arXiv:2611.33077v1 [math.SG] 24 Nov 2026

辛对与接触对的四元数几何

Gianluca Bande 和 Beniamino Cappelletti-Montano

摘要。我们引入辛对、接触–辛对和接触对的四元数类比。超辛对由三个辛对组成，其和构成一个正四元数三元组；而接触类比则通过单重或双重辛化来定义。我们证明，诱导复结构的径向不变性等价于特征分布重合，并由此得到局部乘积分解。在自然的归一化条件下，超接触–辛对在局部是一个 3-Sasakian 流形与一个超凯勒流形的乘积，并诱导出典范的 3-拟 Sasakian 结构；而超接触对在局部是两个 3-Sasakian 流形的乘积。我们构造了紧例子，其中这些局部分解并非全局分解。最后，紧致的规范化超接触对具有有限基本群，并且是紧 3-Sasakian 流形乘积的有限商；与之相反，规范化超接触–辛对的基本群可能是无限的。

谨以此文纪念导师和朋友 *David E. Blair*。

1. 引言

辛对是由秩为常数的闭2-形式组成的对，其核叶状结构彼此互补；每个形式在另一个形式的核的叶上限制为辛形式 [5]。相关结构还包括接触–辛对 [1], ，由一个1-形式和一个闭2-形式组成；以及接触对 [2, 3], ，由两个1-形式组成。这些结构通过辛化相互关联：若 $(\alpha,\ \omega)$ 是 M 上的接触–辛对，则 $(d(r^2\alpha/2)\ \omega)$ 是 $M\times\mathbb{R}_{>0}$ 上的辛对；若 $(\alpha,\ \beta)$ 是 M 上的接触对，则 $(d(r^2\alpha/2)\ d(s^2\beta/2))$ 是 $M\times\mathbb{R}^2_{>0}$ 上的辛对（引理 4.1 和 5.1）。

本文研究这些结构的四元数版本。我们的出发点是通过辛形式三元组描述超凯勒结构：根据 Hitchin [14], 的一个结果，在每一点构成正四元数三元组的三个闭2-形式决定了一个超凯勒结构，其复结构和度量可由这些微分形式通过代数方式重构（引理 2.1 和 2.3）。相应地，超辛对是指由三个辛对（$\omega_i,\ \eta_i$）组成的三元组，并且其和 $\omega_i+\eta_i$ 构成一个正四元数三元组（定义 3.1）。

超接触–辛对和超接触对的定义要求上述提升后的对分别在 $M\times\mathbb{R}_{>0}$ 和 $M\times\mathbb{R}^2_{>0}$上构成超辛对（定义4.2和5.2）。带有超接触–辛对的流形，其维数模 4 同余于 3；而带有超接触对的流形，其维数模 4 同余于 2。在这两种情况下，切丛分别通过添加秩为一或二的平凡丛进行稳定化后，都带有四元数厄米结构（命题4.3和5.4）。

超辛对的三个辛对不一定具有共同的特征分布（例3.6）。我们的主要工具定理 2.5讨论了一个正四元数三元组 $\Omega_i=A_i+B_i$，其中微分形式 A_i 和 B_i 是闭的，并且具有互补核，

2020 数学主题分类。53D10, 53C25。关键词。辛；接触；接触辛；超凯勒；3-Sasakian；3-准 Sasakian。此项工作部分由撒丁岛基金会的 ProBiki 项目资助。第一作者是意大利国家研究组 G.N.S.A.G.A.（INdAM）的成员。第二作者感谢 GeoStat 实验室的支持。

以及一个满足 $\mathcal{L}_R A_i = 2A_i$ 和 $\mathcal{L}_R B_i = 0$的向量场 R。它用沿 ker A_i投影到 ker B_i的投影来表示 $\mathcal{L}_R I_i$，并表明，重构的复结构在 R 下保持不变，当且仅当这些核不依赖于 i。在这种情况下，该流形局部上是两个超凯勒流形的黎曼乘积。定理 2.5中不涉及 R 的部分（注 2.6）给出了关于超辛对的定理 3.4。将其应用于辛化，并令 $R = r\partial_r$，可知超接触–辛对或超接触对是径向不变的，也就是说，其辛化的复结构在 R下保持不变，当且仅当三个辛对的特征分布重合（定理 4.4 和 5.6）。在这种情况下，M 局部上分解为一个乘积，而微分形式则从各因子拉回。

我们的主要局部结果涉及归一化超对，即径向不变的超对，其提升度量满足 $\widehat{g}(R, \cdot) = r\,dr$；此外，在接触对的情形下，还满足 $\widehat{g}(S, \cdot) = s\,ds$，其中有 $S = s\partial_s$。结合局部分裂与超凯勒锥的刻画（引理 4.5）——该刻画依赖于 Kashiwada 定理 [15], ——我们证明，归一化超接触–辛对连同其典范度量，在局部上是一个 3-Sasakian 流形与一个超凯勒流形的黎曼乘积（定理 4.6）。特别地，M 带有一个典范三拟Sasakian结构，其基本形式为 $\frac{1}{2}d\alpha_i + \omega_i$。反之，每个 3-拟 Sasakian 流形都可导出一个超接触–辛对（注 4.7），这与 [10] 和 [11]中对 3-拟 Sasakian 流形的局部描述相一致。类似地，归一化超接触对在局部上是两个 3-Sasakian 流形的黎曼乘积（定理 5.7），而命题 5.8 描述了其在 M上诱导的结构张量。

这些局部乘积分解未必是全局的。利用叶状丛 [8, 9], ，我们构造了带有归一化超接触–辛对的紧流形（命题 4.8 和例 4.9、4.10），以及带有正规化超接触对的紧流形（命题 5.9 和例 5.10），其典范分裂并非全局乘积。这两种情形表现不同。对于正规化超接触对，两个局部因子的 Ricci 曲率均为正；因此，在紧流形上，基本群是有限群，且该流形是两个紧单连通 3-Sasakian 流形乘积的有限商（命题 5.11）。与此相反，例 4.10 给出了带有归一化超接触–辛对的紧流形，其基本群为 $\mathbb{Z}^{4m}$，且特征叶并不紧致（注 5.12）。

约定。所有流形、微分形式和分布均为光滑的。外导数定义为

$$d\alpha(X,Y) = X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) - \alpha([X,Y]).$$

它与内积和李导数的关系为

$$\mathcal{L}_X = d\iota_X + \iota_X d.$$

对于一个 2-形式 τ，记作 $\tau^\flat X = \iota_X \tau$；当 τ 非退化时，$\tau^\sharp = (\tau^\flat)^{-1}$。微分形式的幂表示楔积幂。指标三元组 (i, j, k) 若为 (1，2，3) 的偶置换，则称为循环的。对于厄米结构，我们使用 $\Omega_i(X, Y) = g(X, I_i Y)$。在 Sasakian流形中，我们有 $d\alpha = 2g(\cdot\ \phi\cdot)$ 和

$$(\nabla_X \phi)Y = g(X,Y)\xi - \alpha(Y)X. \tag{1.1}$$

2. 初步结果

我们回顾一些将在后续章节中用到的初步构造。

引理 2.1。设 V 为有限维实向量空间，设 $V^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{R})$ 为其对偶空间，并设 $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3 \in \Lambda^2 V^*$ 为非退化交替双线性形式。对于每个 $i \in \{1、2、3\}$，记由

$$b_i = \Omega_i^\flat : V \longrightarrow V^*, \qquad v \longmapsto \iota_v \Omega_i = \Omega_i(v, \cdot),$$

由 Ω_i 诱导的同构。假设对于所有互不相同的 i、$j \in$ {1、2、3}，

$$b_i^{-1} \circ b_j = -b_j^{-1} \circ b_i. \tag{2.1}$$

对于 (i, j, k) 的每个循环置换，其中 (1、2、3)，定义

$$I_i := -b_j^{-1} \circ b_k : V \longrightarrow V, \qquad G_i := b_i \circ I_i : V \longrightarrow V^*. \tag{2.2}$$

于是 $G_1 = G_2 = G_3$。将它们的公共值记为 $G : V \longrightarrow V^*$，并定义

$$g : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad g(v, w) := \big(G(v)\big)(w). \tag{2.3}$$

双线性形式 g 是对称且非退化的。此外，端*omorphism* I_1、I_2、I_3 满足

$$I_i^2 = -\operatorname{Id}_V, \qquad I_i \circ I_j = I_k = -I_j \circ I_i$$

对于每个循环置换 (i, j, k)，且对于所有 v、$w \in V$ 和 $i \in$ {1、2、3}，$g(I_i v, I_i w) = g(v, w)$。最后，对于所有 v、$w \in V$ 和 $i \in$ {1、2、3}，

$$\Omega_i(v, w) = g(v, I_i w), \qquad g(v, w) = -\Omega_i(v, I_i w). \tag{2.4}$$

证明。 固定 (1,2, 3) 的一个循环置换 (i, j, k)。利用 (2.1)，得到

$$I_i^2 = (b_j^{-1} \circ b_k) \circ (b_j^{-1} \circ b_k) = -(b_j^{-1} \circ b_k) \circ (b_k^{-1} \circ b_j) = -\operatorname{Id}_V .$$

此外，

$$I_i \circ I_j = b_j^{-1} \circ b_k \circ b_k^{-1} \circ b_i = b_j^{-1} \circ b_i = -b_i^{-1} \circ b_j = I_k.$$

将此恒等式作循环置换，也可得到 $I_j \circ I_i = I_j \circ (I_j \circ I_k) = -I_k$。因此，$I_1, I_2, I_3$ 满足四元数恒等式。将 (2.1) 左乘 b_i、右乘 b_i^{-1}，得到$b_i \circ b_j^{-1} = -b_j \circ b_i^{-1}$。于是，

$$G_i = -b_i \circ b_j^{-1} \circ b_k = b_j \circ b_i^{-1} \circ b_k = -b_j \circ b_k^{-1} \circ b_i = G_j.$$

设 $G := G_1 = G_2 = G_3$。由于 $G = b_i \circ I_i$ 是若干同构的复合，关联的双线性形式 $g(v, w) = \big(G(v)\big)(w) = \Omega_i(I_i v, w)$ 是非退化的。接下来证明 g 是对称的。根据定义和 (2.1)，可得

$$b_i \circ I_j = b_k, \qquad b_i \circ I_k = -b_j.$$

由于 Ω_j 和 Ω_k 是交错的，这些恒等式给出：对所有 $a \in \{j, k\} v, w \in V$，$\Omega_i(I_a v, w) = \Omega_i(v, I_a w)$。因此

$$g(v, w) = -\Omega_i(v, I_i w) = \Omega_i(I_i w, v) = g(w, v),$$

这就证明了对称性以及（2.4）中的第二个恒等式。在该恒等式中将 w 替换为 $I_i w$，可得

$$g(v, I_i w) = -\Omega_i(v, I_i^2 w) = \Omega_i(v, w),$$

这就是（2.4）中的第一个恒等式。最后，

$$g(I_i v, I_i w) = \Omega_i(I_i^2 v, I_i w) = -\Omega_i(v, I_i w) = g(v, w).$$

□

由满足（2.1）的非退化交替双线性形式 $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ 按（2.3）定义的度量 g，称为重构度量。

定义 2.2。 若三元组 $(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$ 满足引理 2.1，且重构度量 g 为正定，则称其为正四元数三元组。

对于流形上的微分形式，上述条件须在每一点都成立。以下结果是用我们的语言重新表述 Hitchin 的一个著名结果（[14]）。

引理 2.3。 设 M 是一个光滑实流形，且 $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3 \in \Omega^2(M)$ 是光滑闭2形式，使得在每一点 $p \in M$，三元组 $((\Omega_1)_p, (\Omega_2)_p, (\Omega_3)_p)$ 都是 T_pM 上的正四元数三元组。令 $I_1, I_2, I_3 : TM \longrightarrow TM$ 和 g 由逐点应用引理 *2.1* 得到，即

$$I_i = -(\Omega_j^\flat)^{-1} \circ \Omega_k^\flat$$

对于 (i, j, k) 的每个循环置换 (1、2、3)，并且

$$g_p(v, w) = -(\Omega_i)_p(v, (I_i)_p w), \qquad v, w \in T_pM,$$

i且不依赖于 $i \in \{1、2、3\}$。那么 (g, I_1, I_2, I_3) 是 M上的超凯勒结构。

注 2.4。 在文献中，端omorphism I_j 称为递归算子。在[4] 中已证明，若递归算子的平方等于负恒等映射，则它实际上自动可积。

定理 2.5。 设$\Omega_i = A_i + B_i$ 是流形 M上的正四元数三元组。假设每个 A_i, B_i 均为闭的、具有常秩，并且满足

$$\ker A_i \oplus \ker B_i = TM. \tag{2.5}$$

设 R 为一个向量场，使得

$$\mathcal{L}_R A_i = 2A_i, \qquad \mathcal{L}_R B_i = 0. \tag{2.6}$$

记 I_i, g 为根据引理 *2.3* 重构的结构，并令 $\Pi_i = (\Omega_i^\flat)^{-1} A_i^\flat$。那么 Π_i 是沿着 核 A_i 到 核 B_i 的投影算子，并且

$$\mathcal{L}_R I_i = 2(I_i \Pi_k - \Pi_j I_i) \tag{2.7}$$

对任意循环置换 (i, j, k)，结论均成立。此外，下列条件等价： t:

(i) 对 $i = 1$，2、3，有 $L_R I_i = 0$；(ii) $\Pi_1 = \Pi_2 = \Pi_3$；(iii) 核 A_i 和 核 B_i 均与 i 无关。

若这些条件成立，则公共投影算子 Π 是 g-正交的，与所有 I_i 交换，且为平行的。其像和核的维数均为 4 的倍数。局部地， M 是两个超凯勒流形的黎曼乘积，而 A_i、 B_i 分别是它们的基本形式。

证明。 我们先证明关于投影算子的断言。固定 $i \in \{1, 2, 3\}$ 和 $p \in M$。我们在向量空间 $V = T_pM$ 上进行讨论。为简便起见，记 $A = (A_i)_p$、 $B = (B_i)_p$、$\Omega = (\Omega_i)_p = A + B$，以及

$$P = (\Pi_i)_p = (\Omega^\flat)^{-1} \circ A^\flat : V \longrightarrow V.$$

由 (2.5)，每个 $v \in V$ 都有唯一分解 $v = v_A + v_B$，其中 $v_A \in \ker A$ 且 $v_B \in \ker B$。对于每个 $w \in V$，根据 P 的定义，有

$$\Omega(Pv, w) = A(v, w) = A(v_B, w) = A(v_B, w) + B(v_B, w) = \Omega(v_B, w),$$

这里用到了 $v_A \in \ker A$ 和 $v_B \in \ker B$。因此，对于每个 $w \in V$，$\Omega(Pv - v_B, w) = 0$。由于 Ω 非退化，可得 $P(v_A + v_B) = v_B$。因此， P 正是沿着 $\ker A$ 投影到 $\ker B$ 上的投影。特别地，$P|_{\ker A} = 0$ 和 $P|_{\ker B} = \mathrm{Id}_{\ker B}$，因此

$$P^2 = P, \qquad \ker P = \ker A, \qquad \operatorname{im} P = \ker B.$$

由于 p 是任意的，这就证明了 Π_i 是沿着 $\ker A_i$ 投影到 $\ker B_i$ 上的光滑丛投影。特别地，

$$\Pi_i^2 = \Pi_i, \qquad \ker \Pi_i = \ker A_i, \qquad \operatorname{im} \Pi_i = \ker B_i.$$

这些恒等式还证明了(ii)与(iii)的等价性。接下来，对 $I_i = -(\Omega_j^\flat)^{-1}\Omega_k^\flat$ 求导，并利用$\mathcal{L}_R\Omega_a = 2A_a$ 可得

$$\mathcal{L}_R I_i = 2(\Omega_j^\flat)^{-1} A_j^\flat (\Omega_j^\flat)^{-1} \Omega_k^\flat - 2(\Omega_j^\flat)^{-1} A_k^\flat = -2\Pi_j I_i + 2 I_i \Pi_k,$$

这就证明了(2.7)。现在，假设(i)，并令$K = \frac{1}{2}\,\mathrm{L}_R g$为一个对称双线性形式。对 $g(I_aX, I_aY) = g(X,Y)$求导可知， K 在每个 I_a下均保持不变。因此，由 $K(X,Y) = g(HX,Y)$定义的端omorphism H与每个 I_a交换。现在对$\Omega_i(X,Y) = g(X, I_iY)$求导，得到 $A_i(X,Y) = K(X, I_iY) = \Omega_i(HX,Y)$。因此，对每个 i都有 $\Pi_i = H$，从而证明了(ii)。反过来，假设(iii)，并令$\mathrm{E} := \ker B_i$，$\mathrm{F} := \ker A_i$；根据假设，它们与 i无关。因此， $TM = \mathrm{E} \oplus \mathrm{F}$。记 Π为沿F投影到E上的投影。根据证明的第一部分， $\Pi_1 = \Pi_2 = \Pi_3 = \Pi$。我们首先逐点考察这一分解。固定 $p \in M$ 并记

$$V := T_pM, \qquad E := \mathcal{E}_p, \qquad F := \mathcal{F}_p, \qquad \omega_i := (\Omega_i)_p.$$

对于每个 $v \in E$和 $w \in F$，我们有 $\omega_i(v,w) = (A_i)_p(v,w) + (B_i)_p(v,w) = 0$，因为$w \in \ker(A_i)_p$且 $v \in \ker(B_i)_p$。因此，若 $\omega_i^E := \omega_i|_{E\times E}$，且 $\omega_i^F := \omega_i|_{F\times F}$，则对于所有 $v_E, w_E \in E$和 v_F，$w_F \in F$，都有 $\omega_i(v_E + v_F, w_E + w_F) = \omega_i^E(v_E, w_E) + \omega_i^F(v_F, w_F)$。两个限制形式都是非退化的。事实上，若 $v \in E$ 满足对每个 $w \in E$都有 $\omega_i^E(v,w) = 0$，那么，由于混合项为零，对每个 $w \in F$也有 $\omega_i(v,w) = 0$。因此， $\omega_i(v,\cdot) = 0$在 V上，而 ω_i 的非退化性蕴含 $v = 0$。同样的论证也适用于 ω_i^F。分解$V = E \oplus F$ 诱导出如下识别

$$V^* \longrightarrow E^* \oplus F^*, \qquad \lambda \longmapsto (\lambda|_E, \lambda|_F).$$

这个识别只用到了直和分解，而没有用到度量。相对于这些分解，令

$$b_i^E := (\omega_i^E)^\flat : E \longrightarrow E^*, \qquad b_i^F := (\omega_i^F)^\flat : F \longrightarrow F^*.$$

由前面的恒等式可得

$$\omega_i^\flat = \begin{pmatrix} b_i^E & 0 \\ 0 & b_i^F \end{pmatrix}, \qquad (\omega_i^\flat)^{-1} = \begin{pmatrix} (b_i^E)^{-1} & 0 \\ 0 & (b_i^F)^{-1} \end{pmatrix}.$$

因此，对于每个循环置换（i， j， k），

$$(I_i)_p = -(\omega_j^\flat)^{-1} \circ \omega_k^\flat = \begin{pmatrix} -(b_j^E)^{-1} \circ b_k^E & 0 \\ 0 & -(b_j^F)^{-1} \circ b_k^F \end{pmatrix}. \tag{2.8}$$

特别地，（I_i）$_p$（E）$\subseteq E$，且（I_i）$_p$（F）$\subseteq F$。由于 p 是任意的，每个 I_i 都保持两个分布$\mathcal{E}$和$\mathcal{F}$。此外，（Π）$_p$在 E 上作用为恒等映射，并在 F 上为零。因此，对于 $v = v_E + v_F$，

$$(I_i)_p(\Pi)_p v = (I_i)_p v_E = (\Pi)_p(I_i)_p v.$$

因此 $I_i\Pi = \Pi I_i$。将 $\Pi_j = \Pi_k = \Pi$ 代入（2.7），得到 $\mathcal{L}_R I_i = 2$（$I_i\Pi - \Pi I_i$）$= 0$。这证明了（i）。接下来验证度量相关的断言。对于 $v \in E$ 和 $w \in F$，我们有g_p（v， w）$= -\omega_i(v,$（I_i）$_p w) = 0$，因为（I_i）$_p w \in F$且 ω_i（E， F）$= 0$。因此$\mathcal{E}$与$\mathcal{F}$关于 g 正交。由于 Π 在 $\mathcal{E}$ 上是恒等映射、在$\mathcal{F}$上为零，因此它是投影到$\mathcal{E}$上的 g-正交投影。更明确地，设

$$I_i^E := (I_i)_p|_E, \qquad I_i^F := (I_i)_p|_F.$$

块公式 (2.8) 表明，这些正是分别由受限三元组 $(\omega_1^E,\ \omega_2^E,\ \omega_3^E)$ 和 $(\omega_1^F,\ \omega_2^F,\ \omega_3^F)$ 重构得到的端omorphism。相应重构的双线性形式满足

$$-\omega_i^E(v, I_i^E w) = g_p(v,w) \qquad \text{for } v,w \in E,$$

and

$$-\omega_i^F(v, I_i^F w) = g_p(v,w) \qquad \text{for } v,w \in F.$$

因此，在两个块上重构出的度量恰好是 $g_p|_{E\times E}$和 $g_p|_{F\times F}$。特别地，它们是正定的。最后，I_i 的四元数恒等式在 E和 F上均成立，因为这些子空间在每个 $(I_i)_p$作用下都保持不变。因此，每个块都是四元数厄米向量空间。所以 $\dim E \equiv \dim F \equiv 0 \pmod 4$。接下来

证明局部乘积断言以及 Π的平行性。由于微分形式是闭的且具有常秩，它们的核分布 $\mathcal{E}$ 和 $\mathcal{F}$ 是可积的。它们互补，因此叶局部构成乘积。对于 $X \in \Gamma(\mathcal{E})$和 $Y \in \Gamma(\mathcal{F})$，嘉当公式给出

$$\mathcal{L}_Y A_i = d(\iota_Y A_i) + \iota_Y dA_i = 0, \qquad \mathcal{L}_X B_i = d(\iota_X B_i) + \iota_X dB_i = 0.$$

结合 $\iota_Y A_i = 0$ 和 $\iota_X B_i = 0$，这些恒等式表明， A_i 是从$\mathcal{E}$因子拉回的，而 B_i 则是从$\mathcal{F}$因子拉回的。因此，上文所建立的按块重构为每个因子给出了一个度量，而 g 是它们的黎曼乘积。受限三元组是正且闭的，因此根据引理 2.3，这两个因子都是超凯勒的。乘积度量的 Levi-Civita 联络保持两个切空间子丛不变。由于 Π 在一个子丛上充当恒等映射、在另一个子丛上充当零映射，所以 $\nabla\Pi = 0$。□

注 2.6。 注意，定理 2.5 中关于投影算子、(ii) 与 (iii) 的等价性，以及在这两个条件之一成立时所得几何结论的表述，在不假设 R 存在的情况下仍然有效。附加假设 (2.6) 仅在证明 (2.7) 以及证明其与 (i) 等价时才是必要的。

3. 超辛对

回顾一下， $2p + 2q$维流形上的辛对$(\omega,\ \eta)$（类型为 $(p,\ q)$）由两个闭2-形式组成，并满足

$$\omega^p \wedge \eta^q \neq 0, \qquad \omega^{p+1} = 0, \qquad \eta^{q+1} = 0. \tag{3.1}$$

于是， ω 和 η 分别具有常秩 $2p$ 和 $2q$，并且

$$TM = \ker\eta \oplus \ker\omega.$$

每个微分形式在另一个微分形式的核叶状结构的叶上限制为辛形式。对于每个辛对，微分形式 $\Omega = \omega + \eta$ 是辛的。事实上，它是闭的，并且

$$(\omega + \eta)^{p+q} = \binom{p+q}{p} \omega^p \wedge \eta^q \neq 0. \tag{3.2}$$

更多关于辛对的细节请参见 [5] 。

定义 3.1。 M 上的超辛对是由三个辛对 $(\omega_1,\ \eta_1)$、$(\omega_2,\ \eta_2)$、$(\omega_3,\ \eta_3)$组成的三元组，满足 2-形式 $\Omega_i := \omega_i + \eta_i$, $i \in \{1,\ 2、\ 3\}$在 M上构成一个正四元数三元组。根据引理 2.1，由 Ω_i重构得到的复结构和度量为

$$I_i = -(\Omega_j^\flat)^{-1} \circ \Omega_k^\flat, \qquad g(X,Y) = -\Omega_i(X, I_i Y), \tag{3.3}$$

对于循环的（$i,\ j,\ k$）。我们称 g为超辛对的典范度量 。

命题 3.2. 超辛对确定一个超凯勒结构(g, I_1, I_2, I_3)于 M上。特别地，维数 $M \equiv 0$ (模 4)。

Pr证明。 这是引理 2.1 和 2.3 的直接应用，因为 $d\Omega_i = d\omega_i + d\eta_i = 0$. □

注 3.3. 该定义所指定的不仅仅是一个超凯勒结构：它还包括其基本形式分解为辛对的三种方式。一般而言，这三个辛对不必具有共同的特征分布。

对于每个 $i \in \{1,\ 2,\ 3\}$，令$\mathcal{E}_i :=$ 核 η_i，$\mathcal{F}_i :=$ 核 ω_i, $\Pi_i := (\Omega_i^\flat)^{-1} \circ \omega_i^\flat$。定理 2.5 证明开头的逐点计算表明， Π_i 是沿着$\mathcal{F}_i$ 到$\mathcal{E}_i$ 的投影（注意，该计算仅利用两个核的互补性）。

定理 3.4. 设$(\omega_i, \eta_i)_{i=1,2,3}$ 为一个超辛对。以下条件等价：

(i)这三个辛对具有共同的特征分布，即

$$\ker\eta_1 = \ker\eta_2 = \ker\eta_3 = \mathcal{E}, \qquad \ker\omega_1 = \ker\omega_2 = \ker\omega_3 = \mathcal{F}. \tag{3.4}$$

(ii) 这些投影算子满足 $\Pi_1 = \Pi_2 = \Pi_3$。

如果这些 条件成立，则这三对具有相同的类型（$2l, 2m$），其中 $l, m \geq 0$满足

$$TM = \mathcal{E} \oplus \mathcal{F}, \qquad \operatorname{rank} \mathcal{E} = 4l, \qquad \operatorname{rank} \mathcal{F} = 4m.$$

公共投影算子 Π 是 g-正交的，与每个 I_i可交换，并且相对于 g的 *Levi-Civita* 联络是平行的。局部上存在一个黎曼乘积

$$(M, g) \cong (P^{4l}, g_P) \times (Q^{4m}, g_Q) \tag{3.5}$$

由超凯勒流形组成，使得 $\omega_i = \mathrm{pr}_P^* \Omega_i^P$且 $\eta_i = \mathrm{pr}_Q^* \Omega_i^Q$ ，其中Ω_i^P和Ω_i^Q 分别是相应的基本形式。反过来，具有上述局部描述的全局定义微分形式确定一个具有公共特征分布的超辛对。

证明。 设(p_i, q_i)是辛对(ω_i, η_i)的类型，并记 $\Omega_i = \omega_i + \eta_i$, $\Pi_i =$$(\Omega_i^\flat)^{-1} \circ \omega_i^\flat$。根据定义，微分形式 ω_i, η_i是闭的，具有常秩，并满足

$$TM = \ker \eta_i \oplus \ker \omega_i.$$

此外，$(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$ 是一个正四元数三元组。我们应用定理 2.5 中不要求存在 R 的部分（见注 2.6），取 $A_i = \omega_i$ 和 $B_i = \eta_i$。由此可得， Π_i 是沿着 $\ker \omega_i$ 投影到 $\ker \eta_i$ 上的投影算子。特别地，

$$\Pi_i^2 = \Pi_i, \qquad \operatorname{im} \Pi_i = \ker \eta_i, \qquad \ker \Pi_i = \ker \omega_i. \tag{3.6}$$

因此，三个投影算子相等，等价于它们各自的像和核相等，这就证明了 (i) 和 (ii) 的等价性。假设这些等价条件成立，并令

$$\mathcal{E} = \ker \eta_i, \qquad \mathcal{F} = \ker \omega_i, \qquad \Pi = \Pi_1 = \Pi_2 = \Pi_3.$$

根据定理 2.5，我们有

$$\mathcal{E} \perp_g \mathcal{F}, \qquad I_i \Pi = \Pi I_i, \qquad \nabla \Pi = 0,$$

而 $\mathcal{E}$ 和 $\mathcal{F}$ 的秩都能被 4 整除。令 $\operatorname{rank}\mathcal{E} = 4l$ 和 $\operatorname{rank}\mathcal{F} = 4m$，其中 $l, m \geq 0$ 为某些整数。由于第 i 个辛对的类型为 (p_i, q_i)，我们有 $\operatorname{rank}\ \omega_i = 2p_i$ 和 $\operatorname{rank}\ \eta_i = 2q_i$。利用它们的核以及互补分解 $TM = \mathcal{E} \oplus \mathcal{F}$，可得

$$2p_i = \dim M - \operatorname{rank} \mathcal{F} = 4l, \qquad 2q_i = \dim M - \operatorname{rank} \mathcal{E} = 4m.$$

因此，这三对的类型均为（$2l, 2m$）。最后，由定理 2.5 可知，在局部，

$$(M, g) \cong (P^{4l}, g_P) \times (Q^{4m}, g_Q)$$

两个因子均为超凯勒，并且 $\omega_i = \mathrm{pr}_P^* \Omega_i^P$, $\eta_i = \mathrm{pr}_Q^* \Omega_i^Q$。反过来，假设全局定义的微分形式具有这样的局部乘积描述。微分形式 ω_i 和 η_i 是闭的，且满足 $\omega_i^{2l+1} = 0$, $\eta_i^{2m+1} = 0$，而

$$\omega_i^{2l} \wedge \eta_i^{2m} = \mathrm{pr}_P^*\big((\Omega_i^P)^{2l}\big) \wedge \mathrm{pr}_Q^*\big((\Omega_i^Q)^{2m}\big)$$

处处不为零。因此，每个 (ω_i, η_i) 都是类型为 $(2l, 2m)$ 的辛对。若 J_i和 K_i分别是 P和 Q 上的复结构，则 $I_i = J_i \oplus K_i$ 满足四元数恒等式，且关于乘积度量 $g_P + g_Q$正交。它们的基本形式为 $\Omega_i = \omega_i + \eta_i$。因此，这些和构成一个正四元数三元组，故给定的微分形式定义了一个超辛对。此外，在每个这样的邻域上，对所有 i，均有 $\ker\ \eta_i = TP$、$\ker\ \omega_i = TQ$，这证明特征分布是公共的。由于这些微分形式在全局上有定义，这些局部验证确立了所断言的全局性质。在两个这样的乘积邻域的交集上，微分形式 $\Omega_i = \omega_i + \eta_i$ 是同一组全局定义的二形式在交集上的限制。由于重构端omorphism在每一点处由$I_i = -(\Omega_j^\flat)^{-1} \circ \Omega_k^\flat$给出，它们在重叠区域上相同。相应的度量也相同，因为 $g(X, Y) = -\Omega_i(X, I_i Y)$。因此，局部重构的张量粘合成由微分形式 Ω_i确定的全局结构。□

例 3.5. 设 P^{4l} 和 Q^{4m} 为超凯勒流形，其基本形式分别为 Ω_i^P和 Ω_i^Q。在 $P\times Q$上，辛对 $(\omega_i,\eta_i) = (\mathrm{pr}_P^*\Omega_i^P, \mathrm{pr}_Q^*\Omega_i^Q)$ 构成一个类型为 $(2l,2m)$、具有公共特征分布和典范度量 g_P+g_Q 的超辛对。例如，平坦四元数环面 $T^{4l}\times T^{4m}$ 的乘积给出了紧例子。

例3.6. 公共特征分布并非必然存在。事实上，令 $M=T^4=\mathbb{R}^4/\mathbb{Z}^4$，并令 e^0，e^1，e^2，e^3为由 $\mathbb{R}^4$ 上的标准坐标形式诱导的全局闭1-形式。将它们的对偶向量场记为 e_0，e_1，e_2，e_3。对于 $\{1,2,3\}$ 中循环排列的 (i,j,k)，定义

$$\omega_i = e^0\wedge e^i, \qquad \eta_i = -e^j\wedge e^k. \tag{3.7}$$

每个 (ω_i,η_i) 都是类型为 $(1,1)$ 的辛对，因为 $\omega_i\wedge\omega_i=\eta_i\wedge\eta_i=0$ 且 $\omega_i\wedge\eta_i = -e^0\wedge e^1\wedge e^2\wedge e^3\neq 0$。它们的和是具有度量 $g=\sum_{a=0}^3 e^a\otimes e^a$、复结构由下式给出的平坦超凯勒结构的基本形式

$$I_ie_0=-e_i, \qquad I_ie_i=e_0, \qquad I_ie_j=e_k, \qquad I_ie_k=-e_j.$$

这些公式满足四元数恒等式，并且 $\Omega_i=g(\cdot\, I_i\cdot)$。因此，(3.7) 定义了一个超辛对。然而，$\ker\omega_i = \operatorname{span}\{e_j,e_k\}$ 和 $\ker\eta_i=\operatorname{span}\{e_0,e_i\}$，所以两个核都依赖于 $i\in\{1,2,3\}$。

4. 超接触-辛对

一个类型为 (α,ω) 的接触–辛对由流形上的一个 1-形式和一个闭2-形式组成，该流形的维数为 $2p+2q+1$，并满足

$$\alpha\wedge(d\alpha)^p\wedge\omega^q\neq 0, \qquad (d\alpha)^{p+1}=0, \qquad \omega^{q+1}=0. \tag{4.1}$$

特征分布是由 $\mathcal{C}(\alpha)=\ker\alpha\cap\ker\, d\alpha$和 $\ker\,\omega$定义的互补分布。Reeb向量场 Z由 $\alpha(Z)=1$和 $\iota_Z d\alpha=\iota_Z\omega=0$刻画。

引理 4.1。对于类型为 (p,q) 的接触–辛对，$A=d\left(\frac{r^2}{2}\alpha\right)$ 和 $B=\omega\widehat{\ }$在 $\underline{M}=M\times\mathbb{R}_{>0}$ 上具有互补核

$$\ker A=\mathcal{C}(\alpha), \qquad \ker B=\ker\omega\oplus\mathbb{R}\partial_r. \tag{4.2}$$

它们的秩分别为 $2p+2$和 $2q$。因此，(A,B) 是类型为 $(p+1,q)$的辛对，而 $A+B$ 是辛的。

$\widehat{\ }$证明。令 $\pi\colon M=M\times\mathbb{R}_{>0}\longrightarrow M$ 为典范投影。对于 M上的微分形式 α、$d\alpha$和 ω，以及它们到 $\widehat{M}$上的拉回，我们采用相同的记号。由于 $A=d\left(\frac{r^2}{2}\alpha\right)$，我们有

$$A = r\,dr\wedge\alpha+\frac{r^2}{2}\,d\alpha. \tag{4.3}$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$取一点 $(x,r)\in M$。利用典范识别 $T_{(x,r)}M=T_xM\oplus\mathbb{R}\partial_r$，将任意切向量写作 $v+a\partial_r$，其中 $v\in T_xM$、$a\in\mathbb{R}$。对 (4.3) 作缩并，得到

$$\iota_{v+a\partial_r}A = r\,\iota_{v+a\partial_r}(dr\wedge\alpha)+\frac{r^2}{2}\iota_v d\alpha = ra\,\alpha - r\alpha(v)\,dr+\frac{r^2}{2}\iota_v d\alpha. \tag{4.4}$$

我们首先确定 $\ker A$。设 $\iota_{v+a\partial_r}A=0$。将 (4.4) 作用于 ∂_r $0=(\iota_{v+a\partial_r}A)(\partial_r)=-r\alpha(v)$。由于 $r>0$，可得 $\alpha(v)=0$。令 Z 表示接触–辛对 (α,ω) 的 Reeb向量场，其特征为 $\alpha(Z)=1$，$\iota_Z d\alpha=0$, $\iota_Z\omega=0$。我们将 $Z_x\widehat{\ }$视为 M 的切向量，其 ∂_r分量为零。将 (4.4) 作用于 Z_x，得到

$$0=(\iota_{v+a\partial_r}A)(Z_x)=ra\,\alpha(Z_x)+\frac{r^2}{2}d\alpha(v,Z_x)=ra,$$

因为 $\alpha(Z)=1$ 且 $\iota_Z d\alpha=0$。因此 $a=0$。方程 (4.4) 现在化为 $\frac{r^2}{2}\iota_v d\alpha=0$，故 $\iota_v d\alpha=0$。我们已证明 $v\in\ker\alpha\cap\ker d\alpha=\mathcal{C}(\alpha)$。反之，若$v\in\mathcal{C}(\alpha)$，则 $\alpha(v)=0$ 且 $\iota_v d\alpha=0$，因此由 (4.4) 立即可得 $\iota_v A=0$。于是

$$\ker A=\mathcal{C}(\alpha), \tag{4.5}$$

其中 $\mathcal{C}(\alpha)$ 被视为包含在 TM 中、位于 TM 因子内的一个子丛。接下来我们确定 $\ker B$。由于 $B=\omega$ 是从 M 拉回的，它不含 dr 分量。因此，$\iota_{v+a\partial_r}B=\iota_v\omega$。所以，$\iota_{v+a\partial_r}B=0$ 当且仅当 $v\in\ker\omega$，而对 a 没有限制。因此

$$\ker B=\ker\omega\oplus\mathbb{R}\partial_r. \tag{4.6}$$

现在我们验证秩。由于 (α,ω) 的类型为 (p,q)，$(d\alpha)^{p+1}=0$ 且 $\omega^{q+1}=0$，而 $\alpha\wedge(d\alpha)^p\wedge\omega^q$ 处处不为零。特别地，$(d\alpha)^p\neq0$ 且 $\omega^q\neq0$。因此 $\operatorname{rank}(d\alpha)=2p$ 且 $\operatorname{rank}\omega=2q$。对于 A，利用 (4.3) 和 $(dr\wedge\alpha)^2=0$、$(d\alpha)^{p+1}=0$，得到

$$A^{p+1}=\left(r\,dr\wedge\alpha+\frac{r^2}{2}d\alpha\right)^{p+1}=(p+1)\,r\,dr\wedge\alpha\wedge\left(\frac{r^2}{2}d\alpha\right)^p=\frac{(p+1)r^{2p+1}}{2^p}\,dr\wedge\alpha\wedge(d\alpha)^p. \tag{4.7}$$

此外，$A^{p+2}=0$。(4.7) 中的微分形式非零，因为 $dr\wedge\alpha\wedge(d\alpha)^p\wedge\omega^q$ 是 M 上的体积形式。因此秩为 $A=2p+2$。由于 $B=\omega$，我们有秩为 $B=2q$。我们再明确验证这两个核互为补空间。若 $u\in\ker A\cap\ker B$，则由 (4.5)–(4.6) 可知，向量 u 没有 ∂_r 分量，并满足

$$\alpha(u)=0,\qquad \iota_u d\alpha=0,\qquad \iota_u\omega=0.$$

因此，$\iota_u(\alpha\wedge(d\alpha)^p\wedge\omega^q)=0$。由于 $\alpha\wedge(d\alpha)^p\wedge\omega^q$ 是 M 上的体积形式，与之缩并在切向量上是单射。因此 $u=0$。于是 $\ker A\cap\ker B=\{0\}$。此外，

$$\dim(\ker A)=\dim\widehat{M}-\operatorname{rank}A=2q,\quad \dim(\ker B)=\dim\widehat{M}-\operatorname{rank}B=2p+2.$$

由于 $2q+(2p+2)=$ 的维数为 M，我们得出 $TM=\ker A\oplus\ker B$。尚需证明 $A+B$ 是辛的。它是闭的，因为这两个微分形式都是闭的。为证明非退化性，令 $n=p+q+1$，于是维数为 $\widehat{M}=2n$。由于 $A^{p+2}=0$, $B^{q+1}=0$，$(A+B)^n$ 的二项式展开中唯一非零的一项是含有 A^{p+1} 和 B^q 的项。因此

$$(A+B)^n=\binom{n}{p+1}A^{p+1}\wedge B^q=\binom{p+q+1}{p+1}\frac{(p+1)r^{2p+1}}{2^p}\,dr\wedge\alpha\wedge(d\alpha)^p\wedge\omega^q.$$

右侧处处不为零。因此，$A+B$ 是非退化的，故为辛的。□

定义 4.2. 设 $(\alpha_i,\ \omega_i)$、$i=1,\ 2,\ 3$ 是 M 上的三个接触–辛对，并设$\pi:M=M\times\mathbb{R}_{>0}\longrightarrow M$ 为投影。若这些对满足以下条件，则称该三元组为超接触–辛对

$$\widehat{\omega}_i:=d\left(\frac{r^2}{2}\pi^*\alpha_i\right),\qquad \widehat{\eta}_i:=\pi^*\omega_i,\qquad i=1,2,3,$$

按照定义 3.1 的意义，在 M 上构成一个超辛对。

注意，根据引理 4.1，每个 $(\widehat{\omega}_i,\ \widehat{\eta}_i)$ 已经是一个辛对；若原对的类型为 $(p_i,\ q_i)$，则其提升的类型为 $(p_i+1,\ q_i)$。因此，定义 4.2 的附加要求是

$$\widehat{\Omega}_i=\widehat{\omega}_i+\widehat{\eta}_i=d\left(\frac{r^2}{2}\pi^*\alpha_i\right)+\pi^*\omega_i,\qquad i=1,2,3 \tag{4.8}$$

构成一个正四元数三元组。令 $(\widehat{g}$、I_1、I_2、$I_3)$ 为提升的超辛对的典范超凯勒结构，该结构由命题 3.2 给出，并令 $R=r\partial_r$。该超

接触–辛对称为径向不变的，如果对于所有 i 都有$\mathcal{L}_R I_i = 0$ 。径向不变的超对称为归一化的，如果

$$\widehat{g}(R, \cdot) = r\, dr. \tag{4.9}$$

Its ⌢典范度量 是由包含映射 $M \cong M \times \{1\} \subset M$在 M 上诱导的度量。

命题 4.3。 设 M 赋有一个超接触–辛对。则 维数$M \equiv 3$（模 4），且 $TM \oplus \mathbb{R}$ 带有一个四元数厄米结构，其中，稍微滥用记号， $\mathbb{R}$ 表示 M上的平凡实直线丛。

⌢证明。 根据定义 4.2， $M = M \times \mathbb{R}_{>0}$ 上的提升对构成一个超辛对。⌢命题 3.2 在 M上给出了一个典范超凯勒结构（$\widehat{g}$， I_1， I_2， I_3）。特别地，对于循环的（i， j， k），

$$I_i^2 = -\operatorname{Id}, \qquad I_i I_j = I_k = -I_j I_i, \tag{4.10}$$

and

$$\widehat{g}(I_i U, I_i V) = \widehat{g}(U, V). \tag{4.11}$$

⌢ ⌢因此，对于某个整数 n， $M = 4n$ 的维数为，且 $M =$ 的维数 $M - 1 = 4n - 1 \equiv 3$ （模 4）。令 $\frown j_1 \colon\ M \longrightarrow M$ 为包含映射 j_1（x）$=$（x，1）。将环境切丛限制后得到$\frown j_1^* TM \cong TM \oplus \mathbb{R}\partial_r \cong TM \oplus \mathbb{R}.$将 $\widehat{g}$， I_1， I_2， I_3限制到此丛上，它们满足相同的恒等式，并为其提供四元数厄米结构。□

定理 4.4. 超接触–辛对径向不变，当且仅当

$$\mathcal{C}(\alpha_1) = \mathcal{C}(\alpha_2) = \mathcal{C}(\alpha_3) = \mathcal{F}, \qquad \ker \omega_1 = \ker \omega_2 = \ker \omega_3 = \mathcal{E}. \tag{4.12}$$

在这种情况下，三种类型都是$(2l + 1, 2m)$，其中 $l, m \geq 0$ 为某些值，并且

$$TM = \mathcal{E} \oplus \mathcal{F}, \qquad \dim \mathcal{E} = 4l + 3, \qquad \dim \mathcal{F} = 4m.$$

局部地 $M = P \times N$， α_i 来自 P，而 ω_i 来自 N。提升后的超凯勒度量是 P 的径向不变超凯勒辛化与 N 上的超凯勒度量的局部乘积。

⌢证明。 设 (p_i, q_i) 是 (α_i, ω_i) 的类型，并考虑在 $M = M \times \mathbb{R}_{>0}$ 上的提升

$$\widehat{\omega}_i = d\left(\frac{r^2}{2}\alpha_i\right), \qquad \widehat{\eta}_i = \omega_i, \qquad \widehat{\Omega}_i = \widehat{\omega}_i + \widehat{\eta}_i.$$

根据定义 4.2，这些对构成一个超辛对。我们将其⌢典范结构和 $R = r\partial_r$记作 $(\widehat{g}, I_1, I_2, I_3)$。引理 4.1 给出，在每个 $(x, r) \in M$ 处，

$$(\ker \widehat{\omega}_i)_{(x,r)} = \mathcal{C}(\alpha_i)_x \oplus \{0\}, \qquad (\ker \widehat{\eta}_i)_{(x,r)} = (\ker \omega_i)_x \oplus \mathbb{R}\partial_r. \tag{4.13}$$

这些核彼此互补，且微分形式的秩分别为 $2p_i + 2$ 和 $2q_i$。由于原始微分形式是从 M拉回的，$\mathcal{L}_R \alpha_i = \mathcal{L}_R \omega_i = 0$。李导数与外微分可交换，因此

$$\mathcal{L}_R \widehat{\omega}_i = d\left(\mathcal{L}_R\left(\frac{r^2}{2}\alpha_i\right)\right) = 2\widehat{\omega}_i, \qquad \mathcal{L}_R \widehat{\eta}_i = 0.$$

将 $A_i = \widehat{\omega}_i$ 和 $B_i = \widehat{\eta}_i$代入定理 2.5，可得

$$\mathcal{L}_R I_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad \Longleftrightarrow \quad \widehat{\Pi}_1 = \widehat{\Pi}_2 = \widehat{\Pi}_3, \quad \widehat{\Pi}_i := (\widehat{\Omega}_i^\flat)^{-1} \circ \widehat{\omega}_i^\flat.$$

根据定理 3.4，这些投影算子相等，恰好是提升的超辛对具有公共特征分布的条件。因此，由（4.13）可得（4.12）。这就证明了所需的等价性。下文假设这些条件成立，并令 $\mathcal{E} =$ ker ω_i、$\mathcal{F} = \mathcal{C}(\alpha_i)$，以及 $TM = \mathcal{E} \oplus \mathcal{F}$。提升上的公共分布为

$$\widehat{\mathcal{E}} = \ker \widehat{\eta}_i = \pi^* \mathcal{E} \oplus \mathbb{R}\partial_r, \qquad \widehat{\mathcal{F}} = \ker \widehat{\omega}_i = \pi^* \mathcal{F},$$

^其中 $\pi:\ M\longrightarrow M$ 表示投影，并将拉回子丛与其水平提升视为相同。定理 3.4 蕴含，这些分布对于 $\hat{g}$而言是正交的、四元数的^且平行的。利用 $\dim M=2p_i+2q_i+2$，由秩-零化度定理可得

$$\operatorname{rank}\widehat{\mathcal{E}}=\dim\widehat{M}-\operatorname{rank}\widehat{\eta}_i=2p_i+2,\quad \operatorname{rank}\widehat{\mathcal{F}}=\dim\widehat{M}-\operatorname{rank}\widehat{\omega}_i=2q_i.$$

^这些秩与 i 无关，并且根据定理 3.4 都是 4 的倍数。由于$\mathcal{E}$ 包含∂_r，其秩为正。因此，我们可以写成 $2p_i+2=4(l+1)$，$2q_i=4m$ 其中 l，$m\geq 0$。所以每个原始对的类型都是（$2l+1$，$2m$），并且有 $\operatorname{rank}\mathcal{E}=4l+3$ 以及 $\operatorname{rank}\mathcal{F}=4m$。为了确定定理 3.4 所述提升上的乘积，我们描述 M 上的因子。分布 $\mathcal{E}=\ker\omega_1$ 是可积的，因为 ω_1 是闭的。对于X，$Y\in\Gamma(\mathcal{F})$，$\alpha_1([X,Y])=-d\alpha_1(X,Y)=0$。此外，根据嘉当公式，$\mathcal{L}_X d\alpha_1=0$，因此

$$\iota_{[X,Y]}d\alpha_1=\mathcal{L}_X(\iota_Y d\alpha_1)-\iota_Y(\mathcal{L}_X d\alpha_1)=0.$$

这证明了$\mathcal{F}$的可积性。与定理 3.4 的证明相同，弗罗贝尼乌斯定理给出核为$\mathcal{F}$ 和$\mathcal{E}$的局部浸没。它们的乘积映射具有可逆微分，因为$\mathcal{E}\cap\mathcal{F}=\{0\}$。限制到更小的邻域后，我们得到

$$U\cong P^{4l+3}\times N^{4m},\qquad \mathcal{E}|_U=TP,\qquad \mathcal{F}|_U=TN.$$

我们取两个连通的局部因子。对于任意 $Y\in\Gamma(\mathrm{F})$ 和每个 i，有 $\alpha_i(Y)=0$,$\iota_Y d\alpha_i=0$，因此 $\mathrm{L}_Y\alpha_i=d(\alpha_i(Y))+\iota_Y d\alpha_i=0$。这些恒等式表明，$\alpha_i$ 在 N-因子上没有分量，且与该因子无关。具体而言，若 X 是从 P提升而来，且 Y来自 N，则 $Y(\alpha_i(X))=(\mathrm{L}_Y\alpha_i)(X)+\alpha_i([Y,X])=0$。因此，在 P 上存在一个接触形式α_i^P，使得 $\alpha_i=\mathrm{pr}_P^*\,\alpha_i^P$。类似地，对于任意 $X\in\Gamma(\mathrm{E})$，$\iota_X\omega_i=0$ 和 $\mathrm{L}_X\omega_i=0$ 这一事实，结合定理 3.4 中的拉回论证，表明 $\omega_i=\mathrm{pr}_N^*\,\omega_i^N$，其中 N 上有一个闭2-形式。$\alpha_i\wedge(d\alpha_i)^{2l+1}\wedge\omega_i^{2m}$不为零，意味着 P 上的$\alpha_i^P\wedge(d\alpha_i^P)^{2l+1}$ 以及 N 上的$(\omega_i^N)^{2m}$ 均不为零。因此，第一个微分形式确为接触形式，第二个确为辛形式。在诱导的识别 $U\times\mathbb{R}_{>0}\cong(P\times\mathbb{R}_{>0})\times N$ 下，共同的^特征分布为 $\mathrm{E}=T(P\times\mathbb{R}_{>0})$ 和 $\mathrm{F}=TN$。此外，两族提升形式分别从这两个因子拉回，并在其上由 $\Omega_i^P=d\Big(\frac{r^2}{2}\alpha_i^P\Big)$和 ω_i^N给出。由此，定理 3.4 给出 $P\times\mathbb{R}_{>0}$ 上的超凯勒结构 $(\hat{g}_P,J_1,J_2,J_3)$，其基本形式为 Ω_i^P。它还给出^ N 上的超凯勒结构 (g_N,K_1,K_2,K_3)，其基本形式为 ω_i^N。它们的度量和端omorphism恰好是典范重构的限制，因此

$$\hat{g}=\hat{g}_P+g_N,\qquad I_i=J_i\oplus K_i.$$

最后，在第一个因子上，$\mathcal{L}_R\Omega_i^P=2\Omega_i^P$。为明确验证重构端omorphism的径向不变性，写作 $P_+:=P\times\mathbb{R}_{>0}$，并且对于 $a\in\{1,2,3\}$，令

$$b_a:=(\Omega_a^P)^\flat:TP_+\longrightarrow T^*P_+,\qquad b_a(X)=\iota_X\Omega_a^P.$$

每个 b_a 都是光滑向量丛同构，因为 Ω_a^P 是非退化的。对于 P_+上的每个光滑向量场 X，b_a的李导数为 $(\mathcal{L}_R b_a)(X)=\mathcal{L}_R(b_a(X))-b_a([R,X])$。将这个1-形式作用于任意光滑向量场 Y，我们得到

$$\begin{aligned}((\mathcal{L}_R b_a)(X))(Y)&=R(\Omega_a^P(X,Y))-\Omega_a^P(X,[R,Y])-\Omega_a^P([R,X],Y)\\&=(\mathcal{L}_R\Omega_a^P)(X,Y)\\&=2\Omega_a^P(X,Y)\\&=(2b_a(X))(Y).\end{aligned}$$

由于 X,Y 是任意的，这就证明了 $\mathcal{L}_R b_a=2b_a$。接下来我们计算逆从映射 b_a^{-1} 的李导数：$T^*P_+\longrightarrow TP_+$。这里，对于任意光滑1-形式 λ，

$$(\mathcal{L}_R(b_a^{-1}))(\lambda)=[R,b_a^{-1}(\lambda)]-b_a^{-1}(\mathcal{L}_R\lambda).$$

因此 $b_a^{-1}\circ b_a = \mathrm{Id}^{TP_+}$ 给出

$$0 = \mathcal{L}_R(b_a^{-1}\circ b_a) = \mathcal{L}_R(b_a^{-1})\circ b_a + b_a^{-1}\circ(\mathcal{L}_R b_a).$$

左边为零，因为 $(\mathcal{L}_R \mathrm{Id}^{TP_+})(X) = [R,X]-[R,X]=0$。将前一个恒等式右合成 b_a^{-1}，得到

$$\mathcal{L}_R(b_a^{-1}) = -b_a^{-1}\circ(\mathcal{L}_R b_a)\circ b_a^{-1} = -b_a^{-1}\circ(2b_a)\circ b_a^{-1} = -2b_a^{-1}.$$

最后，对每个循环置换 (i,j,k)，重构公式为 $J_i = -b_j^{-1}\circ b_k$。进一步应用莱布尼茨法则可得

$$\mathcal{L}_R J_i = -\mathcal{L}_R(b_j^{-1})\circ b_k - b_j^{-1}\circ(\mathcal{L}_R b_k) = 2b_j^{-1}\circ b_k - 2b_j^{-1}\circ b_k = 0.$$

因此，重构端omorphism J_i 是径向不变的。度量公式 $\widehat{g}_P = \Omega_i^P(\cdot\ J_i\,\cdot)$ 随即给出 $\mathcal{L}_R\widehat{g}_P = 2\widehat{g}_P$。因此，第一个因子是 P 的径向不变超凯勒辛化，第二个因子是超凯勒的。□

引理 4.5. 假设微分形式 $d(r^2\alpha_i/2)$ 在 $P\times\mathbb{R}_{>0}$ 上定义了一个正四元数三元组。若其度量满足 $\widehat{g}(R,\cdot) = r\,dr$，则

$$\widehat{g} = dr^2 + r^2 g_P \tag{4.14}$$

并且 α_i 是 (P, g_P) 上 *3-Sasakian* 结构的接触形式。

证明。令 $R = r\partial_r$，并记 $\delta_t\colon P\times\mathbb{R}_{>0}\longrightarrow P\times\mathbb{R}_{>0}$, $\delta_t(x,\ r) = (x,\ e^t r)$ 为由 R 生成的流。对于每个 $i\in\{1、\ 2、\ 3\}$，$\widehat{\Omega}_i = d\Big(\frac{r^2}{2}\alpha_i\Big)$。由于微分形式 α_i 从 P 拉回，我们有 $\delta_t^*\alpha_i = \alpha_i$，因此 $\delta_t^*\widehat{\Omega}_i = d\Big(\frac{e^{2t}r^2}{2}\alpha_i\Big) = e^{2t}\widehat{\Omega}_i$。等价地，

$$\mathcal{L}_R\widehat{\Omega}_i = 2\widehat{\Omega}_i. \tag{4.15}$$

接下来，我们考虑从该三元组通过代数方法重构的近复结构。对于每个循环置换 $(i,\ j,\ k)$，$I_i = -(\widehat{\Omega}_j^\flat)^{-1}\circ\widehat{\Omega}_k^\flat$。由于在 δ_t 下，所有三个 2-形式都乘以相同的因子 e^{2t}，该因子在上述表达式中会相互抵消。因此 $\delta_t^* I_i = I_i$，或者等价地，

$$\mathcal{L}_R I_i = 0. \tag{4.16}$$

重构度量由 $\widehat{g}(U,V) = \Omega_i(U, I_i V)$ 刻画。利用（4.15）和（4.16），我们得到 $\delta_t^*\widehat{g} = e^{2t}\widehat{g}$，从而

$$\mathcal{L}_R\widehat{g} = 2\widehat{g}. \tag{4.17}$$

现在证明（4.14）。首先，由于 $R = r\partial_r$ 和 $r>0$，条件 $\widehat{g}(R,\cdot) = r\,dr$ 给出 $\widehat{g}(\partial_r,\cdot) = dr$。因此，

$$\widehat{g}(\partial_r,\partial_r) = 1, \qquad \widehat{g}(\partial_r, U) = 0 \quad \text{for every } U\in\ker(dr). \tag{4.18}$$

因此，径向方向是单位的，并且与 r 的等值集的切空间正交。令 X, Y 为 P 上任意的局部向量场，并记其在 $P\times\mathbb{R}_{>0}$ 上的提升为 $\widetilde{X},\widetilde{Y}$，其中 $\widetilde{\ }$ 由切丛的典范乘积分解定义，并满足 $\widetilde{X}_{(p,r)} = (X_p, 0)$ 和 $\widetilde{Y}_{(p,r)} = (Y_p, 0)$。这些向量场的径向分量为零，且与 r 无关。$\widetilde{\ }$ 因此，$[\partial_r, \widetilde{X}] = 0$ 且 $\widetilde{X}(r) = 0$，从而

$$[R,\widetilde{X}] = [r\partial_r,\widetilde{X}] = r[\partial_r,\widetilde{X}] - \widetilde{X}(r)\partial_r = 0.$$

对 $\widetilde{Y}$ 也同样成立。利用 (4.17)，我们得到

$$\begin{aligned} 2\widehat{g}(\widetilde{X},\widetilde{Y}) &= (\mathcal{L}_R\widehat{g})(\widetilde{X},\widetilde{Y}) \\ &= R(\widehat{g}(\widetilde{X},\widetilde{Y})) - \widehat{g}([R,\widetilde{X}],\widetilde{Y}) - \widehat{g}(\widetilde{X},[R,\widetilde{Y}]) \\ &= r\,\partial_r\big(\widehat{g}(\widetilde{X},\widetilde{Y})\big). \end{aligned}$$

由于 $r>0$，由前面的恒等式可得 $\partial_r(\widehat{g}(\widetilde{X},\widetilde{Y}))=\frac{2}{r}\widehat{g}(\widetilde{X},\widetilde{Y})$。因此，根据乘积法则，(4.19)

$$\partial_r\Big(r^{-2}\widehat{g}(\widetilde{X},\widetilde{Y})\Big)=-2r^{-3}\widehat{g}(\widetilde{X},\widetilde{Y})+r^{-2}\partial_r(\widehat{g}(\widetilde{X},\widetilde{Y}))=-2r^{-3}\widehat{g}(\widetilde{X},\widetilde{Y})+r^{-2}\frac{2}{r}\widehat{g}(\widetilde{X},\widetilde{Y})=0.$$

通过将 $\widehat{g}$ 限制在水平集 $r=1$上，在 P 上定义黎曼度量 g_P：

$$(g_P)_p(v,w):=\widehat{g}_{(p,1)}\big((v,0),(w,0)\big),\qquad v,w\in T_pP.$$

由 (4.19) 可知，对于任意固定的 p，函数

$$r\longmapsto r^{-2}\widehat{g}_{(p,r)}(\widetilde{X}_{(p,r)},\widetilde{Y}_{(p,r)})$$

在 $\mathbb{R}_{>0}$上为常数。在 $r=1$处对其求值，我们得到

$$\widehat{g}_{(p,r)}(\widetilde{X}_{(p,r)},\widetilde{Y}_{(p,r)})=r^2(g_P)_p(X_p,Y_p).\tag{4.20}$$

将 (4.20) 与 (4.18) 结合，得到 (4.14)。现在证明引理的最后一部分。

定义 $\xi_i:=-I_iR$ 在 $P\times\mathbb{R}_{>0}$上。由于 I_i 相对于 $\widehat{g}$是斜伴随的，$\widehat{g}(R,\xi_i)=-\widehat{g}(R,I_iR)=0$。因此，$\xi_i$ 与 r的等值集相切。此外，利用 (4.16)，我们有 $[R,\xi_i]=-(\mathcal{L}_RI_i)R-I_i[R,R]=0$。由于 $\xi_i(r)=0$，这给出 $0=[r\partial_r,\xi_i]=r[\partial_r,\xi_i]$。因此，$\xi_i$ 与 r 无关，并且是 P上的向量场 ξ_i 的提升。从现在起，我们对 P 上的向量场及其与 r无关的提升使用相同的记号。特别地，$I_iR=-\xi_i$。对于从 P提升的向量场 X，恒等式

$$\widehat{\Omega}_i=r\,dr\wedge\alpha_i+\frac{r^2}{2}d\alpha_i$$

蕴含

$$r^2\alpha_i(X)=\widehat{\Omega}_i(R,X)=\widehat{g}(R,I_iX)=-\widehat{g}(I_iR,X)=r^2g_P(\xi_i,X).$$

由此可得 $\alpha_i=g_P(\xi_i,\cdot)$。四元数恒等式以及 I_i 的正交性也蕴含 $\widehat{g}(I_iR,I_jR)=r^2\delta_{ij}$。因此，

$$g_P(\xi_i,\xi_j)=\delta_{ij},\qquad \alpha_i(\xi_j)=\delta_{ij}.$$

I_iX 的径向分量由下式确定：

$$\widehat{g}(R,I_iX)=r^2\alpha_i(X).$$

由于 $\widehat{g}(R,R)=r^2$，向量场 $I_iX-\alpha_i(X)R$ 与 r 的水平集相切。它与 R 对易，因为 $\mathcal{L}_RI_i=0$，$[R,X]=0$，且 $R(\alpha_i(X))=0$。如上所述，因此它与 r 无关。这样我们得到一个张量场 $\phi_i:\ TP\longrightarrow TP$，其特征为

$$I_iX=\phi_iX+\alpha_i(X)R.$$

将 $I_i^2=-\mathrm{Id}$ 应用于 X，并比较切向分量和径向分量，得到

$$\phi_i^2=-\mathrm{Id}_{TP}+\alpha_i\otimes\xi_i,\qquad \alpha_i\circ\phi_i=0.$$

同样地，$I_i\xi_i=R$ 给出 $\phi_i\xi_i=0$。$\widehat{g}$ 与 I_i 的相容性蕴含

$$g_P(\phi_iX,\phi_iY)=g_P(X,Y)-\alpha_i(X)\alpha_i(Y).$$

因此，$(\phi_i,\ \xi_i,\ \alpha_i,\ g_P)$ 是一个几乎接触度量结构。对于每个循环置换 $(i,\ j,\ k)$，将 $I_iI_j=I_k=-I_jI_i$ 应用于 R 以及切向向量场，可得

$$\phi_k=\phi_i\phi_j-\alpha_j\otimes\xi_i=-\phi_j\phi_i+\alpha_i\otimes\xi_j,$$
$$\xi_k=\phi_i\xi_j=-\phi_j\xi_i,\quad \alpha_k=\alpha_i\circ\phi_j=-\alpha_j\circ\phi_i.$$

因此，这三个结构构成一个几乎接触度量 3-结构。此外，对于从 P 提升而来的任意向量场 X，Y，

$$\frac{r^2}{2}d\alpha_i(X,Y)=\widehat{\Omega}_i(X,Y)=\widehat{g}(X,I_iY)=r^2g_P(X,\phi_iY).$$

因此

$$d\alpha_i(X,Y)=2g_P(X,\phi_iY)$$

并且 $(\phi_i,\ \xi_i,\ \alpha_i,\ g_P)_{i=1,\ 2,\ 3}$ 是一个接触度量三结构。根据 Kashiwada 定理，[15], 每个接触度量三结构都是 3-Sasakian 结构。因此，α_i 是 $(P,\ g_P)$ 上 3-Sasakian 结构的接触形式。□

定理 4.6。一个归一化超接触–辛对 $(\alpha_i, \omega_i)^{i\in\{1,2,3\}}$ 连同其典范度量，在局部上是以下乘积

$$(M,g)=(P^{4l+3},g_P)\times(N^{4m},g_N), \tag{4.21}$$

其中 P 是 3-*Sasakian* 的，N 是超凯勒的。反之，每一个这样的局部乘积，若其微分形式在全局上有定义，都是一个归一化超接触–辛对。特别地，M 具有典范的 3-拟 *Sasakian* 结构，其秩为 $4l+3$。其基本形式为

$$\Phi_i=\frac{1}{2}d\alpha_i+\omega_i. \tag{4.22}$$

记 Z_i 为其 *Reeb*场，则对于循环的 (i,j,k)，有

$$\iota_{Z_j}\omega_i=0\quad for\ all\ i,j,\qquad \alpha_i=\frac{1}{2}\iota_{Z_j}d\alpha_k=-\frac{1}{2}\iota_{Z_k}d\alpha_j,\qquad [Z_i,Z_j]=2Z_k. \tag{4.23}$$

证明。设 $M=M\times\mathbb{R}_{>0}$ 和 $R=r\partial_r$，并记 $\widehat{g}$ 为提升的超辛对的典范度量。其基本形式为

$$\widehat{\Omega}_i=d\left(\frac{r^2}{2}\alpha_i\right)+\omega_i.$$

令 g 为 M上的典范度量，它是将 $\widehat{g}$ 限制到超曲面 $r=1$上得到的。根据定义，给定的超接触–辛对是径向不变的，并满足$\widehat{g}(R,\cdot)=r\,dr$。因此，我们可以使用定理 4.4。特别地，分布 $\mathcal{E}=\ker\omega_i$和$\mathcal{F}=\ker\alpha_i\cap\ker d\alpha_i$都与 $i\in\{1,2,3\}$无关，并且

$$TM=\mathcal{E}\oplus\mathcal{F},\qquad \operatorname{rank}\mathcal{E}=4l+3,\qquad \operatorname{rank}\mathcal{F}=4m.$$

M中的每一点都有一个邻域，可将其识别为乘积 $U\cong P\times N$，其中$\mathcal{E}$和$\mathcal{F}$分别对应于 TP和 TN。在此识别下，

$$\alpha_i=\alpha_i^P,\qquad \omega_i=\omega_i^N,$$

其中，α_i^P是 P 上的接触形式，而 ω_i^N是 N上的二形式。将定理 3.4 应用于提升的超辛对（如定理 4.4 的证明中所述），可在提升空间上得到一个局部黎曼乘积：

$$U\times\mathbb{R}_{>0}\cong(P\times\mathbb{R}_{>0})\times N,\qquad \widehat{g}=\widehat{g}_P+g_N,$$

这里，$\widehat{g}_P$是由 $d\left(\frac{r^2}{2}\alpha_i^P\right)$重构的超凯勒度量，而 g_N 是其基本形式为 ω_i^N的超凯勒度量。由于 R 与 $P\times\mathbb{R}_{>0}$相切，$\widehat{g}$的归一化限制在 $\widehat{g}_P(R,\cdot)=r\,dr$上。引理 4.5 现在推出 $\widehat{g}_P=dr\otimes dr+r^2g_P$，其中 $(P,\ g_P)$ 是 3-Sasakian 的，而 α_i^P是其定义接触形式。因此，

$$\widehat{g}=dr\otimes dr+r^2g_P+g_N.$$

限制到 $r=1$ 得到

$$g=g_P+g_N.$$

这证明了局部黎曼乘积 (4.21)，其中 P 3-Sasakian 且 N 超凯勒。

现在，令 $(\phi_i^P,\xi_i^P,\alpha_i^P,g_P)$ 表示 P 上的 3-Sasakian 结构，(I_i^N,g_N) 表示 N 上的超凯勒结构，其中 $\omega_i^N(U,V)=g_N(U,I_i^NV)$。在 M 上定义 2-形式

$$\Phi_i:=\frac{1}{2}d\alpha_i+\omega_i.$$

由于 g 是非退化的，存在唯一的光滑向量场 Z_i 和 (1,1) 张量场 ϕ_i，定义在 M 上，使得

$$g(Z_i,X)=\alpha_i(X),\qquad g(X,\phi_iY)=\Phi_i(X,Y)$$

对于 M上的所有向量场 X,Y。在每个局部乘积 $P\times N$上，恒等式

$$d\alpha_i^P(X,Y)=2g_P(X,\phi_i^PY),\qquad \omega_i^N(U,V)=g_N(U,I_i^NV)$$

证明这些全局定义的张量具有如下表达式

$$Z_i=(\xi_i^P,0),\qquad \phi_i=\phi_i^P\oplus I_i^N.$$

P 上的几乎接触度量恒等式以及 N上的四元数厄米恒等式因此给出

$$\phi_i^2=-\operatorname{Id}_{TM}+\alpha_i\otimes Z_i,\quad \alpha_i(Z_i)=1,\quad g(\phi_iX,\phi_iY)=g(X,Y)-\alpha_i(X)\alpha_i(Y).$$

对于任意循环置换（i，j，k），同一分解意味着

$$\phi_k=\phi_i\phi_j-\alpha_j\otimes Z_i=-\phi_j\phi_i+\alpha_i\otimes Z_j,$$
$$Z_k=\phi_iZ_j=-\phi_jZ_i,\quad \alpha_k=\alpha_i\circ\phi_j=-\alpha_j\circ\phi_i.$$

在 TP上，这些是 3-Sasakian 恒等式，而在 TN上，它们化为 I_i^N的四元数恒等式。因此（ϕ_i，Z_i，α_i，g）$_{i=1,\,2,\,3}$是 M上的几乎接触度量 3-结构。此外，

$$\alpha_i(Z_i)=1,\qquad \iota_{Z_i}d\alpha_i=0,\qquad \iota_{Z_i}\omega_i=0,$$

因为局部地，Z_i 是 ξ_i^P的提升。因此，Z_i 也是原接触–辛对（α_i，ω_i）的 Reeb向量场。现在我们证明（ϕ_i，Z_i，α_i）在 $P\times N$上的正规性，即证明张量

$$\mathcal{N}_i(X,Y):=[\phi_iX,\phi_iY]-\phi_i[\phi_iX,Y]-\phi_i[X,\phi_iY]+\phi_i^2[X,Y]+d\alpha_i(X,Y)Z_i.$$

若 X,Y 是从 P 提升而来，则 ϕ_i,Z_i,α_i 的局部表达式表明，$\mathrm{N}_i(X,Y)$ 等于 $(\phi_i^P,\xi_i^P,\alpha_i^P)$ 的正规性张量的提升。由于该结构是 Sasakian，这个张量为零。若 X,Y 是从 N 提升而来，则 $d\alpha_i(X,Y)=0$，且在这些向量场上 $\phi_i=I_i^N$。因此，$\mathrm{N}_i(X,Y)$ 是 I_i^N 的 Nijenhuis 张量的提升；由于 (N,g_N,I_i^N) 是 Kähler，该张量为零。最后，设 X 是从 P 提升而来，Y 是从 N 提升而来。则 ϕ_iX 是从 P 提升而来，而 ϕ_iY 是从 N 提升而来。来自不同因子的提升向量场彼此对易，因此

$$[X,Y]=[\phi_iX,Y]=[X,\phi_iY]=[\phi_iX,\phi_iY]=0.$$

此外，由于 α_i 是从 P 拉回的，因此 $d\alpha_i(X,\ Y)=0$。故在此情形下，$\mathcal{N}_i(X,\ Y)=0$ 也成立。基本 2-形式按构造为 $\Phi_i=\frac{1}{2}d\alpha_i+\omega_i$。由于 $d\omega_i=0$，我们有$d\Phi_i=\frac{1}{2}d^2\alpha_i+d\omega_i=0$。因此，每个 $(\phi_i,\ Z_i,\ \alpha_i,\ g)$ 都是拟 Sasakian，所得的近接触3-结构是 3-拟 Sasakian。为确定其秩，回想 α_i^P 是因子 P 上的接触形式，该因子维数为 $(4l+3)$。因此，

$$\alpha_i\wedge(d\alpha_i)^{2l+1}\neq 0,\qquad (d\alpha_i)^{2l+2}=0.$$

第一个表达式表示 M 上处处非零的 $(4l+3)$-形式，它是将 P 上的接触体积形式拉回所得。因此，每个 α_i 都具有常数类 $4l+3$，即 3-拟 Sasakian 结构的秩。由于任意 Z_j 都与 P-因子相切，对于所有 $i,\ j$，我们有$\iota_{Z_j}\omega_i=0$。固定一个循环置换 $(i,\ j,\ k)$。P上的近接触3-结构恒等式给出 $\phi_k^P\xi_j^P=-\xi_i^P$和 $\phi_j^P\xi_k^P=\xi_i^P$。因此，对于局部乘积上的任意向量场 $X=(X_P,\ X_N)$，我们得到

$$d\alpha_k(Z_j,X)=2g_P(\xi_j^P,\phi_k^PX_P)=-2g_P(\phi_k^P\xi_j^P,X_P)=2g_P(\xi_i^P,X_P)=2\alpha_i(X).$$

类似地，$d\alpha_j(Z_k,\ X)=-2g_P(\phi_j^P\xi_k^P,\ X_P)=-2\alpha_i(X)$。因此

$$\alpha_i=\frac{1}{2}\iota_{Z_j}d\alpha_k=-\frac{1}{2}\iota_{Z_k}d\alpha_j.$$

最后，对于 Sasakian 因子的 Levi-Civita 联络 ∇^P，有 $\nabla_X^P\xi_i^P=-\phi_i^PX$。因此

$$[\xi_i^P,\xi_j^P]=\nabla^P_{\xi_i^P}\xi_j^P-\nabla^P_{\xi_j^P}\xi_i^P=-\phi_j^P\xi_i^P+\phi_i^P\xi_j^P=2\xi_k^P.$$

将此恒等式提升到 $P \times N$，得到 $[Z_i, Z_j] = 2Z_k$。(4.23) 中的所有恒等式由此得证。反过来，设我们有一个局部黎曼乘积 $(P^{4l+3},\ g_P) \times (N^{4m},\ g_N)$，其中 P 是 3-Sasakian，N 是超凯勒。设 α_i 是 P 上定义接触形式的拉回，ω_i 是 N 上超凯勒形式的拉回。对于每个 $i \in \{1, 2, 3\}$，

$$\alpha_i \wedge (d\alpha_i)^{2l+1} \wedge \omega_i^{2m}$$

是乘积上的一个体积形式，因为它是 P 上的接触体积形式与 N上的辛体积形式的外积。此外，

$$(d\alpha_i)^{2l+2} = 0, \qquad \omega_i^{2m+1} = 0, \qquad d\omega_i = 0.$$

因此，(α_i, ω_i) 是一个类型为 $(2l+1, 2m)$ 的接触–辛对。3-Sasakian 流形的标准锥构造（见 [7]）在 $P \times \mathbb{R}_{>0}$ 上给出一个超凯勒结构，其度量为$dr \otimes dr + r^2 g_P$，基本形式为 $d\left(\frac{r^2}{2}\alpha_i\right)$。将定理 3.4 的逆向部分应用于此锥和超凯勒流形 N，可得

$$\left(d\left(\frac{r^2}{2}\alpha_i\right), \omega_i\right)_{i=1,2,3}$$

是一个超辛对。其典范度量为

$$\widehat{g} = dr \otimes dr + r^2 g_P + g_N$$

其基本形式为

$$\widehat{\Omega}_i = d\left(\frac{r^2}{2}\alpha_i\right) + \omega_i.$$

这些恰好是定义 4.2 中规定的各对之和。因此，原结构构成一个超接触–辛对。锥因子的复结构满足 $\mathcal{L}_R I_i^P = 0$，与引理 4.5 证明第一部分中的情况相同。第二因子上的结构 I_i^N与 r 无关。因此，乘积结构满足 $\mathcal{L}_R I_i = 0$。此外，回顾一下，上述构造的度量为 $\widehat{g} = dr \otimes dr + r^2 g_P + g_N$。这里，$g_P$和$g_N$分别表示度量在 P和 N上的拉回，拉回到 $(P \times \mathbb{R}_{>0}) \times N$。由于 R在 P和 N上的投影均为零，对于乘积上的每个向量场 U，我们有 $g_P(R, U) = g_N(R, U) = 0$。因此，

$$\widehat{g}(R, U) = dr(R)\, dr(U) + r^2 g_P(R, U) + g_N(R, U) = r\, dr(U).$$

由于 U 是任意的，这证明了 $\widehat{g}(R, \cdot) = r\, dr$。结合上文确立的径向不变性，这表明该超接触–辛对是归一化的，其典范度量为 $\widehat{g}|_{r=1} = g_P + g_N$。由这些微分形式代数重构得到的度量和自同态唯一确定，因此局部构造在交叠处相一致。正定性、径向不变性和归一化条件在每个这样的邻域中都成立，因而在全局上也成立。这就证明了逆命题。□

注 4.7。 每个 3-拟 Sasakian 结构都会导出一个超接触–辛对，但在非 3-余辛情形和 3-余辛情形下，构造方式有所不同。特别是，所得的超对未必是归一化的。设 $(M^{4n+3},\ \phi_i,\ \xi_i,\ \alpha_i,\ g_0)_{i=1,\ 2,\ 3}$ 是一个 3-拟 Sasakian 流形，并用 $\Phi_i(X,\ Y) := g_0(X,\ \phi_i Y)$ 表示其基本二形式。g_0 中的下标用于区分原度量与下文构造的超对的典范度量。回忆

$$[\xi_i, \xi_j] = c\, \xi_k$$

对于循环的（i, j, k）以及一个实常数 c。

情形 $c \neq 0$。令 $\lambda = c/2$，并设 $4l + 3$ 为 3-拟 Sasakian 结构的秩，其中 $m = n - l$。根据 [11, 推论 5.7]，M 在局部上是黎曼乘积

$$(M, g_0) \cong (P^{4l+3}, g_P) \times (N^{4m}, g_N),$$

其中 P 是 3-λ-Sasakian，而 N 是超凯勒。原张量保持这一局部分解。特别地，α_i 从 P 拉回，并且在本文所采用的外导数约定下，

$$d\alpha_i = 2\lambda\Phi_i^P, \qquad \Phi_i = \Phi_i^P + \Phi_i^N.$$

这里，两个因子上的微分形式均视为拉回到乘积空间上的形式。在 M 上定义全局二形式

$$\Theta_i := \Phi_i - \frac{1}{2\lambda} d\alpha_i.$$

这些形式是闭的，因为 $d\Phi_i = 0$ 和 $d^2\alpha_i = 0$。在每个局部乘积邻域 $\Theta_i = \Phi_i^N$ 上。因此，Θ_i 是 N 因子的超凯勒形式，并在 P 因子上延拓为零。特别地，普通接触–辛对 $\{(\alpha_i, \Theta_j)\}_{i,j=1,2,3}$ 的类型为 $(2l+1, 2m)$。注意，这些正是 [11, 推论 5.9] 中已经描述的辛对。为得到归一化超接触–辛对，令 $\alpha_i' := \lambda\alpha_i$ 且 $\omega_i := \Theta_i$。事实上，在 P 因子上，重新缩放后的张量

$$\phi_i' = \phi_i^P, \qquad \xi_i' = \lambda^{-1}\xi_i^P, \qquad \alpha_i' = \lambda\alpha_i^P, \qquad g_P' = \lambda^2 g_P$$

构成一个 3-Sasakian 结构。特别地，

$$d\alpha_i' = 2\lambda^2 g_P(\,\cdot\,, \phi_i^P\,\cdot\,) = 2g_P'(\,\cdot\,, \phi_i'\,\cdot\,).$$

Th因此，定理 4.6 的逆向部分适用于 $(P,\ g_P') \times (N,\ g_N)$。由此可知 t

$$(\alpha_i', \omega_i)_{i=1,2,3} = (\lambda\alpha_i, \Theta_i)_{i=1,2,3}$$

是类型为 $(2l+1,\ 2m)$ 的归一化超接触–辛对。更明确地说，提升形式

$$\widehat{\Omega}_i = d\left(\frac{r^2}{2}\alpha_i'\right) + \Theta_i$$

是 $(P,\ g_P')$ 上的锥与 $(N,\ g_N)$ 的局部乘积的超凯勒形式。其重构度量为 $\widehat{g} = dr \otimes dr + r^2\lambda^2 g_P + g_N$。因此，$M$ 上的典范度量在局部

$$g_{\mathrm{can}} = \lambda^2 g_P + g_N.$$

当且仅当 $\lambda^2 = 1$ 时，这与原度量 $g_0 = g_P + g_N$ 一致。特别地，当 $c = 2$，从而 $\lambda = 1$ 时，无需重新缩放：$(\alpha_i,\ \Theta_i)_{i=1,\ 2,\ 3}$ 已经归一化，且$g_{\mathrm{can}} = g_0$。

情形 $c = 0$。在此情形下，原结构是 3-余辛的（见 [11, 定理 3.7]）。因此 $d\alpha_i = 0$ 且 $d\Phi_i = 0$。这里我们使用完整的基本形式 Φ_i，而非前述构造中的微分形式Θ_i，并考虑

$$(\alpha_i, \omega_i) := (\alpha_i, \Phi_i).$$

由于每个 $(\phi_i、\ \xi_i、\ \alpha_i、\ g_0)$ 都是一个几乎接触度量结构，$\alpha_i \wedge \Phi_i^{2n+1}$是 M 上的体积形式，而 $\Phi_i^{2n+2} = 0$。因此，每个 $(\alpha_i、\ \Phi_i)$ 都是一个类型为 $(0、\ 2n+1)$ 的接触–辛对。我们验证这三个对满足定义 4.2。它们的提升形式为

$$\widehat{\Omega}_i = d\left(\frac{r^2}{2}\alpha_i\right) + \Phi_i = r\,dr \wedge \alpha_i + \Phi_i.$$

在 $M \times \mathbb{R}_{>0}$ 上定义

$$\widehat{g} = r^2\,dr \otimes dr + g_0, \qquad T = \frac{1}{r}\partial_r,$$

使得 T 是单位向量，并且与 M方向正交。定义端omorphism 为

$$I_i T = -\xi_i, \qquad I_i X = \phi_i X + \alpha_i(X)T$$

for 从 M 提升的向量场 X。几乎接触度量 3-结构恒等式给出 e

$$I_i^2 = -\,\mathrm{Id}, \quad I_i I_j = I_k = -I_j I_i, \quad \widehat{g}(I_i U, I_i V) = \widehat{g}(U, V).$$

此外，如果 $U = X + aT$ 和 $V = Y + bT$，那么

$$\begin{aligned}\widehat{g}(U, I_iV) &= \Phi_i(X, Y) + a\alpha_i(Y) - b\alpha_i(X)\\ &= (r\,dr \wedge \alpha_i + \Phi_i)(U, V)\\ &= \widehat{\Omega}_i(U, V).\end{aligned}$$

因此，这些提升形式构成一个正四元数三元组。根据引理 4.1，它们是这些辛对的和

$$\left(d\left(\frac{r^2}{2}\alpha_i\right), \Phi_i\right).$$

因此，这些对构成一个超辛对，其典范度量恰好是 $\widehat{g}$。根据命题 3.2，重构结构是超凯勒的。应用定义 4.2，我们得出结论：$(\alpha_i,\ \Phi_i)_{i=1,\ 2,\ 3}$ 是一个超接触–辛对，其典范度量就是原度量 $g_{\mathrm{can}} = g_0$。这个超对并非径向不变。事实上，由于$R = r\partial_r = r^2T$，我们有 $I_iR = -r^2\xi_i$。向量场 ξ_i 与 r无关，因此 $(\mathcal{L}_RI_i)(R) = [R, I_iR] - I_i[R, R] = -2r^2\xi_i \neq 0$。所以它不是归一化的。其度量还满足 $\widehat{g}(R,\ \cdot) = r^3\,dr$，

特别地，根据注记 4.7, [12] 和 [13]给出了非平凡的超接触辛流形例子。现在我们构造一些紧例子，使得定理 4.6 中描述的典范局部乘积分解不能延拓为全局乘积。

设$B \to B$ 是一个连通流形，设$\widetilde{B}$是一个连通覆盖，设在其上 $\pi_1(B)$通过甲板变换作用；再设 ρ：$\pi_1(B) \to \mathrm{Diff}(F)$ 是一个同态。其整体论为 ρ 的叶状丛 是

$$\widetilde{B} \times_\rho F := (\widetilde{B} \times F)/\pi_1(B), \qquad \gamma \cdot (b, y) = (\gamma b, \rho(\gamma)y).$$

$\widetilde{\ }$该作用是自由且适当不连续的，因此 $B \times_\rho F$是一个流形，它以纤维 F纤维化于 $\widetilde{B}$之上，而切片 $B \times \{y\}$ 的像是与纤维横截的叶状结构的叶（更详细的描述见 [8, 9] ）。若 B 和 F 均紧致，则它也是紧致的。

对于一个 3-Sasakian 流形 $(P, \phi_i, \xi_i, \alpha_i, g_P)$，我们用 Aut($P$) 表示 g_P的等距变换f群，其中 $f^*\alpha_i = \alpha_i$对 $i = 1$、2、3 成立；此类映射也保持 ξ_i和 ϕ_i。对于一个超凯勒流形 (N, g_N, ω_i)，我们用 Aut(N) 表示等距变换 f群，其中$f^*\omega_i = \omega_i$对 $i = 1$、2、3 成立。对于标准 3-Sasakian球面 $S^{4n+3} \subset \mathbb{H}^{n+1}$，其 Reeb场由 i、j、k的右乘法生成，作用于左侧的群 Sp($n + 1$) 包含于 Aut(S^{4n+3}) 中（见 [7]）。对于平坦环面 $T^{4m} = \mathbb{H}^m/\Lambda$，其超凯勒结构由 $\mathbb{H}^m$诱导，所有平移以及对合 $v \mapsto -v$ 均属于 Aut(T^{4m})，因为微分形式 ω_i 的系数为常数。

命题 4.8. 设 (P^{4l+3}, g_P) 是带有接触形式 α_i 的 3-Sasakian 流形，且 (N^{4m}, g_N) 是带有基本形式 ω_i 的超凯勒流形。设 $\{B, F\} = \{P, N\}$，并设 ρ：$\pi_1(B) \to$ Aut(F) 是一个同态。则 α_i 的拉回以及 $\widetilde{\ }\omega_i$ 到 $B \times F$ 的拉回下降为微分形式，仍记为 α_i、ω_i，定义在 $M = B \times_\rho F$ 上，并且 $(\alpha_i, \omega_i)_{i=1,2,3}$ 是一个归一化超接触–辛对。其典范度量由乘积度量诱导，$E = \ker\ \omega_i$ 与 P 方向相切，而 $F = C(\alpha_i)$ 与 N 方向相切。如果 P 和 N 是紧的，则 M 也是紧的。

$\widetilde{\ }$证明。 甲板变换保持拉回到 B 上的所有结构，并且 ρ 取值于$\widetilde{\ }$Aut(F) 中。因此， $B \times F$ 上的微分形式和乘积度量在 $\pi_1(B)$ 的作用下保持不变，并下降到 M。 M 的每一点都有一个邻域，该邻域与 $B \times F$ 的一个开$\widetilde{\ }$子集等距；在该子集上，下降后的微分形式是一个 3-Sasakian 流形与一个超凯勒流形的局部乘积的微分形式。定理 4.6 的逆命题表明，$(\alpha_i,\ \omega_i)$ 是一个归一化超接触–辛对，其典范度量由乘积度量诱导。$\mathcal{E}$ 和$\mathcal{F}$ 的描述由定理 4.4 得出。□

例4.9。 设 $l \geq 0$ 和 $m \geq 1$ 为整数，并令 $\Gamma = \{\pm 1\} \subset \mathrm{Sp}(1)$ 通过 $x \mapsto -x$ 作用于 $S^{4l+3} \subset \mathbb{H}^{l+1}$，并通过 $v \mapsto -v$ 作用于一个平坦环面 T^{4m}。两个映射都是自同构，且第一个作用是自由的。取 $B = \mathbb{R}P^{4l+3} = S^{4l+3}/\Gamma$（其为 3-Sasakian），$F = T^{4m}$以及 ρ 的第二个作用，根据命题 4.8，在紧流形上得到一个归一化超接触–辛对

$$M = (S^{4l+3} \times T^{4m})/\mathbb{Z}_2, \qquad (x, v) \sim (-x, -v),$$

维数为 $4(l+m)+3$。$\mathcal{F}$经过 (x, v) 的像的叶是 $\{x\} \times T^{4m}$ 的像，它是一个环面 T^{4m}。$\mathcal{E}$经过 (x, v) 的像的叶是 $\mathbb{R}P^{4l+3}$ 的一个副本（如果 v 是 2^{4m} 个半周期之一，这些半周期满足 $v = -v$），否则是 S^{4l+3} 的一个副本。由于黎曼乘积中同一因子的各个叶都微分同胚，分裂 $TM = \mathcal{E} \oplus \mathcal{F}$不是全局乘积。更一般地，可以取 $B = S^{4l+3}/\Gamma$ 为任意有限的 $\Gamma \subset \mathrm{Sp}(1)$，其通过左标量乘法作用且作用自由，并取任意同态 $\rho\colon \Gamma \to \mathrm{Aut}(N)$ 到某个紧超凯勒流形的自同构群。

例 4.10。 设 $l \geq 0$ 和 $m \geq 1$ 为整数，设 $B = T^{4m} = \mathbb{R}^{4m}/\mathbb{Z}^{4m}$ 带有由 $\mathbb{H}^m$诱导的平坦超凯勒结构，设 $F = S^{4l+3}$ 为标准3-Sasakian球面，并令 $\rho\colon \mathbb{Z}^{4m} \to \mathrm{Sp}(l+1)$ 定义为

$$\rho(e_1) = e^{2\pi i\theta}\,\mathrm{Id}, \qquad \rho(e_a) = \mathrm{Id} \quad (a \geq 2),$$

其中 $e^{2\pi i\theta}\,\mathrm{Id}$ 通过左乘作用于 $\mathbb{H}^{l+1}$，且 $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$。根据命题 4.8，紧流形 $M = \mathbb{R}^{4m} \times_\rho S^{4l+3}$ 带有一个归一化超接触–辛对。叶 $\mathcal{F} = \mathcal{C}(\alpha_i)$ 经过 $[v, y]$ 的叶是 $\mathbb{R}^{4m} \times \{y\}$的像，而 y在 $\mathbb{Z}^{4m}$中的稳定子群是 $\{n\colon n_1 = 0\}$，因为 $e^{2\pi i n_1\theta} y = y$ 迫使 $n_1 = 0$成立。因此，$\mathcal{F}$ 的每个叶都与 $\mathbb{R} \times T^{4m-1}$ 微分同胚，且不是紧的；其闭包是 $\mathbb{R}^{4m} \times \{e^{it}y\colon t \in \mathbb{R}\}$ 的像。经过任意有限覆盖后，TM的典范分裂仍不会变成全局乘积。事实上，提升后的 $\mathcal{F}$-叶仍然非紧，而紧流形乘积的因子叶是紧的。

5. 超接触对

流形 M维数为 $2p + 2q + 2$ 上的一个 接触对 $(\alpha,\ \beta)$，类型为 $(p,\ q)$，由两个 1-形式组成，并满足

$$\alpha \wedge (d\alpha)^p \wedge \beta \wedge (d\beta)^q \neq 0, \qquad (d\alpha)^{p+1} = (d\beta)^{q+1} = 0. \tag{5.1}$$

特别地，秩 $d\alpha = 2p$ 以及 秩 $d\beta = 2q$。其特征分布 为

$$\mathcal{C}(\alpha) = \ker\alpha \cap \ker d\alpha, \qquad \mathcal{C}(\beta) = \ker\beta \cap \ker d\beta.$$

该接触对的 ***Reeb*场** $Z,\ W$ 由以下条件唯一确定：

$$\alpha(Z) = \beta(W) = 1, \quad \alpha(W) = \beta(Z) = 0, \quad \iota_Z d\alpha = \iota_Z d\beta = \iota_W d\alpha = \iota_W d\beta = 0.$$

由于 $\ker d\alpha$ 的秩为 $2q+2$ 且包含 Z，而 α 在其上不为零，因此 $\mathcal{C}(\alpha)$ 的秩为$2q+1$；类似地，$\mathcal{C}(\beta)$ 的秩为 $2p+1$。此外，$W \in \mathcal{C}(\alpha)$ 和 $Z \in \mathcal{C}(\beta)$。如果 $u \in \mathcal{C}(\alpha) \cap \mathcal{C}(\beta)$，则 u湮灭 $\alpha,\ \beta,\ d\alpha,\ d\beta$，因此 u与体积形式 (5.1) 的缩并为零，并且 $u = 0$。由于这些秩之和等于 $\dim M$，

$$TM = \mathcal{C}(\alpha) \oplus \mathcal{C}(\beta). \tag{5.2}$$

更多详情请参阅 [2, 3] 。

引理 5.1。 对于定义在 $\widehat{M} = M \times \mathbb{R}^2_{>0}$ 上的类型为 (p, q) 的接触对，在第二个因子上取坐标 (r, s)，

$$A = d\left(\frac{r^2}{2}\alpha\right), \qquad B = d\left(\frac{s^2}{2}\beta\right). \tag{5.3}$$

Then

$$\ker A = \mathcal{C}(\alpha) \oplus \mathbb{R}\partial_s, \qquad \ker B = \mathcal{C}(\beta) \oplus \mathbb{R}\partial_r. \tag{5.4}$$

其核互补，秩分别为 $2p+2$ 和 $2q+2$。因此，(A,B) 是类型为 $(p+1,q+1)$ 的辛对，并且 $A+B$ 是辛的。

证明。 与引理 4.1 的证明一样，我们对 M 上的微分形式及其拉回到 M上的形式使用相同的记号，并将 $T_{(x,r,s)}M$与 $T_xM\oplus\mathbb{R}\partial_r\oplus\mathbb{R}\partial_s$视为相同。我们有

$$A = r\,dr\wedge\alpha+\frac{r^2}{2}\,d\alpha,\qquad B = s\,ds\wedge\beta+\frac{s^2}{2}\,d\beta. \tag{5.5}$$

设 $V=X+a\partial_r+b\partial_s$，其中 $X\in T_xM$和 a，$b\in\mathbb{R}$。由 (5.5)，

$$\iota_V A = ra\,\alpha - r\alpha(X)\,dr+\frac{r^2}{2}\iota_X d\alpha. \tag{5.6}$$

假设 $\iota_V A=0$。代入 ∂_r 得 $0=-r\alpha(X)$，因此 $\alpha(X)=0$。代入 Reeb 场 Z 并利用 $\alpha(Z)=1$、$dr(Z)=0$ 及 $\iota_Z d\alpha=0$，得到 $0=ra$，因此 $a=0$。于是 (5.6) 化为 $\frac{r^2}{2}\iota_X d\alpha=0$，故 $X\in$属于 $\ker d\alpha$。因此 $X\in\mathcal{C}(\alpha)$且 $a=0$，而 b任意，因为 A 没有 ds分量。反过来，这样的每个向量都由 (5.6) 属于 $\ker A$。这证明了 $\ker A=\mathcal{C}(\alpha)\oplus\mathbb{R}\partial_s$。同理，我们得到 $\ker B=\mathcal{C}(\beta)\oplus\mathbb{R}\partial_r$。由 (5.2)，

$$\ker A\oplus\ker B=\mathcal{C}(\alpha)\oplus\mathcal{C}(\beta)\oplus\mathbb{R}\partial_r\oplus\mathbb{R}\partial_s=T\widehat{M}.$$

由于秩$\mathcal{C}(\alpha)=2q+1$ 以及秩 $\mathcal{C}(\beta)=2p+1$，核的秩分别为 $2q+2$ 和 $2p+2$；由于 $\dim\widehat{M}=2p+2q+4$，我们得到秩 $A=2p+2$ 和秩 $B=2q+2$。由于 $(dr\wedge\alpha)^2=0$以及 $(d\alpha)^{p+1}=0$，(5.5) 的二项式展开恰如 (4.7) 中所示，给出

$$A^{p+1}=\frac{(p+1)\,r^{2p+1}}{2^p}\,dr\wedge\alpha\wedge(d\alpha)^p,\qquad A^{p+2}=0,$$

同理

$$B^{q+1}=\frac{(q+1)\,s^{2q+1}}{2^q}\,ds\wedge\beta\wedge(d\beta)^q,\qquad B^{q+2}=0.$$

因此

$$A^{p+1}\wedge B^{q+1}=-\frac{(p+1)(q+1)\,r^{2p+1}s^{2q+1}}{2^{p+q}}\,dr\wedge ds\wedge\alpha\wedge(d\alpha)^p\wedge\beta\wedge(d\beta)^q,$$

根据 (5.1)，该式处处不为零。两个微分形式都是闭的，因为它们是恰当的。因此，(A,B) 是一个类型为 $(p+1,q+1)$ 的辛对。最后，在 $(A+B)^{p+q+2}$ 的展开中，如同 (3.2) 中一样，只有包含 $A^{p+1}\wedge B^{q+1}$ 的项保留下来，于是 $A+B$ 是辛的。□

定义 5.2。 设 $(\alpha_i,\ \beta_i)$、$i=1,2,3$ 是 M 上的三个接触对，且 $\pi\colon M=M\times\mathbb{R}^2_{>0}\longrightarrow M$ 是投影。若这些对

$$\widehat{\omega}_i:=d\left(\frac{r^2}{2}\pi^*\alpha_i\right),\qquad \widehat{\eta}_i:=d\left(\frac{s^2}{2}\pi^*\beta_i\right),\qquad i=1,2,3,$$

按照定义 3.1 的意义构成 M 上的超辛对。

根据引理 5.1，每个 $(\widehat{\omega}_i,\ \widehat{\eta}_i)$ 已经是一个辛对。若原始对的类型为 $(p_i,\ q_i)$，则其提升的类型为 $(p_i+1,\ q_i+1)$。因此，定义 5.2 的附加要求是

$$\widehat{\Omega}_i=\widehat{\omega}_i+\widehat{\eta}_i=d\left(\frac{r^2}{2}\pi^*\alpha_i+\frac{s^2}{2}\pi^*\beta_i\right),\qquad i=1,2,3, \tag{5.7}$$

构成一个正四元数三元组。

设 $(\widehat{g},\ I_1,\ I_2,\ I_3)$ 为命题 3.2 给出的提升超辛对的典范超凯勒结构，并令 $R=r\partial_r$, $S=s\partial_s$。若超接触对满足径向不变，则称其为径向不变；若它径向不变且$\mathcal{L}_R I_i=0$ 对每个 i 都成立，则称其为归一化。

$$\widehat{g}(R,\cdot)=r\,dr,\qquad \widehat{g}(S,\cdot)=s\,ds. \tag{5.8}$$

Its 典范度量 是子流形 $M\cong M\times\{(1,1)\}\subset M$上诱导的度量 .

注 5.3. 径向不变性的定义并不偏向 R 而非 S：对于超接触对，$\mathrm{L}_R I_i = 0$ 当且仅当对所有 $i = 1, 2, 3$，$\mathrm{L}_S I_i = 0$。事实上，$R + S$的流为 $(x, r, s) \mapsto (x, e^t r, e^t s)$，它将三个微分形式 (5.7) 都乘以相同的因子 e^{2t}。与引理 4.5 证明开头的情形一样，该因子在 $I_i = -(\widehat{\ }\Omega_j^\flat)^{-1} \circ \widehat{\ }\Omega_k^\flat$ 中相消，因此 $\mathrm{L}_{R+S} I_i = 0$，也就是说，$\mathrm{L}_S I_i = -\mathrm{L}_R I_i$。等价地，可以先对 $(A_i, B_i, R) = (\widehat{\omega}_i, \widehat{\eta}_i, R)$ 应用一次定理 2.5，再对 $(A_i, B_i, R) = (\widehat{\eta}_i, \widehat{\omega}_i, S)$ 应用一次：两者都得到相同的条件 (iii)。

命题 5.4. 设$(\alpha_i, \beta_i)_{i=1,2,3}$ 是 M上的一个超接触对。则维数 $M = 4n + 2$ 对某个 $n \geq 1$成立，且 $TM \oplus \mathbb{R}^2$ 带有四元数厄米结构，其中 $\mathbb{R}^2$ 表示 M上的平凡实平面丛。此外，这六个1-形式 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ 逐点线性无关。

证明。 根据命题 3.2，双重辛化 $\widehat{M} = M \times \mathbb{R}^2_{>0}$ 带有其典范的$\widehat{\ }$超凯勒结构（$\widehat{g}, I_1, I_2, I_3$）。因此，$\dim M \equiv 0$（模 4）且 $\dim M \equiv 2$（模 4）。将切丛及这些张量限制到单位截面$j_{1,1}(x) = (x, 1, 1)$上，得到

$$j_{1,1}^* T\widehat{M} \cong TM \oplus \mathbb{R}\partial_r \oplus \mathbb{R}\partial_s \cong TM \oplus \mathbb{R}^2,$$

具有诱导的四元数厄米结构。沿着单位截面，径向向量场$R = r\partial_r$ 和 $S = s\partial_s$ 满足

$$\widehat{\Omega}_i(R, S) = 0, \qquad \iota_R \widehat{\Omega}_i = \pi^* \alpha_i, \qquad \iota_S \widehat{\Omega}_i = \pi^* \beta_i.$$

因此 $\pi^* \alpha_i = -\widehat{g}(I_i R, \cdot)$ 和 $\pi^* \beta_i = -\widehat{g}(I_i S, \cdot)$。四元数厄米恒等式推出

$$\widehat{g}(I_i R, I_j R) = \delta_{ij} \widehat{g}(R, R), \qquad \widehat{g}(I_i S, I_j S) = \delta_{ij} \widehat{g}(S, S),$$

$\widehat{\ }$，并且利用 $\Omega_k(R, S) = 0$,

$$\widehat{g}(I_i R, I_j S) = \delta_{ij} \widehat{g}(R, S).$$

因此，六个向量 $I_1 R$，$I_1 S$，$I_2 R$，$I_2 S$，$I_3 R$，$I_3 S$的格拉姆矩阵由三个如下矩阵组成：

$$\begin{pmatrix} \widehat{g}(R, R) & \widehat{g}(R, S) \\ \widehat{g}(R, S) & \widehat{g}(S, S) \end{pmatrix}.$$

该矩阵是正定的，因为 R 和 S 线性无关。因此，这六个向量及其度量对偶也线性无关。由于后者是 M上六个微分形式的拉回，这些微分形式逐点线性无关。特别地，$\dim M \geq 6$，由此完成证明。□

注记 5.5. 假设这三个接触对 (α_i, β_i) 的类型为 $(h_i, 0)$。由于对每个 i，$\dim M = 2h_i + 2$，因此我们有 $h_1 = h_2 = h_3 =: h$。根据命题 5.4，$h = 2n \geq 2$。每一对都确定了如下 2-形式

$$\sigma_i = d\alpha_i + \alpha_i \wedge \beta_i.$$

由于 $d\beta_i = 0$，我们有

$$d\sigma_i = \beta_i \wedge \sigma_i, \qquad \sigma_i^{h+1} = (h + 1)\alpha_i \wedge (d\alpha_i)^h \wedge \beta_i \neq 0.$$

因此，σ_i 是李形式为 β_i 的局部共形辛结构，如 [6, 命题 3.1]所述。根据命题 5.4，这三个李形式在每一点都线性无关。这与 [16], 中的局部共形超凯勒结构不同，在那些结构中，基本形式满足 $d\Omega_i = \theta \wedge \Omega_i$，且具有相同的闭李形式 θ。

定理 5.6. 超接触对是径向不变的，当且仅当

$$\mathcal{C}(\alpha_1) = \mathcal{C}(\alpha_2) = \mathcal{C}(\alpha_3) = \mathcal{F}, \qquad \mathcal{C}(\beta_1) = \mathcal{C}(\beta_2) = \mathcal{C}(\beta_3) = \mathcal{E}. \tag{5.9}$$

In 在此情形下，三对都具有相同的类型 $(2l + 1, 2m + 1)$，其中 l、$m \geq 0$ 为某些值，并且

$$TM = \mathcal{E} \oplus \mathcal{F}, \qquad \operatorname{rank} \mathcal{E} = 4l + 3, \qquad \operatorname{rank} \mathcal{F} = 4m + 3.$$

局部地，$M = P \times Q$，所有 α_i 都是从 P 上的接触形式拉回的，而所有 β_i 都是从 Q 上的接触形式拉回的。提升的超凯勒度量是 P 的径向不变超凯勒辛化与 Q 的径向不变超凯勒辛化的黎曼乘积。

证明。设 (p_i, q_i) 是第 i 个接触对的类型。根据定义 5.2，微分形式

$$\widehat{\omega}_i = d\left(\frac{r^2}{2}\alpha_i\right), \qquad \widehat{\eta}_i = d\left(\frac{s^2}{2}\beta_i\right)$$

de在 $\widehat{M} = M \times \mathbb{R}^2_{>0}$ 上定义一个超辛对。根据引理 5.1，在 $\widehat{M}$ 的每一点 ，

$$\ker \widehat{\omega}_i = \mathcal{C}(\alpha_i) \oplus \mathbb{R}\partial_s, \qquad \ker \widehat{\eta}_i = \mathcal{C}(\beta_i) \oplus \mathbb{R}\partial_r; \tag{5.10}$$

这些核互为补空间，且微分形式的秩分别为 $2p_i + 2$ 和 $2q_i + 2$。由于 α_i、β_i 和 s 不依赖于 r，

$$\mathcal{L}_R\widehat{\omega}_i = d\left(\mathcal{L}_R\left(\frac{r^2}{2}\alpha_i\right)\right) = 2\widehat{\omega}_i, \qquad \mathcal{L}_R\widehat{\eta}_i = 0.$$

因此定理 2.5 可应用于 $A_i = \widehat{\omega}_i$ 和 $B_i = \widehat{\eta}_i$：当且仅当 $\ker \widehat{\omega}_i$ 和 $\ker \widehat{\eta}_i$ 都与 i 无关时，径向不变性成立。由 (5.10) 可知，这恰好就是 (5.9)。这就证明了等价性。以下假设这些条件成立，因此根据 (5.2)，$TM = \mathcal{E} \oplus \mathcal{F}$。提升的公共特征分布为

$$\widehat{\mathcal{E}} = \ker \widehat{\eta}_i = \pi^*\mathcal{E} \oplus \mathbb{R}\partial_r, \qquad \widehat{\mathcal{F}} = \ker \widehat{\omega}_i = \pi^*\mathcal{F} \oplus \mathbb{R}\partial_s,$$

其中，拉回子丛被视为其水平提升。由定理 3.4，它们相对于 $\widehat{g}$ 正交、具有四元数结构且平行；特别是它们的秩均可被 4 整除。根据秩-零化度定理，

$$\operatorname{rank}\widehat{\mathcal{E}} = \dim\widehat{M} - \operatorname{rank}\widehat{\eta}_i = 2p_i + 2, \qquad \operatorname{rank}\widehat{\mathcal{F}} = \dim\widehat{M} - \operatorname{rank}\widehat{\omega}_i = 2q_i + 2.$$

^ ^两个秩都为正，因为 $\mathcal{E} \ni \partial_r$ 和 $\mathcal{F} \ni \partial_s$。因此，对于某个与 i 无关的 l, $m \geq 0$，有 $2p_i+2 = 4(l+1)$ 和 $2q_i+2 = 4(m+1)$，也就是说，

$$p_i = 2l + 1, \quad q_i = 2m + 1, \quad \operatorname{rank}\mathcal{E} = 2p_i + 1 = 4l + 3, \quad \operatorname{rank}\mathcal{F} = 2q_i + 1 = 4m + 3.$$

两个分布都是可积的。对于 $\mathcal{F} = \mathcal{C}(\alpha_1)$，这正是定理 4.4 证明中的计算：若 $X, Y \in \Gamma(\mathcal{F})$，则 $\alpha_1([X,Y]) = -d\alpha_1(X,Y) = 0$ 且 $\iota_{[X,Y]}d\alpha_1 = \mathcal{L}_X(\iota_Y d\alpha_1) - \iota_Y(\mathcal{L}_X d\alpha_1) = 0$，因为 $\mathcal{L}_X d\alpha_1 = d\iota_X d\alpha_1 = 0$。对 $\mathcal{E} = \mathcal{C}(\beta_1)$ 进行同样的计算即可。由于 $\mathcal{E} \cap \mathcal{F} = \{0\}$，弗罗贝尼乌斯定理给出一个局部乘积（经过缩小后）

$$U \cong P^{4l+3} \times Q^{4m+3}, \qquad \mathcal{E}|_U = TP, \qquad \mathcal{F}|_U = TQ,$$

具有连通因子。对于 $Y \in \Gamma(\mathcal{F})$ 和 $X \in \Gamma(\mathcal{E})$，

$$\alpha_i(Y) = 0, \quad \mathcal{L}_Y\alpha_i = d(\alpha_i(Y)) + \iota_Y d\alpha_i = 0, \quad \beta_i(X) = 0, \quad \mathcal{L}_X\beta_i = d(\beta_i(X)) + \iota_X d\beta_i = 0.$$

与定理 4.4 的证明相同，可得 $\alpha_i = \operatorname{pr}_P^*\alpha_i^P$ 和 $\beta_i = \operatorname{pr}_Q^*\beta_i^Q$，其中 α_i^P 是定义在 P 上的 1-形式，而 β_i^Q 是定义在 Q 上的 1-形式。第 i 对的体积形式 (5.1) 除了符号差异外，等于 $\operatorname{pr}_P^*(\alpha_i^P \wedge (d\alpha_i^P)^{2l+1})$ 与 $\operatorname{pr}_Q^*(\beta_i^Q \wedge (d\beta_i^Q)^{2m+1})$ 的外积，其次数分别为 $\dim P$ 和 $\dim Q$。因此，两个因子处处非零，且 α_i^P、β_i^Q 是接触形式。在诱导的识别下

$$U \times \mathbb{R}^2_{>0} \cong (P \times \mathbb{R}_{>0}) \times (Q \times \mathbb{R}_{>0}),$$

其中 r 是第一个 $\mathbb{R}_{>0}$ 的坐标，s 是第二个的坐标，公共分布^ ^为$\mathcal{E} = T($ $P \times \mathbb{R}_{>0})$和$\mathcal{F} = T(Q \times \mathbb{R}_{>0})$，两族提升形式分别从这两个因子拉回，在这两个因子上它们写作

$$\Omega_i^P = d\left(\frac{r^2}{2}\alpha_i^P\right), \qquad \Omega_i^Q = d\left(\frac{s^2}{2}\beta_i^Q\right).$$

定理 3.4在 $P \times \mathbb{R}_{>0}$ 上给出超凯勒结构$(\widehat{g}_P,\ J_i)$，并在 $Q \times \mathbb{R}_{>0}$上给出超凯勒结构$(\widehat{g}_Q,\ K_i)$，其基本形式为Ω_i^P和Ω_i^Q ，并且

$$\widehat{g} = \widehat{g}_P + \widehat{g}_Q, \qquad I_i = J_i \oplus K_i.$$

由于 $\mathcal{L}_R\Omega_i^P = 2\Omega_i^P$ 以及 $\mathcal{L}_S\Omega_i^Q = 2\Omega_i^Q$ ，引理 4.5 证明开头的计算给出 $\mathcal{L}_R J_i = 0$ 和 $\mathcal{L}_S K_i = 0$。因此，两个因子都是径向不变的超凯勒辛化。□

定理 5.7。 一个正规化超接触对 $(\alpha_i, \beta_i)_{i=1,2,3}$ 在局部上带有其典范度量，是一个黎曼乘积

$$(M, g) = (P^{4l+3}, g_P) \times (Q^{4m+3}, g_Q) \tag{5.11}$$

由两个 3-*Sasakian*流形构成，并且 α_i、 β_i 分别是它们相应接触形式的拉回。在双重辛化上，

$$\widehat{g} = dr \otimes dr + r^2 g_P + ds \otimes ds + s^2 g_Q. \tag{5.12}$$

反之，每一个这样的局部乘积，只要微分形式在全局上有定义，都是一个正规化超接触对。

证明。 设 $\widehat{g}$ 为提升的超辛对的典范度量， g 为其在 $r = s = 1$上的限制。由于超接触对是径向不变的，定理 5.6 适用： M 的每一点都有一个邻域

$$U \cong P^{4l+3} \times Q^{4m+3}$$

其中 $\alpha_i = \mathrm{pr}_P^*\,\alpha_i^P$和 $\beta_i = \mathrm{pr}_Q^*\,\beta_i^Q$ ，且在 $(P \times \mathbb{R}_{>0})$ 上 $\times (Q \times \mathbb{R}_{>0})$

$$\widehat{g} = \widehat{g}_P + \widehat{g}_Q,$$

其中， $\widehat{g}_P$ 由微分形式 $d(r^2\alpha_i^P/2)$ 重构，而 $\widehat{g}_Q$ 由微分形式 $d(s^2\beta_i^Q/2)$ 重构。向量场 R 与第一个因子相切， S 与第二个因子相切，且二者均被另一个因子的度量湮灭。因此，归一化 (5.8) 限制为 $\widehat{g}_P(R, \cdot) = r\,dr$ 和$\widehat{g}_Q(S, \cdot) = s\,ds$。分别对这两个因子应用引理 4.5，得

$$\widehat{g}_P = dr \otimes dr + r^2 g_P, \qquad \widehat{g}_Q = ds \otimes ds + s^2 g_Q,$$

其中 (P, g_P) 和 (Q, g_Q) 分别是具有定义接触形式 α_i^P 和 β_i^Q 的 3-Sasakian 结构。这证明了 (5.12)，而限制到 $r = s = 1$ 得到 $g = g_P + g_Q$，即 (5.11)。

反之，假设全局定义的微分形式在局部上如陈述中所述，来自两个 3-Sasakian 流形的乘积。该形式

$$\alpha_i \wedge (d\alpha_i)^{2l+1} \wedge \beta_i \wedge (d\beta_i)^{2m+1}$$

是乘积上的一个体积形式，因为它是两个因子的接触体积形式的外积，并且 $(d\alpha_i)^{2l+2} = (d\beta_i)^{2m+2} = 0$。因此，每个 (α_i, β_i) 都是类型为 $(2l+1, 2m+1)$ 的接触对。两个 3-Sasakian 因子的锥都是超凯勒流形，其度量为 $dr \otimes dr + r^2 g_P$and $ds \otimes ds + s^2 g_Q$，基本形式分别为 $d(r^2\alpha_i^P/2)$ 和 $d(s^2\beta_i^Q/2)$（见 [7]）。定理 3.4 的逆命题表明，将这些微分形式拉回到两个锥的乘积上，便定义了一个具有典范度量 (5.12) 和基本形式 (5.7) 的超辛对。根据定义 5.2，原来的各对构成超接触对。它们的特征分布 $\mathcal{C}(\alpha_i) = TQ$ and $\mathcal{C}(\beta_i) = TP$ 不依赖于 i，因此定理 5.6 给出了径向不变性。对于双重辛化上的任意切向量 V，

$$\widehat{g}(R, V) = dr(R)\,dr(V) = r\,dr(V), \qquad \widehat{g}(S, V) = ds(S)\,ds(V) = s\,ds(V),$$

因为 g_P 和 g_Q 的拉回消灭径向向量，且 $ds(R) = dr(S) = 0$。因此该对是归一化的。最后，由微分形式重构出的度量和端omorphism由它们唯一确定，因此局部构造在重叠处一致，且上述条件在全局成立。□

命题 5.8. 设 M上有一个正规化超接触对$(\alpha_i, \beta_i)_{i=1,2,3}$，其典范度量为 g。设 Z_i, W_i 为向量场，F_i 为由下式定义的 TM 的端*omorphism*

$$g(Z_i, \cdot) = \alpha_i, \qquad g(W_i, \cdot) = \beta_i, \qquad g(\cdot, F_i\,\cdot) = \frac{1}{2}\,(d\alpha_i + d\beta_i).$$

那么，Z_i, W_i是(α_i, β_i)的 ***Reeb*** 场，六个场 $Z_1, Z_2, Z_3, W_1, W_2, W_3$是正交归一的，并且对于每个循环的$(i, j, k)$

$$F_i^2 = -\operatorname{Id} + \alpha_i \otimes Z_i + \beta_i \otimes W_i, \tag{5.13}$$

$$F_i F_j = F_k + \alpha_j \otimes Z_i + \beta_j \otimes W_i, \tag{5.14}$$

$$F_i Z_j = Z_k, \quad F_i W_j = W_k, \tag{5.15}$$

$$d\alpha_i + d\beta_i = 2g(\cdot, F_i\cdot). \tag{5.16}$$

此外，对于每个循环的(i, j, k)，

$$[Z_i, Z_j] = 2Z_k, \qquad [W_i, W_j] = 2W_k, \tag{5.17}$$

并且，对于所有 $a, b \in \{1, 2, 3\}$，$[Z_a, W_b] = 0$。此外，对于每个循环的(i, j, k)，

$$\alpha_i = \frac{1}{2}\iota_{Z_j} d\alpha_k = -\frac{1}{2}\iota_{Z_k} d\alpha_j, \qquad \beta_i = \frac{1}{2}\iota_{W_j} d\beta_k = -\frac{1}{2}\iota_{W_k} d\beta_j, \tag{5.18}$$

并且，对于所有 $a, b \in \{1, 2, 3\}$，

$$\iota_{Z_a} d\beta_b = \iota_{W_a} d\alpha_b = 0. \tag{5.19}$$

最后，若 $\pi_{\mathcal{E}}, \pi_{\mathcal{F}}$ 是与 $TM = \mathcal{E} \oplus \mathcal{F}$ 相关联的投影，则

$$(\nabla_X F_i)Y = g(\pi_{\mathcal{E}} X, \pi_{\mathcal{E}} Y) Z_i - \alpha_i(Y)\pi_{\mathcal{E}} X + g(\pi_{\mathcal{F}} X, \pi_{\mathcal{F}} Y) W_i - \beta_i(Y)\pi_{\mathcal{F}} X. \tag{5.20}$$

证明。张量 Z_i、W_i、F_i是全局定义的，因为 g是非退化的。设 (ϕ_i^P、ξ_i^P、α_i^P、g_P) 和 (ϕ_i^Q、ξ_i^Q、β_i^Q、g_Q) 是定理 5.7 中局部因子的 3-Sasakian 结构。由于$g = g_P + g_Q$，$d\alpha_i^P = 2g_P(\cdot\ \phi_i^P\cdot)$ 和 $d\beta_i^Q = 2g_Q(\cdot\ \phi_i^Q\cdot)$，定义恒等式给出局部表达式

$$Z_i = \xi_i^P, \qquad W_i = \xi_i^Q, \qquad F_i = \phi_i^P \oplus \phi_i^Q.$$

等价地，在 $r = s = 1$ 上，这些张量可由双锥的超凯勒结构恢复，具体为

$$Z_i = -I_i R, \qquad W_i = -I_i S, \qquad F_i X = I_i X - \alpha_i(X)R - \beta_i(X)S.$$

由于 α_i 来自 P，而 β_i 来自 Q，场 ξ_i^P、ξ_i^Q 满足 (α_i、β_i) 的 Reeb 场的定义条件，因此 Z_i、W_i就是这些 Reeb 场。它们是正交归一的，因为ξ_i^P在 (P、g_P) 中正交归一，ξ_i^Q 在 (Q、g_Q) 中正交归一，且两个因子彼此正交。由定理 3.4 给出的提升的超辛对的公共投影算子，在 TM处的 $r = s = 1$上限制为 $\pi_{\mathcal{E}}$，而互补投影算子限制为 $\pi_{\mathcal{F}}$。

每个因子上的几乎接触度量 3-结构恒等式给出 (5.13)–(5.15)；例如，$I_i I_j X = I_k X$ 的切向分量为 (5.14)。恒等式 (5.16) 由定义成立。Sasakian 恒等式 $\nabla_X^P \xi_i^P = -\phi_i^P X$ 如定理 4.6 的证明中所示，给出$[\xi_i^P, \xi_j^P] = -\phi_j^P \xi_i^P + \phi_i^P \xi_j^P = 2\xi_k^P$，在 Q上同样成立；这就证明了 (5.17)。从不同因子提升的向量场彼此对易，因此有 $[Z_a, W_b] = 0$。在每个因子上进行定理 4.6 中证明 (4.23) 的计算，可得 (5.18)。恒等式 (5.19) 成立，是因为 $d\beta_b$ 从 Q 拉回，而 Z_a 与 P相切；同时，$d\alpha_b$ 从 P 拉回，而 W_a 与 Q相切。最后，$g = g_P + g_Q$ 的 Levi-Civita 联络就是乘积联络；它保持 $\mathcal{E}$ 和 $\mathcal{F}$不变，并且在每个因子上应用 (1.1) 得到 (5.20)。□

现在我们利用叶状丛构造一些紧例子，对于这些例子，典范局部乘积分解无法扩展为全局乘积。正如我们将要看到的，在超接触对的情形中会出现一种特殊现象。沿用第4节的记号，我们有以下命题，其证明与命题 4.8 的证明类似。

命题 *5.9.* 设 (B^{4l+3}, g_B) 和 (F^{4m+3}, g_F) 是 *3-Sasakian* 流形，其接触形式分别为 α_i^B和 β_i^F，并设 $\rho : \pi_1(B) \to Aut(F)$ 是一个同态。那么，在 $\widetilde{B} \times F$ 上的微分形式 $\sim$ $\sim$ $pr_1^*\,\alpha_i^B$和 $pr_2^*\,\beta_i^F$（其中 α_i^B是 α_i^B 的拉回）下降为 *1*-形式 α_i、β_i，定义在$\sim M = B \times_\rho F$上，并且 $(\alpha_i, \beta_i)_{i=1,2,3}$ 是一个正规化超接触对。其典范度量由 $g_{\widetilde{B}} + g_F$ 诱导。分布 $C(\alpha_i)$ 与纤维相切，而 $C(\beta_i)$ 与$\sim$ 由切片 $B \times \{y\}$定义的叶状结构相切。如果 B和 F是紧的，则 M 也是紧的。

例 5.10. 设 $\Gamma \subset$Sp(1) 是一个非平凡有限子群，例如循环群$\mathbb{Z}_k$ 或二元多面体群。令 Γ 通过 $q \cdot$Id 的左乘作用于 $\mathbb{H}^{n+1}$， $q \in \Gamma$。此作用属于 Sp$(n+1)$，且在 S^{4n+3} 上是自由的：若 $qx = x$ 且 $x \neq 0$，则 $q = 1$。取

$$B = S^{4l+3}/\Gamma, \qquad F = S^{4m+3}, \qquad \rho : \Gamma \hookrightarrow \mathrm{Sp}(1) \subset \mathrm{Sp}(m+1),$$

使得 $\widetilde{B} = S^{4l+3}$ 和 $\pi_1(B) = \Gamma$。根据命题 5.9,

$$M = (S^{4l+3} \times S^{4m+3})/\Gamma, \qquad q \cdot (x, y) = (qx, qy),$$

是一个维数为 $4(l+m)+6$ 的紧流形，且带有一个正规化超接触对。最小的情形是 $l = m = 0$，它给出六维流形 $(S^3 \times S^3)/\Gamma$。

分解 $TM = \mathcal{E} \oplus \mathcal{F}$ 并非全局黎曼乘积。事实上，经过 $[x, y]$ 的$\mathcal{E}$叶是 $S^{4l+3} \times \{y\}$ 的像，而经过 $[x', y']$ 的$\mathcal{F}$叶是$\{x'\} \times S^{4m+3}$的像。它们恰好交于点 $[qx', y]$、 $q \in \Gamma$，且这些点两两不同，因为 Γ 在两个球面上的作用都是自由的。因此，$\mathcal{E}$ 的每个叶都与$\mathcal{F}$ 的每个叶恰好交于$|\Gamma| > 1$ 个点；而在黎曼乘积 $P \times Q$ 中，叶 $P \times \{y\}$ 和 $\{x\} \times Q$相交于一点。

每个承载正规化超接触对的紧致连通流形，都是紧致单连通 3-Sasakian 流形乘积的有限对角商。

命题 5.11. 设紧致连通流形 M 上有一个正规化超接触对(α_i, β_i)，其典范度量为 g。那么 $\pi_1(M)$ 是有限的，并且

$$M \cong (\widetilde{P} \times \widetilde{Q})/\Gamma, \qquad \Gamma \cong \pi_1(M),$$

$\sim$ $\sim$其中 P 和 Q 是紧致单连通的3-*Sasakian* 流形， Γ 是$\mathrm{Aut}(P) \times \mathrm{Aut}(Q)$ 的有限子群 $\sim$ $\sim$ $\sim$ $\sim$，它在 $P \times Q$ 上自由作用。该微分同胚将 g 识别为由 $g_{\widetilde{P}} + g_{\widetilde{Q}}$ 诱导的度量 $\sim$ $\sim$，并将 α_i、 β_i 分别识别为由 P 和 Q 的接触形式诱导的微分形式 $\sim$ $\sim$。若投影 $\Gamma \to \mathrm{Aut}(P)$ 是单射，且其像 Γ_P 在 P 上自由作用，$\sim$ $\sim$ $\sim$，则 M 是位于 P/Γ_P 上的叶状丛 $P \times_\rho Q$，其中 ρ 是第二个投影。

证明。 我们分几个步骤进行。

根据定理 5.6， $TM = \mathcal{E} \oplus \mathcal{F}$，其中 $\mathcal{E} =$C(β_i)，且 $\mathcal{F} =$C(α_i)，对每个 i均成立。根据定理 5.7, M中的每一点都有一个邻域 $U \cong P \times Q$，在该邻域上 $g = g_P + g_Q$，并且 $\mathcal{E} = TP$且$\mathcal{F} = TQ$。因此，$\mathcal{E}$ 与$\mathcal{F}$ 是 g-正交的。黎曼乘积的 Levi-Civita 联络是乘积联络，它保持两个因子的切丛不变。

令$\sim M: \to \widetilde{M}$ 为万有覆盖，并令 $\widetilde{g}$、 $\widetilde{\alpha}_i$、 β_i 分别为 g、 α_i、 β_i的拉回。定理 5.6 和定理 5.7 的所有局部结论在 M上均成立，因为 π 是保持$\sim$ $\sim$ $\sim$ $\sim$ $\sim$微分形式的局部等距。特别地， $TM = \mathcal{E} \oplus \mathcal{F}$，其中$\mathcal{E} = \pi^*\mathcal{E}$ 与$\mathcal{F} = \pi^*\mathcal{F}$ 正交且平行。由于 M 是紧的， g 是完备的，因此 $\widetilde{g}$也是完备的。根据 de Rham 分解定理，将其应用于完备的单连通流形（M， $\widetilde{g}$）以及平行正交的$\sim$ $\sim$分解$\mathcal{E} \oplus \mathcal{F}$，存在一个等距映射

$$\Phi : (\widetilde{P} \times \widetilde{Q},\, g_{\widetilde{P}} + g_{\widetilde{Q}}) \longrightarrow (\widetilde{M}, \widetilde{g}),$$

$\sim$ $\sim$ $\sim$ $\sim$ $\sim$其中， P和 Q 分别是$\mathcal{E}$和$\mathcal{F}$的叶，带有各自的诱导度量； $d\Phi$ 将 $TP \oplus 0$$\sim$ $\sim$ $\sim$ $\sim$ $\sim$ $\sim$映到$\mathcal{E}$，并将 $0 \oplus TQ$ 映到$\mathcal{F}$。我们通过 Φ将 M与 $P \times Q$ 等同。$\mathcal{E}$的叶是$\sim$ $\sim$切片 $P \times \{q\}$，$\mathcal{F}$的叶是切片$\{p\} \times Q$，且两个因子都是完备的。由于$\sim \pi_1(M) = 1$，两个因子都是单连通的。

设 X 是 $\mathsf{F} = \mathsf{C}(\widetilde{\alpha}_i)$ 的一个截面。于是 $\iota_X \widetilde{\alpha}_i = 0$ 和 $\iota_X d\widetilde{\alpha}_i = 0$，故由Cartan的公式，$\mathrm{L}_X \widetilde{\alpha}_i = 0$。因此 $\widetilde{\alpha}_i$ 是浸没 $\mathrm{pr}_{\widetilde{P}}\colon P \times Q \to P$ 的基本形式，其纤维 $\{p\} \times Q$ 是连通的。因此 $\widetilde{\alpha}_i = \mathrm{pr}_{\widetilde{P}}^* a_i$，其中 $a_i = \iota_q^* \widetilde{\alpha}_i$ 对应于嵌入 $\iota_q \colon P \to P \times \{q\}$，且 a_i 不依赖于 q。同理，$\beta_i = \mathrm{pr}_{\widetilde{Q}}^* b_i$，其中 b_i 是 Q 上的一个1-形式。因此，$(P, g_{\widetilde{P}})$ 连同微分形式 a_i，是维数为 $4l+3$、具有接触形式 a_i 的3-Sasakian流形。同样，Q 是维数为 $4m+3$、具有接触形式 b_i 的3-Sasakian流形。

维数为 $4n+3$ 的 3-Sasakian 流形是 Einstein 流形，其 $\mathrm{Ric} = (4n+2) g$（见 [7]）。因此，P 是完备的，且 $\mathrm{Ric}_{\widetilde{P}} = (4l+2) g_{\widetilde{P}} =$（维数 $P-1$）$g_{\widetilde{P}}$，并且 $4l+2 > 0$。根据 Myers定理，P 是紧致的，其直径至多为 π。同样的论证表明，Q 是紧致的，$\widetilde{\ }$ 也如此。因此，$\pi_1(M)$ 是有限的。

令 $\Gamma \cong \pi_1(M)$ 为甲板变换群，并令 $\gamma \in \Gamma$。那么，γ 是 $\widetilde{g}$ 的等距变换，具有 $\gamma^* \widetilde{\alpha}_i = \widetilde{\alpha}_i$ 和 $\gamma^* \beta_i = \beta_i$，因为这些张量是从 M 拉回的。因此，$d\gamma$ 保持 $\mathcal{E} = \mathcal{C}(\beta_i)$ 和 $\mathcal{F} = \mathcal{C}(\widetilde{\alpha}_i)$ 不变，并且 γ 将叶映射为叶。因此，$\mathrm{pr}_{\widetilde{Q}} \circ \gamma(p,q)$ 仅取决于 q，而 $\mathrm{pr}_{\widetilde{P}} \circ \gamma(p,q)$ 仅取决于 p。固定 (p_0, q_0) 并设

$$f_P(p) = \mathrm{pr}_{\widetilde{P}}\, \gamma(p, q_0), \qquad f_Q(q) = \mathrm{pr}_{\widetilde{Q}}\, \gamma(p_0, q),$$

我们得到带有 $\gamma = f_P \times f_Q$ 的光滑映射。对 γ^{-1} 应用相同的论证可知，f_P 和 f_Q 是微分同胚。由于 $d\gamma = df_P \oplus df_Q$ 对于 $g_{\widetilde{P}} + g_{\widetilde{Q}}$ 是正交的，因此 f_P 和 f_Q 都是等距变换。此外，

$$\mathrm{pr}_{\widetilde{P}}^* a_i = \widetilde{\alpha}_i = \gamma^* \widetilde{\alpha}_i = \gamma^* \,\mathrm{pr}_{\widetilde{P}}^* a_i = \mathrm{pr}_{\widetilde{P}}^* f_P^* a_i,$$

和 $\mathrm{pr}_{\widetilde{P}}$ 是满射浸没，因此 $f_P^* a_i = a_i$。类似地，$f_Q^* b_i = b_i$。于是 $f_P \in \mathrm{Aut}(P)$ 和 $f_Q \in \mathrm{Aut}(Q)$。映射 $\gamma \mapsto (f_P, f_Q)$ 是一个从 Γ 到 $\mathrm{Aut}(P) \times \mathrm{Aut}(Q)$ 的单射群同态，其像在 $P \times Q$ 上自由作用。最后，$M = M/\Gamma = (P \times Q)/\Gamma$，而且 g、α_i、β_i 是由 $g_{\widetilde{P}} + g_{\widetilde{Q}}$、$\mathrm{pr}_{\widetilde{P}}^* a_i$ 和 $\mathrm{pr}_{\widetilde{Q}}^* b_i$ 诱导的张量。

现在假设 $h\colon \Gamma \to \mathrm{Aut}(P)$、$\gamma \mapsto f_P$ 是单射的，且其像 Γ_P 在 P 上自由作用。有限群 Γ_P 通过保持 a_i 的等距变换自由作用。因此，$B = P/\Gamma_P$ 是一个紧致的 3-Sasakian 流形。其万有覆盖是 $P \to B$，因为 P 是单连通的，并且 $\pi_1(B) \cong \Gamma_P$。令 $\rho = \mathrm{pr}_2 \circ h^{-1}\colon \Gamma_P \to \mathrm{Aut}(\widetilde{Q})$，从而对每个 $f \in \Gamma_P$，$h^{-1}(f) = f \times \rho(f)$。于是，$\Gamma$ 在 $P \times Q$ 上的作用是

$$f \cdot (p, q) = (f(p), \rho(f)(q)), \qquad f \in \Gamma_P = \pi_1(B),$$

这就是定义 $P \times_\rho Q$ 的作用。因此 $M \cong P \times_\rho Q$，根据前面的论证，M 的超接触对就是命题 5.9 给出的超接触对。□

注 5.12。 命题 5.11 关于基本群有限的结论对于规范化超接触–辛对不成立。在例 4.10 中，基本群是 $\mathbb{Z}^{4m}$，悬挂整体单值性群是无限的，并且 $\mathcal{F}$ 的叶不紧致。对于规范化超接触对，两个局部因子都是 3-Sasakian 流形，并且具有正 Ricci 曲率。对于规范化超接触–辛对，第二个因子是超凯勒流形且 Ricci 平坦。

AI 披露。 本文准备过程中使用了 Claude Opus 5.5 和 ChatGPT-6 Astra。所有数学思想和成果均归作者所有，作者对数学内容及最终文本承担全部责任。

参考文献

[1] G. Bande，接触辛对，Trans. Amer. Math. Soc.**355** (2003)，1699–1711。[2] G. Bande 和 A. Hadjar，接触对，Tohoku Math. J. (2) **57** (2005)，247–260。

[3] **21** 2010 737 754 G. Bande 和 A. Hadjar，关于正

[4] 规接触对，Internat. J. Math. ( )，– G. Bande 和 D. Kotschick，递归算子的几何，Comm. Math. Phys. **280** (2008)，737–749。

[5] G. Bande 和 D. Kotschick，辛对的几何，Trans. Amer. Math. Soc.**358** (2006)，1643–1655。[6] G. Bande 和 D. Kotschick，接触对与局部共形辛结构，载于：调和映射与微分几何，E. Loubeau 和 S. Montaldo（编），当代数学，第542卷，美国数学会，2011，85–98。[7] C. P. Boyer 和 K. Galicki，3-*Sasakian* 流形，微分几何综述**7** (1999)，123–184。[8] C. Camacho 和 A. Lins Neto，叶状结构的几何理论，Birkhäuser，波士顿，MA，1985。[9] A. Candel 和 L. Conlon，叶状结构 *I*，数学研究生教程，第23卷，美国数学会，普罗维登斯，RI，2000。[10] B. Cappelletti-Montano、A. De Nicola、G. Dileo，*3*-拟 *Sasakian* 流形，Ann. Glob. Anal. Geom. **33** (2008)，397–409。[11] B. Cappelletti-Montano、A. De Nicola 和 G. Dileo，关于3-拟 *Sasakian* 流形的几何，Internat. J. Math. **20** (2009)，1081–1105。[12] B. Cappelletti-Montano、A. De Nicola 和 I. Yudin，*3*-余辛流形的拓扑，Q. J. Math. **64**，59–82。[13] B. Cappelletti-Montano、A. De Nicola 和 I. Yudin，*3*-拟 *Sasakian* 流形的例子，Rend. Semin. Mat. Univ. Politec. Torino **73** (2015)，51–61。[14] N. J. Hitchin，黎曼曲面上的自对偶方程，Proc. London Math. Soc. (3) **55** (1987)，第1期，59–126。[15] T. Kashiwada，关于接触3-结构，Math. Z. **238** (2001)，829–832。[16] L. Ornea 和 P. Piccinni，四元数几何中的局部共形凯勒结构，Trans. Amer. Math. Soc. **349** (1997)，641–655。

卡利亚里大学数学与计算机科学系，Ospedale街72号，卡利亚里，意大利电子邮件地址：gbande@unica.it

卡利亚里大学数学与计算机科学系，Ospedale街72号，卡利亚里，意大利电子邮件地址：b.cappellettimontano@unica.it