标量场暗物质模拟的初始条件与波相位分辨率

Hafiz Inam Ullah [1], * Muhammad Awais [1], † Yourong Frank Wang [2], ‡ 和 Tonatiuh Matos [3], §[1]墨西哥国立理工学院物理与数学高等学院，墨西哥城，墨西哥[2]哥廷根乔治-奥古斯特大学天体物理研究所，德国哥廷根 *D-37077*[3]墨西哥国立理工学院研究与高级研究中心物理系，*Av. IPN 2508*，墨西哥城 *07360*，墨西哥

标量场暗物质（SFDM）的波动型宇宙学模拟要求准确初始化密度分布和复波函数的相位。我们开发并验证了一个匹配的 Λ冷暗物质–SFDM 初始化框架，连接 CLASS-SFDM、MUSIC 和 AxioNyx。对于一个在 $z_{\rm ini} = 120$ 时具有 $m_\phi = 3.1623 \times 10^{-22}$电子伏特的二次型标量场暗物质模型，标量分量半功率尺度为 $k_{50}^{\phi} \simeq 10.54\,h$兆秒差距$^{-1}$。独立的 AxiECAMB 对比显示，在 $0.20944 \le k \le 13.4\,h$兆秒差距$^{-1}$范围内，同步规范下标量场暗物质速度散度的归一化均方根偏差为 0.328%。一个 256^3 MUSIC实现在 $8 \le k \le 13.404\,h$兆秒差距$^{-1}$ 范围内再现了 CLASS 密度功率谱，中位数比值为 1.00131，均方根相对偏差为 0.138%。尽管结果吻合，全体积相位诊断表明，超过奈奎斯特极限的相邻相位增量比例从 256^3 时的 46.7%，降至 512^3 时的 13.685%，并在 1024^3，时降至 0.124060%，这表明初始化时最高分辨率下的相位采样几乎已得到解析。另行生成的一个实现，在 512^3 和 1024^3，时相应的违反比例分别为 13.7299% 和 0.124983% ；两个实现之间的相对差异低于 1%。在共用父级的 512^3–1024^3 对比中，中心平面密度场仍保持高度相关（$r_\delta = 0.9989$）。未进行掩蔽时，圆周相位差的绝对值中位数为 0.264 弧度；对于满足 $R \ge 0.5$ 的区块（占 86.6%），中位数为 0.246 弧度，相应的第90百分位数分别为 0.826 和 0.753 弧度。这些结果表明，仅准确恢复线性密度扰动并不足以确保波相位分辨率充足，并为非线性演化之前验证 SFDM 初始条件提供了定量框架。

arXiv:2611.33083v1 [astro-ph.CO] 24 Nov 2026

I. 引言

标准的 Λ冷暗物质宇宙学模型为描述宇宙的膨胀历史和宇宙结构的形成提供了成功的框架。在这一框架中，冷暗物质（CDM）驱动结构的引力增长，而宇宙学常数则解释了晚期的加速膨胀。加上重子、辐射和中微子，这些成分共同决定了宇宙学扰动从早期宇宙到当前时代的演化。然而，宇宙学观测精度的不断提高，也对理论预测和数值模拟提出了相应严格的要求。尤其是，提供给非线性计算的初始条件必须再现预期的宇宙学扰动，同时控制数值近似引入的误差。

包括 CLASS 和 CAMB 在内的线性玻尔兹曼求解器，提供用于生成宇宙学初始条件的各物种密度和速度传递函数 [1–5]。后续演化通常采用基于粒子、流体力学或基于波的数值方法进行追踪 [6]。确保这两个阶段之间的一致性至关重要，尤其是在不同物质组分表现出不同扰动历史时。采用尺度无关增长、总物质传递函数，或不一致的密度和速度约定等近似方法，可能会在初始化场中引入系统性差异 [7–10]。因此，必须独立于后续的非线性演化来评估初始化流程的准确性。

标量场暗物质（SFDM）为宇宙学暗物质成分提供了一种颇具吸引力的替代描述 [11–15]。在超轻质量区间（通常与模糊暗物质或类轴子暗物质相关）中，标量场在足够大的尺度上近似表现为冷暗物质，而波效应会抑制特征质量依赖尺度以下的扰动增长 [16–22]。要准确预测这种抑制，必须谨慎处理标量场扰动，尤其是在向快速背景振荡过渡期间。为描述这一范围，人们已发展出若干数值公式和有效流体方法 [23–26]。

在线性扰动理论之外，标量场暗物质呈现出波干涉和空间结构，无法通过传统的无碰撞粒子描述直接表示。因此，基于薛定谔–泊松方程及相关波感知方法的宇宙学模拟，已成为研究其非线性行为的重要工具 [27–37]。这些进展使构建可靠的波初始条件成为连接标量场暗物质线性预测与非线性结构形成的必要步骤。

与基于粒子的初始条件不同，波表

* hinamu2500@alumno.ipn.mx
† mawais2500@alumno.ipn.mx
‡ yourong.wang@uni-goettingen.de[§]
tonatiuh.matos@cinvestav.mx

示需要初始化一个复场，其振幅和相位分别编码密度和速度分布。本动速度与波函数相位的空间梯度相关。因此，数值网格可能准确再现线性密度功率谱，却无法分辨底层速度场所需的相位增量。这一限制对于超轻标量场尤为重要，因为可表示的速度范围取决于粒子质量、初始化红移、盒子大小和空间分辨率。因此，相位奈奎斯特条件引入了一项数值要求，它不同于传统的傅里叶空间密度精度评估。此外，对预期相位增量进行充分采样，本身并不能证明重建的波流或后续非线性演化已达到收敛。

这些问题与小尺度宇宙学结构的应用息息相关。莱曼-α 森林追踪星系际介质（IGM）中中性氢的吸收，可为受抑制的小尺度聚集模型提供约束，其中包括超轻暗物质 [38–46]。然而，要解读透射通量统计量，就必须对重子密度与速度场、星系际介质的热历史、压力平滑以及红移空间效应进行建模 [47–53]。近期关于波与粒子混合描述的研究，进一步促使人们仔细处理底层密度场与速度场 [54]。因此，可靠的SFDM初始条件是开展此类计算的先决条件，不过，仅对其进行验证并不构成对莱曼-α 可观测量的预测。

在本研究中，我们开发并验证了一套匹配的 Λ冷暗物质–标量场暗物质初始化框架，连接CLASS-SFDM、MUSIC和AxioNyx。我们检验了各组成部分专属线性传递函数的一致性，其中包括与AxiECAMB的独立比较，并评估了将密度扰动和速度扰动数值转换为MUSIC所需场的过程。随后，我们测试了线性密度功率谱的恢复情况，并研究所得复波函数的空间采样。具体而言，我们结合相位奈奎斯特诊断、共同父级分辨率比较，以及对相邻相位增量的全体积测量，量化密度恢复与波相位分辨率之间的差异。

本研究旨在建立一个可复现的验证框架，用于验证宇宙学SFDM初始条件，并确定开展非线性波演化之前必须满足的数值要求。本分析仅限于初始化阶段；后续非线性动力学的收敛性以及对莱曼-α 森林可观测量的预测，均不在本研究范围之内。我们记录了数值输入、源代码修改和验证结果，以支持可复现性 [55–58]。具体而言，独立的速度传递比较和全体积相位诊断为初始化流程提供了互补的检验。这些结果区分了所规定的线性扰动的准确性与表示SFDM波函数所需的空间分辨率。

II. 匹配初始条件策略

我们将计算组织为四个逻辑上相互独立的层次：

1. 线性理论： 玻尔兹曼求解器是否生成了稳定且定义明确的标量密度和速度目标？ 2. 初始条件接口： 密度和速度传递函数是否以正确的归一化、符号、单位和规范约定传递给 MUSIC？ 3.波函数构造： 复波函数是否在解析速度所蕴含的相位梯度的同时，复现目标密度？ 4.非线性演化： 后续的波动力学在空间和时间上是否达到收敛？

我们验证线性目标及其实现，随后探究相位采样；非线性演化不在本研究范围内。因此，实现的密度功率一致性不被视为波相位得到解析的证据。

本研究采用的数值流程为 CLASS-SFDM $\rightarrow$ 带符号传递表 $\rightarrow$MUSIC v1.53 $\rightarrow$ AxioNyx。CLASS 在相对论玻尔兹曼框架内计算物种依赖的线性密度和速度传递函数 [1–5, 59]。随后将所得传递函数提供给 MUSIC；MUSIC 是由 Hahn 和 Abel 开发的多尺度初始条件生成器[7], , 用于构造匹配的宇宙学密度和速度实现。这些初始条件随后传递给 AxioNyx；AxioNyx 是 Schwabe 等人提出的基于波的模拟框架 [60], , 扩展了宇宙学代码 Nyx [61] , 利用薛定谔–泊松方程演化超轻标量暗物质，同时包含粒子组分。AxioNyx 在混合暗物质模型中的近期应用，进一步促成了当前的初始条件验证工作 [37, 54]。

III. 物理模型与相位分辨判据

我们考虑一个具有二次势的最小耦合实标量场，[12, 13, 62], 以及相关的波动暗物质处理方法 [20, 27, 32],

$$V(\phi) = \frac{1}{2} m_\phi^2 \phi^2, \tag{1}$$

以基准质量

$$m_\phi = 10^{-21.5}\,\mathrm{eV} = 3.16227766 \times 10^{-22}\,\mathrm{eV}. \tag{2}$$

表 I. 基准 3.16227766×10^{-22} eV 电子伏特、$L=30\,h^{-1}$ 兆秒差距、$z_{\rm ini}=120$ 和 $m_\phi=$ 设置下的相位奈奎斯特速度。

N	$v^{\rm phase}_{\rm Ny}$ [千米 秒$^{-1}$]
64	3.3137
128	6.6274
256	13.2547
512	26.5094
1024	53.0188

modifiedCLASS 实现遵循 Ureña-López 和 Gonzalez-Morales 的角变量策略[23] ，用于处理快速振荡背景和线性扰动。

在非相对论波描述中，我们将共动波函数写为

$$\Psi(\boldsymbol{x},a)=\sqrt{\rho_{\phi,c}(\boldsymbol{x},a)}\,e^{i\theta(\boldsymbol{x},a)}, \tag{3}$$

其中 $\rho_{\phi,\ c}=a^3\rho_{\phi,\ \rm phys}$。波相位通过方程（4）与本动速度相关 [20, 27, 32]。

$$\boldsymbol{v}_\phi=\frac{\hbar}{am_\phi}\nabla_{\boldsymbol{x}}\theta. \tag{4}$$

对于沿方向α间隔为 Δx 的相邻采样点，

$$\Delta\theta^{(v)}_\alpha\simeq\frac{am_\phi\Delta x}{\hbar}\,v_{\alpha,\rm link}. \tag{5}$$

由于相位是按模 2π采样的，当 $|\Delta\theta|>\pi$时，未包裹的最近邻增量将无法唯一表示。相应的相位奈奎斯特速度为

$$\begin{aligned}v^{\rm phase}_{\rm Ny}&=\frac{\pi\hbar}{am_\phi\Delta x}=\frac{\pi\hbar N}{am_\phi L},\\&=13.2547\,{\rm km\,s^{-1}}\left(\frac{N}{256}\right)\left(\frac{30\,h^{-1}\,{\rm Mpc}}{L}\right)\\&\quad\times\left(\frac{3.16227766\times10^{-22}\,{\rm eV}}{m_\phi}\right)\left(\frac{1+z}{121}\right).\end{aligned} \tag{6}$$

我们还使用 $|\Delta\theta|=\pi/2$ 作为一种刻意设得更严格的诊断指标，对应于每个 2π 相位周期局部采样四次。

方程（6）在尝试任何波演化之前很有用：密度模在傅里叶空间中可以得到良好表示，但速度所决定的相位梯度已经发生混叠。

IV. 线性输入与可复现性

A. 基准宇宙学与技术调节项

目标物理模型由重子和纯标量场暗物质暗扇区组成。基准 CLASS-SFDM 计算采用 $H_0=67.4{\rm km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$, $\omega_b=0.0224$, $n_s=0.96605$, $\ln(10^{10}A_s)=3.0448$, $N_{\rm ur}=3.046$, $N_{\rm ncdm}=0$, 和 $z_{\rm ini}=120$ [4, 5, 23, 24]。标量场模拟包含 $\Omega_{\rm sfdm}=0.264$ 以及一个用于同步规范的技术性 $\Omega_{\rm cdm}=10^{-4}$ 调节项；与之匹配的 Λ冷暗物质参考模型采用 $\Omega_{\rm cdm}=0.2641$。

该调节项不被视为物理冷暗物质。在保持暗部门总丰度不变的同时，将其从 10^{-4} 降低至 10^{-5} 和 10^{-6}，在所采用的截止/初始条件区间内，仅使总物质功率在连续步骤之间的中位数变化0.0170%和0.00166%。直接的 $10^{-4}\to10^{-6}$ 比较显示，该区间内的中位差异为0.0187%，最大差异为0.1335%。

基准计算中使用的精确标量设置为

```
attractor_ic_sfdm_1 = yes
sfdm_parameters_1   = -21.5, 0.0, 1., 3., 1.e-30
sfdm_tuning_index_1 = 2
```

使用 CLASS [23, 24]。

ASS 构建公开了上文列出的标量场暗物质控制项，但没有提供单独的面向用户的输入参数，明确标记为截断、过渡或标量场暗物质容差设置。尽管如此，现存的修改版 CLASS[23, 24]源代码仍定义了一个内部角过渡，其参考阈值为 $\theta_*=100$ 、尖锐度为 $\theta_{\rm tol}=1$，如下文所测试。不得将这些源代码级设置与已证明重现原始 CLASS [23, 24]生产运行中每一项内部选择的结果混为一谈。我们归档现有的配置和源代码溯源信息，并区分原始传递表与后续受控阈值实验。

B. 物质传递定义与调节器收敛

截止尺度取决于用于表征功率抑制的量。因此，我们区分标量场组分的抑制与明确重建的物理物质密度的抑制。对于后者，我们使用重子和标量场组分的贡献构建物质传递函数，并将技术性 CDM调节器排除在密度权重之外。该调节器仍存在于底层 CLASS 解中。

我们将归一化功率比定义为

$$\mathcal{R}_P(k)=\frac{P_{\rm SFDM}(k)/P_{\Lambda{\rm CDM}}(k)}{\operatorname{median}_{0.01\le k\le0.1}\left[P_{\rm SFDM}(k)/P_{\Lambda{\rm CDM}}(k)\right]}, \tag{7}$$

其中归一化区间以 h兆秒差距$^{-1}$表示。对于每个阈值 $x\in\{0.90,0.75,0.50,0.25\}$，我们将$k_x$ 定义为满足以下条件的第一个向下交叉点

$$\mathcal{R}_P(k_x)=x. \tag{8}$$

分量级比值的分子使用 SFDM 标量密度功率，分母使用匹配的 Λ冷暗物质 CDM- 密度功率；而物理物质比值则比较两个宇宙学模型中以一致方式构建的物理物质谱。这些是不同的截止定义，不能互换。相应的第一个向下交叉点通过对 $\ln k$ 进行插值确定。

我们还测试了推断出的截断位置对技术性冷暗物质调节器的敏感性。我们考虑 $\Omega_{\rm cdm} = 10^{-4}$，$10^{-5}$，$10^{-6}$，并通过调整 Ω_ϕ 使 $\Omega_{\rm cdm} + \Omega_\phi$ =0.2641 保持不变，以补偿调节器密度的变化。所有三种配置均采用相同的归一化区间和截断交叉判据进行分析。

C. 推断出的截断尺度的稳定性

截断位置对所采用的物质传递定义的依赖性较弱。对于明确重建的物理物质谱，我们得到 $k_{90} = 6.744705\,h$ 兆秒差距$^{-1}$、$k_{75} = 8.583279\,h$ 兆秒差距$^{-1}$、k_{50} =10.538695 h 兆秒差距$^{-1}$以及 $k_{25} = 12.295859\,h$ 兆秒差距$^{-1}$。相应的直接 CLASS 功率谱估计值在截断位置上彼此一致，差异约为 0.0033%。

调节器收敛性测试提供了额外的检查。在保持暗扇区背景密度不变的情况下，将 $\Omega_{\rm cdm}$ 从 10^{-4} 降低至 10^{-6}，对于全部四个阈值，物质部分的截断位置偏移均小于 0.011%。各组分层面的截断位置也表现出类似的小幅偏移。这些结果表明，在所测试的调节器变化范围内，测得的截断位置具有稳定性。但这些结果本身并不能证明在所有波数下完整传递函数都已收敛。

D. 内部振荡—转变阈值敏感性

在保留的 modifiedCLASS 实现中，快速振荡的三角函数贡献项会乘以内部窗口函数

$$W(\theta) = \frac{1}{2}\left[1 - \tanh\!\big(\theta_{\rm tol}(\theta^2 - \theta_*^2)\big)\right], \qquad (9)$$

with $\theta_{\rm tol} = 1$ and reference $\theta_* = 100$。我们进行了四组受控计算，采用 $\theta_* \in \{50, 100, 200, 400\}$，并保持宇宙学参数、传递函数采样及其他数值设置不变。这些测试使用保留的 CLASS 源代码进行。

标量分量半功率尺度取自低k归一化平方密度传递比的首次向下交叉，四次计算均使用相同的 $0.01 \le k \le 0.1\,h$ 兆秒差距$^{-1}$ 归一化区间。所得数值列于表 II。

表 II. 在保留的 CLASS 3.3.4 实现中，标量分量半功率尺度对内部振荡转换阈值的敏感性。偏移量相对于 $\theta_* = 100$，且 k_{50}^{ϕ} 以 h兆秒差距$^{-1}$为单位。

θ_*	k_{50}^{ϕ}	偏移 [%]
50	10.555470	+0.189949
100	10.535458	0.000000
200	10.521244	-0.134916
400	10.513508	-0.208344

表 III. 四次受控 CLASS 3.3.4 计算中，背景角变量首次达到共同诊断水平 $|\theta_{\rm SFDM}| = 100$ 时的红移。相对差异是相对于 $\theta_* = 400$ 计算测得的。

θ_*	$z_{\theta=100}$	差异 [%]
50	4.72781×10^5	+0.012481
100	4.72720×10^5	-0.000423
200	4.72721×10^5	-0.000212
400	4.72722×10^5	0.000000

对于 $50 \to 100$、$100 \to$200 和 $200 \to 400$，连续的相对偏移分别为 -0.189589%、-0.134916% 和 -0.073527%。其幅度逐渐减小，表明在所测试的范围内半功率位置逐步趋于稳定，而非跃迁方案完全无关。具体而言，$\theta_* = 400$ 与 $\theta_* = 100$ 的归一化抑制比之间的最大逐点相对差异为 0.888410%，范围为 $8 \le k \le 13.4\,h$ 兆秒差距$^{-1}$。因此，尽管半功率位置的变化仅为百分之几的一小部分，但尚未证明完整传递曲线能够以相同的容差收敛。

E. 共同跃迁阈值处的背景演化

作为额外检验，我们考察四次受控 CLASS 计算中角变量 $\theta_{\rm SFDM}$ 的背景演化。背景输出提供了$\theta_{\rm SFDM}$ 随红移变化的数据。对于每次计算，我们通过在相邻背景采样点之间对 $\ln a$ 进行插值，确定首次交叉共同诊断水平 $|\theta_{\rm SFDM}| = 100$的位置。这一比较检验了在相同角变量值处，背景演化是否会受到不同内部跃迁阈值的影响。

所得穿越红移分别为 $z_{\theta=100} = 4.72781 \times$10$_5$、$4.72720 \times 10^5$、$4.72721 \times 10^5$ 和 4.72722×10^5，对应于 $\theta_* = 50$、100、200 和 400。相对于 $\theta_* = 400$ 计算，最大差异为 0.012481%，出现在 $\theta_* = 50$。对于 $\theta_* = 100$和 200，对应的差异分别为 -0.000423% 和-0.000212%。

交叉红移的细微差异表明

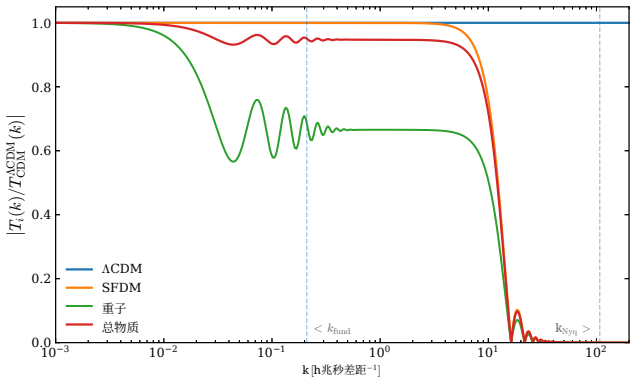

图 1. 在 $z_{\rm ini} = 120$ 处的线性传递振幅，以匹配的 ΛCDM 参考模型的 CDM 传递函数为基准进行归一化。SFDM 组分在大尺度上遵循 ΛCDM 的行为，但在特征截止尺度附近及更大尺度上呈现显著的小尺度抑制和振荡结构。图中的总物质曲线是按密度加权的 CLASS-SFDM 物质组合。技术性 CDM 调节器仅用于 CLASS 的记账处理，并不被视为物理上的 CDM 组分。

在这一共同诊断水平上，背景演化在所测试的跃迁方案之间保持稳定。结合上述半功率比较，这些结果为背景穿越的数值稳定性以及推断出的截止位置提供了互补证据。然而，这一结论仅限于所测试的背景穿越和半功率测量；它并不能证明完整的背景解和扰动解在所有红移和波数下均已收敛。

F. 带符号的传递函数

密集传递表直接在$z = 120$处、其中 $P_{k,\max} = 200\,h$ 兆秒差距$^{-1}$。图 1 展示了相对于匹配的 Λ冷暗物质计算所得冷暗物质传递函数归一化后的组分层级。我们在 CLASS到MUSIC插值中保留传递函数的符号，因为标量场和重子传递函数在高 k处会变得具有振荡性。截断负值会改变傅里叶相位，因此并非无害的数值选择。为适应带符号的标量场暗物质传递函数，我们使用了经修改的 MUSIC `camb_`文件读取器，该读取器基于 Git 修订版本 `6248d13`。对`src/plugins/transfer_camb.cc`所做的修改通过避免对非正定传递列进行对数变换，保留了密度和速度传递函数的符号。相应的带符号插值和外推在传递函数零点交叉处保持了振荡结构。独立重新生成归档的 256^3 标量场暗物质和重子粒子MUSIC初始条件，在每种情况下都准确复现了全部十个原生输出字段，从而确认了所实现传递接口的数值可复现性。

传递空间分析还通过对初始化组分进行实空间检查得到补充。将技术性的 CDM调节器排除在物质物理预算之外，基准模型具有 $f_\phi = \Omega_\phi/(\Omega_\phi + \Omega_b) = 0.8426$ 和 $f_b = 0.1574$。图 2 展示了 1024^3 初始条件的一个代表性中心平面。标量场暗物质和粒子/重子场追踪相同的大尺度实现，但在小尺度形态上有所不同；它们的密度加权组合给出了整个模拟盒中展示的总场。该图提供了组分分解的实空间视图；定量的傅里叶空间和相空间检验将在下文给出。

CLASS 的 d_tot 输出包含 $z = 120$ 处的辐射。因此，每当需要真正的纯物质数量时，我们便构造

$$T^{\Lambda\rm CDM}_{m,\rm phys}(k) = \frac{\Omega_b T^{\Lambda\rm CDM}_b(k) + \Omega^{\Lambda\rm CDM}_{\rm cdm} T^{\Lambda\rm CDM}_{\rm cdm}(k)}{\Omega_b + \Omega^{\Lambda\rm CDM}_{\rm cdm}}. \quad (10)$$

G. 对初始条件传递函数方案的敏感性

我们考察标量场暗物质和重子传递函数对构建宇宙学初始条件时所采用替代方案的敏感性。具体而言，我们比较了组分特定的 CLASS 参考方案、纵向规范速度重建、从$z = 0$得到的传递函数尺度无关重标度，以及用总物质传递函数替代组分特定传递函数。

这些比较考察了关于规范约定、红移演化和组分依赖性的不同假设。参考传递函数接近零时，需格外谨慎，因为绝对偏差虽小，却可能导致分数比很大。

详细方案、数值比较及相关图示见附录 A。这些诊断补充了针对各组分的 CLASS 到 MUSIC 验证，但并不直接测量 MUSIC 或 AxioNyx 引入的误差。

H. 密度与速度约定

对于物种 i，提供给 MUSIC 的一阶位移势为

$$T^{\rm MUSIC}_{\delta,i}(k) = -\frac{d_i(k)}{k^2_{\rm Mpc}}, \qquad k_{\rm Mpc} = h\,k, \qquad (11)$$

其中 k 以 h兆秒差距$^{-1}$为单位制表列出。

CLASS 在同步规范下运行。速度散度通过以下公式显式转换为牛顿规范：

$$\alpha = \frac{h'_{\rm syn} + 6\eta'_{\rm syn}}{2k^2_{\rm Mpc}}, \qquad \theta^{\rm N}_i = \theta^{\rm S}_i + k^2_{\rm Mpc}\alpha, \qquad (12)$$

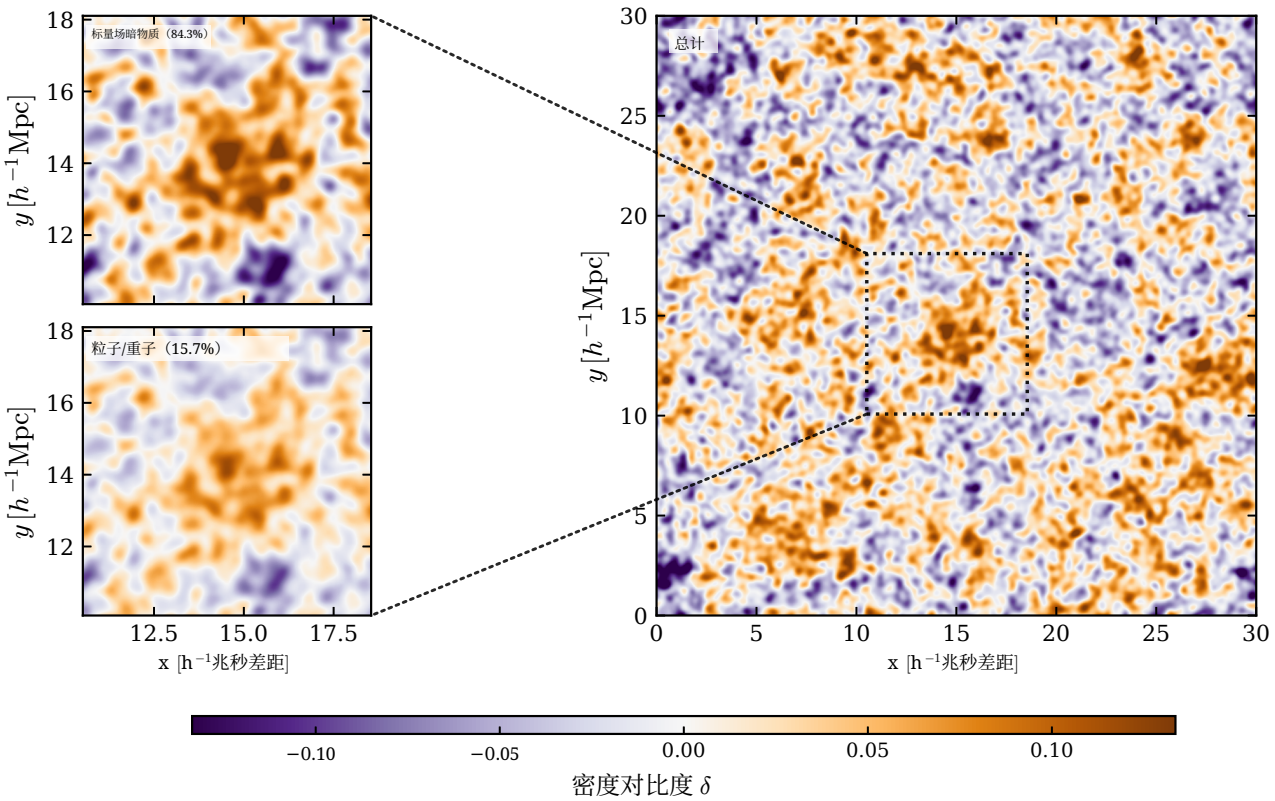

图 2. 1024^3 初始条件在 $z_{\rm ini} = 120$下的中心平面密度对比度。左上面板显示SFDM组分，其占物理物质密度的84.3%；左下面板显示粒子/重子组分，占15.7%。右侧面板显示整个30 h^{-1} Mpc盒内相应的总密度对比度。虚线标出组分面板中放大的子区域。技术性的CLASS冷暗物质调节器不计入这些物理占比。该图展示了初始化场的组分分解；定量一致性和分辨率测试将在后续章节中介绍。

MUSIC 接口使用的标量速度传递函数为

$$T_{v,i}^{\rm MUSIC}(k) = \frac{\theta_i^{\rm N}(k)}{aH\,k_{\rm Mpc}^2}. \tag{13}$$

这种区别遵循标准的规范变换逻辑 [1]，并且在多组分初始条件中很重要 [8]。

作为一项内部数值一致性检验，我们在 $z = 120$处，分别利用 CLASS 原生的速度散度和度规传递函数，重建牛顿规范下的标量场暗物质速度传递函数。重建得到的传递函数与存档的MUSIC输入表在 $0.2 \le k < 30\,h$ 兆秒差距$^{-1}$范围内进行比较。在所测试的波数区间内，绝对分数偏差的中位数介于 0.00034% 至 0.01217% 之间，而最大偏差低于 0.094%。带符号的 CLASS 传递函数经线性插值后，以 $\ln k$ 为自变量映射到 MUSIC 的波数网格上。在每个测试区间内，为避免零点交叉附近出现不稳定的相对误差，会排除传递函数振幅低于该区间内 CLASS 传递函数最大绝对振幅 1% 的模态。

这一吻合表明，CLASS 规范转换后的速度传递函数与相应的 MUSIC 输入表具有内部一致性。第 IVJ 节介绍了对底层同步规范下标量场暗物质速度散度所做的独立跨代码验证，得到的均方根偏差归一化后为 0.328%，范围为 $0.20944 \le k \le 13.4\,h$ 兆秒差距$^{-1}$，且未进行独立的速度振幅拟合。这些互补检验共同支持标量场暗物质速度传递函数及其向 MUSIC 输入约定的转换具有一致性。

对于此处使用的盒模式，在标量截断附近，相应的密度规范修正数值上可忽略不计：对于 SFDM 密度，同步规范到牛顿规范的分数修正的绝对值中位数为 1.74×10^{-4}%，第 95 百分位数为 5.40×10^{-3}%。因此，我们保留原生的同步规范密度，同时对速度进行显式变换。这是针对当前设置经过经验检验的近似，并不意味着规范在一般情况下可以互换。

I. MUSIC 至 AxioNyx 的波函数构造与场数据产品

匹配后的 MUSIC 输出被传递给 AxioNyx v1.1.6，分支`mixed_dm`，提交版本 `1aba393`，使用`Exec/MDM_NoHydro`配置 [7, 60]。我们使用 AxioNyx 阶段来检验如何将实际实现的密度场和速度场转换为薛定谔–泊松求解器所需的波变量。按照第 III 节的记号，初始化振幅由 $|\Psi| = \sqrt{\rho_\phi}$ 确定，c 而相位则通过方程（4）中的梯度关系，根据 MUSIC 生成的速度场重建。AxioNyx 运行日志明确将此路径标识为 MUSIC 生成的轴子相位。

为进行高分辨率比较，我们在同一个 $30\,h^{-1}$ 兆秒差距盒中生成了具有共同父级的 512^3 和 1024^3 MUSIC 实现，使用种子 12345 和 $z_{\rm ini} = 120$，并初始化了相应的 AxioNyx 运行 [7, 60]。本文报告的分析使用 0 级初始化输出 plt00000；未使用演化后的非线性快照。此外，我们还完成了一次单步 512^3 启动运行，作为实现冒烟测试，并生成了 plt00001，但不会根据这一步演化结果得出任何物理推论。

为使接口具有可复现性，我们将两个分辨率下的中心平面都导出为 CSV。MUSIC 场数据产品包含 SFDM 密度和三个速度分量，另有粒子/重子密度和三个速度分量。AxioNyx 场数据产品包含 AxDens、AxRe、AxIm、AxPhas、粒子质量密度，以及三个粒子速度分量。随附的切片_statistics.csv 记录了每个导出平面的来源、分辨率、场名称、极值、均值、标准差、CSV 文件名和原始数据路径。作为额外的粒子速度一致性检验，我们使用导出的中心平面，在 512^3 和 1024^3 分辨率下比较 AxioNyx 粒子速度场与对应的 MUSIC 重子速度场。

对于采用的 $30\,h^{-1}$ 兆秒差距模拟盒，归档的 AxioNyx MUSIC 初始化代码将速度转换因子定义为 vel_fac $= L_{\rm Mpc} h$ =30。

在两种分辨率下，各分量的皮尔逊相关系数均为 0.99969–0.99985。最佳拟合速度缩放因子的范围为 29.938 至 30.002，与预期的转换因子一致。

拟合线性缩放和偏移量后，归一化均方根残差约为 1.73% 至 2.50%。

这些结果表明，导出的中心切片上的粒子速度映射具有一致性。

作为端到端路由检验，初始化时归一化的 AxioNyx 密度在浮点精度范围内重现了 MUSIC 标量场暗物质密度，这符合预期，因为波振幅是根据该密度场初始化的。因此，我们将这一比较视为流程一致性测试，而不是独立的收敛性测量。AxioNyx 真正有意义的检验则是相位关联重建以及复场的分辨率敏感性。

a. 三维速度零模验证。为考察 MUSIC 到 AxioNyx 初始化流程中的速度零模处理方式，我们计算了完整三维 MUSIC 初始条件域内全部三个重子和暗物质速度分量的空间平均值。对于每个速度分量 v_i，我们将相对零模振幅定义为

$$R_i = \frac{|\langle v_i \rangle|}{\sigma(v_i)}, \qquad i \in \{x, y, z\}, \tag{14}$$

其中，$\langle v_i \rangle$ 是体积平均速度，$\sigma(v_i)$ 是其标准差。

对于 64^3 和 256^3 实现，六个重子与暗物质速度分量中最大的相对零模振幅分别为 1.09×10^{-17} 和 8.87×10^{-17}。因此，这两种实现均满足采用的诊断判据 $R_i < 10^{-6}$，其残余空间平均值与浮点舍入误差一致。

我们还检查了归档的 Ax- ioNyx 初始化源代码，该代码基于提交 1aba393c407220682bdaaa4e63dddd53ce568963。该源代码通过多层泊松求解，根据速度散度重构波函数相位。由于空间均匀速度分量的散度为零，这种构造不受此类分量影响。不过，在检查过的初始化分支中，我们没有发现明确减去速度分量均值的操作。

这些数值测试验证了所检查的 64^3 和 256^3 MUSIC 输出中全局速度偏移可以忽略。它们并不能证明单独的 512^3 和 1024^3 生产实现具有相应的零模性质，也不能独立验证重构得到的波函数流。

J. AxiECAMB 的独立验证与数值精度

我们使用基准标量质量$m_\phi = 3.1623 \times 10^{-22}$电子伏特，在初始化红移$z_{\rm ini} = 120$处，对 CLASS 和 AxiECAMB [26]，计算的线性 SFDM 扰动进行了独立比较。我们对两种实现中的背景宇宙学和暗物质组分丰度进行了匹配，其中包括 CLASS 计算所用的残余冷暗物质组分。比较采用了 Git 修订版 b7ca9ba80aca178da5003d864b8e20cb5905555b 中公开的 AxiECAMB 源代码，并补充导出了标量有效流体动量扰动的诊断数据。

在考虑了 CLASS 和 AxiECAMB 不同的传递约定后，我们进行了密度传递比较。具体而言，我们先根据标量密度扰动确定了共同的相对符号，再比较速度传递。我们重建了

根据有效流体动量变量重建了 AxiECAMB 同步规范下的速度散度，

$$\theta_\phi(k) = \frac{k\, u_\phi(k)}{1 + w_\phi}, \tag{15}$$

其中， k 以兆秒差距$^{-1}$ 表示， $u_\phi = (1+w_\phi)v_\phi$ 则采用AxiECAMB约定。未拟合额外的速度-振幅归一化。通过在$\ln k$中进行插值，在AxiECAMB波数处计算了稠密的CLASS传递函数。

我们通过归一化欧几里得残差量化了跨代码一致性

$$\epsilon_\theta = \frac{\left[\sum_i \left(\theta_{\phi,i}^{\mathrm{AxiECAMB}} - \theta_{\phi,i}^{\mathrm{CLASS}}\right)^2\right]^{1/2}}{\left[\sum_i \left(\theta_{\phi,i}^{\mathrm{CLASS}}\right)^2\right]^{1/2}}. \tag{16}$$

对于精度_提升=2且传递_k_每_logint=32的AxiECAMB计算，在$0.20944 \le k \le 13.4\,h$ 兆秒差距$^{-1}$ 范围内的比较包括133个采样波数，并得到 $\epsilon_\theta = 0.3277\%$的一致性，余弦相似度为0.99999922。在$8 \le k \le 13.4\,h$ 兆秒差距$^{-1}$的截断区域区间内，速度残差为0.3320%，而相应的标量密度残差为0.3666%。在更大尺度 $0.05 \le k \le 1\,h$ 兆秒差距$^{-1}$处，密度残差和速度残差分别为0.0101%和1.6834%。

我们进一步考察了速度比较对转移函数采样的敏感性。在固定精度_boost=2下，将 transfer_k_per_logint 从 8 增至 32 后，归一化速度残差在 $0.20944 \le k \le 13.4\,h$ 兆秒差距$^{-1}$ 上的数值从 0.3578% 变为 0.3277%。由于两次计算使用了不同的原生波数网格，因此该比较应视为采样稳定性检查，而非正式的逐点收敛测试。结果表明，在所测试的傅里叶范围内，线性同步规范标量扰动具有良好的跨代码一致性。但这些结果并未独立验证 MUSIC接口所需的后续规范转换，也未验证根据初始化的 AxioNyx波函数重建的速度场。

作为另一项数值检查，我们考察了提高积分精度对CLASS标量分量抑制尺度的影响。我们使用 pk_ref.pre 中的高精度设置，重新进行了基准标量场暗物质和匹配的 Λ 冷暗物质 dense800计算。对于振荡的标量场扰动，我们移除了显式的 evolver=0设置，保留刚性ndf15积分器。

抑制尺度由第 V 节定义的标量分量功率比首次向下交叉点确定。所得数值汇总于表 IV。具体而言，半功率位置从 $k_{50}^\phi = 10.535589$ 变为 $10.535142\,h$ 兆秒差距$^{-1}$，相当于 -0.00425% 的分数偏移。这一微小变化表明，在所测试的精度设置下，CLASS 半功率提取结果具有稳定性，但并未证明其绝对精度与

表IV. CLASS 中标量分量抑制尺度对数值精度提高的敏感性。所有交叉波数均以 h兆秒差距$^{-1}$ 表示。所报告的偏移反映的是内部精度测试，而非绝对跨代码精度。

交叉	原始 高精度 偏移 [%]	
k_{90}^ϕ	6.742600	6.742540 -0.00089
k_{75}^ϕ	8.580576	8.580408 -0.00196
k_{50}^ϕ	10.535589	10.535142 -0.00425
k_{25}^ϕ	12.292598	12.292191 -0.00331

独立跨代码比较相当。其余抑制尺度在提高精度设置后也表现出类似的小幅变化。具体而言， k_{90}^ϕ、 k_{75}^ϕ 和 k_{25}^ϕ 的分数偏移分别为 -0.00089%、 -0.00196% 和 -0.00331%。因此，所有四个交叉尺度的偏移幅度均小于 0.005%，且变化方向一致。这些结果量化了提取出的抑制尺度对所测试的 CLASS 积分设置的敏感性，而非物理标量场模型相关的不确定性。

V. 线性截断与傅里叶空间分辨率

对于 dense800 转移表，定义大尺度归一化的标量分量功率比

$$S_\phi(k) = \frac{\left|d_\phi^{\mathrm{SFDM}}(k)/d_{\mathrm{cdm}}^{\Lambda\mathrm{CDM}}(k)\right|^2}{\mathrm{median}_{0.01\le k\le 0.1}\left[\left|d_\phi^{\mathrm{SFDM}}/d_{\mathrm{cdm}}^{\Lambda\mathrm{CDM}}\right|^2\right]}. \tag{17}$$

对应的标量交叉点为

$$k_{90}^\phi = 6.7426\,h\,\mathrm{Mpc}^{-1}, \quad k_{75}^\phi = 8.5806\,h\,\mathrm{Mpc}^{-1}, \tag{18}$$

$$k_{50}^\phi = 10.5356\,h\,\mathrm{Mpc}^{-1}, \quad k_{25}^\phi = 12.2926\,h\,\mathrm{Mpc}^{-1}. \tag{19}$$

对于每个指定的水平，报告的数值是从大尺度平台开始，随着 k 增大时遇到的第一个向下交叉点 。这样可以消除后续高-k 振荡产生额外交叉点时的歧义。这些数值由 dense800 文件 sfdm_m215_ICdense800_tk.dat 和 lcdm_z120_dense800_tk.dat 生成，每个文件包含 5084 个采样波数；通过对 $\ln k$ 中夹住各个指定功率水平的采样点进行插值得到。

对于边长为 L 的盒子中的均匀 N^3 网格，我们采用

$$k_{\mathrm{ana}} \equiv \frac{k_{\mathrm{Ny}}}{2} = \frac{\pi N}{2L} \tag{20}$$

作为保守的分析边界，而非普适的收敛定理。对于 $L = 30\,h^{-1}$ 兆秒差距，这些值分别为 3.35、6.70、13.40、26.81，且 $53.62\,h$ 兆秒差距$^{-1}$ 对应 N =64、128、256、512、1024。

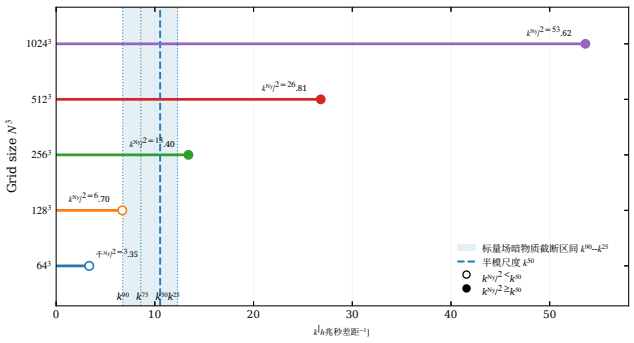

图 3. 与 $z_{\rm ini} = 120$ 处的密集 CLASS-SFDM 截断相比，在 $30\,h^{-1}$ 兆秒差距盒中的傅里叶空间分辨率范围。阴影区间覆盖从 k^{ϕ}_{90} 到 k^{ϕ}_{25}的基准标量抑制区域，虚线表示 k^{ϕ}_{50}。水平标记显示每个均匀网格所采用的半奈奎斯特分析范围 $k_{\rm Ny}/2$ 。256^3 网格是所列分辨率中第一个其保守傅里叶范围延伸超过标量半功率尺度的网格；这一结论仅涉及密度模覆盖范围，并不代表波相位分辨率已得到保证。

图。3 仅回答了一个傅里叶空间问题。它并不能证明波相位已得到充分采样；后者取决于方程（6）。

VI. 匹配的初始条件与密度恢复

A. MUSIC 密度恢复

最终采用的 MUSIC v1.53 配置使用一阶拉格朗日微扰理论（1LPT；use_2LPT=no 和 use_LLA=no）、$z_{\rm ini} = 120$、$30\,h^{-1}$ 兆秒差距盒、匹配的标量场暗物质–Λ冷暗物质对内的相同随机相位，以及经验证的归一化力 _pnorm=31586221390e-11。由于当前分析止于初始条件阶段，我们不使用起始红移序列来评估后续的非线性 1LPT 瞬态[9, 10]。

傅里叶估计量直接应用于原始 MUSIC Level-0标量场暗物质组分密度 网格，并与相同标量场暗物质组分对应的 CLASS 预测进行比较，而不是与 CLASS 总物质功率或单独的重子/粒子组分进行比较。因此，所报告的 MUSIC/CLASS 功率比的分子和分母均指标量场暗物质组分。该测试隔离了所提供的密度场和传递函数接口，而非粒子沉积。除非两者采用完全相同的组分和参考模型定义，否则不会将 MUSIC 得出的半功率位置与线性半功率位置进行比较。为确保可复现性，分析记录了壳层分箱边界、模态计数、随机振幅方案，以及用于构造该统计量的脚本。因此，所引用的均方根衡量的是实际实现结果与线性目标之间的差异，不应仅被解读为数值误差估计。

在 $1 \le k \le 13.4041\,h$ 兆秒差距$^{-1}$范围内，校正后的 256^3 实现的中位数为 $P_{\rm MUSIC}/P_{\rm CLASS} = 1.00156$，均值为 0.99960，均方根相对偏差为 1.70%。将比较范围限制在标量截止区间$8 \le k \le 13.4041\,h$ 兆秒差距$^{-1}$ 内后，中位数比值为 1.00131，均方根相对偏差为 0.138%。

这一结果被有意解读为密度恢复测试。实现的密度功率与 CLASS 目标一致，这一事实本身并不能证明复波相位得到了充分采样。

B. 分量匹配的 MUSIC–CLASS 半功率验证

抑制比较要求在实现的 MUSIC 场与线性 CLASS 场中匹配分子和分母分量；不得混用标量分量功率比和总物质功率比。

因此，我们将分量匹配的抑制比定义为

$$\mathcal{S}_\phi(k,z) = \frac{P_\phi^{\rm SFDM}(k,z)}{P_c^{\Lambda{\rm CDM}}(k,z)}, \tag{21}$$

其中，$P_\phi^{\rm SFDM}$是标量场密度自功率谱，$P_c^{\Lambda{\rm CDM}}$是参考 Λ冷暗物质宇宙学中的冷暗物质密度自功率谱。

与总物质功率不同，该比值不包含重子或交叉组分贡献。

对于线性计算，相应的分量匹配抑制可直接由 CLASS 密度传递函数得到，

$$\mathcal{S}_\phi^{\rm CLASS}(k,z) = \left| \frac{d_{{\rm sfdm}_1}^{\rm SFDM}(k,z)}{d_{\rm cdm}^{\Lambda{\rm CDM}}(k,z)} \right|^2 . \tag{22}$$

由于计算采用共同的原初功率谱设定，原初因子在比值中相互抵消。

遵循第 V 节中引入的线性截断定义，该抑制相对于其大尺度值进行归一化，

$$\widehat{\mathcal{S}}_\phi^{\rm CLASS}(k,z) = \frac{\mathcal{S}_\phi^{\rm CLASS}(k,z)}{{\rm median}_{0.01\le q\le 0.1}\,\mathcal{S}_\phi^{\rm CLASS}(q,z)}, \tag{23}$$

其中，归一化区间以h 兆秒差距$^{-1}$表示。

标量分量半功率尺度定义为满足以下条件的第一个向下交叉

$$\widehat{\mathcal{S}}_\phi\left(k_{1/2},z\right) = \frac{1}{2}. \tag{24}$$

使用存档于$z = 120$的稠密 CLASS 传递表，未分箱的线性计算得出

$$k_{1/2}^{\phi,\mathrm{CLASS}} = 10.535586\,h\,\mathrm{Mpc}^{-1}. \tag{25}$$

我们使用原始完整的 256^3 标量场暗物质和匹配的 Λ冷暗物质 MUSIC 初始条件实现，独立检验这一尺度。两个实现均采用 $30\,h^{-1}$兆秒差距的周期性盒子、相同的初始红移以及匹配的随机相位。

重建场是根据原始 MUSIC 输出中存储的三维暗物质位移分量得到的。由于模拟采用一阶拉格朗日微扰理论，因此可以从位移场在傅里叶空间中的散度恢复线性密度对比度，

$$\delta_{\mathrm{rec}}(\mathbf{k}) = -i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{k}), \tag{26}$$

其中 $\boldsymbol{\Psi}$表示在重建所用坐标约定下的一阶位移场。

位移重建采用的傅里叶约定，是根据保留的 MUSIC 配置和对源代码的检查确定的。

对于重建得到的 MUSIC 场，我们将分量匹配的功率抑制率计算为

$$\mathcal{S}_{\phi}^{\mathrm{MUSIC}}(k) = \frac{P_{\phi}^{\mathrm{SFDM,MUSIC}}(k)}{P_{c}^{\Lambda\mathrm{CDM,MUSIC}}(k)}. \tag{27}$$

CLASS 预言是在与每个有限体积 MUSIC 壳层相同的离散傅里叶模上计算的。

对于壳层 B，模态匹配的理论抑制为

$$\mathcal{S}_{\phi,B}^{\mathrm{CLASS}} = \frac{\sum_{\mathbf{k}\in B} P_{\phi}^{\mathrm{SFDM,CLASS}}(k)}{\sum_{\mathbf{k}\in B} P_{c}^{\Lambda\mathrm{CDM,CLASS}}(k)}. \tag{28}$$

理论功率包含共同的原初谱加权；我们不以单个壳层中心的传递函数振幅代替。

对于所采用的盒子大小，基频波数为

$$k_{\mathrm{fund}} = \frac{2\pi}{L} = 0.20944\,h\,\mathrm{Mpc}^{-1}. \tag{29}$$

因此，有限体积的 MUSIC 实现无法覆盖用于未分箱 CLASS 转移函数的大尺度归一化区间。

因此，对于 MUSIC 比较及其模式匹配的 CLASS 对应项，我们对以下范围内的抑制进行归一化

$$0.3 \le k \le 1.0\,h\,\mathrm{Mpc}^{-1}. \tag{30}$$

重建的 MUSIC 抑制曲线和模式匹配的 CLASS 抑制曲线，均在同一范围内归一化，然后确定其半功率交叉点。

为评估傅里叶壳层离散化的敏感性，我们针对五种对数分箱宽度重复进行比较，$\Delta\ln k = 0.05$、0。08、0。10、0。15以及0。20。结果见表V。

重构得到的 MUSIC 抑制结果与分量匹配的 CLASS 预测高度一致。

对于四种较窄的分箱选择，$\Delta\ln k \le 0.15$，测得的 MUSIC 半功率波数约介于 10。5365 和 $10.5383\,h$ 兆秒差距$^{-1}$之间，与未分箱的 CLASS 标量分量半功率尺度 $10.5356\,h$ 兆秒差距$^{-1}$一致。

对于测试中最粗的分箱，$\Delta\ln k = 0.20$，MUSIC 和模式匹配的 CLASS 半功率估计值均偏移至约 $10.605\,h$ 兆秒差距$^{-1}$。这种共同偏移反映的是插值交叉点对所采用傅里叶壳层宽度的敏感性，而不是 MUSIC 与 CLASS 之间存在同等程度的差异。

当两种计算采用完全相同的傅里叶模采样和分箱方式进行评估时，它们测得的半功率位置之间的绝对差满足

$$\left|k_{1/2}^{\mathrm{MUSIC}} - k_{1/2}^{\mathrm{CLASS,bin}}\right| < 1.6\times10^{-3}\,h\,\mathrm{Mpc}^{-1} \tag{31}$$

对于测试的全部五种分箱选择均成立。

归一化后的 MUSIC 与模态匹配的 CLASS 抑制比在截止区域内对应的均方根相对偏差介于 0.018% 至 0.044% 之间。

这些结果直接检验了有限体积 MUSIC 初始条件与相应线性理论计算之间的分量一致性。

表 V. 在 $z_{\mathrm{ini}} = 120$ 使用完整的 256^3 初始条件实现进行分量匹配的 MUSIC–CLASS 半功率验证。抑制的定义为：分子采用 SFDM 标量密度功率，分母采用匹配的 Λ 冷暗物质 CDM 密度功率。CLASS 预测使用与 MUSIC 估计量相同的离散傅里叶模进行评估。此处，$\Delta k_{1/2} = k_{1/2}^{\mathrm{MUSIC}} - k_{1/2}^{\mathrm{CLASS,\,bin}}$。最后一列给出截止区域内归一化抑制比之间的均方根相对差异。所有报告的截止尺度及差异均以 h 兆秒差距$^{-1}$ 为单位。

$\Delta\ln k$	$k_{1/2}^{\mathrm{MUSIC}}$	$k_{1/2}^{\mathrm{CLASS,bin}}$	$\Delta k_{1/2}$	均方根（%）
0.05	10.53748	10.53842	-0.00095	0.018
0.08	10.53657	10.53600	+0.00057	0.044
0.10	10.53827	10.53673	+0.00155	0.040
0.15	10.53654	10.53541	+0.00113	0.030
0.20	10.60524	10.60402	+0.00122	0.039

不同的分箱选择是对同一组初始条件实现的替代分析，而非彼此独立的统计测量值。

作为另一项传递接口检查，我们将归档的标量场暗物质 CAMB 格式密度传递函数与原始 CLASS 标量密度传递函数进行了比较，采用文档所述的 CLASS 到 CAMB 的密度约定，

$$T_{\delta,i}^{\mathrm{CAMB}}(k) = -\frac{d_i^{\mathrm{CLASS}}(k)}{k_{\mathrm{Mpc}}^2}, \qquad k_{\mathrm{Mpc}} = hk. \tag{32}$$

我们还根据原始 MUSIC 宇宙学参数检查了归档的 Λ 冷暗物质 CLASS 配置和传递函数。另从保留的 CLASS 表中重建并生成了一份Λ冷暗物质密度传递诊断结果。

然而，MUSIC 使用的原始历史 Λ冷暗物质 CAMB 格式输入文件并未找回。因此，无法根据留存文件独立确认其确切的字节级溯源。重建的密度传递诊断结果不被视为 MUSIC 的历史输入。

表中报告的一致性V 实际上基于原始留存的 MUSIC 位移场，以及独立计算的分量匹配的 CLASS 预测。

这些结果证实了初始条件阶段分量匹配的标量密度抑制在数值上的一致性。它们并未检验非线性演化功率谱，也不能证明标量场暗物质复波相位已收敛。

C. 共同母体溯源和共享模态验证

接下来，我们比较在同一个 $30\,h^{-1}$ 兆秒差距盒中生成的、作为共同母体分辨率对的匹配 512^3 和 1024^3 初始条件。生成记录中标识的保留 MUSIC 产物为 IC_SFDM_WAVE_COMMONPARENT512 和 IC_SFDM_WAVE_COMMONPARENT1024。相应的 AxioNyx 产物取自关联的共同母体初始化运行。

为了独立检验保留的产物是否追溯至同一大尺度实现，我们将原生的 1024^2 中心标量场暗物质密度切片分块平均至有效的 512^2 采样分辨率，并在实空间和傅里叶空间中与原生的 512^2 切片进行比较。由此得到的实空间皮尔逊相关系数为

$$r_\delta = 0.998910. \tag{33}$$

在保守的共享傅里叶范围内，

$$k \le \frac{k_{\mathrm{Ny}}^{512}}{2} = 26.8083\,h\,\mathrm{Mpc}^{-1}, \tag{34}$$

复傅里叶相干性为 0。998910，交叉相位总体上与零一致。在最大尺度上，$0.209 < k < 2\,h$ 兆秒差距$^{-1}$，相干性提高至 0。999611；而在 $2 < k < 8\,h$ 兆秒差距$^{-1}$ 以及标量截断区间 $8 < k < 13.4\,h$ 兆秒差距$^{-1}$ 内，相应的相干性分别为 0。998484 和 0。998161。

这些诊断为保留的中心平面产物追溯至同一个大尺度母体实现、而非两个独立随机场，提供了有力的数值证据。但这并不能证明每个重叠的三维傅里叶系数都完全相同，因为原始的完整三维母体噪声场并未包含在保留的分析产物中。因此，我们将 512^3–1024^3 比较视为共同母体分辨率敏感性测试，而非严格的固定场收敛序列。

相关的相位诊断使用 AxioNyx v1.1.6、分支 mixed_dm、提交 1aba393 生成。比较中仅使用保留的中心平面产物。较精细的实现包含额外的高-k 结构，因此，即使两种分辨率共享大尺度的父实现，两者之间仍预期会存在差异。

D. AxioNyx 密度与相位比较

我们比较由匹配的共同父级 512^3 和 1024^3 MUSIC 实现构建的 AxioNyx 波场。分析使用均匀网格计算中保留的 Level-0 中心平面产物。此处不评估粗细网格 AMR 初始化。由于 1024^3 实现包含额外的高-k 结构，因此本比较应视为分辨率敏感性测试，而非严格的固定频带收敛测试。

对于中心 SFDM 密度平面，比较前先将 1024^3 场按 2×2 区块求平均，再与原生512^2 平面进行比较。皮尔逊相关系数 $r_\delta = 0.998910$已在上文的共享模态验证中确定。均方根密度残差为 2.3357×10^{-3}，相当于 512^3 中心切片标准差的 4.669%。因此，在匹配有效空间采样后，密度形态仍具有很强的相关性。

对于相位比较，我们直接从 AxioNyx 的实部场和虚部场重构包裹的波函数相位：

$$\theta_N(\boldsymbol{x}) = \arg[\mathrm{AxRe}_N(\boldsymbol{x}) + i\,\mathrm{AxIm}_N(\boldsymbol{x})]\,. \tag{35}$$

相应的单位复数相位场定义为

$$u_N(\boldsymbol{x}) = \frac{\Psi_N(\boldsymbol{x})}{|\Psi_N(\boldsymbol{x})|} = e^{i\theta_N(\boldsymbol{x})}. \tag{36}$$

以下报告的相位比较统计数据均一致采用此定义。

原生的 1024^2 相位场采用圆周方式进行粗粒化，而不是直接对相位角取平均。具体而言，

具体而言，我们定义

$$Z = \langle u_{1024} \rangle_{2\times 2}\,, \qquad R = |Z|, \qquad u_{1024,b} = \frac{Z}{R}, \quad (37)$$

其中， R 衡量每个 2×2 区块内细网格相位的局部相干性。归一化的粗粒化相位定义为 $R > 0$。

粗网格与细网格表示之间的折叠相位差为

$$\Delta\theta = \arg(u_{1024,b} u^*_{512})\,, \quad (38)$$

其中 $\Delta\theta \in [-\pi, \pi]$。

我们首先应用相干性阈值 $R \geq 0.5$。经过筛选后，262144 个中心平面区块中有 227006 个被保留，相当于平面的 86.596%。其余 35138 个区块（13.404%）不纳入掩蔽统计量。

对于保留的区块，我们得到

$$\text{median}\,|\Delta\theta| = 0.246443 \text{ rad}, \quad (39)$$
$$P_{90}(|\Delta\theta|) = 0.753380 \text{ rad}, \quad (40)$$
$$\langle \cos\Delta\theta \rangle = 0.911654, \quad (41)$$
$$\left|\left\langle e^{i\Delta\theta} \right\rangle\right| = 0.934456. \quad (42)$$

最终的量表示在保留的 $R \geq 0.5$ 个区块上计算得到的单位复相位差均值的模。

为量化这些结果对相干性筛选的敏感性，我们在不施加 $R \geq 0.5$ 阈值的情况下重复了分析。在当前数据集中（$R > 0$），全部262144个中心平面区块都具有定义明确的粗粒化相位，因此可以纳入整个平面。

未掩蔽统计量如下

$$\text{median}\,|\Delta\theta| = 0.263796 \text{ rad}, \quad (43)$$
$$P_{90}(|\Delta\theta|) = 0.825540 \text{ rad}, \quad (44)$$
$$\langle \cos\Delta\theta \rangle = 0.895724, \quad (45)$$
$$\left|\left\langle e^{i\Delta\theta} \right\rangle\right| = 0.924088. \quad (46)$$

未掩蔽的平均绝对相位差为0.357517弧度，均方根相位差为0.480746弧度。满足 $|\Delta\theta| > \pi/2$ 的区块比例为0.3422%。

因此，移除相干性阈值会使绝对相位差中位数从0.246443弧度增加到0.263796弧度，并使第90百分位数从0.753380弧度增加到0.825540弧度。未掩蔽结果显示出更大的相位偏差，但仍保留了对中心平面对比的定性解释。

这些诊断量化了测得的相位差对相干性筛选的敏感性。具体而言， R 较低的区块具有定义不够明确的粗粒化相位方向，并且可能对底层复场的微小变化更加敏感。无论是掩膜后的对比还是未掩蔽的对比，都不能确立全体积波函数收敛。

图 4 的主要启示并非 1024^3波场已在形式上收敛，而是密度在两种分辨率下，形态仍高度相关，而复相位则对额外的小尺度结构表现出更明显的响应。

掩膜与未掩膜诊断结果之间的一致性支持这一定性解释，而无需将低相干块从分析中剔除。然而，两种分辨率之间的一致性并不等同于满足绝对的相位采样准则。因此，下一节将介绍独立的相位采样测试。

E. 相位采样与速度到相位验证

上述密度恢复和共同母体比较本身并不能证明标量场暗物质波相位得到了充分采样。因此，我们使用方程（6）中定义的由速度推导出的相位奈奎斯特准则评估相位分辨率，并辅以对初始化复波场的直接诊断。

对于基准 256^3 波初始条件，相位奈奎斯特速度为

$$v_{\rm Ny}^{\rm phase} = 13.2547\,\mathrm{km\,s^{-1}}. \quad (47)$$

相应的速度均方根值为17。613、18。578和17。019km s^{-1}，分别对应三个笛卡尔方向。这些数值超过了相位奈奎斯特速度，表明存在严重的相位欠采样风险。与此一致的是，表VI 中给出的全体积 256^3 分析显示，方向性违例比例约为47。7%、48。3%和44。0%。因此， 256^3 尽管波初始条件在标量截止区域内准确再现了 CLASS 密度功率谱，但仍表现出大量相位奈奎斯特违例。

作为补充诊断，我们评估每个单元格与其六个最近邻之间的最大绝对包裹相位差。对于独立的 64^3,128^3, 和 256^3 波场，最大相位差的均值分别为 2.69225、2.63382 和 2.47276 弧度，相应的中位数分别为 2.79743、2.77715 和 2.63156 弧度。最大包裹邻域差超过 $\pi/2$ 的单元格比例分别为 98.4268%、96.0271% 和 90.5048%。由于这三个实现并不构成共同父级层次结构，因此将观察到的趋势解释为相位采样诊断，而不是正式的分辨率收敛测试。

另一项仅根网格的 128^3 计算直接验证了 MUSIC 到 AxioNyx 的速度到相位约定。将重建的相位连接增量与根据输入速度场预测的增量进行比较，可得到各分量的均方根比值：

$$(1.000045,\ 1.000038,\ 0.999976) \quad (48)$$

以及.....的皮尔逊相关系数

$$(0.999979,\ 0.999958,\ 0.999952) \quad (49)$$

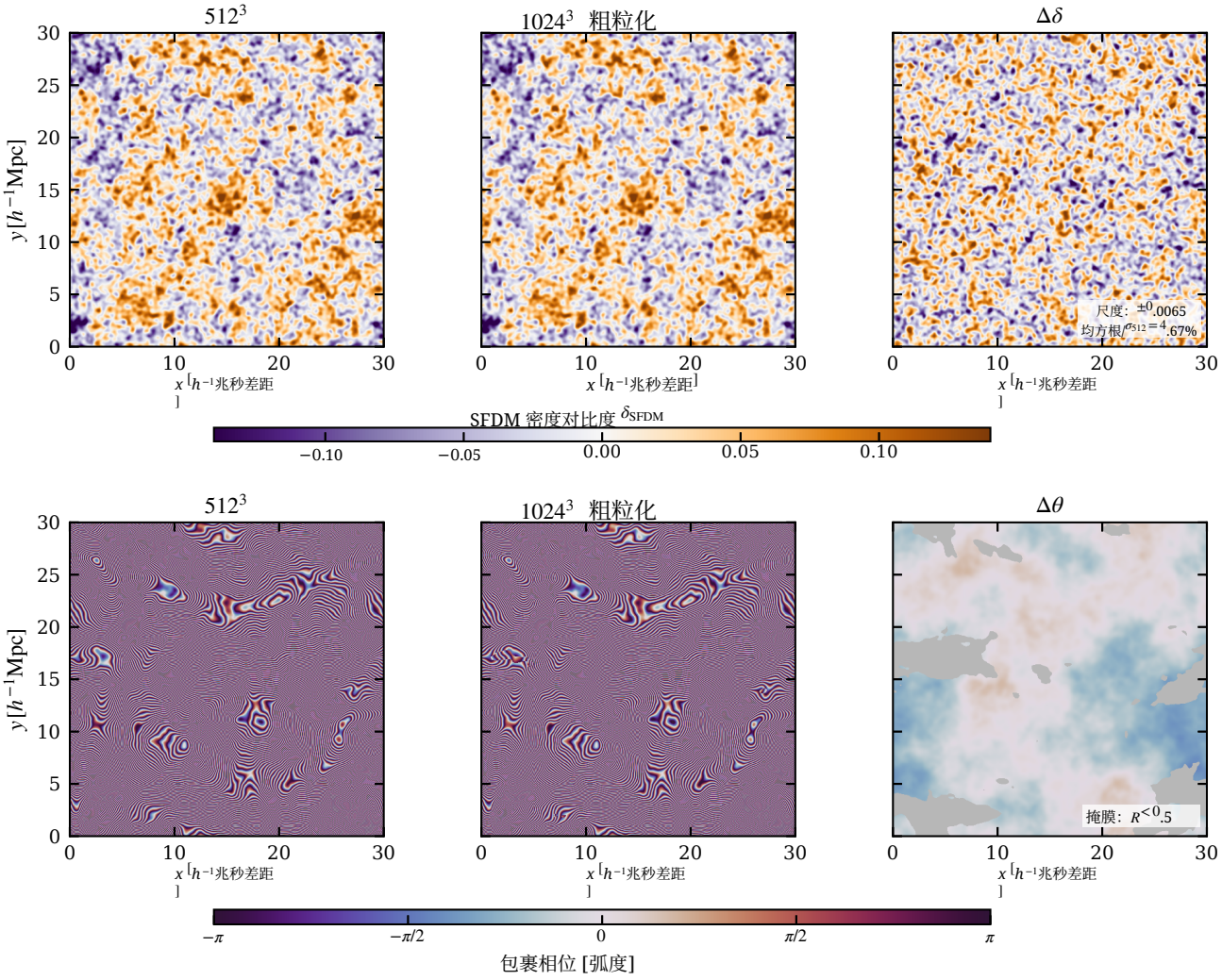

图4。AxioNyx 基于匹配的共同母体 512^3 和 1024^3 MUSIC 实现，在 $z_{\mathrm{ini}}=120$处进行波场初始化。上排比较了 512^3 SFDM 密度对比度与经粗粒化处理至相同有效 512^2 采样的 1024^3 中心平面。右侧面板显示密度残差 $\Delta\delta=\langle\delta_{1024}\rangle_{2\times2}-\delta_{512}$。前两个密度面板共用一个色标，而残差使用面板中所示的较小对称范围。下排显示相应的包裹波函数相位及其圆周差 $\Delta\theta=\arg(u_{1024,b}u^{*}_{512})$。灰色像素表示局部细网格相位相干性为 $R<0.5$的区块，占中心平面的 13.404%。其余 86.596%的区块显示在相位残差面板中。正文报告了掩膜和未掩膜的相位统计。由于细化引入了额外的高-k 模态，残差反映的是分辨率敏感性，而非严格的固定场收敛。

分别沿 x、 y和 z 方向。比值接近 1 且相关性很高，这表明初始化时所实施的速度到相位的映射在数值上具有一致性。然而，此测试并未独立验证底层的 CLASS 到 MUSIC 的标量场暗物质速度传递，也未能确认离散波函数的流是否再现了目标动量密度，$\boldsymbol{j}_{\phi,\ c}=\rho_{\phi,\ c}\boldsymbol{v}_{\mathrm{target}}$。

我们进一步通过受控的共同父级 $128^3\rightarrow256^3$ 比较来考察相位分辨率标度关系。不同于上文所考察的包裹相位差，本测试采用未包裹的、由速度预测的最近邻相位增量 $\Delta\theta^{(v)}$ ，其定义见方程（5）。

最大六连接 $|\Delta\theta^{(v)}|$的均值、中位数和第90百分位数从

$$(14.1215,\ 14.3805,\ 18.4420)\ \mathrm{rad} \tag{50}$$

在 128^3 处

$$(6.9350,\ 7.05205,\ 9.15795)\ \mathrm{rad} \tag{51}$$

在 256^3 处。相应的细网格到粗网格的比率为

$$(0.4911,\ 0.4904,\ 0.4966), \tag{52}$$

与预期的标度关系 $\Delta\theta^{(v)}\propto\Delta x$ 一致。然而，仍有 97.9493% 的细化单元至少表现出

表 VI. $z_{\rm ini} = 120$ 处全体积速度所隐含的相位奈奎斯特违规比例。合并比例为三个方向比例的平均值。

分辨率	x (%)	y (%)	z (%)	合并比例 (%)
256^3	47.691	48.327	44.017	46.678
512^3	13.160	14.921	12.974	13.685
1024^3	0.072507	0.275645	0.024028	0.124060

一个超过 π的经解缠绕、速度预测的最近邻相位增量。这一最大六连接违反比例不同于上文报告的各分量违反比例，因此衡量的是相位欠采样的另一种表现。

在更高分辨率下，对 MUSIC 速度场进行的全体积分析显示，相位采样得到了显著改善。各分量合并后的相位奈奎斯特违例比例从512^3 处的 13.7299% 降至 1024^3, 处的 0.124983%，相当于减少了约 110 倍。在 1024^3 处仍存在的违例表明，相位采样已得到显著改善，但尚未在所有位置完全得到解析。

综合来看，这些结果表明，准确恢复线性密度功率谱是必要的，但不足以确立充分的波相位分辨率。低分辨率诊断揭示了显著的相位欠采样，而全体积高分辨率计算则显示，速度推断的相位奈奎斯特违例大幅减少。这些发现促使我们在下一小节中开展全体积相位分辨率分析，并进行后续的独立实现比较。

F. 三维相位分辨率验证

我们将相位采样分析扩展到分辨率为256^3, 512^3, 和 1024^3的完整三维初始条件体积。该诊断评估由初始速度场所推断的未包裹相位增量，正如公式（5）中所介绍的那样。该量不同于共同父代波函数比较中所使用的包裹圆周相位差。

对于每个笛卡尔方向，我们计算满足以下条件的相位增量占评估相位增量总数的比例 $|\Delta_i\theta^{(v)}| > \pi$。综合超限比例为三个方向比例的算术平均值。表VI 总结了全体积结果。

结果表明，相位采样强烈依赖于空间分辨率。在 256^3, 约有 46.7% 的方向相位增量评估值

超出相位奈奎斯特阈值，尽管线性密度功率谱得到了准确恢复。在 512^3 时，这一比例降至 13.685%；在 1024^3,时则降至 0.124060%，这意味着最低与最高分辨率之间减少了约 376 倍。

方向相位增量标准差

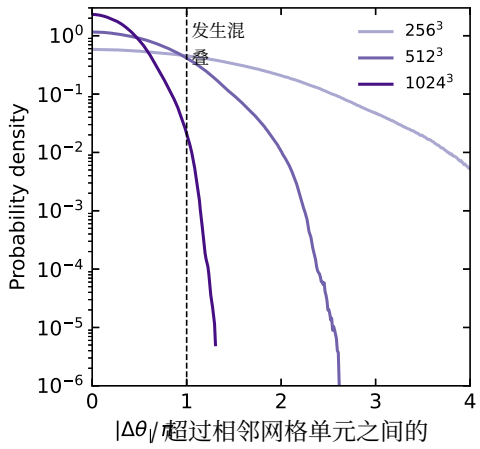

图 5. 256^3, 512^3, 和 1024^3 组实现中初始化时绝对相位增量的全体积分布，汇总了三个笛卡尔方向的数据。点状竖线标示相位奈奎斯特阈值 $|\Delta\theta| = \pi$。这些分布展示了随着分辨率提高，相位采样逐步改善。

也会随着分辨率的提高而系统性地减小，从 256^3 处约 4.2 弧度降至 512^3处的 2.1 弧度，以及 1024^3处的 1.05 弧度。这种行为与预期的依赖关系一致

$$\sigma_{\Delta\theta} \simeq \frac{a m_\phi \Delta x}{\hbar}\,\sigma_v, \tag{53}$$

对于相当的速度弥散，并展示了随着网格间距减小，相位梯度采样的改善。

图 5 展示了相位增量绝对值的分布。超过 π 的增量所占比例随着分辨率提高而显著下降，这表明初始速度场所隐含的相位梯度得到了越来越充分的采样。

相位奈奎斯特违例的空间分布如图 6所示。在 256^3, 时，违例遍布整个模拟体积。到 512^3, 时，其空间范围显著缩小；而在 1024^3 时，剩余违例集中在局部区域。

这些全体积诊断表明，对于基准标量质量、初始化红移和盒子大小，在 1024^3 时相位采样显著改善。尽管如此，仍然存在的违例表明，相位奈奎斯特准则并未在所有位置得到满足。

此外，这些结果量化了初始化时对速度所决定的相位梯度的采样。它们并不能独立证明重构的三维波函数、其离散化电流或后续非线性演化已经收敛。

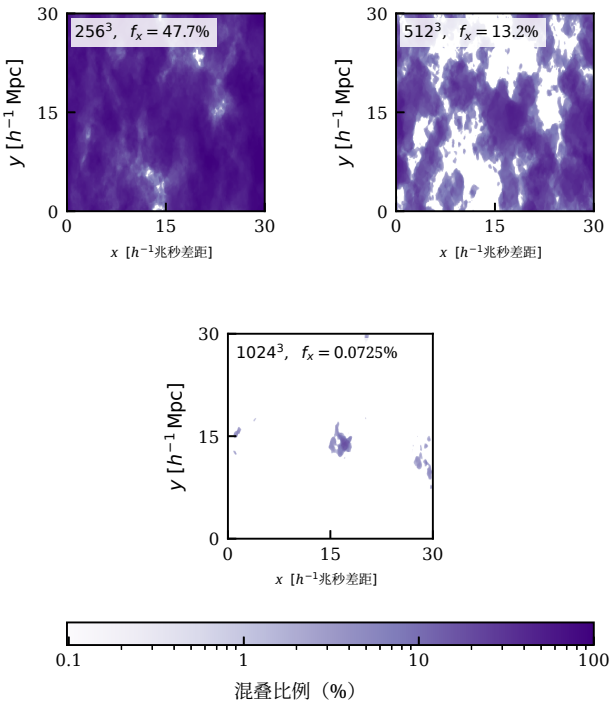

图 6. $z_{\rm ini} = 120$ 处 256^3, 512^3, 和 1024^3 初始条件下相位奈奎斯特违例的空间分布。每个面板显示沿 z 方向投影的、超过 π 的 x方向相位增量所占的比例。所有面板采用统一的对数色标，白色表示未检测到违例。相应的方向比例为 47.691%、13.160% 和 0.072507%。

G. 不同独立实现之间的一致性

为评估相位分辨率结果的一致性，我们将参考实现的全体积相位奈奎斯特统计与在 512^3 和 1024^3处通过额外的MUSIC实现获得的统计进行比较。两项计算使用相同的基准标量质量、模拟盒大小、初始化红移和空间分辨率。

对于额外的 MUSIC实现，我们根据以网格单元为中心的速度分量估计局部速度推导的相位增量，

$$\widehat{\Delta\theta}_i^{(v)}(\mathbf{x}) = \frac{am_\phi \Delta x}{\hbar} v_i(\mathbf{x}), \qquad i \in \{x, y, z\}. \tag{54}$$

方向违例比例定义为

$$f_i = \frac{1}{N^3} \sum_{\mathbf{x}} \mathbb{I}\left(|\widehat{\Delta\theta}_i^{(v)}(\mathbf{x})| > \pi \right), \tag{55}$$

其中， $\mathbb{I}$ 表示指示函数。合并比例为

$$f_{\rm combined} = \frac{f_x + f_y + f_z}{3}. \tag{56}$$

此处，实现 A 表示原始的全体积相位采样分析，而实现 B 表示基于单元中心 MUSIC 速度分量的附加分析。

表 VII 将这些测量值与表 VI中给出的参考全体积结果进行比较。

表 VII。比较在 $z_{\rm ini} = 120$使用不同随机种子生成的两个独立标量场暗物质初始条件实现（A 和 B）的全体积速度所致相位奈奎斯特超限比例。两个实现具有相同的宇宙学参数、模拟盒大小和空间分辨率。合并比例表示三个方向比例的平均值，而差异以百分点（pp）表示。两个实现均表现出一致的相位采样统计特征，并且在 1024^3, 的相位奈奎斯特违例显著减少，表明初始化时的相位采样得到改善。

方向	A（%）	B（%）	Δ（pp）
	512^3		
x	13.1600	13.2145	0.0545
y	14.9210	14.9663	0.0453
z	12.9740	13.0089	0.0349
综合	**13.6850**	**13.7299**	**0.0449**
	1024^3		
x	0.072507	0.072918	0.000411
y	0.275645	0.277319	0.001674
z	0.024028	0.024712	0.000684
综合	**0.124060**	**0.124983**	**0.000923**

两种计算得出的相位—奈奎斯特超限比例非常接近。在 512^3, , 综合超限比例分别为 13.6850% 和 13.7299 %，相对差异约为 0.33%。在 1024^3,, 相应比例降至 0.124060% 和 0.124983%，相对差异约为 0.74%。

在 512^3 至 1024^3 之间，两种计算得出的综合超限比例均降低了约 110 倍。方向性统计和综合统计结果高度一致，表明在所测试的初始条件下，观测到的相位采样改进具有一致性。

额外的 MUSIC 诊断使用以网格单元中心为采样点的速度分量来估计局部相位增量。其结果与参考结果在数值上的一致性，本身并不能证明它与相邻链路相位增量估计器等效。因此，不应将报告比例之间的微小差异单纯解释为随机实现效应，也不应将其视为数值误差估计。

此外，这一比较仅限于初始化阶段，并不能证明重构复波函数、其离散化流以及后续非线性演化的收敛性。尽管如此，两者的一致性仍为相位奈奎斯特诊断对分辨率的依赖性提供了额外的一致性检验。

VII. 讨论

本文考察的匹配初始条件凸显了若干必须独立评估的数值要求。高密度的 CLASS 计算确定了线性标量场暗物质截断的位置和形状，而经过修正的 MUSIC实现则表明，在所采用的傅里叶区间内，可以准确恢复相应的密度功率谱。然而，重现线性密度谱并不能保证复波函数能够充分表示预期的速度场。相位奈奎斯特准则提出了额外的采样要求，尽管 fiducial 256^3 初始条件能够准确恢复密度，但仍严重违反了这一要求。

高精度 CLASS 计算确定了标量分量截断测量的数值敏感性。提高 CLASS 精度会使半功率波数 k_{50}^{ϕ} 变化约 0.00425%。此外，独立的 AxiECAMB 对比在所测试的傅里叶区间内得到 0.3277% 的归一化速度散度残差。这些诊断衡量的是数值一致性的不同方面，不应被解读为截止位置的等价不确定性。

共同父级 512^3–1024^3 比较为分辨率敏感性提供了补充信息。密度场之间的强相关性表明，在匹配空间采样后，它们的大尺度结构仍保持一致。然而，提高分辨率会引入额外的高波数模态，由此产生的复相位差异不能被解读为严格的固定场收敛测试。相位对细化表现出更强的敏感性，进一步说明有必要采用独立于密度一致性的绝对相位采样准则。

全体积速度所推得的相位奈奎斯特分析表明，提高分辨率可显著改善相位采样。对于主要实现，综合超限比例从 512^3 时的 13.7299% 降至 1024^3时的 0.124983%。另行生成的实现得出的数值也十分接近，分别为 13.6850% 和 0.124060%。两个实现之间的相对差异在 512^3 时约为 0.33%，在 1024^3时约为 0.74%。随着空间分辨率提高，两者的综合超限比例均降低了约 110 倍。这种一致性表明，所观察到的相位采样改善在所测试的两个随机实现中均成立，而非单一实现所特有。

然而，1024^3 处较小的残余违反比例不应被解读为相位已完全分辨的证据。报告的比例量化的是初始化时局部速度推导的相位增量超过奈奎斯特阈值的情况。它们本身并不能证明完整的三维复波函数已收敛、全局相位一致，或离散波函数流已收敛。此外，两种实现之间的一致性只能作为一致性检验，而非针对随机种子集合的统计收敛检验。

AxioNyx 初始化阶段完成了从 MUSIC 密度场和速度场到复数标量场暗物质表示的数值衔接。 512^3和 1024^3 计算构造出相应的波幅和相位，并生成初始化场诊断结果。归一化后的 MUSIC 与 AxioNyx 密度场一致，验证了波幅的传递；而仅在根节点进行的相位链接测试则支持所实现的速度到相位的转换。随后，全体积相位奈奎斯特分析对空间网格采样预期相位梯度的能力进行了绝对量化。这些测试共同验证了初始化过程中的互补环节，但并未证明后续非线性演化已实现收敛。

对于这些结果的解读，仍有若干限制需要注意。尚未完成对标量场暗物质动量转移变量的独立同模型比较，也未完成针对重构波流的端到端验证，以检验其与$\boldsymbol{j}_{\phi,c} = \rho_{\phi,c}\boldsymbol{v}_{\mathrm{target}}$ 的一致性。全局相位闭合、周期绕数、相干速度零模的处理，以及横向速度诊断，仍是未来生产模拟需要进行的额外检查。这些限制并不否定所报告的密度恢复和局部相位采样测量值，但限制了我们对完整波初始化能够得出的结论。

因此，这些结果对莱曼-α α森林应用的意义在于方法论，而非观测层面。现有关于超轻暗物质的森林约束，需要对非线性引力演化、重子流体动力学、星系际介质的热历史、压力平滑以及本动速度效应进行建模[42–46, 49, 50]。本文计算针对的是此类模拟之前初始条件的一致性与数值分辨率；并未提供非线性透射通量预测，也未对标量场暗物质粒子质量给出观测约束。近期的混合波研究进一步表明，未来应用需要对密度和速度演化进行谨慎处理 [54]。

因此，本研究的主要成果是建立并验证了一套初始化框架，通过独立的数值测试评估线性传递函数、分量指定、规范约定、密度恢复、速度到相位的映射以及波相位采样。尤其是，两组高分辨率实现之间的高度一致，进一步表明，仅解析线性密度谱并不足够：要获得可靠的SFDM初始条件，还必须充分采样与之相关的波相位。

VIII. 结论

我们构建并验证了标量场暗物质（SFDM）与参考 Λ 冷暗物质宇宙学的匹配宇宙学初始条件，并检验了从CLASS-SFDM传递函数经MUSIC到AxioNyx中的复波表示这一初始化流程的数值一致性。我们的分析表明，准确恢复线性密度功率谱和充分采样波相位，是获得可靠SFDM初始条件的两个不同要求。

对于基准标量质量为 $m_\phi = 3.1623 \times 10^{-22}$ 电子伏特、$z_{\rm ini} = 120$ 时，致密的 CLASS 计算得到标量分量的半功率尺度为 $k_{50}^{\phi} \simeq 10.54\,h$ 兆秒差距$^{-1}$。CLASS 内部精度测试使该尺度变化约为 0.00425%，而独立的 AxiECAMB 对比得到的归一化速度散度残差为 0.328%。经过修正的 256^3 MUSIC 实现，在所采用的截断区间内重现了 CLASS SFDM密度功率谱，中位数比值 $P_{\rm MUSIC}/P_{\rm CLASS} = 1.00131$ ，均方根分数偏差为 0.138%。

尽管密度一致，但相位采样诊断表明， 256^3 波初始条件仍存在严重的分辨率不足。相位奈奎斯特速度为 13.2547 km s^{-1}，低于各个笛卡尔分量的均方根速度。受控的共同父级 $128^3 \rightarrow 256^3$ 对比证实，随着分辨率提高，速度所对应的相位增量会按预期减小；然而，97.95% 的细化单元仍至少有一个最近邻相位增量超过奈奎斯特阈值。

在更高分辨率下，全体积速度所致相位奈奎斯特超限比例从 512^3 时的 13.7299% 降至 1024^3时的 0.124983%。另行生成的一个实现对应的比例分别为 13.6850% 和 0.124060%。两个实现之间的相对差异分别约为 0.33% 和 0.74%。因此，两者的综合超限比例均降低了约 110 倍。这种一致性表明，在所测试的两个实现中，观测到的相位采样改善具有稳健性，而非由某个特定随机实现所致。

共同父级 512^3–1024^3 对比进一步表明，在空间采样匹配后，初始化的密度场仍然高度相关， $r_\delta = 0.998910$; 而复相位对额外的小尺度结构更为敏感。尽管如此， 1024^3 处较低的相位奈奎斯特超限比例并不能证明波函数已完全收敛。当前测试针对初始化阶段，并未独立验证离散波函数流或后续的非线性演化。

本研究的主要结论是，重现目标线性密度谱虽是构建数值可靠的波动宇宙学初始条件的必要条件，但并不足够。必须分别评估速度约定、密度恢复、相位梯度映射和相位奈奎斯特采样。经过验证的初始化诊断及其对分辨率的依赖关系，为未来开展高分辨率 SFDM 模拟提供了定量依据，包括将其应用于莱曼-α 森林。关于非线性结构形成、透射通量统计以及标量质量观测约束的预测，均不在本研究的范围之内。

附录 A：对初始条件传递函数方案的敏感性

我们将三种传递函数方案与 $z_{\rm ini} = 120$ 处针对各组分的 CLASS-SFDM 参考模型进行比较，参数为 $\Omega_{\rm SFDM} = 0.264$、$\Omega_{\rm rad} = 10^{-4}$ 和 $m_{\rm SFDM} = 10^{-21.5}$ 电子伏特。这些诊断用于对物种和红移依赖性的假设所带来的敏感性。

参考计算直接使用从同步规范下的 CLASS 获取的、针对各组分的密度和速度散度传递函数。我们考察以下替代方案：

1.纵向规范速度重建。 利用线性规范变换，根据同步规范下的度规扰动构造诊断用的速度散度传递函数

$$\theta_i^{\rm L}(k) = \theta_i^{\rm S}(k) + \frac{h'_{\rm syn}(k) + 6\eta'_{\rm syn}(k)}{2}, \qquad \text{(A1)}$$

其中，撇号表示对共形时间求导。此重建采用 CLASS 的标准度规和速度散度约定。如 IV J 节所述，我们已独立地将底层同步规范下的标量场暗物质速度散度传递函数与 AxiECAMB 进行了交叉检验。提供给 MUSIC 的规范转换传递函数也已通过式 (13) 后所述的内部一致性检验进行了验证。因此，纵向规范与同步规范之间的比较应被视为规范敏感性诊断，而非数值误差的度量。

2. 从 $z = 0$进行尺度无关重标度。初始红移处的组分传递函数近似为

$$T_{X,i}^{\rm res}(k, z_{\rm ini}) = A_{X,i}\, T_{X,i}(k, 0), \qquad \text{(A2)}$$

其中

$$A_{X,i} = \frac{T_{X,i}(k_\star, z_{\rm ini})}{T_{X,i}(k_\star, 0)}, \qquad k_\star = 0.05\,h\,{\rm Mpc}^{-1}. \qquad \text{(A3)}$$

此处 X 表示密度对比度或速度散度。归一化会针对每个分量和变量分别计算。这一规定检验了传递函数

形状在从$z = 0$ 到 $z_{\rm ini}$的演化过程中保持不变的假设。

3.总物质传递函数近似。 在相同红移下，用相应的总物质传递函数替代分量特定的传递函数，

$$T_{X,i}^{\rm approx}(k, z_{\rm ini}) = T_{X,\rm tot}(k, z_{\rm ini}). \tag{A4}$$

对于每种近似，我们定义相对于分量特定参考传递函数的绝对分数功率差：

$$\epsilon_{X,i}(k) = \left| \frac{\left|T_{X,i}^{\rm approx}(k)\right|^2}{\left|T_{X,i}^{\rm ref}(k)\right|^2} - 1 \right|. \tag{A5}$$

由于所比较的传递函数具有相同的原初归一化，原初功率谱在该比值中会相消。

为避免参考传递函数的零点附近出现病态比值，我们排除满足以下条件的点

$$|T_{X,i}^{\rm ref}(k)| \le 10^{-4} \max_{k\in\mathcal{K}} |T_{X,i}^{\rm ref}(k)|, \tag{A6}$$

其中 $\mathcal{K}$ 表示绘出的波数区间。这一排除标准是数值绘图准则，并不代表物理截断。

图 7比较了标量场暗物质和重子的密度功率差与速度散度功率差。

在参考速度散度传递函数的零点附近，标量场暗物质速度面板中的较大比值需要特别谨慎地解读。在这些区域，即使两种传递函数方案之间的绝对差异很小，也可能产生很大的分数比值，因为参考振幅趋近于零。因此，分数差异表面上的增强并不一定意味着底层物理扰动存在相应程度的巨大差异。因此，图中所示的比值应被视为对所采用线性传递函数方案的诊断，而不是数值精度的直接衡量。特别是，这些比值并不代表 MUSIC 或 AxioNyx 引入的测量误差，因为比较是在输入线性传递函数层面进行的，早于后续的数值实现与演化。

计算采用了相匹配的 CLASS传递函数表，其中在 $z = 0$和 $z = 120$处均包含 5084 个波数采样点。新生成的 $z = 120$传递函数以输出文件中存储的精度复现了已存档的参考模型，从而直接检验了所保留传递函数计算的一致性。该一致性表明，在经过测试的设置下，参考计算具有可复现性；但其本身并不能证明小尺度振荡特征的数值收敛。
度。这种收敛性需要分别评估其对 CLASS 内部精度设置、传递函数采样方式以及快速振荡的标量场扰动处理方法的敏感性。

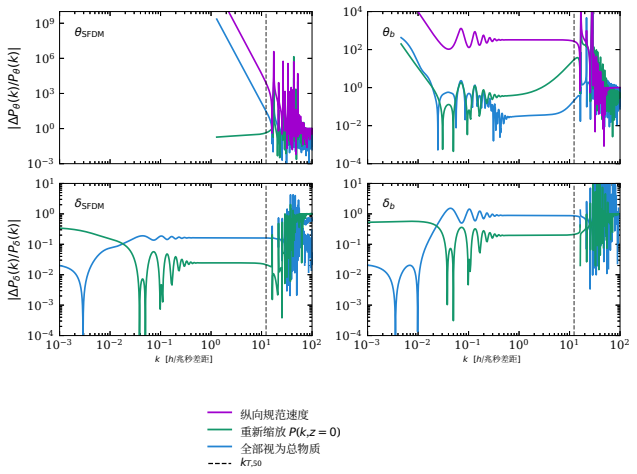

图 7. $z_{\rm ini} = 120$ 处标量场暗物质（左）和重子（右）的分数速度散度（上）与密度（下）功率差异。曲线比较了三种传递方案与同步规范下 CLASS 参考模型的差异。虚线表示 $k = 12.29\,h$兆秒差距$^{-1}$，约对应标量组分功率抑制 25% 的尺度 k_{25}^{ϕ}（等价于 50% 传递振幅阈值）。低于最大值 10^{-4} 的参考振幅不予纳入。上述差异反映的是传递方案的敏感性，而非数值初始化误差。

致谢

HIU 和 MA 衷心感谢 SECIHTI 博士奖学金计划提供的支持。本研究部分经费由 SECIHTI 墨西哥通过 CBF- 2025-G-1720 和 CBF-2025-G-176 两项资助提供。YW 感谢资源分配委员会授予的计算时长，该时长由 NHR-Nord@Göttingen 的超级计算机 Emmy 提供，属于 NHR 基础设施的一部分。部分模拟使用了项目 nip00084 的计算资源。高级宇宙学研究所 (IAC) 合作项目还通过 I0101/131/07 C-234/07 号资助提供了额外支持（http://www.iac.edu.mx/）。作者感谢 SECIHTI 通过 CINVESTAV 信息与通信技术总协调处 (CGSTIC) 的超级计算机混合集群“Xiuhcoatl”提供的计算资源（http://clusterhibrido.cinvestav.mx/）。

数据与代码可用性

数据集、模拟输入、验证记录、分析脚本和图表均已发布在 Zenodo[63] 上。存档代码快照的标识为提交 54d851e。该存档包含适用于 MUSIC v1.53 的修补版 transfer_camb.cc（修订版 6248d13）、AxioNyx v1.1.6（提交 1aba393）以及 AxiECAMB 验证记录（修订版 b7ca9ba）。完整体积相位

诊断、复现测试、完整修订标识 标识符和 SHA-256 校验和均已提供，以支持可复现性。

[1] C.-P. Ma 和 E. Bertschinger，《天体物理学杂志》455，7（1995），arXiv:astro-ph/9506072。[2] U. Seljak 和 M. Zaldarriaga，《天体物理学杂志》469，437（1996），arXiv:astro-ph/9603033。[3] A. Lewis、A. Challinor 和 A. Lasenby，《天体物理学杂志》538，473（2000），arXiv:astro-ph/9911177。[4] J. Lesgourgues，《宇宙线性各向异性求解系统（class）I：概述》（2011），arXiv:1104.2932 [astro-ph.IM]。[5] D. Blas、J. Lesgourgues 和 T. Tram，JCAP 07，034，arXiv:1104.2933。[6] R. E. Angulo 和 O. Hahn，《计算天体物理学生活评论》8，1（2022），arXiv:2112.05165。[7] O. Hahn 和 T. Abel，《皇家天文学会月刊》415，2101（2011），arXiv:1103.6031。[8] W. Valkenburg 和 F. Villaescusa-Navarro，《皇家天文学会月刊》467，4401（2017），arXiv:1610.08501。[9] M. Crocce、S. Pueblas 和 R. Scoccimarro，《皇家天文学会月刊》373，369（2006），arXiv:astro-ph/0606505。[10] M. Michaux、O. Hahn、C. Rampf 和 R. E. Angulo，《皇家天文学会月刊》500，663（2021）。[11] T. Matos 和 F. S. Guzman，《经典与量子引力》17，L9（2000），arXiv:gr-qc/9810028。[12] T. Matos 和 L. A. Ureña-López，《物理评论D》63，063506（2001）。[13] T. Matos、A. Vázquez-González 和 J. Magaña，《皇家天文学会月报》393，1359（2009），arXiv:0806.0683。[14] T. Matos、L. A. Ureña-López 和 J.-W. Lee，《天文学与空间科学前沿》 **11**, 1347518 2024 2312 00254 （），[ ] arXiv: . astro-ph.CO .[15] M. Awais、H. I. Ullah、R. C. Nunes、P. S. Ferreira 和 T. Matos，《在动力学暗能量宇宙学中约束超轻暗物质》（ 2026 2610 33332 ），[ ] arXiv: . gr-qc .[16] W. H. Press、B. S. Ryden 和 D. N. Spergel，《物理评论快报》64，1084（1990）。[17] P. J. E. Peebles，《天体物理学杂志快报》534，L127（2000）。[18] W. Hu、R. Barkana 和 A. Gruzinov，《物理评论快报》85，1158（2000），arXiv:astro-ph/0003365。[19] R. Hložek、D. Grin、D. J. E. Marsh 和 P. G. Ferreira，《物理评论D》91，103512（2015），arXiv:1410.2896。[20] L. Hui、J. P. Ostriker、S. Tremaine 和 E. Witten，《物理评论D》95，043541（2017），arXiv:1610.08297。[21] J. C. Niemeyer，《粒子与核物理进展》113，103787（2020），arXiv:1912.07064。[22] E. G. M. Ferreira，《天文学与天体物理学评论》29，7（2021）。[23] L. A. Ureña-López 和 A. X. Gonzalez-Morales，JCAP 07，048，arXiv:1511.08195。[24] L. A. Ureña-López 和 F. X. Linares Cedeño，《物理评论D》109，023512（2024），arXiv:2307.05600 [astro- ph.CO]。[25] S. Passaglia 和 W. Hu，《物理评论D》105，123529（2022），arXiv:2201.10238。[26] R. Liu、W. Hu 和 D. Grin，《物理评论D》112，023513（2025），arXiv:2412.15192。[27] L. M. Widrow 和 N. Kaiser，《天体物理学杂志快报》416，L71（1993）。[28] H.-Y. Schive、T. Chiueh 和 T. Broadhurst，《自然·物理》10，496（2014），arXiv:1406.6586。[29] H.-Y. Schive、M.-H. Liao、T.-P. Woo、S.-K. Wong、T. Chi- ueh、T. Broadhurst 和 W.-Y. P. Hwang，《物理评论快报》113，261302（2014），arXiv:1407.7762。[30] B. Schwabe、J. C. Niemeyer 和 J. F. Engels，《物理评论D》94，043513（2016）。[31] J. Veltmaat 和 J. C. Niemeyer，《物理评论D》94，123523（2016），arXiv:1608.00802。[32] P. Mocz、M. Vogelsberger、V. H. Robles、J. Zavala、M. Boylan-Kolchin、A. Fialkov 和 L. Hernquist，《皇家天文学会月刊》471，4559（2017）。[33] J. Veltmaat、J. C. Niemeyer 和 B. Schwabe，《物理评论D》98，043509（2018），arXiv:1804.09647。[34] M. Nori 和 M. Baldi，《皇家天文学会月刊》478，3935 2018 1801 08144 ( )，arXiv: 。[35] P. Mocz、A. Fialkov、M. Vogelsberger、F. Becerra、M. A. Amin、S. Bose、M. Boylan-Kolchin、P.-H. Chavanis、L. Hernquist、L. Lancaster、F. Marinacci、V. H. Rob- les 和 J. Zavala，《物理评论快报》123，141301（2019），arXiv:1910.01653。[36] S. May 和 V. Springel，《皇家天文学会月刊》506，2603 2021( )。[37] A. Laguë、B. Schwabe、R. Hložek、D. J. E. Marsh 和 K. K. Rogers，《物理评论D》109，043507（2024），arXiv:2310.20000。[38] J. E. Gunn 和 B. A. Peterson，《天体物理学杂志》142，1633（1965）。[39] M. Rauch，《天文学与天体物理学年度评论》36，267（1998）。[40] L. Hui 和 N. Y. Gnedin，《皇家天文学会月刊》292，27 1997( )。[41] N. Y. Gnedin 和 L. Hui，《皇家天文学会月刊》296，44 1998( )。[42] V. Iršič、M. Viel、M. G. Haehnelt、J. S. Bolton 和 G. D. Becker，《物理评论快报》119，031302（2017），arXiv:1703.04683。[43] E. Armengaud、N. Palanque-Delabrouille、C. Yèche、D. J. E. Marsh 和 J. Baur，《皇家天文学会月刊》471，4606（2017）。[44] T. Kobayashi、R. Murgia、A. De Simone、V. Iršič 和 M. Viel，《物理评论D》96，123514（2017）。[45] M. Nori、R. Murgia、V. Iršič、M. Baldi 和 M. Viel，《皇家天文学会月刊》482，3227（2019）。[46] K. K. Rogers 和 H. V. Peiris，《物理评论快报》126，071302 2021( )。[47] M. Viel、G. D. Becker、J. S. Bolton、M. G. Haehnelt、M. Rauch 和 W. L. W. Sargent，《物理评论快报》100，041304 2008( )。[48] M. Viel、G. D. Becker、J. S. Bolton 和 M. G. Haehnelt，《物理评论D》88，043502（2013），arXiv:1306.2314。[49] G. D. Becker、J. S. Bolton、M. G. Haehnelt 和 W. L. W. Sargent，《皇家天文学会月刊》410，1096（2011），arXiv:1008.2622。[50] M. Walther、J. Oñorbe、J. F. Hennawi 和 Z. Lukić，《天体物理学杂志》872，13（2019），arXiv:1808.04367。

[51] A. Arinyo-i Prats、J. Miralda-Escudé、M. Viel 和 R. Cen，JCAP 12，017，arXiv:1506.04519。[52] N. Palanque-Delabrouille、C. Yèche、J. Baur 等，JCAP 11，011。[53] S. Chabanier、N. Palanque-Delabrouille、C. Yèche 等，JCAP 07，017，arXiv:1812.03554。[54] Y. F. Wang，混合模糊暗物质与冷暗物质的莱曼-α 森林特征（2026），arXiv:2604.06038 [astro-ph.CO]。[55] R. D. Peng，《科学》334，1226（2011）。[56] G. K. Sandve、A. Nekrutenko、J. Taylor 和 E. Hovig，《PLoS计算生物学》9，e1003285（2013）。[57] G. Wilson、D. A. Aruliah、C. T. Brown、N. P. Chue Hong、M. Davis 等，《PLoS生物学》12，e1001745（2014）。[58] M. D. Wilkinson、M. Dumontier、I. J. Aalbersberg 等，《科学数据》3，160018（2016）。[59] J. Lesgourgues 和 T. Tram，JCAP 09，032。[60] B. Schwabe、M. Gosenca、C. Behrens、J. C. Niemeyer 和 R. Easther，《物理评论D》102，083518（2020）。[61] A. S. Almgren、J. B. Bell、M. J. Lijewski、Z. Lukić 和 E. Van Andel，《天体物理学杂志》765，39（2013），arXiv:1301.4498。[62] T. Matos、F. S. Guzmán 和 L. A. Ureña-López，《经典与量子引力》17，1707（2000）。[63] https://doi.org/10.5281/zenodo.23719912。