arXiv:2611.33084v1 [math.GR] 24 Nov 2026

左序群的一关系子积

ALBA GONZ´ALEZ、TEJAS MITTAL 和 ANDREW WOOD

Abstract. 我们证明，对于左序群 A，B 以及一个字 $w \in A*B$（该字不能共轭到 A 或 B 中，且不是一个真幂），一关系子积 $A*B/\langle\langle w\rangle\rangle$ 是无挠的，从而回答了 Chen 和 Lodha 提出的问题。为此，我们证明了一关系子积的相对无球面性结果。我们还将 B. B. Newman 拼写定理推广到一关系子积，并由此推出，具有挠元的左序群的一关系子积 $A*B/\langle\langle w^k\rangle\rangle$ 相对于 $\{A, B\}$ 是双曲的。

1. Introduction

最近，Chen 和 Lodha 对 1976年的 Wiegold 问题给出了肯定的答案。该问题询问是否存在正规秩严格大于一的有限生成完美群 [CL25]。他们的例子来自左序群的自由积。回顾一下，若存在一个定义在群 G 上的全严格序左序，使得 $fg < fh$ 对每个 $f \in G$，只要 $g < h$，群 G 就称为左序群。更具体地说，他们证明了以下定理。

定理1.1 ([CL25，定理 B])。 对于任意非平凡左序群 A和 B，以及任意不能共轭到 A中的 $w \in A*B$，自然映射 $A \to A*B/\langle\langle w\rangle\rangle$是单射。特别地，非平凡左序群的自由积的正规秩至少为二。

Chen 和 Lodha 自然提出了一个后续问题：一关系子积 $A*B/\langle\langle w\rangle\rangle$是否无挠，其中 $w \in A*B$ 不能共轭到 A 或 B 中，且不是一个真幂 [CL25，问题 6.2]。我们证明相对表示$A*B/\langle\langle w\rangle\rangle$ 是无球面的，并由此推得一关系子积 $A*B/\langle\langle w\rangle\rangle$ 确实必定无挠。

定理 A。 设 A、B 为左序群，$w \in A*B$ 为一个既不共轭于 A 或 B 中的元素，也不是真幂。则相对表示 $A*B/\langle\langle w\rangle\rangle$ 是无球面的。

我们证明的核心涉及对定向图示的分析。这类图示也是 Hamish Short 独立发现的定理1.1的另一种证明中的主要工具（私人通信）。

推论 B（推论 3.3）。 设 A、B 为左序群，$w \in A*B$ 为一个既不共轭于 A 或 B 中的元素，也不是真幂。则一关系子积 $A*B/\langle\langle w\rangle\rangle$ 是无挠的。

在证明定理 A 的过程中，我们将为一关系子积 $A*B/\langle\langle w\rangle\rangle$ 构造一个显式的分类空间（见定理 3.1）。沿用 Howie [How84], 的论证，这立即使我们能够计算该对象的（上）同调

一关系子积。左序群的一关系子积的证明与局部可指标群的一关系子积的相应结果完全相同。证明及该命题更精确的表述请参阅 [如何84] 。

推论 C（推论 3.4）。设 A、B 为左序群，$w \in A * B$ 为一个不共轭于 A 或 B 中任何元素且不是真幂的元素。设 G 为一关系子积 $A * B/\langle\langle w \rangle\rangle$，并令**1** 表示 G 的平凡子群。那么，对于 $k \geq 3$,

$$H^k(G; -) = H^k(A; -) \oplus H^k(B; -),$$
$$H_k(G; -) = H_k(A; -) \oplus H_k(B; -).$$

对于 $k = 1,2$，G 的（上）同调群可通过以下正合列计算：

$$0 \to H^1(G; -) \to H^1(A*B; -) \to H^0(\mathbf{1}; -) \to H^2(G; -) \to H^2(A; -) \oplus H^2(B; -) \to 0,$$

$$0 \to H_2(A; -) \oplus H_2(B; -) \to H_2(G; -) \to H_0(\mathbf{1}; -) \to H_1(A * B; -) \to H_1(G; -) \to 0.$$

我们还将群论中的一些经典结果推广到左序群的一关系元积。首先，我们证明 Weinbaum 子词定理的一个版本，指出 w 的真、非空交错子词在 $A * B/\langle\langle w \rangle\rangle$ 中不表示单位元。这推广了 [CL25] 中的推论 6.1。

定理 D（定理 4.1）。设 A, B 是左序群，且 $w \in A * B$ 是一个不能共轭到 A 或 B 中的字。那么，对于 w 的任意真非平凡子词u，都有 $u \notin \langle\langle w \rangle\rangle$。

其次，我们为左序群的一关系子积建立了一个版本的 B. B. Newman 拼写定理。Howie 和 Pride [HP84]证明了局部可指标群的单关系元乘积的类似结果。我们指出，我们采用定向图示的证明策略与他们的不同，也有别于单关系群的经典方法。作为推论，我们得到，带挠元的左序群的一关系子积是相对双曲的。

定理F (定理 4.2)。设 A, B 是左序群，$k > 1$ 是一个整数。考虑一关系子积 $G = A * B/\langle\langle w^k \rangle\rangle$，其中 w 不是真幂，且不共轭于 A 或 B。设 u 是 $A * B$ 中一个约化的非平凡字，在 G 中表示单位元。那么，u 包含一个交错子词 v，使得 v 或 v^{-1} 是 w^k 的一个子词，且

$$\text{length}(v) > \frac{k-1}{k}\text{length}(w^k).$$

推论 F（推论 4.3）。对于左序群 A、B，带挠元的一关系子积$A * B/\langle\langle w^k \rangle\rangle$ 相对于 $\{A, B\}$ 是双曲的。

备注。右序性要求全序在右乘下保持不变。注意，一个群是左序群，当且仅当它是右序群。在本文其余部分，我们将使用右序性，因为这与 Chen 和 Lodha 在 [CL25] 中的工作相一致。

本文结构。在第2节中，我们介绍定向图示，并利用它们为 [CL25, 定理 B] 给出另一种证明。我们还包含了证明定理所需的一些技术性结果。第3节致力于证明定理 3.1 及其一些推论，包括推论 B。在第4节中，我们证明定理 D、定理 E 和推论 F。

*AI*声明：本文的构思、论证、图表、结果或证明均未使用任何 AI 工具，手稿也并非借助 AI 起草。AI（ChatGPT 5.6）仅用于查找参考文献。作者对本文结果承担全部责任。

致谢。作者衷心感谢 Martin Bridson 仔细校阅本文手稿，并感谢他就这项工作进行的多次富有帮助的交谈并给予建议。作者也感谢 Hamish Short、Henry Wilton、Lvzhou Chen 和 Marco Linton 对本文前一版本提出的意见。具体而言，我们感谢 Short 强调定向图示的重要性，使本文的阐述更加清晰；感谢 Wilton 就堆叠问题进行富有成果的讨论，并在 ICMAT（马德里）关于非球面2-复形的会议上开设短期课程；感谢 Chen 在上述会议期间进行富有成果的讨论；感谢 Linton 建议我们考虑计算一关系子积的（上）同调群。最后，作者感谢 Ojas Mittal 帮助我们为引理 2.3 提供简洁的论证，也感谢 Colin McCulloch 进行了有益的交谈，并指出了定理 3.1 证明中的一个微妙之处。

2. Oriented Pictures and background

本节将介绍理解本文所需的背景知识。我们将用带有定向边的图示语言，证明 Chen 和 Lodha 的主要结果 [CL25，定理 B] 。这些定向图示将是证明本文结果的关键。现在给出图示的定义（关于经典图示定义的更多背景，参见 [BRS07、Sho83、CH16] ）。这种对经典图示概念的变体因 Chen 和 Lodha [CL25], 而广为人知，而带有定向边的图示这一思想则可追溯到 Duncan 和 Howie [DH91]。

首先，全文中我们令 $G = A * B$，其中 A 和 B 是非平凡群，并令 w 为 G 中一个非平凡的循环约化元素，它不共轭于 A 或 B 中的元素。令 K 为由分类空间 $K(A,\ 1)$ 和 $K(B,\ 1)$（基点分别为 p_A 和 p_B ）通过添加一条连接 p_A 与 p_B 的 1-胞腔 e 得到的胞腔复形。我们取 e 的中点作为基点。将此基点记为 $*$。

定义 2.1。 我们称 $\Gamma = (f,\ S)$ 为 S 上的一个图示（相对于 $\{A, B\}$），其中 S 是一个紧致定向曲面， f是从 S 到 K的映射，如果 S 的除至多一个边界分支外的所有边界分支的像都表示 $w^{\pm 1}$的共轭类。这类分支称为 w-圆，而 w-圆的并称为w-边界。另一类边界（如果存在）表示 G中任意元素的共轭类，我们称其为 Γ 的边界 ，记为$\partial\Gamma$。 Γ 的面积 是 Γ中 w-圆的数量，记为 area(Γ)。当 w 是一个真幂，即 $w = u^k$ （其中 u 不是真幂）时，我们将 Γ 的次数 定义为 $|k|$area(Γ), 并记为 deg (Γ)。

我们注意到，定义 2.1 类似于 w-可容许曲面的定义（见 [CL25，定义 3.1]）。更准确地说，在 A （或B）中的带边界的图示，且具有非空 w-边界，是一个 w-可容许曲面，只是没有表示 $w^{\pm 1}$的真幂的边界分支，并且只有一个 A-边界（或B-边界）分支。

为了使面积/次数的定义具有实用价值，我们需要考虑以下定义。

定义 2.2。 如果存在一个嵌入子曲面 $P \subset S$ ，它同胚于一个裤子曲面，并且 P 的两个边界分支位于 S 的 w-边界上，分别表示 w 和 w^{-1} 的共轭类，而 P 的第三个边界分支位于 S 的内部，并且在映射 f 下表示一个与单位元同伦的环路，则称图示 $\Gamma = (f,\ S)$ 可压缩 。如果不存在这样的 P，则称 Γ 是不可压缩的 。

我们注意到，对于任意群元素 $u \in \langle\langle w \rangle\rangle$，都可以得到一个平面不可压缩图示 Γ，其中 $\partial\Gamma$ 表示 u。这是 u [BRS07, Part III: Diagrams and groups] 的相对范坎彭图的对偶。

设 $\Gamma = (f, S)$ 是一个图示。与 [CL25 第 2], 节类似，利用横截性，我们可以假设原像 $f^{-1}(*)$ 是弧的不交并。这样，我们的图示 Γ 便带有连接各边界分支的弧。

设 L 是通过向 K 附加若干胞腔而得到的任意 CW复形，使得对应于字 w 的环 l 围成某个圆盘 D_l。那么，对于任意图示 $\Gamma = (f, S)$，我们可以将 f 延拓为映射 $f\colon S \to L$，其中 S 现在是一个曲面（有一个边界 $\partial\Gamma$），并且我们在每个 w-圆上粘贴圆盘。这些 w-圆盘 随后通过 f 映射到圆盘 D_l。注意，将图示 $\Gamma = (f, S)$ 压缩为另一个图示 $\Gamma' = (f', S')$，即删除相应的裤子曲面，会在映射 $f\colon S \to L$ 与 $f'\colon S' \to L$ 之间诱导出同伦等价。这类似于经典图示概念中的化简。下面的结果虽属众所周知，但由于我们未能在文献中找到出处，为求完整起见，仍附上证明。

引理 2.3. 设 $\Gamma = (f, S)$ 是一个含有嵌入裤子曲面 P的可压缩图示，并设 $\Gamma' = (f', S')$ 是从 S中删去 P后得到的图示。那么，映射 f' 和 f 是同伦的。

证明。设 P 围成环 l_1、l_2，且 l_1、l_2 分别代表对应于 w 或 w^{-1} 的自由同伦类，而 l_3 代表在 f下对应于单位元的自由同伦类。

因此，经过同伦调整后，我们可以假设 l_3 在 f下映射到点 $*$。设 l_3在 S中围成圆盘 D。

现在我们证明 $f\big|_D \simeq c_*$ 相对于 ∂D同伦，其中 c_*将每个点映射到 $*$。令 $f\big|_D$ 与 $*$横截，使得 $f\big|_D^{-1}(*)$ 是一个 1维流形。原像 $f\big|_D^{-1}(*)$ 的内部 D 中可能有 $^\circ$个嵌入环路，但可通过以下方式在相对于 ∂D 的同伦下将它们消去。

考虑一个最内层环路 l，它围成一个圆盘 $D' \subset D$。如果 D' 不包含环路 l_1 和 l_2 中的任何一个，那么 $f(D') \subseteq K$。由于 K 是无球面的，$f\big|_{D'}$ 与将 D' 映到点 $*$ 的常值映射在固定 $\partial D'$ 的意义下同伦。通过一次同伦，将 D' 收缩到一点 q，该点映到 $*$。此外，对于足够小的 ε，$N_\varepsilon(q) \setminus q$–是连通的，且其像不包含 $*$。因此，$f(N_\varepsilon(q))$ 包含于 $K(A, 1)$ 或 $K(B, 1)$ 与一条半边的并集中，并且可以通过同伦将其推离 $*$。这样便移除了环路 l。
如果 D' 只包含环路 l_1 和 l_2 中的一个，那么环路 $f(l_i)$ 与 $f(\partial D') = *$ 自由同伦。然而，$f(l_i)$ 表示 w 或 w^{-1}，它在 $A * B$ 中不是单位元；这就产生了矛盾。

如果 D' 包含环 l_1 或 l_2，那么我们就处于 $f\big|_{D'}^{-1}(*)$ 不含嵌入环路的情形，下面将对此进行处理。

现在，$f\big|_D^{-1}(*)$是由若干条互不相交的弧组成的。此外，这些弧必须始于并终于 l_1 或 l_2。因此，这些弧必定如图1所示；否则，某条弧将始于并终于同一个环，从而得到一个 w 的子词，它在 $A * B$中表示平凡元素。令 Φ 为对应于 $f\big|_D$ 的映射，该映射由将 ∂D 压缩为一点得到。因此，Φ是从球面 S' 到 L 的映射，而证明$f\big|_D \simeq c_*$ rel ∂D 等价于证明 Φ 同伦于常值映射。令R 为由两条弧和表示 w 中同一个字母 t 的线段所围成的区域（见图1）。由于 K 是无球面的，可以在每个区域 R 上相对于 ∂R 重新定义映射 Φ，而不改变 Φ的同伦类型。注意

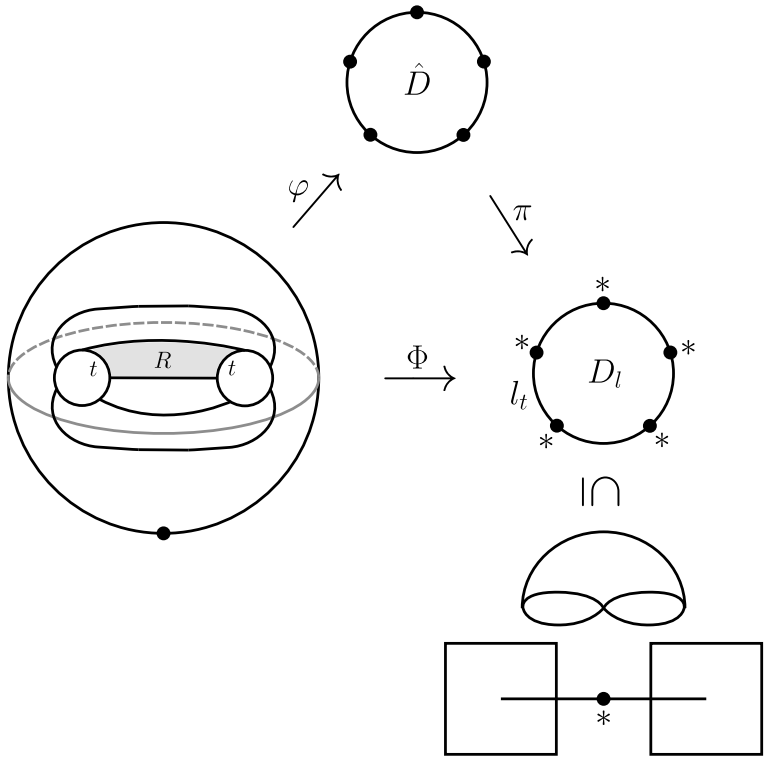


FIGURE 1. 映射 Φ 与常值映射 c_* 同伦，因为它通过一个可缩空间（圆盘）分解。

$\Phi(\partial R) = l_t$，其中 l_t 是 L 中的路径，它描绘了 w的字母 t 。因此，在同伦意义下，我们可以假设区域 R 的内部也映射到 l_t内部。

ˆ最后，令 φ 将每个区域 R 映到 ∂D 中相应的路径 l_t ，并将两个 w-胞腔映到圆盘 D。令 π: $D \to L$ 对应于圆盘 ˆD_l的粘接映射。注意， Φ 通过圆盘 D 分解，即 $\Phi = \pi \circ \varphi$ ，如图1所示。由于 ˆ圆盘 D 是可缩的， φ 与一个常值映射同伦。因此， $\Phi = \pi \circ \varphi$也与一个常值映射同伦。

最后，注意，f' 是通过将圆盘 D 压缩为一个点而得到的映射。根据上面的断言，$f\big|_D \simeq c_*$ rel ∂D 和 $f = f'$ 在 $S \setminus D$上。将这两个同伦粘合起来，可得 $f \simeq f'$。□

为 w-圆之间的弧赋予定向，即可得到上述定向图示。实现这一点的方法是使用相对堆叠（如 [CL25第 5]节所述），而相对堆叠的灵感则来自 Louder 和 Wilton 关于堆叠的工作 [LW17]。事实上，正如 Wilton 在 ICMAT（马德里）举办的非球面2-复形会议上（2026年）所提到的，利用堆叠可以为群论中的经典结果提供其他几何证明（例如 B.B. Newman拼写定理）。Chen 和 Lodha 证明了以下定理。

定理 2.4 ([CL25，定理F])。 设 $G = A * B$ 是可数右序群 A 和 B的自由积。对于任何循环约化长度至少为2的 $w \in G$ ，当且仅当 w 不是一个真幂时， w 存在相对堆叠。

现在我们来定义相对堆叠的含义。首先，考虑一个作用ρ: $G = A * B \to \text{Homeo}^+(\mathbb{R})$。对于一个循环约化字 $w = a_1 b_1 \dots a_n b_n$，其中每个 $a_i \in A \setminus \{1_A\}$ 和 $b_i \in B \setminus \{1_B\}$，给定的 $x \in \mathbb{R}$ 在 w下的轨迹为

集合：

$$\Omega(w,x) := \{x \cdot \rho(u) \mid u \text{ is a non-empty prefix of } w\},$$

其中，非空前缀 u of w 的形式为 $u = a_1 b_1 \dots a_i b_i$ 或 $u = a_1 b_1 \dots a_j$，对于 $i, j \in \{1, \dots, n\}$。如果 x 在 w 作用下的轨迹 $\Omega(w, x)$ 是稳定的，则称其为

（1）$\Omega(w, x)$ 的每个元素恰好出现一次（即，w 的非空前缀在 x 上的作用是唯一的）；（2）$x \cdot \rho(w) = x$。

w 的相对堆叠是一个右作用 $\rho\colon G = A * B \to \mathrm{Homeo}^+(\mathbb{R})$，满足存在 $x \in \mathbb{R}$，使其在 w作用下具有稳定轨迹。

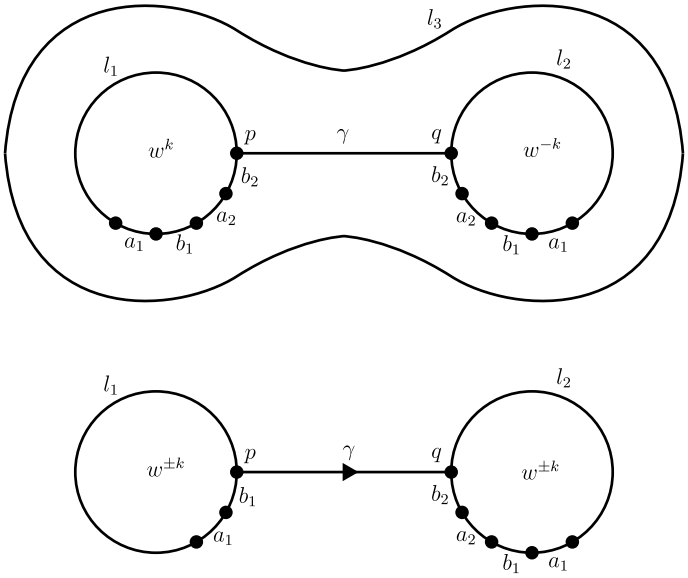


FIGURE 2. 图的上半部分表明，如果 $u_p = u_q$，那么Γ 是可压缩的。下半部分说明了在 $x \cdot \rho(u_p) > x \cdot \rho(u_q)$ 时，如何利用相对堆叠确定弧 γ的方向。

设 $G = A * B$，其中 A 和 B 是右序群，并设 $w \in G$，使得 w 是长度至少为 2 的循环约化字，且不是真幂。现在我们说明如何将图示 $\Gamma = (f, S)$ 相对于带有 w^k-圆的 $\{A, B\}$ 定向，其中 $k \geq 1$。换句话说，我们考察的是一关系子积 $A * B/\langle\langle w^k \rangle\rangle$。

根据定理 2.4，存在 w 的相对堆叠 ρ；令 $x \in \mathbb{R}$，使其在 w 下具有稳定轨迹。利用横截性，我们可以假设原像 $f^{-1}(*)$ 是弧的不交并（见 CL25 第 2] 节）。我们可以按如下方式给连接 w^k-圆的弧定向。设有一条弧 γ，连接 w^k-圆 ℓ_1 和 ℓ_2 上的点 p 和 q（见图 2）。令 u_p 和 u_q 分别为与 p 和 q 对应的 w 的前缀。更确切地说，若 p 将两个读作 w 的线段分隔开，则定义 $u_p = e$。否则，将有唯一一条包含 p 且读作 w 的线段；我们定义 u_p 为沿该线段跟随 ℓ_1 直至 p 时读出的 w 的前缀。

当且仅当 $x \cdot \rho(u_p) > x \cdot \rho(u_q)$ 时，我们将弧 γ 的方向定为从 p 指向 q。为证明此方向定义良好，我们必须考虑 $x \cdot \rho(u_p) = x \cdot \rho(u_q)$ 的情形。由于 ρ 是相对堆叠，按定义这必然意味着 $u_p = u_q$。运用 [CL25 引理 4.3]中的论证，这意味着 S 是可压缩的（图 2 中的环 ℓ_3 可以证明这一点），从而产生矛盾。

现在我们利用定向（平面）图示以及下面关于定向平面图的引理，给出 [CL25, Theorem B] 的另一种证明。

定义 2.5. 设 Γ 是一个有限的平面/球面有向图，每对顶点之间都可能有重边。若一个顶点的所有边都指向该顶点，则称其为汇点 。类似地，若一个顶点的所有边都从该顶点出发，则称其为源点 。若 Γ 中的一个圈对应于 Γ某个面的边界，则称其为初等圈 。

引理 2.6。 设 Γ 是球面或平面上的有限有向图，且至少有一条边。

(1) 如果 Γ 中至多有一个顶点是源或汇，那么 Γ 包含一个初等圈。*(2)* 如果 Γ 位于球面 S 上，且 Γ 中没有顶点是源或汇，那么 Γ 至少包含两个初等圈。

证明。 如果 Γ 中存在源/汇，取 v 为这样的顶点。不妨设 v 是源。现在，由于 Γ 中的所有其他顶点都具有入边和出边，从某个顶点 $v' \neq v$ 出发并沿着出边构成的路径前进，我们最终必然会重复经过某个顶点，从而得到一个有向圈。设 C 是一个围成圆盘 $D \subseteq S \setminus \{v\}$ 的圈，并且该圆盘包含 Γ 中最少数量的面。如果 D 的内部不包含任何顶点，那么我们就找到了一个初等圈。否则，由于 $v \notin D$，我们从 D 内部的某个顶点 u 出发，再次沿着出边构成的路径前进，从而得到一个围成包含更少面之圆盘的圈。这与 C 的极小性矛盾。

对于（2），先像上面那样在 S 中取一个有向圈，再取一个最短的此类圈 C，使其成为嵌入圈。现在， C 围成两个圆盘 D_1 和 D_2，分别位于球面 S 上 C 的两侧。 D_1 和 D_2 各自都具有有限平面有向图的结构，其中所有顶点都不是源点或汇点，因此根据（1），必定包含初等圈。□

我们提炼了 [CL25 引理 4.5 和引理 4.6] 中的论证，得到以下命题，说明我们所关注的定向图示不含源/汇或初等圈。

命题 2.7。 设 A和 B 是非平凡右序群， w是 $G = A * B$ 中的一个元素，它不共轭于 A 的任何元素，且不是一个真幂。任何关于 $A * B/\langle\langle w^k \rangle\rangle$ 的不可压定向图示，若将其视为图，都不含源/汇，也不含初等圈。

证明。 源点（分别地，汇点）意味着来自某个 w^k-圆的所有弧都朝外（分别地，朝内）定向。然而，定向是通过相对堆叠给出的， ρ 和 $x \cdot \rho$（u）必须恰好在两个前缀处取最小值和最大值，而这两个前缀的定向必然不同。

现在假设我们有一个初等圈 C ，它围出一个圆盘片 P ，其多边形边界在弧和线段之间交替： γ_1， s_1， γ_2， s_2，..... γ_m， s_m（见图3）。

事实上，假设线段 s_i 的起点和终点分别是连接点 j_i^- 和 j_i^+ ，它们分别对应前缀 u_i 和 $u_i t_i$ 。不失一般性，假设γ_i 从j_i^+ 定向至j_{i+1}^-，于是有 $x \cdot \rho$（$u_i t_i$）$> x \cdot \rho$（u_{i+1}）。最后，注意到 $x \cdot \rho$（$u_1 t_1$）$> x \cdot \rho$（u_2），因此 $x \cdot \rho$（$u_1 t_1 t_2$）$= x \cdot \rho$（$u_1 t_1$）ρ（t_2）$> x \cdot \rho$（u_2）ρ（t_2）$> x \cdot \rho$（u_3）。对此归纳应用可得，对所有 $l \leq m$ （其中我们定义u_{m+1} 为 u_1），

$$x \cdot \rho(u_1 t_1 t_2 ... t_l) > x \cdot \rho(u_l)\rho(t_l) > x \cdot \rho(u_{l+1}).$$

设定 $l = m$ 得到 $x \cdot \rho(u_1 t_1 t_2 ... t_m) > x \cdot \rho(u_1)$。然而，由于 P围成一个圆盘，我们有 $t_1 t_2 ... t_m = 1$ 属于 $A * B$。因此， $x \cdot \rho(u_1) = x \cdot \rho(u_1 t_1 t_2 ... t_m) > x \cdot \rho(u_1)$。这一矛盾意味着不存在初等圈。□

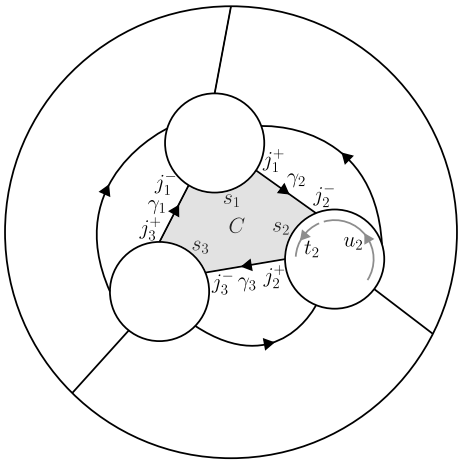


FIGURE 3. 通过相对堆叠定向的图示不能包含初等圈。

CL25 的替代证明 [CL25, Theorem B]。使用我们的记号，我们将证明 A嵌入 $A*B/\langle\langle w^k\rangle\rangle$，其中 w不是一个真幂。假设，$a \in \langle\langle w^k\rangle\rangle$。这给出了一个不可压定向图示 Γ，其 $\partial\Gamma$ 读作 a。命题 2.7 保证 Γ 不包含任何源点/汇点或初等圈。由于该图示见证了 $a \in \langle\langle w^k\rangle\rangle$ 和 $a \in A$，唯一的弧将位于 w^k-圈之间，因此可以将该图示视为一个定向平面图。这与引理 2.6 矛盾。□

Chen 和 Lodha 通过确立以下关于 w-可容许曲面复杂度的界，证明了定理1.1（参见 [CL25，定义 3.1]）。

定理2.8 ([CL25，定理 D])。设 $G = A * B$ 是右序群 A 和 B 的自由积，且 w 是 G 中一个不能共轭到 A 或 B 中的元素。那么，对于任意边界不可压缩的 w-可容许曲面 S，若其不含 2 球面或圆盘分支，则有

$$-\chi(S) \geq \deg(S).$$

现在我们将上述定理2.8推广到定向图示。回想一下，这意味着相应曲面的一个边界分支可以标记为 u。由此可以证明带挠元的右序群一关系子积具有相对双曲性（参见推论 4.3 下方的注释）。对于局部可指标群，以下结果已在 [DH91，定理 3.3] 中得到证明。

令 $u \in A * B$ 使得

$u = c_1 d_1 \cdots c_m d_m$，其中 $c_i \in A \setminus \{1_A\}$，$d_i \in B \setminus \{1_B\}$ 对于每个 $i \in \{1, \ldots, m\}$.，则 的长度记为 length(u)，为 $2m$。

定理 2.9。设 $G = A * B$ 是右序群 A 和 B 的自由积，且 w 是 G 的一个元素，它不共轭于 A 或 B 中的元素，也不是真幂。设 $\Gamma = (f, S)$ 是 $A * B/\langle\langle w^k\rangle\rangle$ 上的一个图示，其中 $\partial\Gamma$ 读出字 $u = c_1 d_1 \cdots c_m d_m \in A * B$，且 $c_i \in A \setminus \{1_A\}$、$d_i \in B \setminus \{1_B\}$。于是，

$$-\chi(S) \geq \deg(S) - \frac{1}{2}\text{length}(u).$$

证明。我们的证明策略与 [DH91，定理 3.3] 和 [CL25，定理 D]类似。令 f: $S \to K$ 为图示。如上所述，利用横截性，我们

可以假设原像 $f^{-1}(*)$是不交并的弧（见 [CL25，第 2]节），并通过使用相对堆叠，确定连接任意两个w^k-圆的弧的方向。

沿弧切开曲面后，我们得到若干块的不交并。每一块P 要么是圆盘，要么是环带，其 $\partial\Gamma$ 内侧读作 A或 B中的一个字母。根据 Mayer–Vietoris，我们有 $\chi(S) = \sum_{\text{所有块}} \chi(P) - E$，其中 E是 S中的弧数。注意，每条弧恰好包含两个接合点，因此我们有

$$\chi(S) = \sum_{\text{all pieces}} \chi(P) - \frac{1}{2}(\text{length}(u) + |w|\deg(S)).$$

若某块边界上的所有弧均为定向弧，即相应的弧连接两个 w^k-圆，则称该块为内部块。其他块称为外部块。与 [CL25 第 4], 节中一样，若一段 w^k-圆上两端点处相邻的弧方向相同，则称该线段一致。

现在我们将对一致线段的总数进行双重计数。首先，由命题 2.7 可知，每个内部圆盘片至少有两段一致线段。因此，对于每个内部块 P，都有 $2\chi(P) \le sc(P)$，其中 $sc(P)$ 表示块 P中的一致线段数。因此，一致线段的总数至少为 $2\sum_{\text{内部块}} \chi(P)$。

其次，注意在一个 w^k-圆中，对应于连续连接点的任意 $|w|$ 多条弧不能具有相同的定向。事实上，这些定向由相对堆叠 ρ 给出，而 $x \cdot \rho(u)$ 对恰好两个前缀必须分别取最小值和最大值。相应弧上的定向将彼此相反（更多细节见 [CL25, 引理 4.6]）。因此，任意 $|w|$ 条连续线段中至少有 2 条不一致，这意味着我们至少有 $2\deg(S)$ 条不一致线段。因此，一致线段至多有 $(|w| - 2)\deg(S)$ 条。

结合关于一致线段数量的两个估计，我们得到

$$\sum_{\text{inner pieces}} \chi(P) \le \frac{1}{2}(|w| - 2)\deg(S).$$

最后，注意 S 恰好有 $\text{length}(u)$ 个外部块，因此我们得到如下的欧拉示性数估计。

$$\begin{aligned}
-\chi(S) &= \frac{1}{2}(\text{length}(u) + |w|\deg(S)) - \sum_{\text{all pieces}} \chi(P) \\
&\ge \frac{1}{2}(\text{length}(u) + |w|\deg(S)) - \frac{1}{2}(|w| - 2)\deg(S) - \sum_{\text{outer pieces}} \chi(P) \\
&\ge \frac{1}{2}(\text{length}(u) + |w|\deg(S)) - \frac{1}{2}(|w| - 2)\deg(S) - \text{length}(u) \\
&= \deg(S) - \frac{1}{2}\text{length}(u).
\end{aligned}$$

□

我们简要讨论几种不同的方法。要证明非球面性，也可以使用w-可容许（平面）曲面和示性数界 [CL25, 定理 D]。 w-可容许曲面与图示的区别在于，对于前者，允许 w 的幂以及一些 A 和 B 边界。图示可以在边界处标记任意群元素 $g \in \langle\langle w \rangle\rangle$。正如 Wilton 最近向我们提到的，文献尚未充分探索堆叠的作用，而它可用于

证明左序群的一关系子积的无挠性。进一步发展这一方法将会很有意义。

3. Asphericity for One-Relator Products of Right-OrderableGroups

本节中，我们为一关系子积 $A * B/\langle\langle w\rangle\rangle$ 构造一个显式的分类空间，从而得以证明该一关系子积的一个相对无球面性结果（定理 A）。

回顾一下， K 是通过沿边 e 将一个 $K(A,\ 1)$ 和一个 $K(B,\ 1)$ 粘合在一起而得到的胞腔复形。固定一个局部单射环 l ，它位于 K 的 1-骨架中，并表示字 $w \in \pi_1(X,\ *)$。令 L 为将 2-胞腔 σ_w 沿其粘接映射（即此环 l）附加到 K 后得到的复形。下面我们证明 L 是无球面的，这将是我们证明定理 3.3 的关键要素。

定理 3.1. 从 *2*-球面 S 到 L的任意连续映射，都可以通过同伦变为另一个映射，使其像落在 K内，即 $\pi_2(L, K) = 0$。因此， L 是无球面的。

证明。 设 $\overline{f}\colon S \to L$ 是从 2-球面到 L的连续映射。首先，借助横截性，我们对该映射 f 作同伦变形，使球面 S 继承一种编码映射 f 的自然胞腔结构（参见 [FR96，第 3], [节；CL25，第 3], [节；BRS76]）。令映射 f 与开 2-胞腔 σ_w 内部、对应于 w的点 x横截。 x的一个小邻域的原像将是若干个互不相交的圆盘的并D_1, D_2， D_3，..... D_k。经过一次同伦变形后，我们可以假设其像 fD_i 是整个 2-胞腔 σ_w。于是，得到 f限制为映射 $f\colon \overline{S} \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{k} D_i\right) \to K$。不失一般性，设 k 在 f的同伦类中的所有映射里取最小值。我们将证明 $k = 0$，从而证明 f 可以通过同伦变形为一个像落在 K内的映射。

注意，(f, S) 是相应一关系子积上的一个图示。设该图示可压缩，见证这一点的是某个裤子曲面 P。经过压缩P，我们得到一个图示 $(f', S' = S)$，其中 $f \simeq f'$（由引理 2.3 可知）。此外， x 的一个小邻域的原像是不交并的 $k-2$ 个圆盘，这与 k 的极小性矛盾。若（定向）图示 $\Gamma := (f, S)$ 不可压缩，则由命题 2.7 可知，它必含有一个源/汇或一个初等圈。由于 Γ 是球面 S 上的图示，这与引理 2.6 矛盾。

因此 $\pi_2(L) = 0$，并且根据 Hurewicz 和 Whitehead 定理，我们必有$\sim L$ 是无球面的。事实上，设 $p\colon L \to L$ 为万有覆盖映射，并令$\sim K := p^{-1}(K_A \sqcup K_B)$ 为 p 下 K_A 与 K_B 的不交并的原像。由于映射 $K_A \to L$ 和 $K_B \to L$ 根据 [CL25, Theorem B] 是 π_1-单射， K 是 K_A 和 K_B 的万有覆盖空间的若干副本的不交并。由于 K_A和 K_B 是分类空间，特别是它们的万有覆盖空间可缩； 和 $L \setminus K$ 只由 1-胞腔和 2-胞腔组成，关于该对 (L, K) 的同调长正合序列 给出，对于 $i > 2$，有 $H_i(L) = 0$。最后，Hurewicz定理告诉 我们 $H_2(L) \cong \pi_2(L) = 0$，而由 Whitehead 定理可得 L 可缩。因此， L 是无球面的。□

现在证明：对于 w不是一个真幂的情形，一关系子积 $A*B/\langle\langle w\rangle\rangle$是无挠的。为此，我们需要覆盖空间理论中的以下引理（见 [Hat02, PM99]）。为完整起见，我们给出其证明。

引理 3.2。设 X 是一个连通胞腔复形，其万有覆盖映射为$\sim p\colon\ X \twoheadrightarrow X$。

- 设 $Y \subseteq X$ 是一个路径连通子空间，$\iota\colon\ Y \hookrightarrow X$ 是包含映射，而 $\iota_*\colon\ \pi_1(Y, y_0) \hookrightarrow \pi_1(X, x_0)$ 是诱导映射，其中 $y_0 \in Y$且$x_0 := \iota(y_0)$。
- 设 Z_0 是 $p^{-1}(Y)$ 的一个路径连通分支，且 $z_0 \in Z_0$ 满足$p(z_0) = y_0$。

~考虑 $G := \pi_1(X, x_0)$ 通过甲板变换在 X上的标准作用。令$g \in G$。那么，对于 $p^{-1}(Y)$的任意路径连通分支 Z，当且仅当 $g \in h\iota_*(\pi_1(Y, y_0))h^{-1}$，其中 h 是 G 中满足 $Z = h \cdot Z_0$的一个元素。

证明。假设 $h \in G$，使得 $Z = h \cdot Z_0$ 且 $g \in h\iota_*(\pi_1(Y,\ y_0))h^{-1}$。那么，$h^{-1}gh = [\alpha]$，其中 α 是 Y 中以 $y_0 = x_0$ 为基点的环。将 α 提升为 Z_0 中的路径 β，使得 $\beta(0) = z_0$。路径 β 的终点 $\beta(1)$ 是 $\left(h^{-1}gh\right) \cdot z_0$。由此可得 $g \cdot (h \cdot z_0) \in Z$，因此 $Z \cap g \cdot Z \neq \varnothing$。根据连通性，可得$g \cdot Z = Z$。

反过来，假设 $g \cdot Z = Z$。存在 $h \in G$，使得 $Z = h \cdot Z_0$。那么，$g \cdot (h \cdot z_0) \in Z = h \cdot Z_0$。令 β 为 Z_0 中从 z_0 到 $\left(h^{-1}gh\right) \cdot z_0$ 的路径。令$\alpha := p \circ \beta$，这便得到 Y 中以 y_0 为基点的环。于是，α 提升为 β，从而得到$h^{-1}gh = [\alpha] \in \iota^*(\pi_1(Y,\ y_0))$。因此，$g \in h\iota^*(\pi_1(Y,\ y_0))h^{-1}$。□

推论 3.3。设 A、B 是右序群，且 $w \in A * B$ 是一个元素，它不共轭于 A 或 B 中的任何元素，也不是真幂。那么，$A * B/\langle\langle w\rangle\rangle$是无挠的。

~证明。我们采用与 [FR05, 定理 2]类似的证明策略。设 L 为 L的万有覆盖空间，并设 L_A和 L_B分别为 $K(A,1)$ 和 $K(B,1)$~在覆盖映射下的原像。由定理 3.1，L 是可缩的。同样请注意，L_A 或 L_B 的任一连通分支（例如 $Z \subset L_A$）都是可缩的，因为映射 $K(A,1) \to L$ 由 [CL25, 定理 B], 可知是 π_1-单射，因此 Z 实际上只是 $K(A,1)$的万有覆盖空间的一个副本。

将这些不相交子复形逐一压缩为一点，便得到一个空间$\sim L'$，它与 L同伦等价，见 [Hat02，命题 0.16 和习题0.27]。因此，L' 是一个可缩二维复形。

假设 $A * B/\langle\langle w\rangle\rangle$ 有一个非平凡挠元素 g。现在，g 通过~甲板变换作用于 L 和 $g \cdot L_A = L_A$ 以及 $g \cdot L_B = L_B$。特别地，g将 L_A 或 L_B 的每个连通分支映到另一个这样的连通分支。因此，该作用下降为对 L'的作用。该作用在 L' 上除由压缩 L_A和 L_B的连通分支所得的顶点之外都是自由的；若对于这样的顶点 $v \in L'$有 $g \cdot v = v$，则对于 L_A或 L_B的某个连通分支，我们有 $g \cdot Z = Z$。由引理 3.2 可知，这意味着 g 位于 A 或 B的某个共轭群中，这与 A、B 无挠相矛盾。将这一论证应用于 g的各次幂，我们可知 $\langle g\rangle$在 L' 上的作用是自由的；但 L' 是一个可缩二维复形，因此这是不可能的。事实上，若 $F = \langle g\rangle$ 的作用是自由的，那么 L'/F 将是一个有限维的 $K(F,\ 1)$。然而，有限循环群在无穷多个维度上都有同调，因此不可能有有限维分类空间。□

通过使用定理 3.1 中构造的 $K(G,\ 1)$ 空间，我们能够计算 $A*B/\langle\langle w\rangle\rangle$ 的（上）同调群，并证明 Lyndon恒等式定理的一个相对版本。右序群的一关系子积的证明与 Howie 在 [How84], 中证明的局部可指标群的一关系子积的相应结果完全相同，因此我们略去这些证明。

推论 3.4。设 A、B 为右序群，$w \in A * B$ 为一个不共轭于 A 或 B 中任何元素、且不是一个真幂的元素。设 G 为一关系子积 $A*B/\langle\langle w\rangle\rangle$，并令 $\mathbf{1}$ 表示 G 的平凡子群。那么，对于 $k \geq 3$,

$$H^k(G;-) = H^k(A;-) \oplus H^k(B;-),$$
$$H_k(G;-) = H_k(A;-) \oplus H_k(B;-).$$

对于 $k = 1,2$，G 的（上）同调群可通过以下正合列计算：

$$0 \to H^1(G;-) \to H^1(A*B;-) \to H^0(\mathbf{1};-) \to H^2(G;-) \to H^2(A;-) \oplus H^2(B;-) \to 0,$$
$$0 \to H_2(A;-) \oplus H_2(B;-) \to H_2(G;-) \to H_0(\mathbf{1};-) \to H_1(A*B;-) \to H_1(G;-) \to 0.$$

推论 3.5。对于右序群 A 和 B，设 N 表示一个不是任何真幂的交错词 $w \in A * B$ 的正规闭包。设 G 为一关系子积 $A * B/\langle\langle w\rangle\rangle$。那么，$N$ 的阿贝尔化 N^{ab} 同构于 $\mathbb{Z}G$，其生成元为 $w \cdot [N, N]$。

4. Classical Results for One-Relator Products of Right-OrderableGroups

设 A、B 是右序群。我们首先证明，w 的真非空子词在 $A * B/\langle\langle w\rangle\rangle$中不表示单位元，从而推广 Weinbaum 的子词定理。

定理 4.1. 设 A、B 是右序群，且 $w \in A * B$ 是不共轭到 A或 B中的字。那么，对于 w的任意真非平凡子词 u，都有 $u \notin \langle\langle w\rangle\rangle$。

证明。我们用反证法证明。为此，假设 u是 w 的一个真非平凡子词，且 $u \in \langle\langle w\rangle\rangle$, 也就是说，$u = \prod_{i=1}^{N_u} g_i w g_i^{-1}$。选取 u，使得 N_u 在 w的所有真非空子词中最短。至多取 w的一个共轭后，不失一般性，可设 u 是 w的一个前缀。我们注意到，只需证明 w 不是一个真幂时结论成立。事实上，假设 $w = \hat{}w^k$，其中 $\hat{}w$ 不是一个真幂。如果 u 是 $\hat{}w$的幂，那么由 [CL25，推论 6.1] $u \notin \langle\langle \hat{}w^k \rangle\rangle$。否则，$u = \hat{}w^l u'$，其中 u' 是 $\hat{}w$的一个真非平凡子词，因此我们可以对 $\hat{}w$ 应用该结论，得到 $u' \notin \hat{}w$，进而得到 $u \notin \langle\langle \hat{}w^k \rangle\rangle$。

由于 $u \in \langle\langle w\rangle\rangle$，我们可以考虑一个定向图示 Γ，其边界上的字为 u。此外，表示 $u = \prod_{i=1}^{N_u} g_i w g_i^{-1}$ 给出了一个相对范坎彭图，其中有 N_u 个 2-胞腔 [BRS07，范坎彭引理]。相应的图示 Γ是该范坎彭图的对偶，因此恰好有 N_u 个 w-圆。事实上，我们现在注意到，也可以利用相对堆叠 ρ对连接到 $\partial\Gamma$ 的弧进行定向。对于一条弧，若其连接一个对应于 u的前缀 u' 的连接点，以及一个对应于 w的前缀 u'' 的连接点，那么当 $x \cdot \rho(u') > x \cdot \rho(u'')$ 时，我们将其从 u' 定向到 u''。注意，我们不可能有 $u' = u''$，因此总能对这些弧进行定向。确实，若 $u' = u''$，则 $v = u^{-1}w$ 是 w 的一个子词，使得 $v \in \langle\langle w\rangle\rangle$ 且 $N_v < N_u$，这与 N_u的极小性矛盾。（见图4）。

现在，所有弧都已定向，我们得到了一幅图示，接下来将寻找一个合适的有向圈，从而导出矛盾。注意，在 u 边界上，连接两个分别对应前缀 u' 和 $u'' = u't$ 的连接点的每条边，都满足 $x \cdot \rho(u'') = x \cdot \rho(u't)$，但边 e 除外；该边对应于 u 的最后一个字母。

断言。在 Γ中存在一个不包含边 e 的初等有向圈。

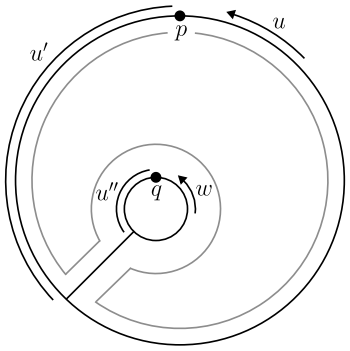


FIGURE 4. 沿着从基点 p出发的灰色路径，我们读出字 $u'(u'')^{-1}w^{-1}u''u'^{-1}u = v^{-1}$。此外，该路径所围成的 w-边界分支数量较少。

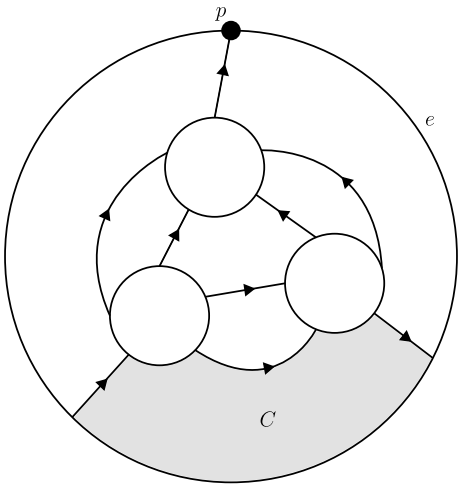


FIGURE 5. 所有弧均有定向，并且我们可以找到一个不包含边 e 的初等圈 C 。

证明。 将图示 Γ视为一个定向球面图，其顶点为 ∂Γ和 w-圆，边为连接它们的弧。我们区分两种情况。

情形1： 与 ∂Γ 对应的顶点是源点或汇点。

那么，对应的图将有一个源/汇，因此根据引理 2.6，我们必有一个定向初等圈 C 。如果此圈包含边 e，那么 ∂Γ 必须同时包含指向内侧和向外的弧，这与对应顶点是源点/汇点相矛盾。

情形2： 与 ∂Γ 对应的顶点既不是源点也不是汇点。

于是， Γ 将球面镶嵌，并且没有源点或汇点，这意味着根据引理 2.6，我们可以找到两个初等有向圈。其中一个圈必不包含边 e，因为只有一个包含 e的初等圈。□

现在我们有了一个有向圈 C ，其每条弧都通过相对堆叠 ρ 定向，因此可借助命题 2.7 得到所需的矛盾。□

现在，我们为右序群的一关系子积证明一个版本的 B. B. Newman 拼写定理。

定理 4.2。设 A、 B 为右序群，并考虑一关系子积 $G = A * B/\langle\langle w^k \rangle\rangle$ ，其中 w 不是真幂，也不共轭于A 或 B的元素。设 u 是 $A * B$ 中的一个约化交错词，且在 G中表示单位元。那么， u 包含一个交错子词 v ，使得 v 或 v^{-1}是 w^k 的子词，且

$$\text{length}(v) > \frac{k-1}{k}\text{length}(w^k).$$

证明。由于$u \in \langle\langle w^k \rangle\rangle$，我们得到一个约化定向图示，其中包含一些 w^k-圆，并且 $\partial\Gamma$ 读作交错词 u。如果两条弧从一个固定的 w^k-圆连接到 $\partial\Gamma$，且它们在 u 和 w^k 中都是连续的，并且不围成其他 w^k-圆，则称它们为连续 弧。我们将证明，我们的图示中有一个 w^k-圆至少有（$k-1$）长度为（w）$+1$条连续弧连接到 $\partial\Gamma$。于是，取 v 为上述 u-边界的部分即可证明该定理。

如果连接到 $\partial\Gamma$ 的所有弧都是连续的，则称 w^k-圆良好（见图 6）。

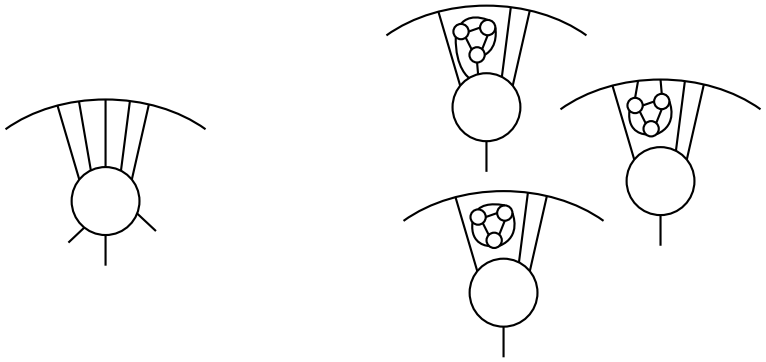


FIGURE 6. 该图左侧展示了一个良好的 w^k-圆（顶部的弧是 $\partial\Gamma$ 的一部分，底部的三条线连接到此处未表示的其他 w^k-圆）。在该图右侧，我们可以看到三个不良好的 w^k-圆示例。

断言。设 l 是一个良好的 w^k-圈，连接到 $\partial\Gamma$ 的连续弧少于 $(k-1)$length(w) $+1$ 个，则 l 将同时存在入向和出向的有向弧。

证明。注意， l 至少有 length(w) 条弧连接到其他 w^k-圈。此外，这些弧在 l 中是连续的。因此，可以找到 w 的一个前缀，使得在 w 的相对堆叠中， x 的像达到最小（分别地，最大）。根据定向的定义，这个前缀将对应一条入向（分别地，出向）弧。□

如果所有 w^k-圈都是良好的，那么要么我们找到了一个具有足够多连续弧的 w^k-圈，要么根据上面的断言，每个 w^k-圈都同时存在入向和出向的有向弧。对于第二种情况，将图示Γ 看作一个定向平面图，根据引理 2。6，我们必定能得到一个初等圈。这与命题 2.7 矛盾。

现在，假设图示中有一个 w^k-圆 l 不良好，因此它必然有两条弧通向 $\partial\Gamma$ ，这两条弧围成一个区域 R_l ，其中包含 $n_l > 0$ 多个 w^k-圆（见图 7）。不妨设 n_l 是图示中所有不良好的 w^k-圆及其对应区域 R_l 中的最小者。

如果 R_l 内部的某个 w^k-圆不良好，那么上述边界分支在相应区域内包含的 n_l w^k-圆将少于 n_l，这与 n_l 的极小性矛盾。因此，区域 R_l 中只能包含良好的 w^k-圆。

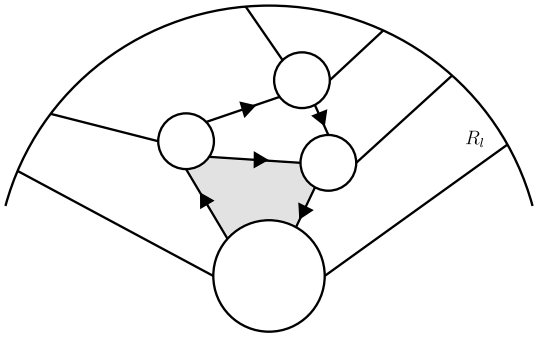


FIGURE 7. 所有 w^k边界分支内的 R_l 都是良好的，形成一个初等有向圈。

最后，将对应于区域 R_l 的子图示视为一个定向球面图，其中顶点是 w^k-圆和 ∂R_l ，边则是它们之间的有向弧。根据上述断言，每个对应于 w^k-圆的顶点都必须具有入边和出边。因此，相应的图至多有一个源/汇，即对应于 ∂R_l 的顶点。同样，根据引理 2。6，我们必须得到一个初等圈，这与命题 2.7 矛盾。□

注记。 定理 4.2 的证明的一种变体表明，可以找到 u 的两个互不相交的交替子词 v_1、 v_2 ，使得 v_i 或 v_i^{-1} 是 w^k 的子词，并且 length$(v_i)> \frac{k-1}{k}$ length(w^k)。

我们回顾一下，若群 G 相对于一组子群$\{H_1, \dots, H_k\}$（按 Osin 的定义）是相对双曲的，则 G关于$\{H_1, \dots, H_k\}$是有限表示的，并且 G关于 $\{H_1, \dots, H_k\}$ 的相对 Dehn 函数是线性的（参见 [Osi15，定义 2.35]）。

推论 4.3。 对于右序群 A、B，带挠元的一关系子积 $A*B/\langle\langle w^k\rangle\rangle$相对于 $\{A, B\}$是双曲的。

证明。 若一关系子积含有挠元，则 $k \geq 2$，由定理 3.3 可知。定理 4.2 蕴含，任何表示 $A*B/\langle\langle w^k\rangle\rangle$ 中单位元的字 u 都必须包含至少半个 w^k 或 w^{-k} 作为子词。因此， $A*B/\langle\langle w^k\rangle\rangle$ 的相对 Dehn 函数是线性的，故其相对于 $\{A, B\}$ 是双曲的（例如参见 [Osi15]）。□

注记。 推论 4.3 也可以不使用定理 4.2 来证明，只需将 CL25 的定理 4.4 改编为定向图示即可，下面我们将对此作简要说明。

设 u 是在 $A*B/\langle\langle w\rangle\rangle$ 中表示单位元的一个字。这意味着 $u \in \langle\langle w\rangle\rangle$，因此存在一个平面有向图示 Γ，其边界上标有字 u，描绘了 u 是 w 的共轭元之积。假设这种将 u 表示为共轭元之积的表示是最简的，则我们的图示必定不可压缩。注意，我们有 $\chi(S) = 1 -$ 面积(S)，且 deg $(S) = k \cdot$ 面积(S)。由定理 2.9，我们得到

$$-\chi(S) \geq \deg(S) - \frac{1}{2}\text{length}(u).$$

将上述内容重新整理可得

$$\text{area}(S) \leq \frac{1}{2(k-1)}\text{length}(u) - \frac{1}{k-1}.$$

因此， $A * B/\langle\langle w^k \rangle\rangle$ 满足相对线性等周不等式，因而相对于 $\{A, B\}$ 是双曲的（例如参见 [Osi15]）。

References

[BRS76] S. Buonchristiano、C.P. Rourke 和 B.J. Sanderson。*A Geometric Approach to Homology Theory*。伦敦数学学会讲义系列。剑桥大学出版社，1976年。[BRS07] N. Brady、T. Riley 和 H. Short。*The Geometry of the Word Problem for Finitely Generated Groups*。数学高级课程——巴塞罗那 CRM。Birkhauser Basel，2007年。[CH16] I. Chinyere 和 J. Howie。三个群的某些单关系子积的非平凡性。*International Journal of Algebra and Computation*，26(03):533–550，2016年5月。[CL25] L. Chen 和 Y. Lodha。Wiegold 问题与左序群的自由积，2025年。可见于 https://arxiv.org/abs/2510.26073。[DH91] A. J. Duncan 和 J. Howie。局部可指标群的单关系子积的亏格问题。*Mathematische Zeitschrift*，208:225–237，1991年。[FR96] R. Fenn 和 C. Rourke。克利亚奇科方法及其对无挠群上方程的求解。*L'Enseignement Mathématique*，42(1–2):49–74，1996年。[FR05] M. Forester 和 C. Rourke。无挠群上的伴随问题。*Proceedings of the National Academy of Sciences* 102 36 12670 12671, 2005 , ( ): – August 。可见于 https://doi.org/10.48550/arXiv.math/0412274。[Hat02] A. Hatcher。*Algebraic Topology*。剑桥大学出版社，2002年。[How84] J. Howie。局部可指标群的单关系子积的上同调。*London Mathematical Society-second Series* 419 430, 1984 *Journal of The* , 页码 – 。[HP84] J. Howie 和 S.J. Pride。交错广义二维复形的拼写定理及其应用。*Inventiones mathematicae*，76:55—-74，1984年。[LW17] L. Louder 和 H. Wilton。堆叠与 w-圈猜想。*Bulletin* 60 3 604 612, 2017 *Canadian Mathematical* https://arxiv.org/abs/1410.2540 , ( ): – 。可见于 。[Osi15] D.V. Osin。相对双曲群：内在几何、代数性质和算法问题，2015 年。可见于 https://arxiv.org/abs/math/0404040。[PM99] J. Peter May。*A Concise Course in Algebraic Topology*。芝加哥数学讲座。芝加哥大学出版社，1999年。[Sho83] H.B. Short。群论中的拓扑方法：伴随问题。未发表，1983年11月。

Mathematical Institute, University of Oxford, Andrew Wiles Building, Radcliffe Observatory Quarter, Woodstock Road, Oxford, OX2 6GG*Email address*: alba.gonzalez@maths.ox.ac.uk

Mathematical Institute, University of Oxford, Andrew Wiles Building, Radcliffe Observatory Quarter, Woodstock Road, Oxford, OX2 6GG*Email address*: tejas.mittal@maths.ox.ac.uk

Mathematical Institute, University of Oxford, Andrew Wiles Building, Radcliffe Observatory Quarter, Woodstock Road, Oxford, OX2 6GG*Email address*: andrew.wood@maths.ox.ac.uk