。《渐近平坦和渐近双曲面情形下带非最优常数的时空 Penrose 不等式的证明》。*arXiv preprint arXiv:2504.10641*，2025。[2] C. B¨ar、S. Brendle、T.-K. A. Chow 和 B. Hanke。《满足主导能量条件的初始数据集的刚性结果》。*J. Reine Angew. Math.*，836：27–69，2026。[3] R. Bartnik 和 P. Chru´sciel。《狄拉克型方程的边值问题》。*J. ReineAngew. Math.*，579：13–73，2005。[4] H. Bray、T. Dolmen、M. Khuri 和 D. Schmidt。《极大参数化初始数据集的 Penrose 猜想证明》。*arXiv preprint arXiv:2610.20559*，2026。[5] H. L. Bray。《利用正质量定理证明黎曼 Penrose 不等式》。*J.Differential Geom.*，59(2)：177–267，2001。[6] H. L. Bray 和 P. T. Chru´sciel。《Penrose 不等式》。载于 P. T. Chru´sciel 和 H. Friedrich 编，*The Einstein Equations and the Large Scale Behavior of Gravitational Fields*，第 39–70 页。Birkh¨auser，巴塞尔，2004。[7] S. Brendle 和 Y. Wang。《任意维数下正质量定理的维数下降方案》。*arXiv preprint arXiv:2604.08473*，2026。[8] S. Brendle 和 Y. Wang。《任意维数下的时空正能量定理》。*arXiv preprint arXiv:2604.18561*，2026。[9] A. J. Cabrera Pacheco、C. Cederbaum、S. McCormick 和 P. Miao。《常平均曲率 Bartnik 数据的渐近平坦延拓》。*Classical Quantum Gravity*，34(10)：105001，2017。[10] J. Corvino。《标量曲率变形与爱因斯坦约束方程的拼接构造》。*Comm. Math. Phys.*，214(1)：137–189，2000。[11] J. Corvino 和 L.-H. Huang。《满足主导能量条件的初始数据集的局部化变形》。*Calc. Var. Partial Differential Equations*，59(1)：42，2020。[12] G. W. Gibbons、S. W. Hawking、G. T. Horowitz 和 M. J. Perry。《黑洞的正质量定理》。*Comm. Math. Phys.*，88(3)：295–308，1983。[13] J. Gl¨ockle。《通过狄拉克–维滕算子得到的初始数据刚性》。*arXiv preprint arXiv:2304.02331*，2023。[14] M. Gromov。《带边界流形的标量曲率：自然问题与人为构造》。*arXiv preprint arXiv:1811.04311*，2018。[15] M. Gromov 和 H. B. Lawson。《完备黎曼流形上的正标量曲率与狄拉克算子》。*Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*，58：83–196，1983。[16] M. Herzlich。《黎曼渐近平坦流形质量的类 Penrose 不等式》。*Comm. Math. Phys.*，188(1)：121–133，1997。[17] S. Hirsch 和 P. Miao。《带边界流形的正质量定理》。*Pacific J. Math.*，306(1)：185–201，2020。[18] L.-H. Huang 和 D. A. Lee。《Bartnik 质量极小化初始数据集与主导能量标量的可改进性》。*J. Differential Geom.*，126(2)：741–800，2024。[19] H. C. Jang 和 A. F. Wood。《通过磨光得到的带角时空正质量定理》。*arXiv preprint arXiv:2607.19320*，2026。

[20] J. L. Jauregui。《非负标量曲率的填充、静态度量与拟局部质量》。*Pacific J. Math.*，261(2)：417–444，2013。[21] J. L. Jauregui。《Bartnik 边界条件的光滑化及关于 Bartnik 拟局部质量的其他结果》。 *J. Geom. Phys.*，136：228–243，2019。[22] D. Kazaras、M. Khuri 和 M. Lin。《带折痕初始数据的正质量定理》。 *arXivpreprint arXiv:2508.17585*，2025。[23] D. A. Lee、M. Lesourd 和 R. Unger。《带边界初始数据集的稠密性与正质量定理》。 *Comm. Math. Phys.*，395(2)：643–677，2022。[24] M. Lin。
Symmetrizing Black Hole Horizons and a Positive Mass Theorem for Spin CreasedInitial Data。博士论文，杜克大学，2024。[25] C. Mantoulidis 和 R. Schoen。《视界的 Bartnik 质量》。 *Classical QuantumGravity*，32(20)：205002，2015。[26] S. McCormick。《Bartnik 延拓的拼接、Bartnik 质量的连续性与定义的等价性》。 *Pacific J. Math.*，304(2)：629–653，2020。[27] S. McCormick。《具有标量曲率下界的填充及其在正质量定理中的应用》。 *Ann. Global Anal. Geom.*，65：26，2024。[28] S. McCormick 和 P. Miao。《八维以下的类 Penrose 不等式》。 *Int. Math. Res. Not. IMRN*，2019(7)：2069–2084，2019。[29] S. McCormick 和 M. Wolff。《时空 Bartnik 数据的延拓及非时间对称情形下 Bartnik 质量的估计》。 *arXiv preprint arXiv:2602.13096*，2026。[30] P. Miao。《沿超曲面具有角点的流形上的正质量定理》。 *Adv.Theor. Math. Phys.*，6(6)：1163–1182，2002。[31] OpenAI。《共形流与具有极小前沿的黎曼 Penrose 不等式》。 *OpenAI Math Release preprint*，*github.com/openai/math*，2026。[32] OpenAI。《时空 Penrose 不等式与包围面积》。 *OpenAI Math Release preprint*，*github.com/openai/math*，2026。[33] S. Raulot。《DEC 旋量填充的不存在性》。 *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*，360：1049–1054，2022。[34] S. Raulot。《DEC 旋量填充的狄拉克特征值与时空平均曲率估计》。 *arXiv preprint arXiv:2609.08720*，2026。[35] R. Schoen 和 S.-T. Yau。《关于广义相对论中正质量猜想的证明》。*Comm. Math. Phys.*，65(1)：45–76，1979。[36]R. Schoen 和 S.-T. Yau。《正质量定理的证明。II》。 *Comm. Math. Phys.*，79(2)：231–260，1981。[37] Y. Shi 和 L.-F. Tam。《非负标量曲率紧流形的正质量定理与边界行为》。 *J. Differential Geom.*，62(1)：79–125，2002。[38]T.-Y. Tsang。《关于带角的时空正质量定理》。 *arXiv preprintarXiv:2109.11070*，2022。[39] E. Witten。《正能量定理的新证明》。 *Comm. Math. Phys.*，80(3)：381–402，1981。

Matematiska institutionen, Uppsala universitet, 751 04 Uppsala, Sweden
Email address: ahmed.ellithy@math.uu.se

Institutionen för teknikvetenskap och matematik, Luleå tekniska universitet, 97187 Luleå, Sweden*Email address*: vishnu.kakkat@associated.ltu.se

Institutionen för teknikvetenskap och matematik, Luleå tekniska universitet, 97187 Luleå, Sweden*Email address*: stephen.mccormick@ltu.se