arXiv:2611.33095v1 [cs.GT] 24 Nov 2026

改进的向下封闭委托界

Hamed Abdi* Kiarash Banihashem† MohammadTaghi Hajiaghayi‡
Danny Mittal§

2026年11月25日

摘要

我们研究向下封闭可行性约束下的委托选择，其中每件物品的委托人价值与代理人价值可以任意相关，但各物品之间相互独立。我们给出一种确定性的、对代理人信息不可知的菜单，在任何最佳响应下（包括平局时选择不利于委托人的结果），都能保证委托人获得超过离线最优期望值的 $29/70 \approx 0.41429$。该菜单仅取决于可行族和委托人的价值分布，并且只使用提议中的物品及其委托人价值来验证提议。此前，向下封闭约束下的最佳保证为 0。1098。

拟阵约束可保证二分之一，且这一界限在秩一情形下已是紧的；但向下封闭约束并非如此：一个五件物品的背包实例将所有确定性菜单的保证限制在最优值的 $500/1011$ ，而任何带有随机化接受机制的规则，即使该规则知道代理人的效用，也无法保证超过 $30/61$。一个明确的计算机辅助构造的实例族将所有此类规则的界限降至 0。48105。

我们通过反证法证明这一保证。若某个固定族中的每个菜单所得收益都至多为最优值的 $29/70$ ，则某个归一化实例会满足一组有限的仿射不等式，这些不等式涉及其截断最优值的生存函数、止损变换和超额均值。一个精确有理数证书表明该系统无解。我们还给出一个简短的解析证明，说明对报告的总价值设置单一阈值即可保证 $3/10$。

1 引言

在委托选择问题中，决策者（即委托人）必须从多个物品中选择一个，但无法观察这些物品的价值。这些价值是从已知分布中抽取的，代理人能够观察到这些价值，但代理人对每件物品的估值可能与委托人不同。委托人不能向代理人支付报酬，也不能亲自寻找物品。因此，在价值实现之前，委托人会承诺一条规则，规定接受哪些提议；提议会指出一件物品，并向委托人报告其价值，而委托人可以核实该价值。随后，代理人会提出自己最看重的可接受物品，或者不提出任何物品；委托人再将由此获得的期望价值与最佳物品的期望价值进行比较，后者是委托人凭借选择所能获得的价值

完全信息。这一模型可追溯至 Holmström [14] ，并在经济学中得到广泛研究 [3, 4, 19]。Kleinberg and Kleinberg [16] 将近似视角引入这一问题，并通过与先知不等式的联系证明，一条合适的规则可以保证委托人获得这一基准的一半。

*马里兰大学帕克分校。电子邮箱： hamedabdi37@gmail.com。
†马里兰大学帕克分校。电子邮箱： kiarash@umd.edu。
‡马里兰大学帕克分校。电子邮箱： hajiaghayi@gmail.com。§马里兰大学帕克分校。电子邮箱： dannymittal@gmail.com。

我们研究其组合版本：代理人提出一组物品，并受向下封闭可行性约束 $\mathcal{F}$限制。物品 i 具有委托人价值 $X_i \geq 0$ 和代理人价值 $Y_i > 0$。各物品的数值对 $(X_i,\ Y_i)$ 相互独立，而 X_i 和 Y_i 可能存在任意相关性。委托人承诺采用一条接受规则，该规则能够观察所提议物品的身份及其委托人价值。代理人观察所有数值，提出一个可行集，并在出现平局时选择对委托人不利的方案。基准为期望离线最优值 $V = \mathbb{E}\max_{S\in\mathcal{F}} X(S)$。

对于拟阵约束，最优保证已为人所知。Bechtel 和 Dughmi [7] 以及 Banihashem、Hajiaghayi、Krysta 和 Shin [6] 将组合约束下的委托与对抗所有价值均可见的对手时的先知不等式联系起来，由此得到 $1/4$ 的保证。仅依赖于拟阵和委托人的价值分布的确定性菜单可保证 $V/2$ [2]，而在秩一情形下，确定性菜单已无法做得更好 [7, 命题 53]。

向下封闭族的范围广得多。它们包括背包约束、匹配、图的独立集以及多个拟阵的交。对于先知不等式而言，差异极其显著：对于一般的向下封闭族，没有任何在线算法能够达到最优值的某个常数比例 [20]。Banihashem 等人 [6]表明，委托的表现有所不同，他们给出了一种与代理人无关的机制，能对每个向下封闭族保证 $0.1098\,V$。此前最好的上界是 $1/2$，而这一上界在秩一情形下便已成立 [7]。

1.1 我们的结果

我们的主要结果是：存在一种确定性菜单，仅使用可行族和委托人价值的分布律，即可提供常数级保证。

定理 1.1（定理 5.1的重述）。 对于每个向下封闭族和每个实例，都存在一种确定性菜单，它仅取决于 $\mathcal{F}$ 和委托人价值的分布律；在此菜单下，对于代理人的每一种最佳响应，委托人的期望收益都超过 $\frac{29}{70}V \approx 0.41429\,V$。

该菜单只检查提交的物品及其委托人价值，完全不需要代理人的效用、其分布律，也不需要物品两种价值之间的相关性。证明表明，某个固定菜单族中的一种菜单总是有效，并通过计算期望得分来选出该菜单（算法 3）。对于有限有理支撑，这一计算可通过有限次精确枚举完成；我们不对其运行时间作任何保证。

常数 1 /2 对于向下封闭族而言无法达到，而拟阵则可以达到。

定理 1.2。 存在一些向下封闭的实例，使得

(a) 在一个包含五件物品的背包实例上，每个确定性菜单的收益至多为 $\frac{500}{1011}V$；*(b)* 在一个相同形式的实例上，每种采用随机化接受的规则的收益至多为 $\frac{5011}{10110}V$，而且对于此类规则，不可能实现高于 $30/61$ 的普适保证，即使规则知道代理人效用，且平局时优先有利于委托人；*(c)* 在一个由计算机辅助构造的实例族上，每种采用随机化接受的规则的收益都低于 $0.48105\,V$。

(a) 和 (b) 部分通过简短的直接论证在第 3 节中证明，而 (c) 部分则在附录 A中证明。综上，

$$\frac{29}{70} < \alpha_D \leq \alpha_R < 0.48105,$$

其中 α_D 和 α_R 分别是确定性和随机化的代理人无关规则所能达到的最佳普适保证。特别是，即使规则可以随机化且了解代理人的效用，在向下封闭约束下进行委托也严格比在拟阵约束下更难。

我们还将在第 4 节给出一个自包含的解析证明，说明对报告的总价值设置单一阈值即可保证 $3V/10$。

1.2 技术

得分。 由于每位代理人的价值都为正，代理人绝不会提交一个存在被接受的严格超集的被接受申报。对于确定性菜单，任何最佳响应所获得的收益因此至少为 得分：包含极大的被接受申报中最低的委托人价值（引理 2.1）。得分仅取决于委托人价值，因此分析中无需考虑代理人。我们所有的保证都是关于期望得分的下界。

预备分析。 对于报告总价值的阈值 z，每个被接受的申报价值至少为z；如果移除物品 i 会使阈值无法达到，那么该物品必定包含在每个被接受的申报中。它超过 z 的部分会全额计入，而该物品被强制纳入的事件与其自身价值相互独立。如果没有任何阈值能获得超过一的收益，则可得尾界 $\mathbb{P}(W \geq x) \leq 1/x$，其中 $x > 1$。Efron–Stein界表明，将价值截断至 $3/2$ 后，最优值的方差至多为其均值的 $3/2$ 倍；随后通过一维计算可知，最优值的均值小于 $10/3$。

主要证明。 关于 $29/70$ 的保证遵循相同的模式，但涉及更多菜单。假设第 $\mathcal{M}$ 节的菜单族 5 中的每个菜单至多获得 $\frac{29}{70}V$。经过加入一个价值为 1 的安全物品进行归一化（引理 2.2）后，每个菜单获得的收益至多为 1，而最优值的均值 R 略低于 $70/29$。每个菜单结合关于每份可接受报告必须包含哪些物品的逐点论证，可对实例中的以下量给出一个仿射不等式：最优值的生存概率和止损变换（其取值在若干上限处进行截断，并在网格上计算）、截断均值、超过上限的期望超额，以及菜单超过其层级的平均超调量。截断最优值的协方差不等式（第 6节）、关于菜单超过其层级的超额的若干界（第7节），以及它们在细网格上的多个层级处的组合（第 8节），进一步给出了同类不等式。最为详细的不等式会在每个实现中，随着层级上升，跟踪所有合格报告共有的物品所构成的关键集合，并通过一个关于可能路径的动态规划，为每个到达层级收取费用（第9节）。所得线性方程组无解：对于覆盖截断均值 μ_1可能取值的 96个区间中的每一个，都存在一个显式的正组合，使得其在包含该实例的盒子上为正。

这些不等式是手工证明的，只有最后一步涉及计算：对每个区间，都使用精确有理数运算来计算各行及其乘数，包括动态规划。附录中的上界具有相同的结构：给出一个显式的实例族，将每条规则归约为有限的动态规划，并进行精确有理数计算。

1.3 相关工作

委托。 经济学文献研究的是在代理人的偏好偏差已知且无法进行转移支付时，获准采取行动的最优集合 [3, 14, 19]。Armstrong and Vickers [4]研究了委托项目选择，即代理人找到一组项目并提出其中一个。Kleinberg and Kleinberg [16] 将委托搜索与阈值停止规则联系起来，并获得了二分之一的保证

对于单次选择。这一联系已扩展到委托随机探测 [7], 委托潘多拉魔盒 [8], 以及在线委托搜索 [9], , Khodabakhsh、Pountourakis 和 Taggart [15]研究了单次选择情形下的简单委托机制。Banihashem、Hajiaghayi、Krysta 和 Shin [6] 引入了组合约束下的委托选择。他们证明，超越拟阵后，向先知不等式的归约不再成立，并针对向下封闭族给出了一种保证为0。1098 的机制。对于拟阵，最优的确定性保证为二分之一，这一结果由 [2]获得。

先知不等式与竞争消解。 Samuel-Cahn [22], 提出了单物品先知不等式，其保证为 $1/2$；Kleinberg 和 Weinberg [17] 将其推广到了拟阵。Feldman、Svensson 和 Zenklusen [11] 提出了在线竞争消解方案，这些方案针对全能对手给出了先知不等式；Lee 和 Singla [18] 则针对已知顺序下的拟阵获得了最优方案。对于一般的向下封闭族，Rubinstein [20] 证明不存在任何常数级保证；Rubinstein 和 Singla [21] 研究了具有次模目标函数的组合先知不等式。我们的保证表明，将任务委托给知情代理人可以避开这一障碍，并获得较大的显式常数。相关的拟阵秘书问题 [5]最近已通过一种最优算法 [1]得到解决。

概率工具。 第 4 节中的方差界 [10, 23]是 Efron–Stein不等式 [12, 13]。主要证明中的协方差界依赖于针对独立变量的递增函数的 Harris–FKG不等式 [12, 13]。

组织结构。 第 2 节定义模型、得分和归一化。第 3 节证明低于二分之一的上界，附录 A 证明0.48105的上界。第 4 节证明3/10 保证。第 5 节定义菜单并陈述主定理。第 6–9 节证明这些不等式，第 10节介绍有限计算并完成证明。

2 模型与预备知识

2.1 具有向下封闭约束的委托

设 E 是一个有限物品集合，且 $\mathcal{F} \subseteq 2^E$ 非空并且向下封闭： $T \subseteq S \in \mathcal{F}$ 蕴含 $T \in \mathcal{F}$。物品 i 具有委托人价值 $X_i \geq 0$ 和代理人价值 $Y_i > 0$。不同物品之间的数对（X_i， Y_i）相互独立；在同一数对内，二者的依赖关系可以是任意的。双方都以可加方式评价集合，我们记 $X(S) = \sum_{i \in S} X_i$ 和 $Y(S) = \sum_{i \in S} Y_i$。

在抽取任何价值之前，委托人承诺采用接受规则 q，该规则为每个可行集 S以及 S上每个委托人价值向量 x_S分配一个概率 $q(S, x_S) \in [0, 1]$。代理人观察到所有价值，并提交一个集合 $S \in \mathcal{F}$，或选择弃权。委托人观察提交物品的身份及其委托人价值。以概率 $q(S, X_S)$实施整个集合 S，否则不实施任何物品。因此，代理人的期望收益为 $q(S, X_S)Y(S)$，委托人的期望收益为 $q(S, X_S)X(S)$。弃权使双方的收益均为零。代理人作出最佳响应，若出现平局，则作出不利于委托人的裁决。

如果 q 只取 0 和 1，则该规则是确定性的 。在这种情况下，我们称之为菜单 ，并称其接受 或提供 满足 $q = 1$ 的报告。如果某条规则由$\mathcal{F}$和委托人价值的分布律决定，则称其与代理人无关的 ；它既不使用代理人价值的分布律，也不使用代理人价值的实现。

我们的算法是确定性的，且与代理人无关。我们的不可能性结果允许随机化接受，也允许规则取决于所有价值的联合分布。

基准是期望离线最优值

$$W(x) = \max_{S \in \mathcal{F}} \sum_{i \in S} x_i, \qquad W = W(X), \qquad V = \mathbb{E}W, \tag{2.1}$$

并且我们假设 $0 < V < \infty$。如果某条规则在每个实例中，无论代理人采取何种最佳响应，委托人的期望收益都至少为 αV，则称该规则为 α保证。我们用 α_D 和 α_R 分别表示确定性规则和随机化的代理人无关规则所能达到的最佳通用常数，因此$\alpha_D \le \alpha_R$。

单元素集合不可行的物品不属于任何可行集。全文均将此类物品删除。因此，每个剩余物品都满足 $X_i \le W$，从而 $\mathbb{E}X_i \le V < \infty$。

2.2 菜单的得分

对于菜单 M 和委托人价值的一种实现 x，令 $\mathcal{A}_M(x)$ 表示 M 在 x处接受的非空可行报告族。 M 在 x处的得分为

$$b_M(x) = \begin{cases} \min\{x(S) : S \text{ is inclusion-maximal in } \mathcal{A}_M(x)\}, & \mathcal{A}_M(x) \neq \varnothing, \\ 0, & \mathcal{A}_M(x) = \varnothing. \end{cases}$$

得分取决 仅在$\mathcal{F}$、菜单和委托人价值处结束。显然 $0 \le b_M(x) \le W(x$).

引理 2.1. 对于任意菜单 M、任意实现(x, y)（其中 $y_i > 0$ 对所有 i均成立），以及代理人的任意最佳响应，委托人的收益至少为 $b_M(x)$。

证明。 如果$\mathcal{A}_M(x)$为空，则该下界为零。否则，某个非空报告会被接受，并为代理人带来正效用，因此代理人不会弃权，而是提交一份被接受的报告S。如果 S 严格包含于另一份被接受的报告 S'，那么 $y(S') > y(S)$，因为每个代理人价值都为正，这与最优性矛盾。因此， S 在$\mathcal{A}_M(x)$中是包含极大的，委托人获得 $x(S) \ge b_M(x)$。 □

根据引理 2.1，期望得分超过 αV 的菜单可提供 α-保证，无论代理人价值分布如何，也无论如何打破平局。我们所有的保证均通过得分证明。

2.3 归一化

主要证明采用反证法。固定一个菜单族$\mathcal{M}$，其描述见第 5 节，并固定一个目标比率 $\rho \in (0,1)$，并假设 $\mathcal{M}$ 中的每个菜单的期望得分至多为 ρV。令$R = 1/\rho > 1$。菜单族 $\mathcal{M}$ 对于将所有维度参数（上限、层级和截断值）同时乘以一个正因子保持封闭，并且得分随这些数值缩放：如果 M' 由 M 将其维度参数乘以 $\lambda > 0$ 得到，那么 $b_{M'}(\lambda x) = \lambda b_M(x)$。

引理 2.2 (安全单例归一化)。 假设在某个实例上，M 中的每个菜单的期望得分至多为ρV。那么存在一个具有以下性质的实例，在该实例中，M 中的每个菜单的期望得分仍至多为一：

(i) 它必然包含物品 s_0，并且 $\{s_0\}$ 是一个极大可行集；

(ii) 剩余物品构成原始实例，其中所有委托人价值都乘以 $\lambda R/V$，对于某个 $\lambda \in (0,1]$,，其中 V 是原始实例的期望最优值；

(iii) $W \geq 1$ 必然且 $\mathbb{E}W = R$。

证明。 将所有委托人价值乘以 R/V。每个菜单的得分都按相同比例缩放，且$\mathcal{M}$ 在重新缩放下封闭，因此$\mathcal{M}$ 中的每个菜单现在的期望得分至多为 $\rho R = 1$，并且 $\mathbb{E}W = R$。添加一个物品 s_0，其 $X_{s_0} = 1$ 且代理人价值为任意正数，并且仅在其构成单元素集合时可行；再将原有价值乘以 $\lambda \in (0,1]$。新的最优值为 $\max(1, \lambda W)$。函数 $\lambda \mapsto \mathbb{E}\max(1, \lambda W)$连续，在 $\lambda = 0$处等于 $1 < R$，且在 $\lambda = 1$处至少为 $\mathbb{E}W = R$。选取 λ，使得 $\mathbb{E}\max(1, \lambda W) = R$。由此得到（i）–（iii）。

令 $M \in \mathcal{M}$。如果 M 接受$\{s_0\}$，那么$\{s_0\}$ 是被接受报告中包含极大的，因为没有可行集严格包含它，所以得分至多为一。否则， M 不接受任何包含 s_0的报告，其被接受的报告及其极大成员与菜单 $M' \in \mathcal{M}$中的相同；该菜单是通过将 M 的维度参数除以 λ并应用于原始价值而得到的。因此，其得分为 M'得分的 λ 倍，而后者的期望至多为一。两种情况下，期望得分都至多为一。

□

第 6–10 节中的所有陈述均针对按引理 2.2归一化后的实例，并固定$R > 1$。由此推导出的不等式对每个 $R > 1$都成立； R 的取值仅通过恒等式 $\mathbb{E}W = R$ 以及各不等式附带的假设条件产生影响。最后的计算使用 $R = 7000000/2900007$，即 $29/70 + 10^{-6}$的倒数。

记号。 对于 $c \geq 1$，我们将取值截断至 c，并记为

$$Z_c = W\big((\min(X_i, c))_{i \in E}\big), \qquad \mu_c = \mathbb{E}Z_c, \qquad S_c(t) = \mathbb{P}(Z_c \geq t), \qquad D_c(t) = \mathbb{E}(Z_c - t)_+,$$
$$e(c) = \sum_i \mathbb{E}(X_i - c)_+, \qquad b(y) = \mathbb{P}\Big(\max_i X_i \leq y\Big), \qquad G(c) = \int_c^\infty \Big(\frac{1}{b(y)} - 1\Big)dy.$$

下标 ∞ 表示未截断最优值，因此 $Z_\infty = W$。当上限为 1 时，我们记 $w_i = \min(X_i,\ 1)$,$w(S) = \sum_{i \in S} w_i$ 和 $Z = Z_1$。在归一化实例中， $Z \geq 1$ 显然成立，因为存在物品 s_0。

3 小于二分之一时的不可能性

对于拟阵约束，确定性且与代理人无关的菜单可保证 $V/2$；而当只能选择一个物品时，确定性菜单已无法取得更好的结果 [2, 7]。本节将说明，向下封闭约束更难处理，只需一个包含五个物品的实例即可。附录 A给出了一个更强的计算机辅助界。

考虑一个容量为 3、包含五件物品的背包。 A、 B 和 J 的委托人价值相互独立，其他委托人价值为常数，且所有代理人价值都是确定性的。令$0 < \eta \leq 1$。

Item	权重	委托人价值	代理人价值
A	1	以概率 $1/3$取值 9，否则取值 0	3
B	2	以概率 $1/3$取值 9，否则取值 0	2
E	2	确定为 3	4
C	3	10，必然如此	8
J	3	以概率 $1/100$ 获得 900，否则为 0	η

可行族是$\{A,B\}$、$\{A,E\}$、$\{C\}$和$\{J\}$的向下闭包。将 AB和 AE分别记作这两对。当 $X_J=0$时，如果 A, B 都较高，则最优集合为 AB；如果只有 A 较高，则最优集合为 AE；如果 A 较低，则最优集合为$\{C\}$。因此

$$V=\frac{1}{100}\,900+\frac{99}{100}\left(\frac{1}{9}\,18+\frac{2}{9}\,12+\frac{2}{3}\,10\right)=\frac{1011}{50}. \tag{3.1}$$

3.1 确定性菜单

命题 3.1。 对于此实例，任意确定性菜单的最大期望收益为10。其最优比率为 $500/1011<1/2$。

证明。 代理人严格按照以下顺序对非空可行集合进行排序：

$$C\succ AE\succ AB\succ E\succ A\succ B\succ J.$$

在 $(X_A,\ X_B)=(a,\ b)$ 的条件下。每个非头奖报告及其接受决策都与 X_J 无关。如果任何此类报告被接受，代理人无论 X_J 如何都会选择其最喜欢的选项。如果没有报告被接受，则条件期望收益至多为 $\mathbb{E}X_J=9$。

如果菜单接受 C，代理人总是选择它，收益为 10。假设它拒绝 C。根据菜单是否接受报告 AE （其数值为 (9，3)），存在两种情况。其决策不能取决于被省略的数值 X_B。

如果该报告被接受，那么每当 $X_A=9$ 时，代理人都会选择它并获得 12 的收益。当 $X_A=0$ 时，每个非头奖报告的数值都至多为 9，因此根据前述条件上界，期望收益至多为 9。总和至多为

$$\frac{1}{3}\,12+\frac{2}{3}\,9=10.$$

如果该报告被拒绝，只有状态 $X_A=X_B=9$ 存在收益超过 9 的可用非头奖报告。该处的条件上界为 18，其他状态则为 9。总和至多为

$$\frac{1}{9}\,18+\frac{8}{9}\,9=10.$$

仅接受 C 可达到10。公式（3.1）给出了比率。 □

3.2 随机化接受

定理 3.2。 对于 $\eta=1/100$，同一实例上的任何随机化接受规则，其期望收益至多为 $5011/500=10.022$。因此，其比率至多为

$$\frac{5011}{10110}<\frac{1}{2},$$

even 已知代理人效用的全部信息，并采用有利于委托人的平局打破规则时。

证明。 固定一条规则。对于状态 $(X_A,\ X_B)=(a,\ b)$，令 s_{ab} 为非头奖报告所提供的最大代理人效用 $q(S,\ X_S)Y(S)$。设

$$r_{ab}=\max_{\substack{\varnothing\neq S\in\mathcal{F}\\ J\notin S}}\frac{X(S)}{Y(S)}.$$

这些量不依赖于 X_J。它们的相关取值为

$(a,\ b)$	$(0,0)$	$(0,9)$	$(9,0)$	$(9,9)$
概率	$4/9$	$2/9$	$2/9$	$1/9$
r_{ab}	$5/4$	$9/2$	3	$9/2$

若 $s_{ab} > \eta$，则无法选择头奖。若 $s_{ab} \le \eta$，每个非头奖报告对应的委托人预期收益为

$$q(S, X_S)X(S) = q(S, X_S)Y(S)\frac{X(S)}{Y(S)} \le \eta r_{ab}.$$

在头奖高额结果中，每份报告的期望收益至多为 900；在低额结果中，头奖收益为零。因此，当 $s_{ab} \le \eta$ 时，条件期望收益至多为

$$9 + \frac{99}{100}\eta r_{ab}. \tag{3.2}$$

这包括与头奖并列的情况。

令 q_C 为 C 的接受概率。如果 $q_C > 7/8$，则 $8q_C > 7$，其超过其他每份报告的代理人效用。代理人总是选择 C，因此收益至多为 10。因此假设 $q_C \le 7/8$，于是 C 的收益至多为 $35/4 < 9$。

令 q 为报告 AE 的接受概率，其委托人价值为 (9,3)。同样，对于 X_B 的两个取值，q 均适用。

情况 1： $q \le 5/7$。头奖高额A 报告 AE 的收益至多为 $60/7 < 9$。因此，在表格中的前三个状态下，每份非头奖报告的收益至多为9。结合（3.2），可将条件收益界定为 $9 +$（$99/100$）ηr_{ab}。在状态（9，9）中，该上界为 18，因为 $9 +$（$99/100$）η（$9/2$）< 18。取平均值得到

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\text{payoff}] &\le \frac{8}{9}9 + \frac{1}{9}18 + \frac{99\eta}{900}\left(4\cdot\frac{5}{4} + 2\cdot\frac{9}{2} + 2\cdot 3\right)\\ &= 10 + \frac{11}{5}\eta.\end{aligned}$$

情形 2： $q > 5/7$。只要 $a = 9$，报告 AE 为代理人提供效用 $7q > 5$。它严格优于 AB 和J。其余每个可能的赢家支付至多 12，包括 C。当 $a = 0$，每个非头奖报告的支付至多为 9，因此（3.2）再次给出界 $9 +$（$99/100$）ηr_{ab}。因此

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\text{payoff}] &\le \frac{1}{3}12 + \frac{2}{3}9 + \frac{99\eta}{900}\left(4\cdot\frac{5}{4} + 2\cdot\frac{9}{2}\right)\\ &= 10 + \frac{77}{50}\eta \le 10 + \frac{11}{5}\eta.\end{aligned}$$

代入 $\eta = 1/100$ 即可证明该定理。 □

命题 3.3。随机接受规则不可能实现高于 $30/61$ 的普适保证。

证明。以 $9/\varepsilon$ 的概率用 $\varepsilon \in (0,\ 1/2)$替代头奖，否则为零。其均值仍为 9，且其高值超过 18。定理 3.2的证明中，将 $99/100$ 替换为 $1 - \varepsilon$后，可将每条规则界定为

$$10 + \frac{20}{9}(1-\varepsilon)\eta.$$

离线均值为 $9+(1-\varepsilon)34/3$。令 $\varepsilon,\ \eta\downarrow 0$，这两个表达式的比值趋于 $30/61$。每个实例都有五件物品，且代理人效用严格为正。因此，任何大于30/61的常数都无法在有限实例上成立。

□

4 预热：单一总价值阈值

本节证明，采用尽可能简单的菜单即可获得 $3/10$ 的保证：接受所有总委托人价值达到某个阈值的可行报告。证明完全采用解析方法。证明引入了三个要素，主要证明将对它们作更深入的阐述：强制物品、由得分上界所蕴含的尾界，以及截断最优值的方差界。

对于 $z\geq 0$，定义

$$e(z)=\sum_{i\in E}\mathbb{E}(X_i-z)_+,\qquad B(z)=z\mathbb{P}(W\geq z)+e(z)\mathbb{P}(W<z). \tag{4.1}$$

函数 e 连续且单调不增，$e(0)>0$，并且当 $z\to\infty$ 时，$e(z)\to 0$。因此，存在唯一的 $t>0$，使得 $e(t)=t$。

算法 1 总价值阈值

要求： 可行族 $\mathcal{F}$ 和委托人价值的分布律

1: 计算 e 以及 W的分布律，并找出满足 $e(t)=t$的唯一 $t>0$。2: 令 z^* 为 B 在 $[t,\infty)$ 上的最小最大化对象。3: 当且仅当 $S\in\mathcal{F}$ 且 $\sum_{i\in S}x_i\geq z^*$时，接受经过验证的报告（S，x_S）。

定理 4.1。 算法 *1* 定义良好，并且在每个最佳响应下，委托人的期望收益至少为 $3V/10$。

验证器需要进行一次可行性测试、一次求和和一次比较。对于有限有理支撑，预处理可以精确完成：e 是分段仿射的，而在 W的连续支撑值之间，$\mathbb{P}(W\geq z)$为常数，因此 B 在连续断点之间是仿射的，只需在 t 、e 的断点以及 W 的分布律中不小于 t的断点处对其求值。在 W的一个支撑值处，$\mathbb{P}(W\geq z)$中的弱不等式包含该原子。

4.1 强制物品

对于物品 i，令 $W_{-i}=\max\{X(S):\ S\in\mathcal{F}\ \ i\notin S\}$ 表示不含 i 时的最优值 .

引理 4.2。 对于每个 $z>0$，接受总价值至少为z 的所有可行报告的菜单，在任何最佳响应下都能带来至少 $B(z)$ 的期望收益。

证明。 令 P_z 为实现收益。我们逐点证明

$$P_z\geq z\mathbf{1}_{\{W\geq z\}}+\sum_i(X_i-z)_+\mathbf{1}_{\{W_{-i}<z\}}. \tag{4.2}$$

若 $W<z$，则 $W_{-i}\leq W<z$ 而且 $X_i\leq W<z$ 对于每个 i，因此右侧为零。若 $W\geq z$，则某个非空报告会被接受，并根据引理 2.1 代理人提交被接受的报告 S。若 $X_i>z$ 且 $W_{-i}<z$，则每个被接受的报告都包含 i，因为不含 i 的报告其值为

至多为 W_{-i}。此外，$\sum_{i\in S}\min(X_i,z)\ge z$：要么某个加数等于 z，要么截断不会改变任何加数，且总和为 $X(S)\ge z$。写作 $X(S)=\sum_{i\in S}\min(X_i,z)+\sum_{i\in S}(X_i-z)_+$ 即可证明（4.2）。

变量 W_{-i} 是除 X_i之外的其他取值的函数，因此它与 X_i独立。由于$W_{-i}\le W$，

$$\mathbb{E}P_z \ge z\mathbb{P}(W\ge z)+\sum_i \mathbb{E}(X_i-z)_+\mathbb{P}(W_{-i}<z)\ge z\mathbb{P}(W\ge z)+e(z)\mathbb{P}(W<z)=B(z). \qquad \square$$

在 $[t,\infty)$上，我们可以写成

$$B(z)=e(z)+(z-e(z))\mathbb{P}(W\ge z),\qquad z-e(z)\ge 0.$$

函数 $z\mapsto\mathbb{P}(W\ge z)$是上半连续的，因此 B 在 $[t,\infty)$上是上半连续的。此外

$$0\le B(z)\le e(z)+\mathbb{E}[W\mathbf{1}_{\{W\ge z\}}]\to 0\quad(z\to\infty),\qquad B(t)=t>0.$$

因此，B 在 $[t,\infty)$ 上的最大化点构成一个非空紧集，并且 z^* 存在。令 $K=B(z^*)>0$。根据引理 4.2 剩下只需证明 $K\ge 3V/10$。

将所有委托人价值乘以 $1/K$，并保留缩放后实例的记号；于是 $K=1$。由于 $B(t)=t$，我们有 $t\le 1$，因此 $e(x)\le e(t)=t\le 1$，对 $x\ge 1$成立。对于 $x>1$，不等式$B(x)\le 1$ 给出

$$\mathbb{P}(W\ge x)\le\frac{1-e(x)}{x-e(x)}\le\frac{1}{x}. \tag{4.3}$$

4.2 截断与方差

令 $c=3/2$，并定义

$$Z=\max_{S\in\mathcal{F}}\sum_{i\in S}\min(X_i,c),\qquad \mu=\mathbb{E}Z,\qquad a=e(c)\in[0,1].$$

截断 W 的一个最优集合可得

$$W\le Z+\sum_i(X_i-c)_+,\qquad V\le\mu+a. \tag{4.4}$$

引理 4.3. $\operatorname{Var}Z\le c\mu$.

证明。令 Z_{-i} 为去掉物品 i后的截断最优值，并设 $\Delta_i=Z-Z_{-i}$。固定一个达到 Z 的集合 S。若 $i\notin S$，则 $\Delta_i=0$。若 $i\in S$，则根据向下闭包，$S\setminus\{i\}\in\mathcal{F}$，因此 $\Delta_i\le\min(X_i,c)$。因此

$$0\le\Delta_i\le c,\qquad\sum_i\Delta_i\le Z. \tag{4.5}$$

对于一个由独立变量构成的函数 f，

$$\operatorname{Var}f(X)\le\sum_i\mathbb{E}\operatorname{Var}(f(X)\mid X_{-i}). \tag{4.6}$$

为说明这一点，逐个揭示各个坐标。鞅差彼此正交，并且根据条件詹森不等式，第 i 个差的二阶矩至多为 $\mathbb{E}\operatorname{Var}(f(X)\mid X_{-i})$，

对之后揭示的坐标取平均后；这些坐标与 X_i独立。求和得（4.6）。

在给定 X_{-i} 的条件下，变量 Z_{-i} 是常数，因此

$$\operatorname{Var} Z \le \sum_i \mathbb{E}\operatorname{Var}(Z \mid X_{-i}) \le \sum_i \mathbb{E}(Z - Z_{-i})^2 \le c\,\mathbb{E}\sum_i \Delta_i \le c\mu.$$

所有变量都有界，因为 $Z \le c|E|$。 □

对于 $1 < x < c$，有 $e(x) \ge a$。函数 $v \mapsto (1-v)/(x-v)$ 在 $[0,1]$, 上递减，因此由 (4.3) 和 $Z \le W$ 得到 $\mathbb{P}(Z \ge x) \le (1-a)/(x-a)$。在 $x = c$处同样有此上界。结合 (4.3) 和生存函数的单调性，对于 $a < 1$,

$$\mathbb{P}(Z \ge x) \le h_a(x) := \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1, \\ (1-a)/(x-a), & 1 < x < c, \\ \min\{(1-a)/(c-a),\, 1/x\}, & x \ge c. \end{cases} \tag{4.7}$$

如果 $a = 1$，那么 4.3) 在 $x \downarrow 1$ 意味着 $Z \le 1$ 几乎处处成立，因此 $\mu + a \le 2$。

4.3 一个标量不等式

引理 4.4。 设 $a \in [0,1)$ 并设 Z 是满足 (4.7)且 方差 $Z \le \frac{3}{2}\mathbb{E}Z$的有界非负随机变量。那么 $\mathbb{E}Z + a < 10/3$。

证明。 令 $\mu = \mathbb{E}Z$。我们先证明 $\mu < 5$。对于 $u > 0$，在事件 $\{Z \le \mu - u\}$ 上对 $(\mu + \mathsf{Var}(Z)/u - Z)^2$ 应用马尔可夫不等式，得到单侧界 $\mathbb{P}(Z < \mu - u) \le \mathsf{Var}(Z)/(\mathsf{Var}(Z) + u^2)$。若 $\mu \ge 5$，取 $u = \mu/2$ 得到

$$\frac{\mu}{2}\mathbb{P}\Big(Z \ge \frac{\mu}{2}\Big) \ge \frac{\mu}{2} \cdot \frac{\mu^2/4}{3\mu/2 + \mu^2/4} = \frac{\mu^2}{2\mu + 12} \ge \frac{25}{22} > 1,$$

这与 $x h_a(x) \le 1$ 对 $x \ge 1$ 成立相矛盾。

Set

$$b = \frac{1-a}{3/2 - a} \in (0, 2/3], \qquad d = 1 - a = \frac{b}{2(1-b)}, \qquad H = \frac{13}{2}, \qquad L = -\log b.$$

由 $s(x) = \mathbb{P}(Z \ge x)$，恒等式 $\mathbb{E}Z = \int_0^\infty s$ 和 $\mathbb{E}Z^2 = \int_0^\infty 2x s(x)\,dx$ 可得

$$\mathbb{E}Z^2 = 2H\mu + 2\int_0^\infty (x - H)s(x)\,dx \ge 2H\mu - 2\int_0^H (H - x)h_a(x)\,dx.$$

结合 $\mathbb{E}Z^2 = \mathsf{Var}\ Z + \mu^2 \le \frac{3}{2}\mu + \mu^2$，可得

$$\Gamma(\mu, b) := 13\mu - 2\int_0^H (H - x)h_a(x)\,dx - \mu^2 - \frac{3}{2}\mu \le 0. \tag{4.8}$$

对于 $\mu < 5$，有 $\partial\Gamma/\partial\mu = 23/2 - 2\mu > 0$。若 $\mu + a \ge 10/3$，则 $\mu \ge \mu_0 := 7/3 + d$，因此只需证明对所有 $0 < b \le 2/3$，均有 $\Gamma(\mu_0,\ b) > 0$。

情形 $0 < b \le 2/13$。 包络在 $[c, H]$ 上等于 b，积分得

$$\Gamma(\mu, b) = 13(\mu - 1) + 1 + d - 25b - \mu^2 - \frac{3}{2}\mu - 2d(H - a)L. \tag{4.9}$$

对于 $0 < b \le 1$，有 $-\log b \le (1-b)/\sqrt{b}$。由于 $u = b^{-1/2} \ge 1$，函数 $u - u^{-1} - 2\log u$ 在 $u = 1$ 处取值为零且单调非递减。因此

$$dL \le \frac{\sqrt{b}}{2} \le \frac{1}{5}, \qquad d \le \frac{1}{11}, \qquad \mu_0 \le \frac{80}{33}.$$

使用 $13(\mu_0 - 1) \ge 52/3$ 和 $H - a \le H$ 在 (4.9) 中，

$$\Gamma(\mu_0, b) \ge \frac{52}{3} + 1 - \frac{50}{13} - \Big(\frac{80}{33}\Big)^2 - \frac{40}{11} - \frac{13}{5} = \frac{168034}{70785} > 0.$$

情形 $2/13 \le b \le 2/3$。包络在 $[c, 1/b]$ 上等于 b，在 $[1/b, H]$ 上等于 $1/x$。积分得

$$\Gamma(\mu, b) = 13\Big(\mu - 1 + \frac{3}{2}b - \log H\Big) + 1 + d - \frac{1}{b} - \frac{9}{4}b - \mu^2 - \frac{3}{2}\mu + 2a(H + d)(-\log b). \tag{4.10}$$

我们使用

$$\log\frac{13}{2} < \frac{15}{8}, \qquad -\log b \ge 2\Big(u + \frac{u^3}{3}\Big), \quad u = \frac{1-b}{1+b}. \tag{4.11}$$

第一个由 $\sum_{k=0}^{7} (15/8)^k/k! - 13/2 = 3772963/234881024 > 0$ 得出，第二个由对 $(1-v^2)^{-1} \ge 1 + v^2$ 在 $[0, u]$ 上积分得出。由于 $a \ge 0$，将 (4.11) 和 $\mu_0 = 7/3 + d$ 代入 (4.10) 得

$$\Gamma(\mu_0, b) \ge \frac{P(b)}{72b(1-b)^2(1+b)^3}, \tag{4.12}$$

其中

$$P(b) = 1242b^7 - 3593b^6 + 1795b^5 - 2948b^4 + 7546b^3 - 5459b^2 + 1345b - 72.$$

为了看出 $P > 0$ 在 $[2/13, 2/3]$上的情形，在区间 $[\ell, r]$上写作，

$$P(\ell + (r-\ell)v) = \sum_{j=0}^{7} p_j v^j = \sum_{k=0}^{7} \beta_k \binom{7}{k} v^k (1-v)^{7-k}, \qquad \beta_k = \sum_{j=0}^{k} \frac{\binom{k}{j}}{\binom{7}{j}} p_j.$$

直接计算可得

$[\ell, r]$	最小值$_{0 \le k \le 7}\, \beta_k$
$[2/13, 2/5]$	$447966/78125$
$[2/5, 2/3]$	$6518/118125$

Bernstein 基多项式在 $[0,1]$ 上非负且和为 1，因此 $P(b)$ 至少等于最小系数，而该系数在两个区间上均为正。

在两种情况下，$\mu \ge \mu_0$ 都会与（4.8）矛盾。因此，$\mu + a < 10/3$。 □

定理 *4.1* 的证明。阈值 z^* 存在，且根据引理 K 4.2 可得收益至少为 $K = 1$。在归一化 $K = 1$下，引理 4.3 和 4.4 与（4.4）共同给出 $V < 10/3$ 当 $a < 1$时，以及$V \le 2$ 当 $a = 1$时。撤销缩放后得到 $K > 3V/10$。 □

5 菜单和主定理

第 4 节中的单一阈值有两方面的不足。报告的超额可能远远超过实际所需，而且代理人偏好的中等价值物品集合可能会挤掉一件高价值物品。下面的菜单通过截断值、最小合格集合和保留量来解决第一个问题；通过为价值超过截断值的单元素集合提供选项来解决第二个问题。

种子。 对于非负权重 w 和层级 $t > 0$，在 t 处的种子是满足 $w(S) \geq t$的包含极小可行集 S。由于权重非负且$\mathcal{F}$ 向下封闭，非空可行报告 S 是种子，当且仅当

$$w(S) \geq t \quad \text{and} \quad w(S) - w_i < t \text{ for every } i \in S. \tag{5.1}$$

特别地，仅根据提交值即可判断某个报告是否为种子。如果 P 在 t处是种子，那么移除 P 中最轻的成员会使其权重降至 t以下，因此

$$b_P := t + \min_{i \in P} w_i - w(P) > 0. \tag{5.2}$$

族 $\mathcal{M}$。 所有菜单都拒绝空报告。族$\mathcal{M}$ 由算法 *2*在规定范围内取所有实参数所得到的 封顶菜单组成。封顶菜单会将值截断至上限c ，并向单元素集合的单项报价中加入三种 主体 之一：所有达到某一层级的报告；某一层级的种子以及所有达到更高层级的报告；或者某一层级的种子及其携带保留量的扩展。

算法 2 封顶菜单：接受测试

要求：上限 $c > 0$；对于每个物品，给定一个截断值 $d_i > 0$ 以及开式测试或闭式测试 要求：主体：一个层级 $t > c$；或多个层级 $c < t < u$；或一个层级 $t > c$ 和一个分数 $0 < a \leq 1$1：接收一个经过验证的非空可行报告（S, x_S）。 2：如果 $S = \{i\}$ 且 $x_i > d_i$ （开式测试）或 $x_i \geq d_i$ （闭式测试），则 3：返回接受 4：结束 if 5：为 $i \in S$设置 $w_i = \min(x_i, c)$。 6：如果主体是总阈值，则 7：当且仅当 $w(S) \geq t$时返回接受 8：否则，如果主体是种子和上层阈值，则 9：当且仅当 S 在 t 处是种子或 $w(S) \geq u$时返回接受 10：否则 ▷种子和扩展

s

11: **对**每个 $P \subseteq S$ 在以下位置作为种子的 t
执行12: **如果** $P = S$或 $w(S \setminus P) \geq a\, b_P$**则**
13: **返回**接受14: **结束如果**
15: **结束循环**16: **返回**拒绝17: **结束如果**

算法 2 检查的每个子集都因向下闭包而可行，并且每项测试仅使用所提交物品的身份和委托人价值。将菜单的上限、所有层级和截断值都乘以 $\lambda > 0$ 会得到该族中的另一个菜单，而储备比例 a 是无量纲的，因此$\mathcal{M}$ 满足第2.3节所要求的在重新缩放下封闭。

定理 5.1。 对于每个实例，$\mathcal{M}$ 中都存在一个参数为有理数的菜单，其期望得分严格大于 $\frac{29}{70}V \approx 0.41429\,V$。因此，算法*3*定义良好，并且它选出的菜单在任何最佳响应下都能为委托人带来严格大于 $\frac{29}{70}V$的期望收益。特别地 $\alpha_R \geq \alpha_D > 29/70$。 —

算法 3 是一个允许不受限制预处理的存在性陈述。对于有限有理支撑，循环中的每次测试都是一次精确有限枚举，而定理 5.1保证循环会终止。我们不声称预处理、枚举长度或验证由预言机给出的任意向下封闭族的报告所需时间存在多项式界

算法 3 菜单选择

要求： $\mathcal{F}$ 和委托人价值的分布律
1: 计算 $V = \mathbb{E}\max_{S\in\mathcal{F}} X(S)$。
2: **对于** 固定枚举中每个带有有理参数的$\mathcal{M}$ 的菜单 M **执行**
3: **若** $\mathbb{E}b_M(X) \succ_{70}^{29} V$**则**
4: 承诺选择 M 并停止。
5: **结束 if**
6: **结束 for**

，也不声称枚举长度或验证由预言机给出的任意向下封闭族的报告所需时间存在多项式界。

5.1 证明的结构

定理 5.1 的第二句话由引理 2.1 从第一句话推出。我们将证明更强的结论：每个实例都存在一个具有有理参数且期望得分大于 $\rho_0 V$ 的菜单，其中 $\rho = 29/70$ 和 $\rho_0 = \rho + 10^{-6}$。结合引理 2.1，这给出 $\alpha_R \geq \alpha_D \geq \rho_0 > 29/70$，从而确立第三句话。反设，具有实数参数的 M 的每个菜单的期望得分都至多为 $\rho_0 V$，并按照引理 2.2 使用 $R = 1/\rho_0$ 进行归一化。于是，每个菜单都为其期望得分给出 1 的上界，而最优值的均值为 R。证明将许多这样的菜单转化为归一化实例中有限多个量之间的仿射不等式：在网格点处截断最优值的生存函数 S_c 和止损函数 D_c 的值，其中截断均值由 $\mu_c = 1 + D_c(1)$ 表示，超额量由 $e(c)$ 表示，大物品项由 $G(1)$ 表示，另有某些菜单的平均超调量。随后，通过有限计算可知，对于区间中包含 μ_1 的每一个可能值，这些不等式的某个正组合会被包含真实值的一个盒子中的每个点违反。

这些不等式分为四组。

- 第 6 节证明了截断最优值的协方差界，将引理 4.3 的方差界加以推广，并由此推导出删除不等式和斜坡不等式。结合不同层级和上限下剖面之间的基本关系，这些结果无需使用菜单。

- 第 7 节以多种方式界定主体超过其层级的平均超调量，计算可综合利用这些界。这里会用到封顶菜单的单项报价。
- 第 8 节将删除不等式与细网格上各单独层级的这些预算结合起来。
- 第 9 节逐一考察每种实现，追踪随着层级升高，每份合格报告都必须包含的物品，并将由此产生的费用转化为每个层级列表对应的一个不等式。

第 10 节介绍有限计算，并完成定理 5.1 的证明。计算采用精确有理数运算。

6 剖面不等式

本节证明生存函数、止损函数、截断最优值的均值以及超额 e之间的不等式。这些不等式源于最优值的结构、独立性和归一化，且不涉及任何菜单；涉及

该系列菜单$\mathcal{M}$ 的不等式在第 7–9 节中证明。主要工具是截断最优值的协方差界（引理 6.2），它推广了预备分析中的方差界。该界将最优值与其达到某一层级这一事件之间的协方差，限制在每份合格报告都必须包含的物品的预期权重以内。如下所述，第 6.6 节中的每个不等式都可转化为有限个未知量的仿射不等式；这些仿射不等式构成第10 节有限计算中的各行。

6.1 基本假设与记号

本节及后续各节中，实例均按照引理 2.2 进行归一化，其中 $R > 1$ 固定但任意。我们只使用该引理的以下推论。

（N1）$\mathcal{M}$ 的每个菜单的期望得分至多为 1。对这类菜单关于辅助参数取平均，结论同样成立；例如，使用独立硬币或随机保留比例从某个菜单族中选出一个菜单。

（N2） $\mathbb{E}W = R$。

（N3）存在一个物品 s_0，其 $X_{s_0} = 1$ 必然成立，且其单元素集合是极大可行集。特别地，对每个 $c \geq 1$，$W \geq 1$ 和 $Z_c \geq 1$ 必然成立。

与第 2 节一样，单元素集合不可行的物品已被删除，因此每个单元素集合都可行。下文没有任何不等式会用到 R 的数值。

除第 2.3 节中的记号外，我们还记

$$p_i(s) = \mathbb{P}(X_i > s), \qquad q(s) = \sum_i p_i(s), \qquad T_c(t) = D_c(t) + tS_c(t) = \mathbb{E}[Z_c \mathbf{1}_{\{Z_c \geq t\}}],$$

使得 $e(c) = \int_c^\infty q(s)\,ds$。对于物品 i，W_{-i} 表示删除 i 后实例的最优值；它仅取决于其他坐标，并且 $W_{-i} \leq W$。我们用 $\mathrm{odds}(s) = s/(1-s)$ 表示 $0 \leq s < 1$，并且 $\mathbb{E}[Y$；对于事件 B 和可积变量 Y，$B] = \mathbb{E}[Y\mathbf{1}_B]$。

6.2 关联性与关键协方差

引理 6.1 (关联性)。设 f、g 是相互独立实数坐标的有界函数，且二者关于每个坐标均为非递减函数。那么 $\mathrm{Cov}(f,g) \geq 0$。若 f 是非递减函数而 g 是单调不增函数，则$\mathrm{Cov}(f,g) \leq 0$。若 f 可积且 g 有界，同样成立。

证明。对于一个坐标，设 X'是 X的一个独立副本。于是 $(f(X)-f(X'))(g(X)-g(X')) \geq 0$，其期望为 $2\,\mathrm{Cov}(f,g)$。对于 n 个坐标，在前 $n-1$个坐标上取条件期望。条件协方差由单坐标情形可知非负。条件均值是前 $n-1$ 个坐标的非递减函数，因此由归纳法可知它们的协方差非负。全协方差公式将这两项相加。第二个结论可通过将 g 替换为 $-g$得到；可积情形则通过将 f 截断于 $\pm n$ 并令 $n \to \infty$得到。 □

对于值的增事件 H，即其指示函数在每个坐标上都是非递减的事件，我们称物品 i 具有关键性于 H 在某个实现中，当 H 发生，而删除 i 后不再发生时。下文使用的所有事件都具有如下形式：“某个可行集的权重至少为 x”，其中权重是各个值的非递减函数。对于此类事件，根据向下闭包，当且仅当 H 发生且每个合格集合都包含 i时，i 才是关键的。

引理 6.2（关键协方差）。令 $w_i = \phi_i(X_i)$，其中每个 ϕ_i 非负且非递减，并且$\mathbb{E}w_i < \infty$，令 $Q =$ 最大值$_{S\in\mathcal{F}} \sum_{i\in S} w_i$，并令 H 为上述形式的一个增事件。则

$$\mathbb{E}[Q; H] - \mathbb{E}Q \cdot \mathbb{P}(H) \;\le\; \mathbb{E} \sum_{i \text{ pivotal for } H} w_i. \tag{6.1}$$

证明。将 w_i 提高 $\epsilon > 0$，至多会使 Q 提高 ϵ，因此 $\sum_i w_i - Q$ 在每个坐标上都是非递减的。由引理 6.1，$\mathrm{Cov}(Q, \mathbf{1}_H) \le \sum_i \mathrm{Cov}(w_i, \mathbf{1}_H)$。固定 i，并在给定其他坐标 X_{-i} 的条件下考察。如果存在一个避开 i 的合格集合，那么对于 X_i 的每个取值，$\mathbf{1}_H = 1$ 都成立，条件协方差为零。否则，H 恰好在 i 是枢轴时发生，且条件协方差至多为 $\mathbb{E}[w_i \mathbf{1}_H \mid X_{-i}]$，因为 $\mathbb{E}[w_i \mid X_{-i}]\mathbb{P}(H \mid X_{-i}) \ge 0$。由独立性，$\mathbb{E}[w_i \mid X_{-i}] = \mathbb{E}w_i$ 是常数，因此条件均值的协方差为零，且 $\mathrm{Cov}(w_i, \mathbf{1}_H) \le \mathbb{E}[w_i;\ i \text{ 枢轴}]$。对 i 求和即可证明（6.1）。 □

6.3 基本关系

引理 6.3（基本剖面关系）。对于 $1 \le c \le c' \le \infty$ 以及所有层级：

(a) $1 \le Z_c \le Z_{c'} \le W$，因此 $S_c(t) \le S_{c'}(t)$，$D_c(t) \le D_{c'}(t)$，$\mu_c \le \mu_{c'} \le R$，且 $S_c(t) = 1$, $D_c(t) = \mu_c - t$ 对 $t \le 1$ 成立。特别地，$\mu_c = 1 + D_c(1)$、$D_\infty(1) = R - 1$，且 $S_c(t) \le S_\infty(t) = \mathbb{P}(W \ge t)$。

(b) $R - \mu_c \le e(c)$.

(c) S_c 单调不增，且对于 $x < y$

$$(y - x)S_c(y) \;\le\; D_c(x) - D_c(y) \;\le\; (y - x)S_c(x).$$

(d) 如果 $1 \le y \le c$，那么 $S_c(y) = S_\infty(y)$，且 $D_c(1) - D_c(y) = D_\infty(1) - D_\infty(y)$。

(e) 对固定的 t，函数 $c \mapsto D_c(t) + e(c)$ 在 $[1, \infty)$ 上是凸的。

证明。(a) 截断关于上限是单调的，且 $Z_c \ge 1$ 根据 (N3)；其余部分由积分和(N2)即可得出。

(b) 将最大化对象 O 在 c 处截断，得到 $Z_c \ge W - \sum_{i\in O}(X_i - c)_+ \ge W - \sum_i (X_i - c)_+$；取期望。

(c) $D_c(x) - D_c(y) = \int_x^y \mathbb{P}(Z_c > u)\, du$, and $S_c(y) \le \mathbb{P}(Z_c > u) \le S_c(x)$ for $x \le u < y$.

(d) 一个达到原始值 y 的报告，要么包含一个价值至少为 y 的物品，其截断单元素集合达到 y，因为 $y \le c$；要么其所有物品的价值都低于 $y \le c$，且截断不会改变该报告。因此 $\{Z_c \ge y\} = \{W \ge y\}$，同样有 $\{Z_c > u\} = \{W > u\}$ 对于 $u < y$。对 $[1, y]$ 积分即可得到第二个恒等式。

(e) 逐点地，$(Z_c - t)_+ + \sum_i (X_i - c)_+$ 是 $\sum_i (X_i - c)_+$ 与有限个函数 $\sum_{i\in B} X_i - t + \sum_{i\notin B}(X_i - c)_+$、$B \in \mathcal{F}$ 中的最大值，因为 $\sum_{i\in B} \min(X_i, c) + \sum_i (X_i - c)_+ = \sum_{i\in B} X_i + \sum_{i\notin B}(X_i - c)_+$。每个函数关于 c 都是凸函数，因此它们的最大值及其期望也都是凸的。 □

由于 $Z_c \ge 1$，约定 $D_c(t) = \mu_c - t$ 对于 $t \le 1$ 在（a）将所有止损函数延拓至 $[0, 1]$；下文的斜坡不等式中会用到这一约定。（e）中的凸性通过其弦不等式使用：对于$1 \le a < b < c'$,

$$(c' - a)\big(D_b(t) + e(b)\big) \le (c' - b)\big(D_a(t) + e(a)\big) + (b - a)\big(D_{c'}(t) + e(c')\big). \tag{6.2}$$

接下来我们记录截断最优值如何随上限变化。固定一个实现。在上限的每个有界区间上，$s \mapsto Z_s$ 是有限个分段仿射函数的最大值，因此也是分段仿射的。对于每个不在有限集合中的上限 s ， Z_s 可微；其导数等于物品 i 的数量，其中 $X_i > s$ 属于任意一个最大化集合。在这类点上，$(Z_s - t)^+$ 的导数在 $Z_s > t$ 时等于该数量，在 $Z_s < t$时为零。这些导数均以上限为物品数量，这为下文交换微分、关于上限的积分与期望提供了依据。

引理 6.4（沿上限的变化）。 对于 $1 \le a < b \le \infty$ 和 $t \ge 1$,

$$D_b(t) - D_a(t) \;\le\; \int_a^b q(s) S_\infty(t-s)\, ds \;\le\; e(a) - e(b), \tag{6.3}$$

其中 $S_\infty(v) = 1$ 对 $v \le 1$ 和 $e(\infty) = 0$成立。

证明。 在上限 s 处，当 Z_s 可导且 $Z_s > t$时，从最大化集合中删除一个满足 $X_i > s$ 的物品，会留下一个截断值为 $Z_s - s > t - s$的可行集。因此，$(Z_s - t)^+$ 的导数至多为 $\sum_i \mathbf{1}_{\{X_i > s\}} \mathbf{1}_{\{W_{-i} \ge t-s\}}$。 X_i 、 W_{-i} 和 $W_{-i} \le W$ 的独立性将其期望上界限制为 $q(s)S_\infty(t-s)$。对有限的 b进行积分得到第一个不等式，而单调收敛给出 $b = \infty$。第二个不等式由 $S_\infty \le 1$ 和 $e(a) - e(b) = \int_a^b q$推出。 □

6.4 删除

引理 6.5（删除不等式）。 对于任意上限 $c \ge 1$ 和任意 $x > 0$,

$$T_c(x + c) \;\le\; \mu_c S_c(x). \tag{6.4}$$

更确切地说，对于每个不相交区间族

$$I_k \subseteq [(k-1)c, kc) \cap \Big[\tfrac{kx}{k-1},\, x + c\Big), \qquad k \ge 2,$$

我们有

$$T_c(x + c) + \sum_{k \ge 2} \mathbb{E}\big[Z_c - (k-1)c\,;\, Z_c \in I_k\big] \;\le\; \mu_c S_c(x). \tag{6.5}$$

证明。将引理 6.2 应用于 $w_i = \min(X_i, c)$、 $Q = Z_c$ 和 $H = \{Z_c \ge x\}$； (6.1) 左侧为$T_c(x) - \mu_c S_c(x)$。固定一个最大化集合 B。关键项属于每个合格集合，特别是属于 B，因此其截断和至多为 Z_c。删除 B 中的一个成员 i 后，得到可行集 $B \setminus \{i\}$，其截断值至少为 $Z_c - c$；因此若 $Z_c \ge x + c$ ，就没有关键项。在 $Z_c = z \ge x$ 处，每个关键权重都大于 $z - x$，因为若从 B 中删除该项，结果就不再是合格集合。若$z \ge kx/(k-1)$，则 $z/(z-x) \le k$，所以关键项至多有 $k-1$ 个，其权重之和至多为 $(k-1)c$。在 $\{Z_c \in I_k\}$ 上，关键权重之和因此至多为 $Z_c - (Z_c - (k-1)c)$，其中被减去的量非负。将这些界代入 (6.1)，得到

$$T_c(x) - \mu_c S_c(x) \le T_c(x) - T_c(x + c) - \sum_{k \ge 2} \mathbb{E}\big[Z_c - (k-1)c\,;\, Z_c \in I_k\big],$$

其为（6.5）。当所有 I_k 均为空时，其为（6.4）。 □

（6.5）中的期望关于剖面是仿射的：对于 $u < v$ 以及任意 β，

$$\mathbb{E}[Z_c - \beta\,;\, u \le Z_c < v] = D_c(u) + (u-\beta)S_c(u) - D_c(v) - (v-\beta)S_c(v). \tag{6.6}$$

在计算中 每个 I_k 要么为空，要么是向内取整到网格点的指定区间 s.

保留关键集合，使用相同的协方差论证，即可得到第 8 节和9节中所用的删除不等式形式。当上限为 c 且层级为 $t > 0$ 时，如果报告的截断值 $\sum_{i\in S}\min(X_i, c)$至少为 t，则该报告符合资格； I_t 是 $\{Z_c \ge t\}$上所有合格报告的交集，而 L_t 是其截断值，其中 $L_t = 0$ 若 $Z_c < t$。的成员恰好是 $\{Z_c \ge t\}$的关键项。

Le引理 6.6 （含关键集合的删除不等式）。 对于每个 $c \ge 1$ 和 $t > 0$ ，

$$D_c(t) + \mathbb{E}\big[(t - L_t)\mathbf{1}_{\{Z_c \ge t\}}\big] \;\le\; \mu_c S_c(t).$$

特别地，当上限为一时，对于每个 $t > 1$，

$$D_1(t) + \mathbb{E}\big[(t - L_t)\mathbf{1}_{\{Z \ge t\}}\big] \;\le\; \mu_1 S_1(t). \tag{6.7}$$

证明。 引理 6.2结合 $w_i = \min(X_i, c)$， $Q = Z_c$ 以及 $H = \{Z_c \ge t\}$ 得出 $\mathbb{E}[Z_c;\ Z_c \ge t] - \mu_c S_c(t) \le \mathbb{E}L_t$。由于 $L_t = 0$ 在 H 之外，且 $Z_c\mathbf{1}_H = (Z_c - t)_+ + t\mathbf{1}_H$，这就是所要证明的结论。 □

对（6.4）在层级上积分，可得到 cap 为 1 时的另一个不等式。

引理 6.7 (积分删除)。 令 $1 \le x < y$ 和 $\mu_1 \le r$，并记 $D = D_1$。*Th* *en*

$$(x+1)D(x+1) - (y+1)D(y+1) + 2(y-x)\,D\Big(1 + \frac{x+y}{2}\Big) \;\le\; r\big(D(x) - D(y)\big). \tag{6.8}$$

证明。由 cap 为 1 时的 (6.4)，对于每个 $v > 0$，都有 $D(v+1)+(v+1)S_1(v+1) \le \mu_1 S_1(v) \le rS_1(v)$。对 $v \in [x, y]$ 积分。右侧得到 $r(D(x) - D(y))$，因为对于除至多可数个 v 以外的所有值， $D(x) - D(y) = \int_x^y \mathbb{P}(Z > v)\,dv$ 且$S_1(v) = \mathbb{P}(Z > v)$。函数 D 是凸且利普希茨的，并且对几乎所有 u，都有$D'(u) = -S_1(u)$，因此分部积分可得

$$\int_{x+1}^{y+1} uS_1(u)\,du = (x+1)D(x+1) - (y+1)D(y+1) + \int_{x+1}^{y+1} D(u)\,du.$$

因此，积分后不等式的左侧为 $(x+1)D(x+1) - (y+1)D(y+1) + 2\int_{x+1}^{y+1} D$，而由凸性可得 $\int_{x+1}^{y+1} D \ge (y-x)D(1 + \frac{x+y}{2})$。 —— □

6.5 斜坡函数

删除不等式将协方差界应用于某一层级的指示函数。若改为将其应用于斜坡函数——即在一组层级的区间上从零线性增加到一的函数——则可得到将多个层级上的止损函数联系起来的不等式。

固定一个有限上限 $c \ge 1$、一个起点 $a \ge 0$ 和一个宽度 $w > 0$，并令 $g(z) = \min(1, \max(0, (z - a)/w))$。对于 $z > a$ put

$$u = z - a, \qquad k = \lfloor z/c \rfloor, \qquad r = z - kc, \qquad s = z - a - w,$$

设 $(\sigma, \tau) = (0, u)$，若 $z \le a + w$ 且 $(\sigma, \tau) = (s, w)$，若 $z > a + w$，使得 $\sigma + \tau = u$，并令$\varphi(\beta) = \beta \min\{(\beta - \sigma)_+, \tau\}$ 对 $\beta \ge 0$ 成立。定义

$$\Lambda(z) = \begin{cases} k\varphi(c) + \varphi(r) & \text{if } u \ge c, \\ \max\{\tau kc + \varphi(z - kc),\ \tau ku + \varphi(z - ku)\} & \text{if } u < c \text{ and } kc < z < (k+1)u, \\ \tau z & \text{otherwise,} \end{cases}$$

并且 $\Psi(z) = zg(z) - \Lambda(z)/w$ 对 $z > a$ 成立， $\Psi(z) = 0$ 对 $z \le a$ 成立。

引理 6.8 (斜坡函数)。 采用此记号 $\Psi \ge 0$ 并且

$$\mathbb{E}\Psi(Z_c) \;\le\; \mu_c\,\mathbb{E}g(Z_c) = \frac{\mu_c}{w}\big(D_c(a) - D_c(a+w)\big). \tag{6.9}$$

证明。记 $Z = Z_c$ 并且 $\beta_i = \min(X_i, c)$。由于 g 有界且非递减，将引理 6.2 中的 $\mathbf{1}_H$ 替换为 $g(Z)$，同样可得 $\mathrm{Cov}(Z, g(Z)) \le \sum_i \mathrm{Cov}(\beta_i, g(Z))$。令 Z_{-i} 为删除 i 后的截断最优值，它不依赖于 X_i。于是 $\mathrm{Cov}(\beta_i, g(Z)) \le \mathbb{E}[\beta_i(g(Z) - g(Z_{-i}))]$，，因为两边之差为 $\mathbb{E}\beta_i(\mathbb{E}g(Z) - \mathbb{E}g(Z_{-i})) \ge 0$，这是由独立性得出的。固定一个最大化集合 B。对于 $i \notin B$，删除不会改变 Z；对于 $i \in B$，向下闭包给出$Z_{-i} \ge Z - \beta_i$。因此

$$\mu_c\mathbb{E}g(Z) \;\ge\; \mathbb{E}\Big[Zg(Z) - \sum_{i\in B}\beta_i\big(g(Z) - g(Z-\beta_i)\big)\Big].$$

只需证明，对于每个 $z > a$ 以及所有满足 $\sum_i \beta_i = z$的 $\beta_i \in [0, c]$，

$$w\sum_i \beta_i\big(g(z) - g(z-\beta_i)\big) \;\le\; \Lambda(z); \tag{6.10}$$

对于 $z \le a$，上面的括号项为零。若 $z \le a + w$，则 $w(g(z) - g(z-\beta)) = \min(\beta, u)$，若$z > a + w$，则 $w(g(z) - g(z-\beta)) = \min\{(\beta - s)_+, w\}$。两种情况下，(6.10) 的左侧均为 $\sum_i \varphi(\beta_i)$。我们使用 φ 的三个性质：它在 $[0, u]$ 上是凸的，在该处其值为 $\beta(\beta - \sigma)_+$；当 $\beta \ge u$ 时，其值为$\tau\beta$，特别是 $\varphi(u) = \tau u$；并且对所有 β， $\varphi(\beta) \le \tau\beta$。

假设 $u \ge c$。那么 φ 在 $[0, c]$ 上是凸的。将两个严格位于 $(0,\ c)$ 内的坐标替换为其可行线段上具有相同和的端点，不会使 $\sum_i \varphi(\beta_i)$ 减小。重复此过程可知，该和至多等于其中 k 个坐标为 c 、一个坐标为 r 时的值。

设 $u < c$。第三个性质给出 $\sum_i \varphi(\beta_i) \le \tau z$。另设 $kc < z < (k+1)u$。若 $\beta_i$large，则称其为大坐标；令 n 为大坐标的数量， $L \in [nu, nc]$ 为它们的和。其余坐标属于 $[0, u]$，且总和为 $z - L$；根据 $[0, u]$ 上的凸性，它们的贡献至多为 $j\varphi(u) + \varphi(\rho)$，其中 $j = \lfloor (z-L)/u \rfloor$，且 $\rho = z - L - ju \in [0, u)$。因此 $\sum_i \varphi(\beta_i) \le \tau(L + ju) + \varphi(\rho) = \tau(z - \rho) + \varphi(\rho) =: \psi(\rho)$。现在，$(n+j)u \le z < (k+1)u$ 给出 $n + j \le k$。如果 $n + j \le k - 1$，那么 $\rho \ge z - nc - ju \ge z - (k-1)c \ge c > u$，这不可能成立。因此 $n + j = k$ 且 $z - kc \le z - nc - ju \le \rho \le z - nu - ju = z - ku$。两端都位于 $[0, u)$ 中，而 ψ 在 $[0, u]$ 上是凸的，因此 $\psi(\rho) \le \max\{\psi(z - kc)\ \psi(z - ku)\}$，这正是 Λ 定义的第二行。这证明了（6.10）。

最后，在两种情形下， $\tau = wg(z)$ 和 $\varphi(\beta) \le \tau\beta$ 表明， $\Lambda(z)$ 的每个表达式都不超过 $\tau z = wzg(z)$；因此 $\Psi \ge 0$。 $\mathbb{E}g(Z_c)$ 的恒等式是斜坡函数的积分，其中对 $t \le 1$ 采用约定 $D_c(t) = \mu_c - t$。 □

推论 6.9 (取整斜坡)。 对于有限上限 $c \ge 1$ 和整数 $k \ge 2$,

$$kD_c((k-1)c) - (k-1)D_c(kc) \;\le\; \frac{\mu_c}{c}\big(D_c((k-2)c) - D_c((k-1)c)\big). \tag{6.11}$$

证明。对 $a = (k-2)c$ 和 $w = c$ 应用引理 6.8，并令 $f(z) = k(z - (k-1)c)_+ - (k-1)(z - kc)_+$。于是 $\Psi \ge f$。首先，对于 $z \le (k-1)c$，有 $f = 0 \le \Psi$。对于 $(k-1)c < z < kc$，我们有 $u \ge c$, $\lfloor z/c \rfloor = k - 1$, $\sigma = s = r = z - (k-1)c$ 和 $\tau = c$，因此 $\Lambda(z) = (k-1)c(kc - z)$，且 $\Psi(z) = z - (k-1)(kc - z) = f(z)$。对于 $z \ge kc$，我们有 $s \ge c$，因此 φ 在 $[0, c]$ 上消失， $\Lambda(z) = 0$，且 $\Psi(z) = z = f(z)$。由于 $\mathbb{E}f(Z_c)$ 是 (6.11) 的左侧，结论由 (6.9) 得出。 □

在计算中，(6.9) 的左侧有一个仿射形式作为下界。令 a、w、c 为网格间距 h 的整数倍，并考虑一个区间 $[\xi, \xi + h)$，它位于两个相邻网格点之间，且满足$\xi \geq a$。在其上令 $k = \lfloor \xi/c \rfloor$；该区间完全包含于 $\{z \leq a + w\}$ 或完全包含于 $\{z \geq a + w\}$，在这两处 φ 的两种定义一致。记 $r_1 = z - kc$ 和 $r_2 = z - ku$。

(i) 若 $\xi - a \geq c$：对于 $z \leq a + w$, $w\Psi = zu - kc^2 - r_1^2$，其关于 z 是仿射的；对于 $z \geq a + w$, $w\Psi = wz - kc(c - s)_+ - r_1(r_1 - s)_+$，其中 $r_1 - s = a + w - kc$ 是常数，且 $-(c - s)_+$ 关于 z 是凹的。

(ii) 若 $\xi + h - a \leq c$, $k \geq 1$ 和 $k\xi \geq (k + 1)a$，则在区间 $w\Psi =$ 上，$u \leq c$ 和 $kc \leq z \leq (k + 1)u$ 满足：$\min\{\tau r_1 - \varphi(r_1)\ \tau r_2 - \varphi(r_2)\}$。对于 $z \leq a + w$，这两项分别是 $r_1(u - r_1) = (z - kc)(kc - a)$（仿射的）和 $r_2(u - r_2) = (ka - (k - 1)z)(kz - (k + 1)a)$（凹的）。对于 $z \geq a + w$，它们分别是 $wr_1 - r_1(r_1 - s)_+$（其中 $r_1 - s$ 是常数，且为仿射的）和 $wr_2 - r_2(r_2 - s)_+$，其中 r_2 和 $r_2 - s$ 是关于 z 的递减仿射函数，并且 $r_2 \geq 0$，因此 $r_2(r_2 - s)_+$ 是凸的。在 $z = kc$ 处以及 $z = (k + 1)u$ 处，最小值为零，这与 Λ 的第三行一致；在 $u = c$ 处，它与第一行一致。

(iii) 在其他每个区间上使用 $\Psi \geq 0$。

在每种情况下，固定 k 后，所示表达式在闭区间上是凹函数，并且在 $[\xi, \xi + h$ 上与 Ψ 重合。因此，Ψ 位于连接其在该处两个端点值的弦 $\alpha + \beta z$ 上方，并且

$$\mathbb{E}\Psi(Z_c) \ \geq \ \sum_{\text{bins}} \Big[\alpha\big(S_c(\xi) - S_c(\xi + h)\big) + \beta\big(T_c(\xi) - T_c(\xi + h)\big)\Big] + T_c(a + w + c), \tag{6.12}$$

因为对于 $z \geq a + w + c$ 和 $\mathbb{E}[Z_c, \ \Psi(z) = z\,; \ \xi \leq Z_c < \xi + h] = T_c(\xi) - T_c(\xi + h)$。位于网格点处的 Z_c 原子归入其右侧的区间，这与 $S_c(t) = \mathbb{P}(Z_c \geq t)$ 一致。

6.6 仿射行

第10 节的计算固定了一个假定包含 μ_1 的区间 $[l, r]$ 。本节的各行是以下不等式，每个不等式均写作“仿射表达式 ≤ 0”。除容量变化行外，所有行的上限均为 1；容量变化行使用上限 $c \in \{1, 6$ $5, 27\,20, 3\,2, 7\,4, 2, 5\,2\}$ 以及未截断最优值。

(i) 引理 6.3(c) 中，网格 $\frac{1}{40}\mathbb{Z}$、$\frac{1}{80}\mathbb{Z}$ 和 $\frac{1}{160}\mathbb{Z}$ 在 $[1, 10]$, 中连续层级之间的关系，以及其他有理层级对之间的关系：$S_1(y) - S_1(x) \leq 0$、$D_1(x) - D_1(y) - (y - x)S_1(x) \leq 0$ 以及 $(y - x)S_1(y) - D_1(x) + D_1(y) \leq 0$，适用于 $x < y$。(ii) 引理 6.3(d) 在上限 2 和 $y = \frac{41}{40}$ 处的恒等式；(6.2) 中的弦不等式，适用于此列表中连续三个上限的 $t = 1$（这里 $D_c(1) = \mu_c - 1$）；以及 (6.3) 中的上限变分界 $D_b(t) - D_a(t) \leq e(a) - e(b)$，适用于 $(a, b, t) = (2, 5\ 2\ , 1)$ 和 $(2, \infty, 41\ 40)$。(iii) (6.4) 中的删除不等式及其在上限 1 处的细化 (6.5)，以及 (6.6)；还有上限 1 处的斜坡函数 (6.9)，连同 (6.12) 和 (6.11)。在每种情形中，乘积 $\mu_1 p$ 与 $p = S_1(x)$ 或 $p = \mathbb{E}g(Z_1)$ 均有 rp 作为上界。(iv) 积分删除 (6.8)。(v) 情形界 $l \leq \mu_1 \leq r$，即 $l \leq 1 + D_1(1) \leq r$。

7 超额预算

主体处于层级 t 的菜单至少能获得 t，只要主体非空；它还会因其超额而获得更多，即主体的最小包含极大成员超过 t的部分。由于每个菜单的期望得分至多为一，菜单族中每个主体的平均超调量都有界；而菜单的单项报价获得的得分越高，这个上界就越严格。本节证明若干此类界，我们称之为预算。这些界很有用，因为关键质量较大时，超额也会较大，而这恰恰是引理 6.6的删除不等式较弱的时候。第 8 节和第 9 节将两者结合起来。

第 6.1 节的基本假设和记号 继续适用。此外，记

$$\omega(y)=\frac{1}{b(y)}-1,\qquad C(s)=1-s+\frac{s^2}{2},\qquad \tau_k(q)=2k-1-k^2(1-q)\quad (k\in\mathbb{R}).$$

对于 $q<1$，我们有 $\mathrm{odds}(q)-\tau_k(q)=(1-q)(k-1/(1-q))^2\ge 0$，因此

$$\tau_k(q)\le \mathrm{odds}(q)\qquad (0\le q<1,\ k\in\mathbb{R}). \tag{7.1}$$

算法 2 在上限 c 下的菜单由一个主体构成。主体是一个由截断权重描述的报告集合，并附有针对每件物品分别通过单独检验确定的单项报价。我们首先提炼出主体的两项性质，所有超额估计均以此为基础。接着，我们证明主体平均超额量的三个预算(B0)–(B2)，以及主体封顶超调的另外两个预算。

7.1 主体

固定上限 $c\ge 1$，并记 $w_i=\min(X_i,\ c)$，$w(S)=\sum_{i\in S}w_i$。在层级 $t>c$，若可行报告 S符合资格，则 $w(S)\ge t$；而种子是包含极小合格报告。用$\mathcal{Q}$ 表示合格报告族。当且仅当 $Z_c\ge t$ 时该报告族非空，且此时每个合格报告都包含一个种子。

定义 7.1。在（$c,\ t$）处的主体 是一条规则，它为每个实现分配一组可行报告$\mathcal{B}$，满足

(i) $\mathcal{B}$ 中的每个元素都是合格的，且每个种子都是$\mathcal{B}$中的元素；

(ii) $\mathcal{B}$ 由族$\mathcal{Q}$ 以及物品 w_i 的权重决定，其中物品为 $i\in\bigcup\mathcal{Q}$.

算法 2 的主体 在下文中使用；除非另有说明，上限为一（$c=1$）。

(B0) 所有合格报告。

(B1) 种子以及所有满足 S 与 $w(S)\ge t+\eta$的报告，其中增量为 $\eta>0$。

（B2）对于固定的储备比例 $0<a\le 1$：种子，以及每个包含种子 P 的报告 $S\,w$（$S\setminus P$）$\ge a\,b_P$，其中 $b_P=t+\min_{i\in P}w_i-w(P)$。

数值 b_P 为正，因为移除种子中权重最小的成员后 P 会留下一个权重低于 t的报告。(B1) 的封顶超额估计假设 $\eta\le 1$，而主体 (B0) 也用于上限 $c>1$。

引理 7.2。 在每个上限 *(B0)–(B2)* 中的每一个都是主体，且上限为 $c \geq 1$。

证明。(B0)、(B1) 和 (B2) 的成员都包含一个种子，因此符合资格，并且每个成员都包含这些种子。对于 (ii)，属于 (B0) 就是属于 Q。种子是 Q 的极小成员。在 (B1) 和 (B2) 中，其余检验涉及一份合格报告 S，并计算 $w(S)$、$w(P)$、$w(S \setminus P)$ 和针对 $P \subseteq S$ 的 $\min_{i \in P} w_i$；所有这些权重都是 Q 中物品的权重。 □

对于 (c, t) 对应的主体，如果 $\mathcal{B} \neq \varnothing$，则超额 O_t 是 $\mathcal{B}$ 的一个包含极大成员的最小截断值减去 t；否则为 $O_t = 0$。根据 (i)，当且仅当 $Z_c \geq t$ 时，$\mathcal{B} \neq \varnothing$，并且 $O_t \geq 0$。我们将事件 $\{Z_c \geq t\}$ 和 $\{Z_c < t\}$ 称为成功 和失败。封顶超调 为$H_t = \min(O_t, 1)$。需要指明主体时，我们写作 $O_t^{\mathcal{B}}$ 和 $H_t^{\mathcal{B}}$。

预算中使用的结构性质是主体的以下两项性质。我们将带有 $w_i = c$ 饱和 的物品称为饱和项目。

引理 7.3 (P1)。 设 i 是属于某个合格报告的饱和项目。那么存在一个种子包含 i 并且严格包含 *{i}*。特别地，在 (c, t) 处的每个主体中，*{i}* 都严格包含于其中某个成员。

证明。 设 Q 是所有包含 i的合格报告中一个包含极小合格报告。由于 $w(\{i\}) = c < t$, $Q \neq \{i\}$。对于 $j \in Q \setminus \{i\}$，根据 Q的选取，报告 $Q \setminus \{j\}$ 不符合资格，并且$w(Q \setminus \{i\}) = w(Q) - c \leq w(Q) - w_j = w(Q \setminus \{j\}) < t$。因此，从 Q中删除任意一个元素后都不能满足资格；由 w 的单调性可知，其任何真子集都不符合资格。因此 Q 是一个种子，而种子属于每个主体。 □

引理 7.4 (P2)。 设 x 和 x' 是两个仅在物品集合 I 上不同的实现，其中 $x'_i \leq x_i$ 对$i \in I$成立，并且假设 I 中的物品均不属于在 x处符合资格的报告。那么， x 和 x' 具有相同的合格族，其成员所含物品的权重相同，主体成员也相同且截断值相同。特别地， O_t 和 H_t 在 x 和 x'处相同。

证明。 在 x 处符合资格的报告不包含 I中的任何物品，因此其权重未改变，且它在 x'处仍符合资格。在 x' 处符合资格的报告在 x处也符合资格，因为截断权重随数值非递减。因此，合格族相同，且其成员所含物品均位于 I之外，所以其权重相同。根据定义 7.1 的(ii)，主体相同；其成员均符合资格，因此截断值也相同。 □

7.2 唯一种子与逐点超额

在本小节中， $c = 1$、 $Z = Z_1$和 I_t、 L_t 均与第6.4节中的定义相同： I_t 是$\{Z \geq t\}$上合格报告的交集，且 $L_t = w(I_t)$，其中 $L_t = 0$ 当 $Z < t$时。我们称 t 具有唯一种子，当且仅当 $Z \geq t$ 且恰有一个种子。

引理 7.5。 关于 $\{Z \geq t\}$，以下结论成立。

(a) I_t 当且仅当 t 有一个唯一种子时才符合资格，此时 I_t 就是该种子。因此， $L_t \geq t$ 当且仅当 t 有一个唯一种子。*(b)* 有唯一种子时， $L_t - t <$ 最小值$_{i \in I_t} w_i \leq 1$。因此，在所有情况下都有 $(L_t - t)_+ < 1$。*(c)* 有唯一种子 P时，每份符合资格的报告，尤其是每个优化器，都包含 P。

证明。 I_t 根据向下闭包可行。若它符合资格，则它包含于每份符合资格的报告中，因此是唯一的极小项。若 P 是唯一种子，则每份符合资格的报告都包含一个种子，因此包含P，所以 $P \subseteq I_t \subseteq P$。这就证明了 (a) 和 (c)，因为 $L_t \geq t$ 意味着 I_t符合资格。对于 (b)，从种子 I_t 中移除最轻的成员后，得到的报告不符合资格，因此 L_t –最小$_{i\in I_t} w_i < t$。若没有唯一种子，根据 (a)， $L_t < t$ 。 □

引理 7.6。 假设 t 具有唯一个种子 $P = I_t$。

（*a*）对于每个主体，每个成员都包含 P，且 $O_t \geq L_t - t$。（*b*）对于 （*B1*），若 $Z \geq t + \eta$ 则 $O_t \geq \eta$。（*c*）对于 （*B2*），记 $s = w(P)$，则 $b = b_P$且 $y = Z - s$。于是 $0 \leq y < b$且 $O_t \geq s - t + ab\,\mathbf{1}_{\{y\geq ab\}}$。

证明。 （a）成员满足条件，因此根据引理 7.5（c），它们包含 P，且其截断值至少为 $w(P) = L_t$。

（b）令 Q^* 为一个优化器。它与 $w(Q^*) = Z \geq t + \eta$ 一起满足条件，因此它是一个成员。令 M 为一个极大成员。若 $w(M) < t + \eta$，则 M 是一个种子，因此 $M = P \subseteq Q^*$；极大性迫使 $M = Q^*$，产生矛盾。因此 $w(M) \geq t + \eta$。

(c) 令 Q^* 为一个优化器， $i \in P$ 为 P中最轻的成员。那么 $Q^* \supseteq P$和 $Q^* \setminus \{i\}$不包含种子，因此不符合条件： $Z - w_i < t$，也就是说， $y < b$。显然， $y \geq 0$。每个成员都包含 P，而除 P 之外的每个成员都是一个扩展 $S \supseteq P$，满足 $w(S \setminus P) \geq ab$，因此 $w(S) \geq s + ab$。若 $y \geq ab$，则 Q^* 是这样的扩展，且 $Q^* \neq P$，因为 $w(Q^* \setminus P) \geq ab > 0$；因此 P不是极大成员，并且每个极大成员的值至少为 $s + ab$。否则，每个成员的值至少为 s。 □

(a)–(c) 中的所有下界都至多为 1，因为 $L_t - t < 1$ 根据引理 7.5(b)，且 $s - t + ab \leq s - t + b = \min_{i\in P} w_i \leq 1$。若没有唯一种子，则有 $L_t < t$，并且 $O_t \geq 0$ 总是成立。因此，我们得到以下逐点封顶超调界，这些界对每一种实现都有效：

$$H_t \geq (L_t - t)_+ \text{ 对每个主体} \qquad H_t \geq \eta\,\mathbf{1}_{\{t \text{ 都有一个唯一种子 } Z\geq t+\eta\}} \text{ 对于 (B1) 满足 } \eta \leq 1,$$
$$H_t \geq s - t + ab\,\mathbf{1}_{\{Z-s\geq ab\}} \text{ 对于 (B2)，当 } t \text{ 有一个唯一种子时。} \tag{7.2}$$

同样的界也适用于 O_t，其至少为 H_t。

平均储备。 对于 $m > 0$ 和 $1 \leq K \leq e^m$ ，令 $\nu_{m,\,K}$ 为定义在 $(0, 1]$上的概率测度，其在 $[1/K, 1]$ 上的密度为 $1/(ma)$，并且在 $a = 1$ 处有一个质量为 $1 - (\log K)/m \geq 0$ 的原子。条件 $K \leq e^m$ 在 $\sum_{i=0}^{12} m^i/i! \geq K$ 时成立。对 $a \sim \nu_{m,\,K}$ 上的菜单进行平均，其中主体为(B2)，得到一个确定性菜单的混合，每个菜单的期望得分至多为一。记 O_t 和 H_t 分别为 O_t 和 H_t的$\nu_{m,\,K}$-平均值。对于固定的实现，只会出现有限多个报告，因此 $a \mapsto O_t$ 是一个具有有限多个阶梯的阶梯函数，并且这些平均值是定义良好且可测的。

引理 7.7。 如果 t 具有唯一种子 P，且 s， b 如引理 7.6(*c*) 中所述，则

$$\overline{O}_t \;\geq\; \overline{H}_t \;\geq\; s - t + \frac{(Z - s - b/K)_+}{m}.$$

证明。 令 $y = Z - s \in [0, b)$。根据 （7.2），$H_t \geq s - t + \int ab\,\mathbf{1}_{\{a\leq y/b\}}\,\nu_{m,\,K}(da)$。值为 1 的原子没有贡献，因为 $y/b < 1$。密度部分给出 $\int_{1/K}^{y/b} ab\,\frac{da}{ma} = \frac{b}{m}(y/b - 1/K)_+$当 $y/b \geq 1/K$ 时，否则为零。 □

7.3 标记抽样与擦除

现在我们将超额与单元素报价的收益联系起来。这里使用的菜单提供一个主体，以及所有价值超过截断值的物品所对应的单元素集合，我们称这些物品为标记的。根据性质（P1），若标记物品属于某个合格报告，就会被主体吸收；根据性质（P2），若某个标记不属于任何合格报告，则可以将其擦除而不改变主体。按擦除情况对标记集合计数，可得以下不等式。

在本小节以及后续的预算论证中，$c \geq 1$，$t > c$ 和一个类型为$\mathcal{B}$ 的主体（B0）–（B2）在$(c,\ t)$均固定。此限制确保加入单元素集合报价后得到的菜单属于$\mathcal{M}$，因此（N1）适用。对保留比例取平均，可得（B2）的平均值界，方法是对$^{-}$有效的确定性菜单界取平均。记 $S = S_c(t)$ 以及 $S = 1 - S$。

引理 7.8。 $b(c) > 0$ 且 $S \leq 1/t < 1$。

证明。以 (c,t) 报出主体 (B0)，并以 $X_i \geq t$ 报出单元素集合（在 t 处采用闭截断值）。在 $\{Z_c \geq t\}$ 上会有某项报告被报出，且每项报价的支付额至少为 t：主体成员的原始值至少等于其截断值。因此得分至少为 $t\mathbf{1}_{\{Z_c \geq t\}}$，并且由（N1）可知 $tS \leq 1$。如果 $b(c) = \prod_i \mathbb{P}(X_i \leq c)$ 为零，则几乎处处有某件物品满足 $X_i > c$。此时，以 (c,t) 报出主体 (B0)，并以 $X_i > c$ 报出单元素集合的菜单将始终有报价，且每项报价的支付额都严格大于一：单元素集合的支付额大于 $c \geq 1$，主体成员的支付额至少为 $t > 1$。其期望得分将超过一。 □

可移动截断值。 对于 $\theta \geq c$ 和 $\pi \in [0,1]$，若 $X_i > \theta$，则标记物品 i；或者若 $X_i = \theta$，且在观测到各个值之前抛掷、正面概率为 π的独立硬币显示正面。该菜单提供$\mathcal{B}$ 以及被标记物品的单元素集合。对于硬币的每一种结果，这都是算法 2 的一个菜单（每个物品在 θ处都有一个开放或闭式测试），因此该随机菜单的期望得分至多为一。令 p_i 表示 i 被标记的概率，$p_i(y)$ 表示 i 被标记且 $X_i > y$的概率，并令$z = \prod_i (1 - p_i)$表示没有物品被标记的概率。设

$$\Phi_c(z) = \int_c^{\infty} \min\Big\{\omega(y), \frac{1}{z} - 1\Big\}\, dy.$$

引理 7.9。 对于每个 $z \in [b(c),\ 1)$，以及对于 $z = 1$ 若 $b(c) = 1$，存在 $\theta \geq c$ 和 $\pi \in [0,1]$，其旗标的缺席概率为 z。对于这些值，

$$\prod_i \big(1 - p_i(y)\big)^{-1} - 1 = \min\Big\{\omega(y), \frac{1}{z} - 1\Big\} \qquad \textit{for almost every } y \geq c. \tag{7.3}$$

此外 $\Phi_c(z) = G(c)$ 对于 $0 < z \leq b(c)$。

证明。若 $z = b(c)$，则取 $\theta = c$ 和 $\pi = 0$。否则，$b(c) < z < 1$；令 $\theta = \inf\{y \geq c\colon\ b(y) \geq z\}$。由于 b 的右连续性，有 $b(\theta) \geq z$；而 $b(y) < z$ 由 $y < \theta$ 可得 $b(\theta-) \leq z$。缺席概率$\prod_i(\mathbb{P}(X_i < \theta) + (1 - \pi)\mathbb{P}(X_i = \theta))$ 关于 π 连续，且从 $b(\theta)$ 变化到 $b(\theta-)$，因此存在某个 π 使其恰好等于 z。对于 $y > \theta$，物品只有在被标记时才有 $X_i > y$，因此 $p_i(y) = \mathbb{P}(X_i > y)$，且 (7.3) 左侧为 $\omega(y) \leq \omega(\theta) \leq 1/z - 1$。对于 $c \leq y < \theta$，每个被标记的物品都有 $X_i \geq \theta > y$，因此 $p_i(y) = p_i$，且左侧为 $1/z - 1 \leq 1/b(\theta-) - 1 \leq \omega(y)$。最后一个结论成立，因为 $\omega(y) \leq \omega(c) \leq 1/z - 1$对于 $y \geq c$ 和 $z \leq b$。 □

临时抽取。固定 θ, π，如引理 7.9 所述。由于 $z > 0$，每个 $p_i < 1$。对所有物品，独立抽取 $\check{}$ 标记指示变量、一个低抽取值 X_i（来自在 i 未被标记的条件下 X_i 的分布律），以及一个高抽取值 $\hat{} X_i$（来自在 i 被标记的条件下 X_i 的分布律；若 $p_i = 0$则省略）。令 J 为标志集 $\hat{}\check{}$，并对 $i \in J$设定 $X_i = X_i$；否则设定 $X_i = X_i$。这重现了数值与标记的联合分布。我们称 $(\check{}X, \hat{}X)$ 为抽取值。给定这些抽取值后，实现是 J的函数，并且 $\mathbb{P}(J = I) = z\varpi(I)$，其中 $\varpi(I) = \prod_{i \in I} p_i/(1 - p_i)$；因此，对于不相交的 I, I'，有 $\sum_I \varpi(I) = 1/z$，且 $\varpi(I \cup I') = \varpi(I)\varpi(I')$。

低抽样值至多为 θ，高抽样值至少为 $\theta \geq c$，因此被标记项目是饱和的，开启旗标只会提高数值。令 $\check{} Z = W((\min(\check{}X_i, c))_i)$, $\Lambda = \{\check{}Z < t\}$ 和 $f = \mathbb{P}(\Lambda)$。那么$Z_c \geq \check{}Z$，所以失败 $\{Z_c < t\}$ 包含于 Λ 和 $f \geq \bar{S} > 0$，由引理 7.8 可知。事件 $\{J = \varnothing\} \cap \Lambda$蕴含失败，且其概率为 zf，因为 Λ 仅取决于低抽样值。因此

$$zf \leq \bar{S}, \qquad f \leq \min\Big(1, \frac{\bar{S}}{z}\Big). \tag{7.4}$$

令 $q = \mathbb{P}(Z_c < t \mid \check{}X, \hat{}X)$。那么 $q = 0$ 关闭 Λ，$q \geq z$ 开启 Λ，且 $\mathbb{E}[q;\ \Lambda] = \bar{S}$。令 A 为如下事件：每个旗标都属于某个符合资格的报告（特别是 $J = \varnothing$ 属于 A），并且$A^+ = A \cap \{J \neq \varnothing\}$。我们用 $\mathbb{E}_\Lambda$ 表示在给定 Λ条件下的条件期望。

引理 7.10. 令 $Y \geq 0$ 为 O_t、H_t、$\mathbf{1}_{\{H_t \geq r\}}$ $(0 < r \leq 1)$ 中任意一个，或它们关于储备比例的平均值。那么，几乎处处，

$$\mathbb{E}[Y\mathbf{1}_A \mid \check{X}, \hat{X}] \ \geq\ z\,\mathbb{E}[Y \mid \check{X}, \hat{X}] \cdot \begin{cases} 1/q & \text{on } \Lambda, \\ 1 & \text{off } \Lambda. \end{cases} \tag{7.5}$$

此外，在 Λ 上，

$$\frac{1}{q} \leq 1 + \frac{\mathbb{P}(A^+ \mid \check{X}, \hat{X})}{z}, \tag{7.6}$$

因此

$$\frac{\mathbb{P}(A^+)}{z} \ \geq\ \mathbb{E}_\Lambda\Big[\frac{1}{q}\Big] - 1 \ \geq\ \frac{f}{\bar{S}} - 1. \tag{7.7}$$

证明。固定这些抽取。对于标志集 J，令 $\varphi(J) \subseteq J$ 由属于在 J 处符合资格的报告的旗标组成。从 J 转换到 $\varphi(J)$ 会将 $J \setminus \varphi(J)$ 中物品的值从 $\hat{} X_i$ 降低到 $\check{} X_i$，而这些物品不属于任何合格报告。根据引理 7.4，J 与 $\varphi(J)$ 具有相同的合格族，以及具有相同截断值的相同主体。因此，$\varphi(J) \in A$ 且 $Y(\varphi(J)) = Y(J)$。

固定 $K \in A$。每个满足 $\varphi(J) = K$ 的 J 都具有 $K \cup I$ 且 $I \cap K = \varnothing$的形式。在 Λ 上，仅开启集合 I 会导致失败：恰好开启了 I 的报告若符合资格，就必须包含 I 中的某个物品，因为 $\check{} Z < t$；并且根据单调性，该报告在 J 处仍符合资格，因此该物品会属于 $\varphi(J)$。由于 $\sum_{I \text{ 单独开启时失败}} \varpi(I) = q/z$，$K$ 的原像总权重在 Λ 上至多为 $\varpi(K)q/z$，一般情况下至多为 $\varpi(K)/z$。因此

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y \mid \check{X}, \hat{X}] &= \sum_J z\varpi(J)Y(J) = \sum_{K \in A} Y(K) \sum_{\varphi(J) = K} z\varpi(J) \\ &\leq \frac{q}{z} \sum_{K \in A} z\varpi(K)Y(K) = \frac{q}{z}\,\mathbb{E}[Y\mathbf{1}_A \mid \check{X}, \hat{X}] \end{aligned}$$

在 Λ中，其中 q 替换为一个关闭的 Λ。这就是（7.5）。

对于（7.6），在 Λ 将非空标志集称为 I 一个见证，如果某个包含 I 的报告在$\check{}$恰好 I 被切换为开启时符合资格。如果 J 成功且 Q 在 J处符合资格，则 $Q \cap J \neq \varnothing$ 因为 $Z < t$，并且

$Q \cap J$是包含于 J中的一个见证。将 J拆分为包含于 J中的见证的并集 $V(J)$以及余集 $J \setminus V(J)$。余集单独切换为开启时不成立，因为否则它将包含一个见证。并集 $V(J)$为空或属于 A^+：每个见证 $I \subseteq V(J)$都位于一个在 I 切换为开启时符合资格的报告中，而该报告在 $V(J)$切换为开启时仍然符合资格。这两部分确定了 J。将 ϖ对所有 J求和，

$$\frac{1}{z} \le \Big(1 + \sum_{K \in A^+} \varpi(K)\Big) \sum_{I \text{ fails alone}} \varpi(I) = \Big(1 + \frac{\mathbb{P}(A^+ \mid \check{X}, \hat{X})}{z}\Big)\frac{q}{z},$$

即7.6）。

对于 (7.7)，给定 J 和 $\hat{X}$。事件 A^+ 关于低抽样值是非递减的（提高数值会使合格报告仍然合格），而 Λ 关于这些低抽样值是单调不增的，且独立于 $(J, \hat{X})$。低抽样值彼此独立，因此由引理 6.1 得到 $\mathbb{P}(A^+ \cap \Lambda \mid J, \hat{X}) \le f\,\mathbb{P}(A^+ \mid J, \hat{X})$，进而 $\mathbb{P}(A^+ \cap \Lambda) \le f\mathbb{P}(A^+)$。根据 (7.6)，$\mathbb{P}(A^+ \cap \Lambda) \ge z\mathbb{E}[1/q - 1;\ \Lambda] = zf\,\mathbb{E}_\Lambda[1/q - 1]$。最后，根据詹森不等式，$\mathbb{E}_\Lambda[1/q] \ge 1/\mathbb{E}_\Lambda[q] = f/S$。 □

引理 7.11。对于 z 以及引理7.9中的旗标，

$$1 \ \ge\ 1 - z + zf\,\Phi_c(z) + (t-1)\mathbb{P}(A^+) + zt(1-f) + \mathbb{E}[O_t; A]. \tag{7.8}$$

证明。我们逐点界定菜单点的得分。先假设 $J \ne \varnothing$，并令 $m = \min_{i \in J} X_i \ge \theta \ge c$。在 Λ 上，每个主体成员都包含一个旗标，因为不带旗标的合格报告 $\check{}$ 的权重至多为 $Z < t$；因此，其原始值至少比其截断值大 $m - c$。在 A^+上，引理 7.3 表明，每个带标记单元素集都严格包含于某个主体成员中，因此包含极大的报价就是极大主体成员，且得分至少为 $t + O_t + (m-c)\mathbf{1}_\Lambda$。在 A^+ 之外，包含极大的报价是带标记单元素集（支付至少 m）和主体成员（支付至少 $t > 1$）；在 Λ上至少为 $t + m - c \ge m$；因此得分至少为 $1 + (m-c)\mathbf{1}_\Lambda$，其中用到了 $c \ge 1$。如果$J = \varnothing$ 中的数值是低抽样值，则成功意味着 $\check{}$ $Z \ge t$，得分至少为 $(t + O_t)\mathbf{1}_{\{\check{Z} \ge t\}}$。综上

$$\text{score} \ \ge\ \mathbf{1}_{\{J \ne \varnothing\}}\big(1 + (m-c)\mathbf{1}_\Lambda\big) + (t-1)\mathbf{1}_{A^+} + t\,\mathbf{1}_{\{J = \varnothing\} \setminus \Lambda} + O_t \mathbf{1}_A.$$

变量 m 和事件 $\{J \ne \varnothing\}$ 只取决于旗标和高抽样值，因此它们与 Λ 相互独立。根据（7.3），

$$\mathbb{E}[(m-c)\mathbf{1}_{\{J \ne \varnothing\}}] = \int_c^\infty \mathbb{P}(J \ne \varnothing,\ m > y)\,dy = z\int_c^\infty \Big[\prod_i \Big(1 + \frac{p_i(y)}{1 - p_i}\Big) - 1\Big]dy \ \ge\ z\,\Phi_c(z),$$

因为 $1 + p_i(y) / (1 - p_i) \ge 1/(1 - p_i(y))$ 当 $p_i(y) \le p_i$时。取期望，并利用菜单的期望得分至多为 1，即可证明（7.8）。 □

7.4 平均超调量的三个预算

$\bar{}$我们保留 $c \ge 1$、$t > c$ 以及类型为 (B0)–(B2) 的主体，在 $(c,\ t)$ 处，并记 $o = \mathbb{E}O_t$，$\kappa = o/S$，$G = G(c)$、$e = e(c)$，以及

$$B_t = 1 - (t-1)\,\mathrm{odds}(S).$$

命题 7.12。对于每个 $0 < z < 1$，

$$\Phi_c(z) + \max(o, \kappa z) \le B_t. \tag{7.9}$$

特别是

$$\mathbb{E}O_t + G(c) + (t-1)\,\mathrm{odds}(S_c(t)) \le 1. \tag{7.10}$$

证明。令 $z \in [b(c),\ 1)$，或者当 $b(c) = 1$ 时令 $z = 1$。根据（7.5），有 $Y = O_t$、$\mathbb{E}[O_t;\ A] \geq zo$。根据（7.7），$(t-1)\mathbb{P}(A^+) \geq (t-1)z(f/\bar{S} - 1)$。将两式代入（7.8）并除以 zf：

$$0 \geq -\frac{1}{f} + \Phi_c(z) + \frac{t-1}{\bar{S}} - \frac{t-1}{f} + \frac{t}{f} - t + \frac{o}{f} = \Phi_c(z) + \frac{o}{f} - \Big(t - \frac{t-1}{\bar{S}}\Big).$$

由于 $t - (t-1)/S = B_t$，因此得到 $\Phi_c(z) + o/f \leq B_t$，而 (7.4) 给出 $o/f \geq \max(o, \kappa z)$。如果 $b(c) < 1$，则这证明了 $z \geq b(c)$ 时的 (7.9)；对于 $z < b(c)$，函数 Φ_c 取相同的值 $G(c)$（引理 7.9），而 $\max(o, \kappa z)$ 更小。如果 $b(c) = 1$，那么 $\Phi_c \equiv 0$，而 $z = 1$ 的情形给出 $\max(o, \kappa) \leq B_t$，这意味着 (7.9) 对所有 $z < 1$ 都成立。最后，若 $b(c) < 1$，则 (7.10) 是 $z = b(c)$ 处的 (7.9)；若 $b(c) = 1$，则 (7.10) 为 $o \leq B_t$，此时 $G(c) = 0$。

□

推论 7.13。 $e(c) \leq G(c) \leq 1$ 且 $S_c(t) \leq (1 - G(c))/(t - G(c)) \leq 1/t$。此外，对于每个 $c \geq 1$，$R - \mu_c \leq e(c) \leq G(c) \leq G(1) \leq 1$，特别是 $R - 1 \leq \mu_1 \leq \mu_c \leq R$。

证明。由独立性，$-\log b(y) = -\sum_i \log \mathbb{P}(X_i \leq y) \geq \sum_i \mathbb{P}(X_i > y)$，且 $-\log b \leq 1/b - 1$；对 $y \geq c$ 积分，得到 $e(c) \leq G(c)$。由 (7.10)，取 $O_t \geq 0$, $G(c) \leq 1$ 和 $(1-S)(1-G) \geq (t-1)S$，即 $(t-G)S \leq 1 - G$；右侧 $(1-G)/(t-G)$ 随 $G \in [0,1]$递减。对于最后一个结论，$R - \mu_c \leq e(c)$，且由引理 6.3，$\mu_c \leq R$，G 作为非负函数在 $[c, \infty$ 上的积分，是单调不增的；而 $G(1) \leq 1$ 正是刚才所证情形在任意层级 $t > 1$处的应用。

□

命题 7.14。 平均超调量满足二次预算

$$C(S)\, o + \bar{S} e + tS \leq 1, \tag{7.11}$$

并且，对任意 $1/2 \leq v < 1$,

$$v\, o + \bar{S} e + tS \leq 1 + \Big(\frac{1}{2(1-v)} - 1\Big)\bar{S}\,(G - e). \tag{7.12}$$

证明。对任意 $y \geq c$，$\int_0^1$ 最小$\{\omega(y)\ 1/z - 1\}\ dz = \int^{b_{(y)}}{}_0 \quad \omega(y)\, dz + \int_b^1{}_{(y)} (1/z - 1)\ dz = -$ 对数 $b(y)$。根据托内利定理以及推论 7.13证明的第一步，

$$\int_0^1 \Phi_c(z)\, dz = \int_c^\infty -\log b(y)\, dy \ \geq\ e. \tag{7.13}$$

对（7.9）在 $z \in (0,1)$上积分。由于 $\kappa z \leq o$ 当且仅当 $z \leq S$,

$$\int_0^1 \max(o, \kappa z)\, dz = o\bar{S} + \kappa\, \frac{1 - \bar{S}^2}{2} = \frac{o}{\bar{S}}\Big(\bar{S}^2 + \frac{1 - \bar{S}^2}{2}\Big) = \frac{o\, C(S)}{\bar{S}}.$$

将积分不等式乘以 S 并利用 $SB_t = 1 - tS$ 得到（7.11）。

对于（7.12），若 $\kappa = 0$ 则该结论由 $Se \leq SG \leq SB_t = 1 - tS$（根据（7.10））和 $G \geq e$得出。令$\kappa > 0$并令 $\beta = B_t - G \geq 0$。由于 $\Phi_c(z) \leq G$ 以及 $\Phi_c(z) \leq B_t - \kappa z$，我们有 $G - \Phi_c(z) \geq (\kappa z - \beta)_+$。积分并结合（7.13）得到

$$G - e \ \geq\ \int_0^1 (\kappa z - \beta)_+\, dz \ \geq\ \frac{(\kappa - \beta)_+^2}{2\kappa}.$$

若 $\kappa - \beta > 0$，则由算术平均数与几何平均数之间的不等式可得 $(1-v)\kappa + (G - e)/(2(1-v)) \geq (1-v)\kappa + (\kappa - \beta)^2/(4\kappa(1-v)) \geq \kappa - \beta$；若 $\kappa \leq \beta$，则此结论显然成立。因此$v\kappa \leq B_t - G + (G-e)/(2(1-v)) = B_t - e + (1\ 2(1-v) - 1)(G - e)$。两边乘以 $\bar{S}$，即得 (7.12)。

□

（7.10）、（7.11）和（7.12）中的每一个都是关于 o 的仿射表达式，且系数为正，其他所有项均与主体无关。因此，这些结论对主体 (B2) 关于保留比例的均值也成立，其中$o = \mathbb{E}O_t$；并且由于 $0 \le H_t \le O_t$，可将 o 替换为 $h = \mathbb{E}H_t$ 或 $\mathbb{E}H_t$。

仿射形式。 从现在起 $c = 1$。令 $U \ge \mu_1$ 为上限为一的均值的上界（在证书中，即为针对 μ_1所假定区间的右端点），并令

$$g = R - U, \qquad s_* = \frac{1-g}{t-g}, \qquad F(s) = \frac{1-g-(t-g)s}{C(s)}.$$

根据推论 7.13， $g \le R - \mu_1 \le e(1) \le G(1) \le 1$ 以及 $S_1(t) \le s_*$，由于 $(1-G)/(t-G)$ 在 G上递减。

推论 7.15。 令 o 为类型 *(B0)–(B2)* 在 $(1,t)$处的平均超调量，或其在 *(B2)*保留比例上的平均值，或相应封顶超调的均值。那么，对于 $o + \beta_i \le 0$，当 $i = 0$、1、2时，其中

$$\beta_0 = G(1) - 1 + (t-1)\tau_k(S_1(t)), \tag{7.14}$$

$$\beta_1 = -\{F(x) + F'(x)(S_1(t) - x)\} + \frac{1-s_*}{C(s_*)}(e(1) - g), \tag{7.15}$$

$$\beta_2 = \frac{1}{v}\Big\{(t-g)S_1(t) + g - 1 + (1-s_*)(e(1)-g) - \Big(\frac{1}{2(1-v)} - 1\Big)(G(1) - e(1))\Big\}, \tag{7.16}$$

对于每个 $k \in \mathbb{R}$、 $0 \le x \le s_*$ 和 $1/2 \le v < 1$。每个 β_i 都是未知量 $S_1(t)$、 $G(1)$、 $e(1)$的仿射形式。

证明。 关于 β_0 的界可由（7.10）和（7.1）得到。

对于 β_2，我们将（7.12）重写为 $vo \le 1 - g - (t-g)S - \bar{S}(e-g) + (\frac{1}{2(1-v)} - 1)\bar{S}(G-e)$，并使用$\bar{S}(e-g) \ge (1-s_*)(e-g)$和 $\bar{S}(G-e) \le G - e$；由于 $e \ge g$、 $G \ge e$ 以及$\frac{1}{2(1-v)} \ge 1$，这些关系均成立。

对于 β_1，预算（7.11）给出 $o \le F(S) - S(e-g)/C(S)$。函数 $(1-s)/C(s)$ 在 $[0,1]$，上单调不增，因为其导数的分子为 $-C(s) + (1-s)^2 = -s(1-s/2) \le 0$；结合 $S \le s_*$和 $e \ge g$，可得 $o \le F(S) - \frac{1-s_*}{C(s_*)}(e-g)$。接下来需要证明 F 在 $[0, s_*]$上为凹函数，从而其在 x 处的切线位于其上方。令 $N(s) = 1 - g - (t-g)s \ge 0$ 于 $[0, s_*]$上，则$FC = N$。微分得到 $F'C^2 = -(t-g)C - NC'$，并且结合 $C' = -(1-s)$，

$$(t-g)C + NC' = (t-1)(1-s) + (t-g)\,s\Big(1 - \frac{s}{2}\Big) \ge 0,$$

因此 $F' \le 0$。对 $FC = N$ 求两次导数得 $F''C = -FC'' - 2F'C'$，其中 $C'' = 1$；由于 $F \ge 0$ 且 $F'C' \ge 0$， $F'' \le 0$。 □

7.5 封顶超调的两个预算

在本小节中， $c = 1$， $t > 1$， $S = S_1(t)$ 以及 $S = 1 - S$，主体的类型为(B0)–(B2)，在$(1, t)$处。我们记作 $h = \mathbb{E}H_t$。与上文的预算不同，下面的两个预算实质上取决于上界 $H_t \le 1$。

引理 7.16。对于 $k > 0$ 和$1 \le \gamma \le 2k/(1 + \sqrt{1 + 1/(t-1)})$，

$$G(1) - 1 + (t-1)\tau_k(S) + \gamma h \;\le\; (\sqrt{\gamma} - 1)^2. \tag{7.17}$$

证明。 使用引理 7.9 中的旗标 $z=b=b(1)$，使得 $\Phi_1(z)=G(1)$；记 $G=G(1)$ 和$\alpha=t-1$。令 $\bar{h}=\mathbb{E}[H_t \mid \check{X}、\hat{X}]$ 以及 $h_0=\mathbb{E}[H_t;\ \Lambda^c]$根据（7.5）及 $Y=H_t$,

$$\mathbb{E}[H_t;A] \ \geq\ b\big(f\,\mathbb{E}_\Lambda[\bar{h}/q]+h_0\big).$$

由不等式（7.7）可得， $\mathbb{P}$（A^+） $\geq b\,\mathbb{E}_\Lambda[1/q-1]$。将两者代入（7.8），其中 $O_t\geq H_t$:

$$1\geq 1-b+bfG+\alpha b\,\mathbb{E}_\Lambda[1/q]-\alpha b+bt(1-f)+bf\,\mathbb{E}_\Lambda[\bar{h}/q]+bh_0.$$

两边除以 bf；由于 $-1/f-\alpha/f+t/f=0$，得到

$$\mathbb{E}_\Lambda\Big[\frac{\alpha/f+\bar{h}}{q}\Big]+\frac{h_0}{f} \ \leq\ 1+\alpha-G. \tag{7.18}$$

对于 $X>0$ 以及任意 λ， $X/q\geq 2\overline{\lambda}\sqrt{X}-\lambda^2 q$。取 $X=\frac{\alpha}{f}$（$1+f\bar{h}/\alpha$）和 $\lambda=k\sqrt{\alpha f}$，可得

$$\frac{\alpha/f+\bar{h}}{q} \ \geq\ 2\alpha k\sqrt{1+f\bar{h}/\alpha}-\alpha f k^2 q.$$

由于 $H_t\leq 1$，我们有 $0\leq fh\leq 1$，因此

$$2\alpha k\Big(\sqrt{1+\tfrac{f\bar{h}}{\alpha}}-1\Big)=\frac{2kf\bar{h}}{\sqrt{1+f\bar{h}/\alpha}+1} \ \geq\ \frac{2k}{1+\sqrt{1+1/\alpha}}\,f\bar{h} \ \geq\ \gamma f\bar{h}.$$

此外， $f\,\mathbb{E}_\Lambda q=S$ 且 $f\,\mathbb{E}_\Lambda h=\mathbb{E}[H_t;\ \Lambda]=h-h_0$。将 $\mathbb{E}_\Lambda$ 代入（7.18），

$$2\alpha k-\alpha k^2\bar{S}+\gamma(h-h_0)+\frac{h_0}{f}\leq 1+\alpha-G,$$

也就是说， $G-1+\alpha\tau_k$（S） $+\gamma h\ \leq$（$\gamma-1/f$）h_0。由于 $H_t\ \leq\ 1$， $h_0\ \leq\ 1-f$。若 $\gamma\ \geq\ 1/f$，则（$\gamma-1/f$）$h_0\ \leq$（$\gamma-1/f$）（$1-f$） $=\gamma+1-$（$\gamma f+1/f$） $\leq$（$\sqrt{\gamma}-1$）^{2},因为 $\gamma f+1/f\ \geq\ 2\sqrt{\gamma}$。否则（$\gamma-1/f$）$h_0\leq 0$。 □

引理 7.17。 对于 $0<r\leq 1$ 令 $d(r)\ =\mathbb{P}(H_t\geq r)$。则 $d(r)\ \leq S<1$ 并且

$$tS+\bar{S}\,e(1)+\frac{1}{2}\int_0^1\Big[d(r)-\bar{S}^2\,\frac{\log(1-d(r))}{1-d(r)}\Big]dr \ \leq\ 1. \tag{7.19}$$

因此

$$tS+\bar{S}\,e(1)+C(S)\,h+\tfrac{3}{4}\bar{S}^2h^2 \ \leq\ 1. \tag{7.20}$$

证明。 由于 $H_t\geq r>0$ 意味着成功， $d(r)\ \leq S$。令 $d=1-d(r)\ \geq S>0$。令 $z\in[b(1),\ 1)$，或者 $z\ =\ 1$ 如果 $b(1)\ \ =\ 1$，并使用引理7.9中的旗标。在命题 7.12的证明中，保留$\mathbb{E}[O_t;\ \ A]\geq\mathbb{E}[H_t;\ \ A]$ 代替 zo；相同的代数运算给出

$$\Phi_1(z)+\frac{\mathbb{E}[H_t;A]}{zf}\leq B_t. \tag{7.21}$$

固定 r，并令 $d=d(r)$、 $\delta=\mathbb{P}(H_t\geq r,\Lambda)$。令 $\bar{p}=\mathbb{P}(H_t\geq r\mid\check{X},\hat{X})$。根据 (7.5)，取 $Y=\mathbf{1}_{\{H_t\geq r\}}$,$\mathbb{P}(H_t\geq r,A\mid\check{X},\hat{X})\ \geq z\bar{p}/q$在 Λ上开启、在 Λ上关闭。在 Λ上， $q\leq 1-\bar{p}$，因为 $\{H_t\geq r\}$ 意味着成功。由于 $p\mapsto p/(1-p)$ 是凸函数，依据詹森不等式可得

$$\frac{\mathbb{P}(H_t\geq r,A)}{z} \ \geq\ (d-\delta)+f\,\frac{\delta/f}{1-\delta/f}=d+\frac{\delta^2}{f-\delta}.$$

这里 $f-\delta \geq \mathbb{P}(\Lambda,\ J=\varnothing)\ = zf > 0$。此外，$\delta \geq (f-\bar{d})+$，因为 $\mathbb{P}(H_t < r)\ = \bar{d}$，且 $\delta^2/(f-\delta)$ 随 $\delta \in [0, f$ 增大。两边除以 f，右侧至少为 $\psi(f)$，其中 $\psi(f)$ 对 $f \leq d$ 而言为 $= d/f$，而 $\psi(f) = d/f + (f-\bar{d})^2/(\bar{d}f)$ 对 $f \geq \bar{d}$ 而言为 $= 1/f + f/\bar{d} - 2$。函数 ψ 是连续的，在 $(0, \sqrt{\bar{d}}]$ 上递减，此后递增。由 (7.4)，$f \leq \min(1, \bar{S}/z)$，且 $\sqrt{\bar{d}} \leq 1$，因此 $\psi(f) \geq \Psi(z, d)$，其中

$$\Psi(z,d) = \begin{cases} 2/\sqrt{\bar{d}} - 2, & z \leq \bar{S}/\sqrt{\bar{d}}, \\ \bar{S}/(z\bar{d}) + z/\bar{S} - 2, & \bar{S}/\sqrt{\bar{d}} \leq z \leq \bar{S}/\bar{d}, \\ dz/\bar{S}, & \bar{S}/\bar{d} \leq z. \end{cases}$$

由于 $\mathbb{E}[H_t;\ A] = \int_0^1 \mathbb{P}\,(H_t \geq r,\ A)\ dr$，（7.21）给出

$$\Phi_1(z) + \int_0^1 \Psi\big(z, d(r)\big)\, dr \leq B_t. \tag{7.22}$$

函数 $\Psi(\cdot\ d)$ 是连续且非递减的（中间部分在此处的导数为 $1/\bar{S} - \bar{S}/(z^2\bar{d})\ \geq 0$），并且 Φ_1 在 $(0, b(1)]$ 上为常数。因此，（7.22）对每个 $0 < z < 1$ 都成立：对于 $z < b(1)$，这是由 $z = b(1)$ 的情形推出的；而如果 $b(1) = 1$，则由 $z = 1$ 的情形推出。将三段分别在 $\bar{S}/\sqrt{\bar{d}}$ 和 $\bar{S}/\bar{d} \leq 1$ 处分开进行直接积分，得到

$$\int_0^1 \Psi(z,d)\, dz = \frac{d}{2\bar{S}} - \frac{\bar{S}\log\bar{d}}{2\bar{d}}.$$

所有被积函数均为非负，因此在 7.22两边对 $z \in$（0，1）进行积分，利用（7.13）并乘以 S，其中 $SB_t = 1 - tS$，即可证明（7.19）。

对于（7.20），幂级数 $-\log(1-d)/(1-d)\ = \sum_{n\geq 1}(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n})d^n \geq d + \frac{3}{2}d^2$。由 $\int_0^1 d(r)\ dr = h$ 及 $\int_0^1 d(r)^2\, dr \geq h^2$，式（7.19）中的积分至少为 $\frac{1}{2}((1+\bar{S}^2)h + \frac{3}{2}\bar{S}^2h^2)$，且 $\frac{1}{2}(1+\bar{S}^2) = C(S)$。 □

推论 7.18。设 $U \geq \mu_1$、$g = R - U$ 和 $s_* = (1-g)/(t-g)$ 如前所述。设 $0 \leq \zeta \leq 1$、$\gamma = \frac{3}{2}(1-s_*)^2\zeta$、$\nu = \gamma\zeta/2$，并假设 $t - 1 + \gamma(t-g)\ \geq \nu$。那么

$$Q(s) = \frac{1 - g + \nu - (t-g)s}{C(s) + \gamma}$$

在 $[0, s_*]$ 上单调不增且为凹函数，并且

$$h\ \leq\ Q(S) - \frac{1-s_*}{C(s_*)+\gamma}(e(1) - g). \tag{7.23}$$

特别地，对每个 $0 \leq x \leq s_*$，$h + \beta_4 \leq 0$ *with* $\beta_4 = -\{Q(x) + Q'(x)\ (S-x)\}^{+}\, C\,\frac{1-s_*}{s_*}() + \gamma\ (e(1) - g)$ 是关于 $S_1(t)$ 和 $e(1)$ 的仿射表达式。

证明。由于 $\bar{S} \geq 1 - s_*$ 和 $h^2 \geq 2\zeta h - \zeta^2$，我们有 $\frac{3}{4}\bar{S}^2h^2 \geq \frac{3}{4}(1-s_*)^2(2\zeta h - \zeta^2)\ = \gamma h - \nu$。根据 (7.20)，$(C(S)+\gamma)h \leq 1 - g + \nu - (t-g)S - S(e(1) - g)$。函数 $(1-s)/(C(s)+\gamma)$ 在 $[0,1]$，上单调不增，因为其导数的分子为 $-s(1 - s/2) - \gamma$；结合 $S \leq s_*$ 和 $e(1) \geq g$，即可证明 (7.23)。

设 $N_\nu(s) = 1 - g + \nu - (t-g)s$，其在 $[0, s_*]$ 上至少为 $\nu \geq 0$。那么 $(C+\gamma)^2Q' = P(s)$，其中 $P(s) = -(t-g)(C(s) + \gamma) + (1-s)N_\nu(s)$。现在，根据假设，$P(0) = \nu - (t-1) - \gamma(t-g) \leq 0$，且 $P'(s) = (t-g)(1-s) - N_\nu(s) - (t-g)(1-s) = -N_\nu(s) \leq 0$。因此，$Q' \leq 0$ 在 $[0, s_*]$ 上成立。对 $(C+\gamma)Q = N_\nu$ 求两次导数，得到 $(C+\gamma)Q'' = -2C'Q' - Q$；由于 $C' \leq 0$、$Q' \leq 0$ 和 $Q \geq 0$，该式非正。由凹性和 $S \leq s_*$ 可得切线界。 □

平均值与有理数评估。 （7.17）和（7.23）都关于 h 是仿射的，且其中其他项均不依赖于主体。因此，对于任意主体 (B0)–(B2) 在 $(1,t)$ （其中 $\eta \le 1$ 对应于(B1)），以及对保留比例上的 (B2) 取均值的情形，只要 $h = \mathbb{E}H_t$，这些结论都成立。结合推论 7.15和 $0 \le h \le 1$，每个这样的截断平均超额因此都满足

$$0 \le h \le 1, \qquad h + \beta_i \le 0 \quad (i = 0,1,2,3,4), \tag{7.24}$$

wh引理（7.17）与 $\gamma = \varrho^2$ 一起用于有理数 $\varrho \ge 1$，形式为 $h + \beta_3 \le 0$ 其中

$$\beta_3 = \frac{G(1) - 1 + (t-1)\tau_k(S_1(t)) - (\varrho - 1)^2}{\varrho^2}.$$

其假设等价于 $2k/\gamma - 1 \ge 0$ 和 $(2k/\gamma - 1)^2 \ge 1 + 1/(t-1)$，这些都是有理数条件。证书使用 (7.23)，其中为 $\zeta = \min\{1, \max\{0, (1 - g - (t-g)x)/C(x)\}\}$。不等式 (7.24) 是第 9 节截断超额未知量的预算。对于 $i \le 2$，它们也成立，只需将 h 替换为 $\mathbb{E}O_t$。

8 分数阈值处的行

本节将第 6 节的删除不等式与第 7 节的超额预算相结合，在细网格上的各个层级逐层进行。在单个层级上，删除不等式对关键质量收取一项费用 L_t，而预算则对超额 O_t收取费用。两项费用互为补充：较大的关键质量会迫使种子唯一，从而产生较大的超额。以 $\lfloor NZ \rfloor$ 逐点界定它们的和，可得到网格上 S_1 各值之间的不等式。

第 6.1 节的基本假设 $[l,r]$ 仍然成立。下文中，$[l,r]$ 是一个包含 μ_1的区间，如同第10节某种计算情形中所述，并且 $g = R - r$。

8.1 实层级上的删除行

引理 8.1。 设 $r_c \ge \mu_c$ 是有限多个截断值 c处的上界，且 $x > 1$ 为实数。则

$$D_1(x+1) + (x+1)S_1(x+1) \;\le\; lS_1(x) + \frac{1-v}{x-v}\,(\mu_1 - l), \tag{8.1}$$

其中 $v = \max(\{0\} \cup \{R - r_c : \; c \ge x\})$。

证明。左侧为 $T_1(x+1)$，根据 (6.4)，至多为 $\mu_1 S_1(x) = lS_1(x) + (\mu_1 - l)S_1(x)$，并且$\mu_1 - l \ge 0$。根据推论 7.13，$S_1(x) \le (1-G)/(x-G)$，其中 $G = G(1)$，且对每个列出的截断值 $c \ge x$，$G \ge G(c) \ge R - \mu_c \ge R - r_c$；此外 $G \ge 0$。因此 $0 \le v \le G \le 1$，并且由于 $(1-G)/(x-G)$ 随 $G \in [0,1]$递减，$S_1(x) \le (1-v)/(x-v)$。 □

由于 $\mu_1 = 1 + D_1(1)$, (8.1) 关于未知量是仿射的。在有理 $x \in (1,9]$ 且$r_c = R$ 对上限 $c > 1$的情况下使用，因此 $v = 0$ 且系数为 $1/x$。

8.2 分数阈值处的超越行

在本小节中，上限为一：$w_i = \min(X_i,\ 1)$、$Z = Z_1$以及 $t > 1$。我们使用第 I_t 节的 L_t 合格报告、种子以及6.4，第（B0）和（B1）节7.1的主体及其超额 O_t。

细网格上的关键权重。固定一个正整数 N，并以 $1/N$为单位计量值。令$T > N$为一个整数，且 $t = T/N$。成功时，即当 $Z \geq t$时，令 $z = NZ$， $j = \lfloor z \rfloor$， $\lambda = NL_t$以及$\Omega = NO_t$，并令 $\kappa = |I_t|$。对于（B1），令增量为 $\eta = \iota/N$，其中 $1 \leq \iota \leq N$为一个整数。

引理 8.2. 假设 $Z \geq t$。

1. 每个 $i \in I_t$ 都属于 Z 的每个最大化对象，并且满足 $w_i > Z - t$。因此 $\lambda \leq \min(z, \kappa N)$，且当 $Z \geq t + 1$时， $I_t = \varnothing$。*2.* 若 $j > T$，则 $\kappa \leq n := \lfloor (j-1)/(j-T) \rfloor$。*3.* 若 $j > T$且 $L_t < t$，则 $\kappa \leq m := \lfloor (T-1)/(j-T) \rfloor$。

证明。令 S^* 为 Z的一个最大化对象。它符合条件，因此包含 I_t。若某个 $i \in I_t$ 满足 $w_i \leq Z - t$，则可行集 $S^* \setminus \{i\}$ 也符合条件，且不包含 i。因此， I_t 的每个 κ 成员的权重都属于 $(Z - t, 1]$，由此得到 $L_t \leq w(S^*) = Z$, $L_t \leq \kappa$，并且当 $Z - t \geq 1$时有 $I_t = \varnothing$。这就是第 1 项。

对于物品 2，若 $\kappa \geq 1$，则 $\kappa(z - T) < \lambda \leq z$，因此 $\kappa < z/(z - T) \leq j/(j - T)$，因为 $z/(z - T)$ 随 $z > T$和 $z \geq j > T$递减。由于 κ是整数， $\kappa \leq \lceil j/(j-T) \rceil - 1 = \lfloor (j-1)/(j-T) \rfloor$。物品 3 的论证相同，只需用 $\lambda < T$替换 $\lambda \leq z$： $\kappa < T/(z - T) \leq T/(j - T)$，因此$\kappa \leq \lceil T/(j-T) \rceil - 1 = \lfloor (T-1)/(j-T) \rfloor$。 □

回顾引理 7.5，若 $Z \geq t$，则 $L_t \geq t$ 当且仅当 t 有一个唯一种子，并且 I_t就是这个种子。我们将这种情况称为唯一情形。根据引理 7.6，超额总是非负的；在唯一情形下，对于每个主体都有 $O_t \geq L_t - t$；此外 $O_t \geq \eta$ 对于 (B1) 若$Z \geq t + \eta$。

现在定义整数值函数 d 在整数上，使其根据 j从下方界定合并费用。对于 $T < j < T + N$，记 $n = n(j)$ 和 $m = m(j)$，如引理 8.2中所示。对于价格为 1 的主体(B0)，

$$d_{\mathrm{B0}}(j) = \begin{cases} 0, & j \leq T, \\ \max(0, T - nN), & T < j < T + N, \\ T, & j \geq T + N. \end{cases} \tag{8.2}$$

对于价格为 $p \geq 1$、增量为 ι/N 的主体 (B1)，我们令 $d(j) = 0$，当 $j \leq T$ 时；并令 $d(j) = T$，当 $j \geq T + N$时。对于 $T < j < T + N$，令 $\delta_{\mathrm{m}} = \max(0, T - mN)$ 和 $\delta_{\mathrm{u}} = \max(0, T - nN)$；若 $j \geq T + \iota$，则将 δ_{u} 替换为 $\max(\delta_{\mathrm{u}}, (p-1)\iota, p\iota + T - nN)$。然后令

$$d_{\mathrm{B1}}(j) = \begin{cases} \min(\delta_{\mathrm{m}}, \delta_{\mathrm{u}}), & nN \geq T, \\ \delta_{\mathrm{m}}, & nN < T. \end{cases} \tag{8.3}$$

引理 8.3。令 $p = 1$ 对应于 *(B0)*，并令 $p \geq 1$ 对应于 *(B1)*；再令 d 为相应的函数。则逐点有：

$$N\left[(t - L_t)\mathbf{1}_{\{Z \geq t\}} + pO_t\right] \;\geq\; d(\lfloor NZ \rfloor).$$

将 O_t 替换为 $H_t = \min(O_t, 1)$ 时，结论同样成立。

证明。记 $\Phi = (T - \lambda)\mathbf{1}_{\{Z \geq t\}} + p\Omega$。若 $Z < t$，则 $L_t = O_t = 0$，因此 $\Phi = 0 = d(\lfloor NZ \rfloor)$，因为$\lfloor NZ \rfloor < T$。假设 $Z \geq t$，于是 $j \geq T$。我们总有 $\Phi \geq 0$：若 $\lambda \leq T$，这显然成立；若$\lambda > T$，则处于唯一情形，因此 $\Omega \geq \lambda - T$且 $p \geq 1$。这就解决了情形 $j = T$。若 $j \geq T + N$，则 $Z \geq t + 1$，因此 $\lambda = 0$且 $\Phi \geq T$。令 $T < j < T + N$。

对于 (B0)， $\lambda \le \kappa N \le nN$根据引理 8.2。若 $\lambda \le T$，则 $\Phi \ge T-\lambda \ge T-nN$；若 $\lambda > T$，则 $T-nN<0$。结合 $\Phi \ge 0$ 可得 $\Phi \ge \max(0, T-nN)$。

对于 (B1)，除唯一情形外，我们有 $\lambda < T$和 $\kappa \le m$，因此 $\Phi \ge T-\lambda \ge \max(0, T-mN) = \delta_{\mathrm{m}}$。在唯一情形 $\lambda \ge T$ 中，这要求 $nN \ge \kappa N \ge \lambda \ge T$；因此当 $nN < T$ 时，唯一情形不会发生。在唯一情形 $\Phi \ge 0 \ge T-nN$，所以 $\Phi \ge \max(0, T-nN)$。此外，如果 $j \ge T+\iota$，那么 $Z \ge t+\eta$ 且 $\Omega \ge \iota$。于是 $\Phi \ge T-nN+p\iota$，并且 $\Phi = (T-\lambda+\Omega) + (p-1)\Omega \ge (p-1)\iota$，因为 $\Omega \ge \lambda - T$。在每种情形下， Φ 至少等于可能发生的各情形界限中的最小值，即 $d_{\mathrm{B1}}(j)$。

该论证仅通过 O_t 使用 $O_t \ge 0$，并且在唯一情形下使用 $O_t \ge L_t - t$；对于 (B1)，$O_t \ge \eta$ 如果 $Z \ge t+\eta$。根据（7.2）， H_t 在 $\eta \le 1$ 时满足相同的三个界限，这就证明了最后的结论。 □

命题 8.4（分数阈值超调行）。设 $N \ge 1$ 和 $T > N$ 为整数，$t = T/N$，且（d, p）为（d_{B0}, 1），或（d_{B1}, p），其增量为 $\iota/N \le 1$，且 $p \ge 1$为整数。那么

$$\sum_{j=T+1}^{T+N} \frac{d(j)-d(j-1)}{N} S_1\Big(\frac{j}{N}\Big) + D_1(t) - \mu_1 S_1(t) + p\{G(1) - 1 + (t-1)\,\mathrm{odds}(S_1(t))\} \;\le\; 0, \quad (8.4)$$

因此，对于每个实数 k,

$$\sum_{j=T+1}^{T+N} \frac{d(j)-d(j-1)}{N} S_1\Big(\frac{j}{N}\Big) + D_1(t) - r S_1(t) + p\{G(1) - 1 + (t-1)\tau_k(S_1(t))\} \;\le\; 0. \quad (8.5)$$

证明。由于 d在 T之前恒为零，并且从 $T+N$起为常数，即使 Z 含有原子，$\{\lfloor NZ \rfloor \ge j\} = \{Z \ge j/N\}$也成立，

$$\mathbb{E}\, d(\lfloor NZ \rfloor) = \sum_{j=T+1}^{T+N} (d(j) - d(j-1)) S_1(j/N).$$

在 $c=1$ 处将 (6.7) 与 p 乘以 (7.10) 相加，并将 1 移至左边；再用引理 8.3，将 $\mathbb{E}[(t-L_t)\mathbf{1}_{\{Z \ge t\}} + pO_t]$下界为 $\mathbb{E}d(\lfloor NZ \rfloor)/N$。这就是 (8.4)。对于 (8.5)，用较大的$rS_1(t)$替换 $\mu_1 S_1(t)$，并用较小的 $\tau_k(S_1(t))$替换 $\mathrm{odds}(S_1(t))$，依据 (7.1) 和 $t > 1$。 □

(8.5) 的左侧关于未知量 $S_1(j/N)$（对于 $T < j \le T+N$、 $S_1(t)$、 $D_1(t)$ 以及 $G(1)$）是仿射的。值 $S_1(j/N)$ 的系数是除以 N 后的整数。该证书使用 $N = 320$，阈值 t 是 $(1, 9]$，中 $\eta \le 1$ 的增量以及 (B1) 的价格 $p \le 2$) 的 $1/320$ 倍，并使用切参数 $k \in \frac{1}{8}\mathbb{Z}$。它仅使用下一小节中修改后的形式的行。

8.3 修改后的行

下面的四个引理分别通过替换其中的一些项来加强（8.5）。我们将$M = G(1) - 1 + (t-1)\tau_k(S_1(t))$ 写作预算项。

引理 8.5 (层行)。在 (8.5) 中，项 pM 可以替换为 $p\beta_4$，其中 β_4 是推论 *7.18* 在层级 t 且取 $U = r$ 以及任意可容许参数时的表达式。

证明。根据引理 8.3的最后一项结论，命题 8.4 的证明可在将 O_t 替换为 H_t后继续成立，剩下只需对 $p\,\mathbb{E}H_t$进行界定。根据推论 7.18， $p\,\mathbb{E}H_t \le -p\beta_4$。 □

引理 8.6 (均值抵消切线)。设 $l \le \mu_1 \le r$、$\alpha > 0$、$k > 0$，并假设 $k_* = k - (r-l)/(\alpha k) > 0$。那么对于 $0 \le s < 1$，

$$\alpha \,\mathrm{odds}(s) - \mu_1 s \;\ge\; \alpha\tau_k(s) - rs + (r-\mu_1)\Big(1 - \frac{2}{k+k_*}\Big). \tag{8.6}$$

因此，若 $k > 0$，$\alpha = p(t-1)$ 且 $k + k_* > 2$，则行 (8.5) 在其左侧加上 $(r-\mu_1)(1-2/(k+k_*))$ 后仍然成立。

证明。令 $\delta = r - \mu_1 \in [0, r-l]$ 和 $k_\mu = \sqrt{k^2 - \delta/\alpha}$，由于 $k^2 > (r-l)/\alpha$，它是实数。于是 $\alpha k_\mu^2 - \mu_1 = \alpha k^2 - r$，因此 $\alpha\tau_{k_\mu}(s) - \mu_1 s$ 和 $\alpha\tau_k(s) - rs$ 的 s 系数相同，而它们的常数项相差

$$\alpha\big(2(k_\mu - k) - (k_\mu^2 - k^2)\big) = \alpha(k_\mu - k)(2 - k - k_\mu) = \delta\Big(1 - \frac{2}{k+k_\mu}\Big),$$

利用 $k_\mu - k = -\delta/(\alpha(k+k_\mu))$. 此外，$k - k_\mu = \delta/(\alpha(k+k_\mu)) \le (r-l)/(\alpha k)$，因此 $k_\mu \ge k_* > 0$ 和 $1 - 2/(k+k_\mu) \ge 1 - 2/(k+k_*)$。现在令参数为 k_μ，由 (7.1) 得到 (8.6)。将 (8.6) 分别应用于 $s = S_1(t)$ 和 $\alpha = p(t-1)$，由 (8.4) 即得该行。 □

引理 8.7 (弦行)。设 $\alpha > 0$、$q \in \mathbb{R}$ 和 $P(\xi) = \big(\sqrt{(\xi+q)_+} - \sqrt{\alpha}\big)_+^2$。则 α 赔率(s) $\mu_1 s \ge qs - P$ μ_1 $0 \le s < 1$ P $l < r$ () 对于，是凸的，并且对于

$$P(\mu_1) \le \bar{P}(l) + \frac{\bar{P}(r) - \bar{P}(l)}{r-l}(\mu_1 - l)$$

对于 $l \le \mu_1 \le r$ 以及任意上界 $P(l) \ge P(l)$，$P(r) \ge P(r)$。因此，令 $\alpha = p(t-1)$，则 (8.5) 中的项 $-rS_1(t) + p(t-1)\tau_k(S_1(t))$ 可替换为 $qS_1(t) - \bar{P}(l)$ _ $\bar{P}(r) - \bar{P}(l)\ r-l\ (\mu_1 - l)$。

证明。对于 ξ 实数，$\sup_{0\le s<1}[(\xi+q)s - \alpha s/(1-s)]$ 若 $\xi + q \le \alpha$（括号中的函数关于 s 单调不增）则为零；否则在 $1 - s = \sqrt{\alpha/(\xi+q)}$ 处取到，值为 $(\sqrt{\xi+q} - \sqrt{\alpha})^2$。因此，此上确界为 $P(\xi)$；作为关于 ξ 的仿射函数的上确界，它是凸的，取 $\xi = \mu_1$ 即得第一个结论。根据凸性，$P(\mu_1)$ 不超过通过 $(l, P(l))$ 和 $(r, P(r))$ 的弦；将端点值替换为上界后，在每个 $\mu_1 \in [l, r]$ 处仍保持上界，因为弦是这些端点值的凸组合。该行由 (8.4) 得出。

□

在弦行中，证书取为 $q = \alpha k^2 - (l+r)/2$，而有理上界为 $\bar{P}(l)$ 和 $P(r)$。

最后 一个引理通过推论 7.13 的尾界对止损增量给出上界 .

引理 *8.8*（梯形行）。设 $1 \le x < y$，令 $G = G(1)$，并令 $V_G(1) = 1$ 和 $V_G(u) = (1-G)/(u-G)$ 对于 $u > 1$。则 $D_1(x) - D_1(y) \le \frac{y-x}{2}(V_G(x) + V_G(y))$。每个带有 $u > 1$ 的值 $V_G(u)$ 都可以由 $(1-g)/(u-g)$ 给出上界，或由任意 $g_0 < 1$ 处的切线 $\frac{1-g_0}{u-g_0} - \frac{u-1}{u-g_0}(\,)^2(G - g_0)$ 给出上界。

证明。若 $G = 1$，则根据推论 7.13，$S_1(u) = 0$ for $u > 1$，因此 $D_1(x) = D_1(y)$，结论显然成立。设 $G < 1$。根据引理 6.3(c)，$D_1(x) - D_1(y) \le \int_x^y S_1(u)\,du$，并且根据推论 7.13，$S_1(u) \le V_G(u)$ for $u \ge 1$。函数 V_G 在 $[1, \infty)$ 上是凸的（在此处它等于 $(1-G)/(u-G)$，包括 $u = 1$），因此它在 $[x, y]$ 上的积分不超过梯形值。对于固定的 $u > 1$，映射 $G \mapsto (1-G)/(u-G)$ 在 $(-\infty, 1]$ 上递减且凹，其导数为 $-(u-1)/(u-G)^2$。由于 $G \ge R - \mu_1 \ge g$，根据推论 7.13，它不超过其在 g 处的值；根据凹性，它也不超过任意 $g_0 < 1$ 处的切线。 □

这些行。证书使用了本节的以下行：行（8.1）；行（8.5），用于 (B0) 和 (B1)，并采用引理 8.6、引理 8.7或引理8.5 的修订版（最后一种仅用于 (B1)）；以及引理 8.8 的梯形行，并在 $g_0 = R$ –处采用切线界（$l + r$）/2（当其小于 1 时），否则在 $g_0 = g$ 处。

9 关键路径

第 8 节的行一次使用一个层级。本节的行同时使用多个层级，并利用单个实现的关键集合具有嵌套这一事实。随着层级增加，所有合格报告共有的物品只会不断累积，并且它们始终位于同一个最优报告中。某一层级的菜单按照该层级的关键质量收取费用，因此不同层级的费用彼此耦合。我们将总费用的下界设为关键集合可能经过的所有路径中的最小值，并通过动态规划计算该最小值。

第 6.1 节的基本假设继续有效。我们在上限为 1 的情况下工作，其中 w_i =min(X_i, 1)和 $Z = Z_1$，并且在层级 $t > 1$上使用第 6.4 节的合格报告、种子、交集I_t 及其截断权重 L_t 。这些行结合了删除不等式 (6.7)、逐点超额界 (7.2)、引理 7.7 以及预算 (7.24)。储备形状 (m, K) 是对储备比例 $a \sim \nu_{m,K}$取平均后的、主体为 (B2) 的菜单，如第 7.2 节所述。对于储备形状， H_t 取代 H_t，而 h 表示均值 $\mathbb{E}H_t$的平均值。

9.1 所有到达层级上的关键集合

固定一个正整数 N，表示每单位价值对应的网格单位数，使得上限对应于N 个网格单位。固定一个实现和一个最大化报告，并以网格单位衡量截断权重、层级和超额，即将它们乘以 N。记作 $z = NZ$和 $j = \lfloor z \rfloor$。我们考虑的层级是整数 $T > N$，对应于层级 $t = T/N > 1$；当$T \le j$时，称某个层级为到达的，等价地，当 $Z \ge t$时亦然。

在到达层级上，随着 T 增大，合格报告族会缩小，因此交集 I_t会增大，并且它们全部位于固定的最大化报告内。我们将 I_t 的成员称为关键项。每个关键项的权重都严格大于 $z - T$ 个网格单位，因为从最大化报告中移除它后，剩下的是一个不符合资格的可行报告。令 $\Delta = j - T$，令 $L = NL_t$表示以网格单位计的关键质量，并令 $k = \min(4, |I_t|)$。

状态与限制。在第一次舍入中，到达层级处的状态是对 (k, l)，其中$l = \lfloor L \rfloor$。这些状态满足以下限制。

（R1）我们有 $0 \le l \le j$。如果 $k = 0$，则交集为空且 $l = 0$。如果 $k \ge 1$，则 $\Delta < N$且 $k\Delta \le l$；此外，如果 $k < 4$，则 $l \le Nk$。事实上，每个枢轴的权重都大于 Δ 且至多为 N 个网格单位，并且由于 $L > k\Delta$ 且 $k\Delta$ 是整数，因此 $l \ge k\Delta$。

(R2) 设 $T' < T$ 为连续的到达层级，其状态分别为 (k', l') 和 (k, l)。要么两个层级的交集相同，要么有 $q \ge 1$ 个物品进入该交集。在第二种情况下，$l' < T$。否则，根据向下闭包，旧交集在 T 处将符合条件；于是新交集将包含于其中，而新交集也包含旧交集，因此二者相等。每个新枢轴的权重大于 Δ 且至多为 N 个网格单位，因此 $L - L' \in (q\Delta, qN]$。两个端点都是整数，因此 $l - l' \in [q\Delta, qN]$。

(R3) 在(R2)的第二种情况下，若 $k<4$，则 $k>k'$ 且 $q=k-k'$。若 $k=4$，则 $q\geq\max(1,\ 4-k')$，并将 $l-l'$ 的上界替换为 $l-l'\leq j$。

(R4) 一旦交集非空，它在所有更高的到达层级上都会保持非空。

在第一个层级之前，状态为 (0，0)。从 (0，0) 开始并满足这些限制的状态序列称为容许序列。由于关键集合彼此嵌套，实现中的真实计数和质量构成一个容许序列。

在第二次舍入中，我们抽取一个辅助变量 ξ，其在 $[0,1)$ 上均匀分布，并对所有到达层级使用同一个变量，然后令 $l=\lfloor L+\xi\rfloor$，使得 $\mathbb{E}_\xi l=L$ 且 $|L-l|<1$。现在 $l\leq j+1$。在(R2)中，由于 $l'\leq T$，从满足该条件的状态可以发生一次到达，$L'<T$；而在(R3)中，$k=4$ 的上界变为 $l-l'\leq j+1$。其他限制仍然成立。给两个质量都加上相同的 ξ，会保留它们之差的整数下界和上界；$L>k\Delta$ 给出 $L+\xi>k\Delta$，而 $L\leq kN$ 给出 $l\leq kN$。

项与局部费用。 阶段是一个层级 $T>N$，并附有一个有限的项列表。一个项由以下内容构成：

- 位于 $t=T/N$ 的主体，它可以是 (B0)、(B1) 并带有增量 $\eta=\iota/N$（其中 $1\leq\iota\leq N$ 为整数），也可以是储备形状 $(m,\ K)$；对于 (B0)，令 $\iota=0$；
- 一个正整数乘数 w；
- 一个删除价格 $a\in\{0,\ 1\}$；
- 一个整数超调价格 $p\geq 0$，其中仅当 $a=1$ 时才允许 $p=0$。

在到达层级处，一个项的实现费用 为

$$w\{a(T-L)+p\,NH_t\},$$

以储备形状代替 H_t，其中 H_t。我们将其下界估计为局部电荷 $w\chi$，其中 χ仅取决于状态、T 和 j，以及该项。

回想一下，t 若有唯一种子，则处于引理7.5 的唯一情形；等价地，$L_t\geq t$。在唯一情形下，我们记 $d=l-T$。对于主体(B0) 和(B1)，若 $j\geq T+\iota$，则令 $\theta=\iota$；否则令 $\theta=0$。由于 $j\geq T+\iota$ 推出 $Z\geq t+\eta$，且 $\eta\leq 1$，界（7.2）给出 $NH_t\geq\max(L-T,\ \theta)$，适用于唯一情形。

引理 9.1。 在第一次舍入中，以下函数 χ 在每个到达层级都满足 $a(T-L)+p\,NH_t\geq\chi$，其中对于储备形状，以 H_t 代替 $\overline{H}_t$。

(a) 若 $k=0$，则 $\chi=aT$。*(b)* 若 $k\geq 1$ 且 $l\leq T-1$，则 $\chi=a(T-l-1)$。*(c)* 若 $l\geq T$ 且 $p=0$，则 $\chi=-d-1$。*(d)* 若 $l\geq T,\ p\geq 1$ 且主体为 *(B0)* 或 *(B1)*，则

$$\chi=\max\{(p-a)d,\ p\theta-a(d+1),\ (p-a)\theta\}.$$

(e) 如果 $l\geq T$、$p\geq 1$ 且主体为储备形状 (m,K)，那么，令 $n=\max(k,\lceil l/N\rceil)$ 且 $\bar{b}=\min(N,(l+1)/n)-d$，

$$\chi=(p-a)d+\left\lfloor\frac{p}{m}(j-l-1-\bar{b}/K)_+\right\rfloor.$$

证明。 (a) 和 (b) 两部分由 $H_t \ge 0$ 得出，结合 (a) 中的 $L = 0$ 和 (b) 中的 $L < l + 1$。在 (c)–(e) 部分中，我们有 $L \ge l \ge T$，因此 t 属于唯一情形。记 $x = L - T$，使得 $x \in [d, d + 1)$。

(c) 此处 $a = 1$ 和 $T - L = -x > -d - 1$。

(d) 费用至少为 $-ax + p\max(x, \theta)$。这至少是 $(p - a)x \ge (p - a)d$，并且至少为$p\theta - ax \ge p\theta - a($ $d + 1)$。如果 $x \ge \theta$，则至少为 $(p - a)x \ge (p - a)\theta$；如果 $x < \theta$，则等于$p\theta - ax \ge (p - a)\theta$。

(e) 设 $P = I_t$ 为唯一种子。其基数至少为 $L/N \ge l/N$ 且至少为 k，因此至少为 n。其最轻成员的重量至多为 $\min(N, L/|P|) < \min(N, (l + 1)/n)$ 网格单位，¯因此 $Nb_P = T - L + N \min_{i \in P} w_i \le b$。最大化报告在 P之外的质量为$z - L > j - l - 1$。根据引理 7.7，$NH_t \ge x + ($ $z - L - N\underline{b}_P/K)_+/m$，所以费用至少为¯$(p - a)x + \frac{p}{m}(j - l - 1 - b/K)_+ \ge \chi$。 □

在第二次舍入中，我们使用以下局部费用：

- aT若 $k = 0$，则为 $a(T - l)$；若 $k \ge 1$ 且 $l \le T$，则为；
- 若 $l > T$，其中 $d = l - T$：若 $-d$，其值为 $p = 0$；其值为 $p\max(d, \theta) - ad$，适用于主体 (B0)和 (B1)；对于储备形状，则为

$$(p - a)d + \left\lfloor \frac{p}{m}(j - l - 1 - \bar{b}'/K)_+ \right\rfloor,$$

¯其中 $n = \max(k, \lceil l/N \rceil)$，而 $b' = \min(N, (l + 1)/n) - (l - 1 - T)$。

这些并不是实现费用的逐点下界，而是其在 ξ 上的均值。删除部分 $a(T - l)$ 的均值为 $a(T - L)$。若 $l > T$，则 $L > l - 1 \ge T$，因此该实现属于唯一情形；所以，对于不属于唯一情形的实现，超额抵扣对每个 ξ 都为零。对于属于唯一情形的实现，我们有 $L \ge T$，且函数 $y \mapsto \max(y - T, \theta)$ 在连续整数之间是仿射的，因此 $\mathbb{E}_\xi \max(l - T, \theta) = \max(L - T, \theta) \le NH_t$；当 $l \le T$ 时舍弃抵扣只会使其减小。同样，$\mathbb{E}_\xi(l - T)_+ = L - T$。对于储备形状，基数界在向上舍入后仍然成立，因为 $l < L + 1 \le N|P| + 1$给出 $\lceil l/N \rceil \le |P|$。¯由于 $|L - l| < 1$，量 b'是 Nb_P的上界，而 $j - l - 1$是$z - L$的下界，因此每个取整项至多为 $\frac{p}{m}(z - L - Nb_P/K)_+$。结合引理 7.7，这表明 ξ 上的局部费用均值至多为实现费用。¯

含有多个项的阶段中某个状态的局部费用，是其各项局部费用按 w加权后的总和。重要的是，这个总和必须在对状态进行任何最小化之前计算。在给定的实现中，一个阶段的所有项以及所有阶段都使用相同的关键集合；若分别进行最小化，就会允许不同菜单为同一实现分配彼此不兼容的关键质量。

路径最小值。固定一个阶段的有限列表 $T_1 < \cdots < T_r$ 以及两种舍入方式中的一种。对于整数 j，令 $\pi(j)$ 表示在阶段 $T_i \le j$上所有可容许状态序列中，这些阶段的局部费用之和的最小值。特别地，对于 $j < T_1$，有 $\pi(j) = 0$。如果 $j \ge T_r + N$，则在每个阶段都有 $\Delta \ge N$，因此每个交集都是空的，并且 $\pi(j) = \sum_i T_i$ ∑项 wa 不依赖于 j。某些可容许序列可能并非来自任何实现，但这只会使π 变小。该最小值通过对各阶段进行动态规划来计算：对于每个阶段，在由（R2）和（R3）允许的前驱状态区间上计算一个前缀最小值。

命题 9.2。 设 $U \ge \mu_1$。对于任意阶段列表和任一种舍入，

$$\sum_j \frac{\pi(j) - \pi(j - 1)}{N} S_1(j/N) + \sum_{stages} \sum_{terms} w\big[a\{D_1(t) - U\, S_1(t)\} - p\, h_{t,\mathrm{body}}\big] \le 0, \qquad (9.1)$$

其中， $t = T/N$ 是阶段的层级，$h_{t,\ \mathrm{body}}$ 是该项主体的均值封顶超调，按储备形状的形状取平均。

证明。 先考虑第一次舍入。根据引理 9.1，在每一种实现中，已到达阶段及其各项的实现费用之和，至少等于真实状态序列上的局部费用之和。该序列是可容许的，因此此和至少为 $\pi(\lfloor NZ \rfloor)$。在第二次舍入中，对于每个 ξ，舍入后的状态构成一个可容许序列，因此局部费用之和至少为 $\pi(\lfloor NZ \rfloor)$；根据上文的讨论，它在 ξ 上的均值不超过实现费用之和。对于储备形状，实现费用是对储备比例取平均所得。未到达的阶段不作贡献，因为当 $Z < t$时， $L_t = H_t = 0$。取期望，得到

$$\mathbb{E}\,\pi(\lfloor NZ \rfloor) \le N \sum_{\text{stages}} \sum_{\text{terms}} w\{a\,\mathbb{E}[(t - L_t)\mathbf{1}_{Z \ge t}] + p\,h_{t,\text{body}}\}.$$

由于 $\pi(j) = 0$ 对 $j < T_1$ 成立，且 π 对 $j \ge T_r + N$为常数，分部求和给出有限和 $\mathbb{E}\,\pi(\lfloor NZ \rfloor) = \sum_j (\pi(j) - \pi(j-1))\mathbb{P}(\lfloor NZ \rfloor \ge j)$，并且即使 Z含有原子，$\{\lfloor NZ \rfloor \ge j\} = \{Z \ge j/N\}$ 仍然成立。除以 N并利用 $\mathbb{E}[(t - L_t)\mathbf{1}_{Z \ge t}] \le \mu_1 S_1(t) - D_1(t) \le U S_1(t) - D_1(t)$，即式（6.7），得到式（9.1）。 □

网格仅通过下界 π进入；(9.1)中的生存函数和止损函数均为原始分布的函数。将预算 wp 份 $h + \beta_i \le 0$ 从(7.24)加入到(9.1)中，会将项 $-p\,h$ 替换为 $p\beta_i$。我们改为将 h 保留为未知量，这样组合就可以按固定比例为同一主体使用多个预算，特别是 β_3 和 β_4。

单阶段行。 对于第一次舍入中的单个阶段 T，我们可以将对状态取最小值放宽为对 aT、空状态的费用以及仅在 l 上的局部费用取最小值，其中 k 在$\max(1, \lceil l/N \rceil)$ 中替换为(R1) 以及引理9.1。结果至多为 $\pi(j)$，因为真实状态满足这些限制，且计数更小，而计数更小只会降低储备形状的费用。我们将此放宽与推论 $\mathbb{E}O_t + \beta_1 \le 0$或 $\mathbb{E}O_t + \beta_2 \le 0$ 中针对该项的一个固定预算7.15 相结合，在局部费用中用 O_t 替代 H_t，这是允许的，因为 $O_t \ge H_t$。所得不等式即为一条单阶段行。

9.2 网格未知量

行（9.1）与 $N = 80$ 和 $N = 160$搭配使用，并在相应层级采用预算（7.24）；单阶段行则使用 $N = 40$。所有层级均属于 $[1, 10]$。这些行涉及 $S_1(J/160)$ 和 $D_1(J/160)$，其中整数 $160 \le J \le 1600$对应的连续取值由引理 6.3(c)（第6.6节）中的黎曼关系联系起来。层级若是 $1/40$ 的倍数，则在每个网格上都对应相同的未知量。

平均截断超调量是进一步引入的未知量，每种实际出现的网格、层级和主体组合对应一个未知量，且它们属于 $[0, 1]$。同一主体出现在两个不同网格上时，会对应两个不同的未知量，这只会使系统的约束更宽松。

10 有限计算

10.1 线性方程组

令 $\rho_0 = 29/70 + 10^{-6} = 2900007/7000000$ 且 $R = 1/\rho_0 = 7000000/2900007$，并考虑一个按第 2.3 节所述方式归一化的实例。由推论 7.13，$\mu_1 \in [R-1, R]$。证书的一种 情形 是一个具有有理数端点的闭区间 $[l, r]$，以及一个由若干对组成的列表，每对包含一行和一个正整数乘数。如果 $\mu_1 \in [l, r]$，那么该实例的各个量满足以下不等式，每个不等式的形式均为“仿射表达式 ≤ 0”。

(a) 第 6.6 节的各行：黎曼关系；一致性行、弦行和容量变化行；上限为 1 时的删除行和斜坡行；积分删除行；以及 $l \le \mu_1 \le r$。(b) 第 8 节的各行：删除行 (8.1)、引理8.5–8.7 形式的分数阈值行 (8.5)，以及引理 8.8 的梯形行。(c) 对于带有 $U = r$ 的 $N \in \{80, 160\}$，路径行 (9.1)；带有 $N = 40$的第 9.1 节的单阶段行；以及 (7.24) 中针对 $i = 0, \dots, 4$ 的预算 $h + \beta_i \le 0$，其中 $U = r$ 用于截断超调未知量。

独立坐标是所出现层级 $x \in [1, 10]$ 处的 $S_1(x)$ 和 $D_1(x)$ 的值；上限为 $c \in \{6\,5, 27\,20, 3\,2, 7\,4, 2, 5\,2\}$ 时的止损值 $D_c(1)$；$D_2(41\,40)$ 和 $D_\infty(41\,40)$ 的值;—上限为 $c \in \{1, 6\,5, 27\,20, 3\,2, 7\,4, 2, 5\,2\}$ 时的超额量 $e(c)$；$G(1)$；以及平均截断超调量 h。截断均值由 $\mu_c = 1 + D_c(1)$ 表示，而不是由单独的坐标表示。某些系数通过 $\mu_1 \le r$ 和 $\mu_c \le R$ 关于 $c > 1$的界，以及通过 $g = R - r$，取决于具体情形。

该坐标盒将每个独立的止损坐标置于 $D_c(x)$ 中，并将每个其余的独立坐标置于 $[0, 1]$, 中，同时满足固定恒等式 $S_1(1) = 1$ 和 $D_\infty(1) = R - 1$。该实例位于此坐标盒中：$D_c(x) \le \mu_c \le R$ 根据引理6.3，$0 \le e(c) \le G(1) \le 1$ 根据推论7.13，以及 $0 \le h \le 1$。

对于区间包含 μ_1的情形，所列出的每一行在该实例处都非正，因此它们的加权和也非正。该加权和是未知量的仿射函数。其在坐标盒上的最小值，可通过根据每个系数的符号，将相应未知量设为其取值范围的下端点或上端点来得到。如果该最小值为正，就产生了矛盾。

10.2 证书

我们计算得到了一个证书，其中包含96 个区间连续且恰好覆盖 $[R-1, R]$的实例。它们的宽度范围从 $1/1024$ 到 $1/32$。对于每个实例，加权和在坐标盒上的最小值均为正；事实上，该最小值超过该实例乘数总和的1。$3 \cdot 10^{-8}$ 倍。所有量均使用精确有理数运算计算。特别地，每个路径最小值$\pi(j)$ 均由第9.1节的动态规划精确计算；每一行所使用的参数也都满足生成该行的引理的假设条件，例如 γ在（7.17）中的假设，以及推论 $t - 1 + \gamma(t - g) \ge \nu$中的条件7.18。该证书连同区间、每一行的参数以及所有乘数，均可在本文 arXiv 版本的补充文件中获取。

这些情形使用了 3837 个不同的行。其中，1 791 行属于第 6 节，其中包括 1 750 个黎曼关系；167 行属于第 8 节；1879 行属于第 9 节，即六个路径行（一个带有 $N = 80$，五个带有 $N = 160$，均在第二次舍入中）、一个单阶段行和 1872 个预算行。这些情形总共包含 205239 个乘数。唯一出现的储备形状是

$(m,\ K) = (3/2,\ 22/5)$，这是可容许的，因为 $e^{3/2} > 4.48 > 22/5$。

10.3 主定理的证明

定理 *5.1* 的证明。 固定一个实例，其中 $0 < V < \infty$，并令 $\rho = 29/70$，$\rho_0 = \rho + 10^{-6}$ 且 $R = 1/\rho_0$。假设算法 2 的任何具有实数参数的菜单，其期望得分至多为 $\rho_0 V$。

归一化。根据引理 2.2，将 ρ_0 代入 ρ，可得到一个归一化实例，在该实例上，该族中的每个菜单的期望得分至多为一，$\mathbb{E}W = R$ 且 $W \geq 1$。第6–9 节的所有结果均适用于此实例。

矛盾。根据推论 7.13，$\mu_1 \in [R-1, R]$，因此 μ_1 属于证书某个情形的区间 $[l, r]$。该情形中列出的每一行在此实例上均有效，且该实例中的量位于坐标盒内，因此所列各行的加权和在此处非正。另一方面，此加权和在坐标盒上的最小值为正。这一矛盾表明，该族中某个具有实数参数的菜单 M 在原始实例上满足 $\mathbb{E}b_M(X) > \rho_0 V$。

有理参数。 我们通过有理数序列逼近 M 的参数：从上方逼近上限；从下方逼近主体层级 t 和 u 以及储备比例；并分别逼近每个单元素截断值，对于开式测试从上方逼近，对于闭式测试从下方逼近。参数之间的严格次序在所有充分大的指标处保持不变。固定一个实现；我们证明每个基本测试都收敛。

- 考虑一个闭式测试 $y_n \geq \theta_n$，其中截断值在递减的上限下满足 $y_n \downarrow y$，且层级满足 $\theta_n \uparrow \theta$。如果 $y \geq \theta$，则它对所有 n 都通过；如果 $y < \theta$，则它最终失败。
- 如果种子测试的严格不等式 $w(S) - w_i < t$ 在极限中成立，则最终也成立。如果$w(S) - w_i \geq t$，那么 $w_n(S) - w_{n,\ i} \geq t_n$也成立，因为其他成员的截断权重不会减少。
- 具有 $d_n \downarrow d$的开截断测试 $x_i > d_n$ 以及具有 $d_n \uparrow d$的闭截断测试 $x_i \geq d_n$ 以相同方式收敛。
- 考虑一个储备测试 $w(S \setminus P) \geq a\, b_P$，其中种子 P 固定。在更大的上限下，$w(P)$ 的增幅至少等于其最小权重的增幅；只需取一个在原上限下权重最小的成员即可看出这一点。因此，b_P 在近似过程中只能减少，而对 $S \setminus P$ 求和则只能增加。因此，在极限情况下通过的测试，对于所有 n 最终都会通过；而严格失败的测试最终也会失败。

由于报告数量有限，每个接受决策、包含关系下极大的被接受报告族，以及由此得到的得分都逐点收敛。这些得分受到 W<style id='4} 的控制，而其期望有限，因此根据控制收敛，具有有理参数的该族的某个菜单 M' 具有 $\mathbb{E}b_{M'}(X) > \rho_0 V$。因此，每个实例都存在这样一个有理参数菜单。根据引理 2.1，这一更强的存在性陈述给出 $\alpha_R \geq \alpha_D \geq \rho_0 > 29/70$。

选择。 具有有理参数的菜单族中的菜单构成一个可数集合。因此，算法 3会在固定枚举中遇到第一个期望得分超过 ρV的菜单时停止，而这一选择仅取决于 $\mathcal{F}$ 以及委托人价值的分布律。

最佳响应。 代理人价值均严格为正，因此根据引理 2.1，无论采用何种平局决胜规则，代理人对确定性菜单的每个最佳响应都会使委托人至少获得得分 $b_M(X)$。因此，委托人的期望收益至少为 $\mathbb{E}b_M(X) > \rho V$。 □

人工智能使用声明。 本研究源于作者与人工智能系统之间的大量互动，尤其是通过反复交流与 OpenAI GPT-6.2 Astra、Anthropic Claude Fable 5.2、Anthropic Claude Opus 5.5 和 Google Gemini Neon 的互动。在这些交流中，作者确定研究方向、提供建议，并对提出的论证进行严格审查。作者还在与 Anthropic Claude Opus 5.5 进行充分讨论后，使用该系统汇编并修订了手稿。

参考文献

[1] H. Abdi、K. Banihashem、M. Hajiaghayi、Z. Huang、D. Mittal 和 S. Singla。简单如秩一：拟阵秘书问题和单样本拟阵先知问题的最优算法。arXiv:2611.08869，2026年。URL https://arxiv.org/abs/2611.08869.[2] H. Abdi、K. Banihashem、M. Hajiaghayi 和 D. Mittal。面对全能对手和委托的最优拟阵先知。arXiv:2611.30933，2026年。URL https://arxiv.org/abs/2611.30933.[3] R. Alonso 和 N. Matouschek。最优授权。《经济研究评论》，75(1):259–293，2008年。[4] M. Armstrong 和 J. Vickers。委托项目选择模型。《计量经济学》，78(1):213–244，2010年。doi: 10.3982/ECTA7965。[5] M. Babaioff、N. Immorlica 和 R. Kleinberg。拟阵、秘书问题与在线机制。载于第18届ACM-SIAM离散算法年度研讨会论文集（SODA），第434–443页，2007年。[6] K. Banihashem、M. Hajiaghayi、P. Krysta 和 S. Shin。具有组合约束的委托选择。载于第26届ACM经济与计算会议（EC）论文集，第275–303页，2025年。doi: 10.1145/3736252.3742530。URL https://livrepository.liverpool.ac.uk/3193865/1/Combinatorial_Delegated_Choice-1.pdf。[7] C. Bechtel 和 S. Dughmi。委托随机探测。载于第12届理论计算机科学创新会议（ITCS），莱布尼茨国际信息学论文集第185卷，第37:1–37:19页，2021年。doi: 10.4230/LIPIcs.ITCS.2021.37。[8] C. Bechtel、S. Dughmi 和 N. Patel。委托潘多拉魔盒。载于第23届ACM经济与计算会议（EC）论文集，2022年。[9] P. Braun、N. Hahn、M. Hoefer 和 C. Schecker。委托在线搜索。载于第32届国际人工智能联合会议（IJCAI）论文集，2023年。[10] B. Efron 和 C. Stein。方差的刀切估计。《统计年刊》，9(3):586–596，1981年。[11] M. Feldman、O. Svensson 和 R. Zenklusen。在线竞争消解方案及其在贝叶斯选择问题中的应用。《SIAM计算杂志》，50(2):255–300，2021年。doi: 10.1137/18M12261 30。[12] C. M. Fortuin、P. W. Kasteleyn 和 J. Ginibre。一些偏序集上的相关不等式。《数学物理通讯》，22:89–103，1971年。[13] T. E. Harris。某一渗流过程临界概率的下界。《剑桥哲学学会会刊》，56:13–20，1960年。[14] B. Holmström。论委托理论。载于M. Boyer和R. Kihlstrom编，《经济理论中的贝叶斯模型》，第115–141页。北荷兰出版社，1984年。[15] A. Khodabakhsh、E. Pountourakis 和 S. Taggart。简单委托选择。载于2024年ACM-SIAM离散算法年会（SODA）论文集，2024年。

[16] J. Kleinberg 和 R. Kleinberg。委托搜索可近似高效搜索。载于 第*19*届*ACM*经济与计算会议论文集，第287–302页，2018年。doi: 10.1145/321916 6.3219205。URL https://arxiv.org/abs/1806.06933。[17] R. Kleinberg 和 S. M. Weinberg。拟阵先知不等式。载于 第*44*届*ACM*年度计算理论研讨会论文集，2012年。doi: 10.1145/2213977.2213991。URLhttps://arxiv.org/abs/1201.4764。[18] E. Lee 和 S. Singla。通过事前先知不等式实现最优在线竞争消解方案。载于第*26*届欧洲算法年度研讨会（*ESA*），莱布尼茨国际信息学论文集第112卷，第57:1–57:14页，2018年。doi: 10.4230/LIPIcs.ESA.2018.57。[19] N. D. Melumad 和 T. Shibano。无转移情境下的通信。《兰德经济学杂志》，22(2):173–198，1991年。[20] A. Rubinstein。超越拟阵：具有一般约束的秘书问题和先知不等式。载于第*48*届*ACM*年度计算理论研讨会论文集，第324–332页，2016年。[21] A. Rubinstein 和 S. Singla。组合先知不等式。载于 第*28*届*ACM-SIAM*离散算法年度研讨会论文集，第1671–1687页，2017年。[22] E. Samuel-Cahn。独立非负随机变量的阈值停止规则与最大值的比较。《概率年刊》，12(4):1213–1216，1984年。doi: 10.1214/aop/1176993150。[23] J. M. Steele。非对称统计量的Efron–Stein不等式。《统计年刊》，14(2):753–758，1986年。

低于0.48105的不可能性

定理 A.1. 存在一个有限实例序列，其委托人价值分布与代理人价值分布的联合分布在接受规则确定之前即已固定，且满足 $0 < V_n < \infty$，使得

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{\pi} \frac{\mathbb{E}[\textit{principal payoff under } \pi]}{V_n} \le \beta < \frac{9621}{20000} = 0.48105.$$

此处的上确界取遍所有随机化接受规则，尤其包括所有确定性规则；这些规则都知道所有物品的联合分布律，即使平局决胜规则偏向委托人也是如此。因此，所述模型中的通用近似常数满足 $\alpha_D \le \alpha_R \le \beta < 9621/20000 = 0.48105$。

常数 β 定义见（A.19）。所有物品分布律，包括用于排列优惠券排名的随机代理人价值，都在菜单确定之前固定。定理允许菜单知晓这些分布律，但接受测试只能观察提交报告中的委托人价值。

我们先概述构造和证明。每个实例包含 n 个相互独立的稀有中心，每个中心以概率 a/n激活；每个中心都有一组私人备选项，由门和一次性报价构成，只有在该中心激活时，其委托人价值才会超过 1 。每对中心共享一张价值为确定值 $b + d$的成对优惠券。实例还包含稀有尾项、一件价值略高于$\max(1, N_A + N_B)]$, 的确定性安全物品（该价值为自然基准选择的期望值），以及一个独立的头奖，它使基准提高 1 ，但在代理人的排名中位居末位。代理人效用预先固定，并按优先级区分各物品，因此代理人总会提出优先级最高且被接受概率不可忽略的报告。在第 A.2节中，我们利用这种优先级结构，将委托人的收益界定为基准值加上两个触发事件带来的收益：一个来自私人备选项，另一个来自优惠券。第 A.3 节界定私人收益：对门配置进行动态规划，可用触发概率的凹函数界定每个中心的奖励；再通过拉格朗日对偶论证，将这些逐中心界转化为私人收益总量的上界。第 A.4节通过均匀随机优惠券排名之间的竞赛界定优惠券收益。第 A.5节计算基准的下界 V_n，由此确定 β；第 A.6 节列出有限数据及其余数值不等式。

A.1 实例

本小节定　　义这些实例：物品价值、可行族以及代理人效用。

我们固定有理参数

$$a = \frac{67}{100}, \qquad b = \frac{9}{200}, \qquad d = \frac{9}{50}, \qquad \Delta = \frac{1}{400}, \qquad q = \frac{7}{20}.$$

每个中心 $i \in \{1, \dots, n\}$ 配备五个相互独立的偏置门 $\gamma_{i,0}, \dots, \gamma_{i,4}$，每个门以概率 $q = 7/20$ 激活，并配有两条非嵌套私人物品的有序序列，每条序列均与门的一个子集相关联：

- 阶段 0 包含 $L\text{ph}$ 个$_0 = 45$ 物品 $e(0)_{i,}1, \dots, e(0)_{i,}45$。物品 r 与子集 $J(0)_r \subseteq \{0, 1, 2, 3\}$ 相关联，该子集通过 $\{0, \dots, 15\}$ 中的二进制掩码进行编码，并且从不与 $\gamma_{i,}4$ 相关联；其激活概率为$p(0)_r \in \{1/8, 1/4, 3/8, 1/2, 3/4, 1\}$，激活时的委托人价值为 $v(0)_r > 0$。

• 阶段 1 包含 Lph 个$_1$ $=$ 39 物品 e(1) $_i$,1 , . . . , e(1) $_i$,39。物品 r 与子集 J(1)$_r$ $\subseteq${0, 1, 2, 3} 相关联，其掩码为 J(1)$_r$ $\leq$ 14，并与 γ_i,4 一起；其激活概率为 p(1)$_r$ $\in\{1/16, 1/8, 1/4, 1/2, 3/4, 1\}$，激活时的委托人价值为 v(1)$_r$ > 0。

带有 $p = 1$ 的物品是确定性子集标记，带有 $p \in$ (0,1) 的物品是一次性报价，其价值为 v 的概率是 p，价值为 0 的概率是 $1 - p$。在两个阶段中，掩码J_r 均为非递减：每个不同的子集都以一个确定性子集标记开头，之后可选地跟随同一子集上的一至四个独立一次性报价，其激活价值严格递增。总计，阶段 0 有 16 个确定性标记和 29 个一次性报价，阶段 1 有 12 个确定性标记和 27 个一次性报价，因此每个中心有 28 个确定性标记和 56 个独立二进制一次性报价。

有理门值 $g_0, \ldots, g_4$ 以及全部 84阶段条目 $(J_r^{(0)}, p_r^{(0)}, v_r^{(0)})$ 和 $(J_{(1)r}, p_r^{(1)}, v_r^{(1)})$列于第 A.6 节。它们满足

$$0 < a < \frac{7}{10}, \qquad b > 0, \qquad a + b < 1, \qquad 0 < d \leq \frac{1}{3}, \qquad b + d < 1,$$

$$0 \leq \Delta < 1, \qquad 0 < q < 1, \qquad g_j > 0 \ (0 \leq j < 5), \qquad \sum_{j=0}^{4} g_j < 1, \tag{A.1}$$

$$v_r^{(0)} > 0, \quad v_r^{(0)} + \sum_{j \in J_r^{(0)}} g_j < 1 \ (1 \leq r \leq 45), \qquad v_r^{(1)} > 0, \quad v_r^{(1)} + g_4 + \sum_{j \in J_r^{(1)}} g_j < 1 \ (1 \leq r \leq 39).$$

对于每个整数 $n \geq 2$，我们设定 $p = a/n$、$\eta = b/n$、$H = n^3$ 和 $\delta = n^{-4}$。该实例由以下物品组成，它们的委托人价值相互独立：

• 个中心 $c_1, \ldots, c_n$，每个中心以概率 p 价值为 1，否则价值为 0。我们用 $N_A = \sum_{i=1}^{n} X_{c_i}$表示活跃中心的数量。

• 个尾部 $t_1, \ldots, t_n$，每个尾部以概率 η 价值为 1，否则价值为 0；以及确定性的尾部标记τ_k，其价值为 $n - k\eta$，对应 $0 \leq k < n$。我们用 $N_B = \sum_{j=1}^{n} X_{t_j}$ 和 $S_k = \sum_{j=1}^{k} X_{t_j}$表示。

• 一个价值为

$$C_n := v_n + \Delta, \qquad \text{where } v_n := a + b + (1-p)^n(1-\eta)^n = \mathbb{E}[\max(1, N_A + N_B)],$$

以及一个 n 个相互独立的头奖物品 J_{jp}，以概率 $1/H$ 价值为 H，否则价值为 0 e.

• 对于每个中心 $i \in \{1, \ldots, n\}$，五个门 $\gamma_{i,j}$(0 $\leq j <$ 5)，每个门以 g_j 的概率价值为 $q = 7/20$，否则为 0；阶段 0 物品 e(0) $_{i,r}$，其价值为 v(0)$_r$，以 p(0)$_r$ 的概率取得，否则为 0（$1 \leq r \leq 45$）；以及阶段 1 物品 e(1) $_{i,r}$，其价值为 v(1)$_r$，以 p(1)$_r$ 的概率取得，否则为 0（$1 \leq r \leq 39$）。

• 对于每一对不同中心组成的无序对 $\{i, j\}$，有一张成对优惠券 κ_{ij}，其具有确定性本金价值 $b + d$。

可行族 $\mathcal{F}_n$ 是以下生成元的向下闭包：

1. 单元素安全集$\{s_0\}$和单元素头奖集$\{J_{\text{jp}}\}$；

2. 对于每个中心 i，阶段 0 生成元 $\{e_{i\,r}^{(0)}, , c_i\} \cup \{\gamma_{i,j} \colon j \in J_r^{(0)}\}$ (1 $\leq r \leq$ 45)、阶段 1 生成元 $\{e_{i\,r}^{(1)}, , c_i, \gamma_i$,4$\} \cup \{\gamma_{i,j} \colon j \in J_r^{(1)}\}$ (1 $\leq r \leq$ 39)，以及终端五门生成元 $\{c_i, \gamma_i$,0, . . . ,γ_i,4$\}$；

3. 对于每个 $1 \le i < j \le n$，成对优惠券生成元 $\{\kappa_{ij},\ c_i,\ c_j\}$；4. 对于 $0 \le k < n$，尾部标记生成元 $\{\tau_k,\ t_1,\ \ldots, t_k,\ c_1,\ \ldots, c_n\}$，以及组合集合$\{c_1,\ \ldots, c_n,\ t_1,\ \ldots, t_n\}$。

代理人效用，在规则确定之前固定。令 T_n 为物品总数，设定 $M = n^{10}$，并选择整数 $B = 2(T_n + 1)n^4$。我们按优先级从低到高对非优惠券物品排序如下：头奖；尾部 t_n、……、t_1；中心 c_n、……、c_1；尾部标记 τ_{n-1}、……、τ_0；所有私人物品，顺序与下文给出的优先级顺序相反；最后是增值安全物品 s_0，其优先级最高。直到尾部标记（含尾部标记）的物品分别获得连续且互不相同的整数指数 0、1、……、$L-1$。每张成对优惠券 κ_{ij} 独立抽取一个均匀随机排名 $R_{ij} \in \{1, \ldots, M\}$，并获得指数 $L + R_{ij}$。所有私人物品以及 s_0 获得高于 $L + M$ 且连续、互不相同的指数，并遵循其规定的顺序。每件物品的代理人效用为$Y_e = B^{\exp(e)} > 0$。按私有优先级顺序从高到低排列，中心 1 最先，其次是中心 2，依此类推，直到中心 n；在每个中心 i内部，按优先级从高到低的顺序为

$$e_{i,1}^{(0)}, \ldots, e_{i,45}^{(0)}, \qquad e_{i,1}^{(1)}, \ldots, e_{i,39}^{(1)}, \qquad \gamma_{i,0}, \gamma_{i,1}, \gamma_{i,2}, \gamma_{i,3}, \gamma_{i,4}.$$

优惠券排名彼此独立，且与所有委托人抽取相互独立。因此，物品对 $(X_e,\ Y_e)$ 相互独立，且其 $X_e \ge 0$ 和 $Y_e > 0$，并且在接受规则确定之前，其联合分布已固定。

令 $\mathcal{E}$ 表示所有 $\binom{n}{2}$ 个优惠券排名 R_{ij} 两两不同这一事件。根据并集界，$\mathbb{P}(\mathcal{E}^c) \le \binom{n}{2}/M = O(n^{-6})$。在$\mathcal{E}$发生时，所有物品的指数都各不相同。任何以至少 $\delta = n^{-4}$ 的概率被接受且包含指数为 e 的物品的报告，其预期代理人效用至少为 δB^e；而任何所含物品的指数都严格低于 e 的报告，其代理人效用至多为 $T_n B^{e-1} < \delta B^e$。此外，即使$\mathcal{E}$未发生，s_0 也确定性地优先于其他所有物品。我们将这两项事实称为优先级分离；它们对所有接受规则都一致成立。

A.2 触发器缩减与失败补偿

在本小节中，我们利用优先级分离，将委托人的期望收益缩减为基准值v_n 加上两个收益项：一个来自私有触发器，另一个来自优惠券触发器。这两项将在接下来的两个小节中给出有界上限。

我们将不包含头奖的非空报告称为常规报告。由于 $C_n = v_n + \Delta < 2 + 1 = 3$，每个常规报告的委托人价值至多为 $K_n = 2n + 3$。如果一个常规报告的接受概率至少为 δ，则称其为重要报告；如果它既重要，且委托人价值严格大于 1，则称其为符合资格报告。由于接受规则只观察物品标识和委托人价值，资格认定只取决于委托人实现，而与随机优惠券排名无关。

如果$\{s_0\}$ 是重要报告，那么根据优先级分离，代理人的每个最佳响应都是$\{s_0\}$，因为 s_0确定性地具有唯一的最高指数，且期望收益至多为 $C_n = v_n + \Delta$。以下我们假设$\{s_0\}$不是重要报告。

我们根据常规报告中指数最高的物品，将其划分为优先级类别。按优先级从高到低，这些类别依次为$\{s_0\}$；根据假设，该类别并不重要；中心的阶段0和阶段1私人类别 $e_{i\,1}^{(0)},\ldots,e_{i}^{(0)},45$ 和 $e_{i\,1}^{(1)},\ldots,e_{i}^{(1)},39$，中心为 $1, \ldots, n$，顺序如上所示；每个中心在其阶段1类别之后还有一个不带标记的终端私有闸门类别；每张成对优惠券对应一个类别 κ_{ij}；尾部标记类别依次为 $\tau_0, \ldots, \tau_{n-1}$；

以及中心和尾部的底部类别。在$\mathcal{E}$上，优惠券类别按随机排名降序排列。

若存在合格报告，令 c 为包含此类报告的最高优先级类别。根据优先级分离，严格较低类别中的任何报告（包括头奖）都不可能是最佳响应。因此，任何最佳响应要么是期望收益至多为 δK_n 的非实质性常规报告，要么是价值至多为 1 的实质性不合格报告，要么是类别 c中的合格报告，其价值至多为类别 c中的最大委托人价值。

对于中心 i，我们用 $(\omega, \omega_4) \in \{0,1\}^4 \times \{0,1\}$ 表示其五种门控结果，其中 $\omega = (\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$；用 $\xi_i^{(0)}{}_{,r} = \mathbf{1}\{X_{e_i^{(0)}{}_{,r}} > 0\}$ 和 $\xi_i^{(1)}{}_{,r} = \mathbf{1}\{X_{e_i^{(1)}{}_{,r}} > 0\}$ 分别表示其阶段0和阶段1的激活指示变量，并用 $\xi \equiv 1$ 表示确定性标记。F_n 的任何生成元都至多包含 $\{e_{i\,r}^{(0)}, , e_{i\,r'}^{(1)}, \}$ 中的一个物品。根据 (A.1)，当中心 i 未激活（$X_{c_i} = 0$）时，中心 i 的每个私有生成元的委托人价值都严格低于 1，因此中心 i 的任何私人类别都不可能符合资格。当中心 i 激活（$X_{c_i} = 1$）时，其阶段0、阶段1和终端私人类别的最大委托人价值分别为 $1 + b + R_r^{(0)}(\omega, \xi_{i\,r}^{(0)},)$、$1 + b + R_r^{(1)}(\omega, \omega_4, \xi_{i\,r}^{(1)},)$ 和 $1 + b + R_*(\omega, \omega_4)$，其中

$$
\begin{aligned}
R_r^{(0)}(\omega, \xi) &= v_r^{(0)}\xi + \sum_{j \in J_r^{(0)}} g_j \omega_j - b \qquad (1 \le r \le 45), \\
R_r^{(1)}(\omega, \omega_4, \xi) &= v_r^{(1)}\xi + g_4\omega_4 + \sum_{j \in J_r^{(1)}} g_j \omega_j - b \qquad (1 \le r \le 39), \\
R_*(\omega, \omega_4) &= \sum_{j=0}^{4} g_j \omega_j - b.
\end{aligned}
\tag{A.2}
$$

一次性报价失败时（$\xi = 0$），其类别中的报告 $\{e_{i,r}, c_i\} \cup \{\text{观测到的门控}\}$ 在阶段 0 的委托人价值仍为 $1 + \sum_{j \in J} g_j \omega_j$，在阶段 1 则为 $1 + g_4\omega_4 + \sum_{j \in J} g_j \omega_j$。因此，失败的一次性报价仍保留了我们所称的失败补偿：当且仅当观测到的门控之和严格大于 0 时，该类别才有资格认定。若观测到的门控之和为 0，则该类别中的最大委托人价值为 1，并未严格超过 1，因此该类别不具备资格认定条件。私人类别一旦获得资格认定，其最大委托人价值 $1 + b + R$ 就严格超过 1。配对优惠券类别 κ_{ij} 的最大价值为 $b + d + r$，其中 $r \in \{0, 1, 2\}$ 表示其活跃端点数；由于 $b + d < 1$，资格认定要求$r \ge 1$。

如果存在最高优先级的符合资格的私人类别，我们将其称为私有触发项。如果不存在私有触发项，则将随机排名最高的合格优惠券（如果存在）称为优惠券触发项。这两种触发器事件都不涉及尾部或头奖。

现在，对所有中心、所有私人闸门和报价结果，以及优惠券排名进行条件化，并假设两个触发器都未发生。令 $\mathsf{G}_k = \sigma(t_1, \dots, t_k)$ 表示 $0 \le k \le n$，并定义 Doob鞅 $M_k = \mathbb{E}[\max(1, N_A + N_B) \mid \mathsf{G}_k]$。令 $\tau \in \{0, \dots, n\}$ 为最早符合条件的尾部标记类别的索引，若没有类别符合条件，则令 $\tau = n$。由于类别 τ_k 中的报告只能观察尾部中的 $t_1, \dots, t_k$，因此 τ 是一个有界的 G_k-停时。对于 $\tau < n$，类别 τ_k 的最大价值为$N_A + S_k + (n-k)\eta = \mathbb{E}[N_A + N_B \mid \mathsf{G}_k]$，因此根据詹森不等式，$\max(1, N_A + S_k + (n-k)\eta) \le M_k$。对于 $\tau = n$，我们固定常规实现。如果存在重要的常规报告，那么无论头奖如何实现，它在代理人效用上都严格优于头奖；并且每个重要的常规选择的委托人价值至多为 $\max(1, N_A + N_B)$，因为只有底层类别报告才符合资格。如果不存在重要的常规报告，那么根据独立性，条件期望下的收益至多为 $\delta K_n + \mathbb{E}[X_{J_{\mathrm{jp}}}] = \delta K_n + 1$。两种情况下，条件期望收益都至多为 $\delta K_n + M_n$。根据可选停止定理，无触发事件上的条件期望收益为

因此至多为 $\delta K_n + M_0$。只要发生私人或优惠券触发，我们就有 $N_A \geq 1$，因而 $M_0 = \mathbb{E}[N_A + N_B \mid N_A] = N_A + b$。

最后，在$\mathcal{E}^c$上，实现收益至多为 $K_n + X_{J_{\text{jp}}}$。由于$\mathcal{E}$与所有委托人价值相互独立，其对$\mathcal{E}^c$的期望为$(K_n+1)\mathbb{P}(\mathcal{E}^c) = O(n^{-5}) = o(1)$，且对所有规则均一致成立。给定$\mathcal{E}$后，所有主体分布保持不变，优惠券顺序则均匀随机，且独立于主体抽取。取期望得

$$\mathbb{E}[\text{payoff}] \leq v_n + \Gamma_{\text{priv}} + \Gamma_{\text{coup}} + o(1), \tag{A.3}$$

对所有满足$\{s_0\}$不重要的接受规则均一致成立，其中

$$\begin{aligned}\Gamma_{\text{priv}} &= \mathbb{E}\big[(1 + R - N_A)\,\mathbf{1}\{\text{private trigger}\}\big],\\ \Gamma_{\text{coup}} &= \mathbb{E}\big[(d + r - N_A)\,\mathbf{1}\{\text{no private trigger, coupon trigger}\}\big],\end{aligned}$$

且 Γ_{coup} 中的优惠券顺序在给定$\mathcal{E}$的条件下服从均匀分布。(A.3)中的基准值是 v_n而非 C_n。因此，证明$\limsup(\Gamma_{\text{priv}} + \Gamma_{\text{coup}}) \leq \Delta + \varepsilon$即可得出收益至多为 $v + \Delta + \varepsilon$，无论$\{s_0\}$是否重要。

A.3 私人界

本小节中，我们对 Γ_{priv}进行界定。我们首先通过在放宽的菜单类上求解动态规划，证明单个中心的期望奖励至多为其触发概率的凹函数 F，然后通过对偶论证将各中心结合起来。

固定一个接受规则，并以中心 i 处于活跃状态为条件。令 $P_i \in [0,1]$ 表示中心的某个私人类别 i 符合资格的概率，并令 r_i 表示 R（如（A.2）中所述）其最早符合资格类别的期望奖励，其中当没有类别符合资格时，奖励为 0 。

Phase-0 类 $e^{(0)}_{i\,r}$ 中的每份报告都是 $\{e^{(0)}_{i\,r},\ ,\ c_i\} \cup \{\gamma_i,\ _j\colon\ j \in J^{(0)}_r\}$ 的子集。因此，该类别是否符合资格仅取决于（$\omega|_{J^{(0)}_r}$，$\xi^{(0)}_{i\,r}$，）；它独立于 ω_4、$\{\omega_j\colon\ j \notin J^{(0)}_r\}$ 以及所有其他报价指示变量；并且当 $\xi^{(0)}_i$ 、$_r = 0$ 和 $\sum_{j\in J^{(0)}_r} g_j\omega_j = 0$ 时为假。类似地，Phase-1 类 $e^{(1)}_{i\,r}$ 中的每份报告都是 $\{e^{(1)}_{i\,r},\ ,\ c_i,\ \gamma_i,\ 4\} \cup \{\gamma_i,\ _j\colon\ j \in J^{(1)}_r\}$ 的子集，因此它是否符合资格仅取决于（$\omega|_{J^{(1)}_r}$，ω_4，$\xi^{(1)}_{i\,r}$，），独立于所有其他报价指示变量，并且当$\xi^{(1)}_i$ 、$_r = 0$ 和 $g_4\omega_4 + \sum_{j\in J^{(1)}_r} g_j\omega_j = 0$ 时为假。

我们将规则放宽为更大的自适应局部菜单类别，其中每个类别只能观察其局部门控，但可以根据同一中心更高优先级报价的实现进行调整。具体而言，自适应局部菜单规定如下：

- 在每个阶段0 类别 r中，给定更高优先级阶段0报价指示变量的实现 $\xi_{(0)\,i,\ 1}$，……，$\xi_{(0)\,i,\ r-1}$，一个关于 $(\omega|_{J^{(0)r}},\ \xi_{(0)\,i,\ r})$ 的任意布尔资格判定谓词；当 $\xi_{(0)\,i,\ r} = 0$ 且 $\sum_{j\in J^{(0}_r} g_j\omega_j = 0$) 时，该谓词为假；
- 在每个阶段1 类别 r中，给定 $\omega_4 \in \{0,\ 1\}$ 以及所有更高优先级报价指示变量的实现（包括阶段 0 的全部报价和 $\xi_{(1)\,i,\ 1}$，……，$\xi_{(1)\,i,\ r-1}$），一个关于 $(\omega|_{J^{(1)r}},\ \omega_4,\ \xi_{(1)\,i,\ r})$ 的任意布尔资格判定谓词；当 $\xi_{(1)\,i,\ r} = 0$ 且 $g_4\omega_4 + \sum_{j\in J^{(1}_r} g_j\omega_j = 0$) 时，该谓词为假；
- 在终端类中，给定所有报价实现值，(ω, ω_4) 的任意布尔谓词，其奖励为 $R_*(\omega, \omega_4)$。

每个全局固定接受规则，无论是确定性的还是随机化的，都会导出一个忽略较早报价实现值的自适应局部菜单。因此，对于每个接受规则和每个实数费用 t，量 $r_i - tP_i$ 至多等于其在自适应局部菜单上的最大值。

A.3.1 两阶段动态规划

现在，我们通过对私人类别进行反向递归，计算 $r_i - tP_i$ 在自适应局部菜单上的最大值；递归的状态是尚未触发的核心门世界集合。

设 $0 = P_0 < P_1 < \cdots < P_N = 1$ 和 $0 = F_0, F_1, \dots, F_N$ 的弦斜率单调不增，并令 $F\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ 为它们的凹分段线性插值函数。对于每条弦 $j \in \{1, \dots, N\}$，我们定义其斜率和截距

$$t_j = \frac{F_j - F_{j-1}}{P_j - P_{j-1}}, \qquad e_j = F_{j-1} - t_j P_{j-1}.$$

记 $q = q_{\mathrm{num}}/q_{\mathrm{den}} = 7/20$ 和 $\bar{q} = 1 - q = 13/20$。每个汉明重量为 $|\omega| = \sum_{j=0}^{3} \omega_j$ 的核心世界 $\omega \in \{0,1\}^4$ 的概率为

$$\mu_4(\omega) = q^{|\omega|}(1-q)^{4-|\omega|} = \frac{W_4(\omega)}{20^4}, \qquad W_4(\omega) := 7^{|\omega|}13^{4-|\omega|},$$

对于子集 $A \subseteq \{0,1\}^4$，记 $\mu_4(A) = \sum_{\omega \in A} \mu_4(\omega)$。第五道门在 $b_4 = 0$ 时的概率为 $p_4(0) = \bar{q} = 13/20$，在 $b_4 = 1$ 时的概率为 $p_4(1) = q = 7/20$，因此每个五门世界 (ω, b_4) 的概率为 $p_4(b_4)\mu_4(\omega)$。

对于子集 $J \subseteq \{0,1,2,3\}$ 和局部赋值 $u \in \{0,1\}^J$，我们将其核心支撑集和 $g_J(u) = \sum_{j \in J} g_j u_j$ 分别记为 $C_{J,u} = \{\omega \in \{0,1\}^4 : \omega|_J = u\}$。考虑一个实数费用 t、分支因子 $\alpha \in \{\bar{q}, q, 1\}$、额外门值 $g_{\mathrm{add}} \in \{0, g_4\}$、有效奖金 $v \geq 0$、回收标记 $\sigma \in \{0,1\}$ 以及价值函数 $U\colon \mathrm{P}(\{0,1\}^4) \to \mathbb{R}$。我们通过对所有模式 $u \in \{0,1\}^J$（不包括具有 $\sigma = 1$ 和 $g_{\mathrm{add}} + g_J(u) = 0$ 的模式）依次应用更新来定义模式更新算子 $\mathsf{T}_{J,v,\sigma,\alpha,g_{\mathrm{add}},t}(U)$，其更新为

$$U_{\mathrm{next}}(M) = \max\Big\{U(M),\ \alpha\,\mu_4(M \cap C_{J,u})\,(v + g_{\mathrm{add}} + g_J(u) - b - t) + U(M \setminus C_{J,u})\Big\}. \tag{A.4}$$

由于核心支撑集 $C_{J,u}$ 两两不相交，因此模式的顺序无关紧要。

固定一个实数费用 t。对于每个分支 $b_4 \in \{0,1\}$，我们在子集 $M \subseteq \{0,1\}^4$ 上的终端类处初始化，定义为

$$V_t^{(b_4)}(L_1^{\mathrm{ph}} + 1, M) = p_4(b_4) \sum_{\omega \in M} \mu_4(\omega)\big(R_*(\omega, b_4) - t\big)_+. \tag{A.5}$$

对于 $r = L_1^{\mathrm{ph}}, \dots, 1$，令 $g_{\mathrm{add}} = b_4 g_4$，$\alpha = p_4(b_4)$、$J = J_r^{(1)}$，$p_r = p_r^{(1)}$ 和 $v_r = v_r^{(1)}$，并定义

$$V_t^{(b_4)}(r, M) = (1 - p_r)\,\mathcal{T}_{J,0,1,\alpha,g_{\mathrm{add}},t}\big(V_t^{(b_4)}(r+1,\cdot)\big)(M) + p_r\,\mathcal{T}_{J,v_r,0,\alpha,g_{\mathrm{add}},t}\big(V_t^{(b_4)}(r+1,\cdot)\big)(M), \tag{A.6}$$

其中，当 $p_r = 1$ 时省略 $(1 - p_r)$ 项。我们通过设定将两个阶段1价值函数合并为阶段 0

$$V_t^{\mathrm{ph0}}(L_0^{\mathrm{ph}} + 1, M) = V_t^{(0)}(1, M) + V_t^{(1)}(1, M), \tag{A.7}$$

并且对于 $r = L_0^{\mathrm{ph}}, \dots, 1$，若 $J = J_r^{(0)}$，$p_r = p_r^{(0)}$，$v_r = v_r^{(0)}$，且 $\alpha = p_4(0) + p_4(1) = 1$，则定义

$$V_t^{\mathrm{ph0}}(r, M) = (1 - p_r)\,\mathcal{T}_{J,0,1,1,0,t}\big(V_t^{\mathrm{ph0}}(r+1,\cdot)\big)(M) + p_r\,\mathcal{T}_{J,v_r,0,1,0,t}\big(V_t^{\mathrm{ph0}}(r+1,\cdot)\big)(M), \tag{A.8}$$

当 $p_r = 1$ 时，再省略 $(1 - p_r)$ 项。

引理 *A.2*（因式分解）。固定一个实数费用 t。在有偏门分布 q 下，$\{0,1\}^5 \times \prod_r \{0,1\}$ 上所有自适应局部菜单的 $r_i - tP_i$ 最大值等于 $V\mathrm{ph}_t{}^0(1, \{0,1\}^4)$。因此，对于每个全局固定接受规则，$r_i - tP_i \le V\mathrm{ph}_t{}^0(1, \{0,1\}^4)$。由此，如果对于每条弦 $j = 1, \ldots, N$，都有 $V\mathrm{ph}_{t_j}{}^0(1, \{0,1\}^4) \le e_j$，那么对于每个中心 i 和每条接受规则，都有 $r_i \le F(P_i)$。

证明。固定所有更高优先级的阶段0报价指示变量的一个实现。由于阶段0谓词从不观测 ω_4，因此它们在两个分支 $\omega_4 = 0$ 和 $\omega_4 = 1$上移除相同的核心世界。因此，进入阶段 1 时尚未触发的世界具有如下乘积形式：$M \times \{0,1\}$，其中 $M \subseteq \{0,1\}^4$是一个单独的子集。在阶段 1 和终端类中，每个谓词都会观测 ω_4，因此，自适应局部菜单分别为 $\omega_4 = 0$ 和 $\omega_4 = 1$ 选择其阶段 1 位和终端位。

对于固定的 $b_4 \in \{0,1\}$，我们对 $r = L_1^{\mathrm{ph}} + 1, \ldots, 1$ 进行反向归纳，证明 $V(b_4)_t(r, M)$ 是最大贡献：在给定分支 $\omega_4 = b_4$上的存活核心集合M 时，在从类别 r 开始的所有自适应阶段 1 和终端选择中，每个五门世界按其概率加权 $p_4(b_4)\mu_4(\omega)$。基础情形 $r = L_1^{\mathrm{ph}} + 1$ 直接由 (A.5) 得出。在步骤 r，我们以抽取 $\xi_i^{(1)}{}_{,r} \in \{0,1\}$ 为条件；该抽取与 (ω, ω_4) 及所有其他报价相互独立。给定 $\xi_i^{(1)}{}_{,r} = 1$（其概率为 p_r），菜单为每个模式 $u \in \{0,1\}^J$选择一个布尔接受位。由于核心支撑集 $C_{J,u}$ 将 $\{0,1\}^4$, 划分开来，接受模式 u 在 $(M \cap C_{J,u}) \times \{b_4\}$ 上收集$p_4(b_4)\mu_4(M \cap C_{J,u})(v_r + b_4 g_4 + g_J(u) - b - t)$，并将其传递给类别 $r+1$，此时最优延续值为 $V(b_4)_t(r+1, M \setminus C_{J,u})$。因此，在不相交支撑集 $C_{J,u}$ 上依次应用 (A.4)，得到条件最优值 $\mathrm{T}_{J,v_r,0,p_4(b_4)\,b_4 g_4,t}(V(b_4)_t(r+1,\cdot))(M)$。给定 $\xi_i^{(1)}{}_{,r} = 0$（其概率为 $1 - p_r$），同样的推理适用，但有效奖金为 0，并且当 $b_4 g_4 + g_J(u) = 0$ 时禁止资格认定，从而得到 $\mathrm{T}_{J,0,1,p_4(b_4)\,b_4 g_4,t}(V(b_4)_t(r+1,\cdot))(M)$。对 $\xi_i^{(1)}{}_r$ 取期望，得到 (A.6)。

在 $r = 1$ 处将两个独立分支的最优值相加可知，给定阶段 0 后的存活核心集合 M，式 (A.7) 是从阶段 1 和终端类出发的最优延续值。通过阶段 0 进行同样的反向归纳，即可证明式 (A.8)；这里，每个核心世界 $\omega \in M$ 都代表 $(\omega, 0)$ 和 $(\omega, 1)$，其合并概率为 $(p_4(0) + p_4(1))\mu_4(\omega) = \mu_4(\omega)$，即 $\alpha = 1$。令 $r = 1$和 $M = \{0,1\}^4$，可知 $V\mathrm{ph}_t{}^0(1, \{0,1\}^4)$ 是对自适应局部菜单取最大值，因此它对每个全局固定接受规则都构成 $r_i - tP_i$的上界。若对所有 j，都有 $V\mathrm{ph}_{t_j}{}^0(1, \{0,1\}^4) \le e_j$，则 $r_i \le \min_j(e_j + t_j P_i) = F(P_i)$。 □

A.3.2 离线私人价值

接下来我们记录　私人备选项的离线价值，它构成第 A.5 节中基准的一部分　　.

对于一个活跃中心，固定 $(\omega, \omega_4) \in \{0, 1\}^5$，令 $v_{\mathrm{det}}(\omega, \omega_4)$ 为 $R_*(\omega, \omega_4)$ 与所有确定性阶段 0 和阶段 1 标记的奖励 $(p_r = 1)$ 中的最大值。每当一次性报价失败时 $(\xi = 0)$，其类别所获得的奖励至多为 $g_4\omega_4 + \sum_{j \in J} g_j\omega_j - b \le R_*(\omega, \omega_4) \le v_{\mathrm{det}}(\omega, \omega_4)$，因此失败的报价绝不会提高离线最大值。令 $(r_1, p_1) \ldots, (r_s, p_s)$ 表示两个阶段中所有满足 $r_k > v_{\mathrm{det}}(\omega, \omega_4)$ 的一次性报价的活跃奖励和激活概率，并按 $r_1 \ge r_2 \ge \cdots \ge r_s$ 的顺序排列。由于这 56 个报价相互独立，条件离线溢价为

$$L(\omega, \omega_4) = \sum_{k=1}^{s} \Big(\prod_{\ell=1}^{k-1} (1 - p_\ell) \Big) p_k r_k + \Big(\prod_{\ell=1}^{s} (1 - p_\ell) \Big) v_{\mathrm{det}}(\omega, \omega_4), \tag{A.9}$$

且上述离线期望 $1+b$ 在偏置五门定律下为

$$L_0 = \sum_{(\omega,\omega_4)\in\{0,1\}^5} p_4(\omega_4)\,\mu_4(\omega)\,L(\omega,\omega_4). \tag{A.10}$$

A.3.3 私有势与对偶性

现在，我们对所有中心的逐中心界 $r_i \le F(P_i)$ 求和。时间乘子 ν 将各中心解耦，由此得到的势 Φ_ν 有闭式表达。

设 $x_i = p\sum_{j<i} P_j$ 和 $x = p\sum_{j=1}^{n} P_j \in [0,a]$。由于不同中心的分支相互独立，在 i 之前没有任何中心私有触发的概率为 $\Pi_i = \prod_{j<i}(1-pP_j)$。在此事件发生且中心 i 出现私有触发的条件下，其他活跃中心的期望数量为

$$(n-i)p + \sum_{j<i} \frac{p(1-P_j)}{1-pP_j} \ge a - p - x_i.$$

利用 $r_i \le F(P_i)$ 以及引理 A.2，再结合 对所有规则一致成立的 $\Pi_i = -x_i + O(1/n)$，我们得到

$$\Gamma_{\text{priv}} = \sum_{i=1}^{n} p\,\Pi_i\big[r_i - P_i\,\mathbb{E}(\text{other active centers})\big] \le \sum_{i=1}^{n} p\,e^{-x_i}\big[F(P_i) - (a-x_i)P_i\big] + O(1/n), \tag{A.11}$$

其中隐含常数仅依赖于 a 和 $\max F$。

对于 $\nu \ge 0$ 和 $X \in [0,a]$，我们定义

$$f_{\nu,j}(X) = \frac{\nu}{P_j} + e^{-X}\Big(a - X - \frac{F_j}{P_j}\Big), \qquad \varphi_\nu(X) = \min_{1\le j\le N} f_{\nu,j}(X), \qquad \Phi_\nu(x) = \int_0^x \varphi_\nu(X)\,dX.$$

Lemma A.3（时间乘子不等式）。 对所有 $\nu \ge 0$， $X \in [0,a]$，以及 $P \in [0,1]$，

$$e^{-X}\big[F(P) - (a-X)P\big] \le \nu - P\,\varphi_\nu(X).$$

证明。令 $\psi(P) = \nu - e^{-X}[F(P) - (a-X)P]$，其在 $[0,1]$ 上是凸的分段线性函数，且 $\psi(0) = \nu \ge 0$，并有 $\psi(P_j) = P_j f_\nu$，$_j(X)$。在 $[0,P_1]$ 上，由线性性可得 $\psi(P) = (1-P/P_1)\psi(0) + (P/P_1)\psi(P_1) \ge Pf_\nu$，$1(X) \ge P\varphi_\nu(X)$。在每个满足 $j \ge 2$ 的区间段 $[P_{j-1}, P_j]$ 上，我们有 $\psi(P) = \alpha + \beta P$，因此 $\psi(P)/P = \beta + \alpha/P$ 单调，故其下界为 $\min(f_{\nu,j-1}(X)\, f_{\nu,j}(X)) \ge \varphi_\nu(X)$。 □

引理 A.4（私有势界）。 假设引理 *A.2* 对 F 的所有弦均成立，且 $0 \le F_j < P_j$ 对所有 $1 \le j \le N$均成立。那么对于每个 $\nu \ge 0$，以下结论成立。

1. 函数 φ_ν 严格递减，并且在 $[0,a]$上是（$1+a$）-利普希茨的；特别地， $-\Phi_\nu$ 在 $[0,a]$上是凸函数。

2. $\Gamma_{\text{priv}} \le \nu a - \Phi_\nu(x) + O(1/n)$，其中隐含常数仅取决于 a和$\max F$。

证明。 对于每个 $1 \le j \le N$和 $X \in [0,a]$，我们有 $0 \le a - X \le a$ 和 $0 \le F_j/P_j < 1$，因此$1 - F_j/P_j \le 1 + a - X - F_j/P_j \le 1 + a$。对 $f_{\nu,j}$ 求导可得

$$f'_{\nu,j}(X) = -e^{-X}\Big(1 + a - X - \frac{F_j}{P_j}\Big) \in \Big[-(1+a),\ -e^{-a}\Big(1 - \frac{F_j}{P_j}\Big)\Big].$$

因此，在整个 $[0,a]$ 上，对每个 j， $f'_{\nu,j}(X) < 0$且 $|f'_{\nu,j}(X)| \le 1+a$。对 $1 \le j \le N$ 取逐点最小值会保留严格单调性和利普希茨常数 $1+a$，因此 φ_ν 严格递减且为 $(1+a)$-利普希茨函数。由此，$(-\Phi_\nu)' = -\varphi_\nu$ 严格递增，并且 $-\Phi_\nu$ 在 $[0,a]$ 上是凸函数。对 (A.11) 的每一项应用引理 A.3 于 $(X,P) = (x_i,P_i)$，并利用 $np = a$，可得 $\Gamma_{\mathrm{priv}} \le \nu a - \sum_{i=1}^n pP_i\varphi_\nu(x_i) + O(1/n)$。由于这些点 x_i 将 $[0,x]$ 划分为长度为 $pP_i \le p$ 的区间，左黎曼和 $\sum_i pP_i\varphi_\nu(x_i)$ 与 $\Phi_\nu(x)$ 的差至多为 $(1+a)px/2 \le (1+a)pa/2 = O(1/n)$。 □

令 $A_j = \nu/P_j$ 和 $r_j = F_j/P_j$ 并代入 $t = e^{-X}$，使得 $dX = -dt/t$，即可得到如下表示式

$$\Phi_\nu(x) = a - 1 + (x+1-a)e^{-x} + \int_{e^{-x}}^1 \min_{1\le j\le N}\Big(\frac{A_j}{t} - r_j\Big)\,dt. \tag{A.12}$$

对于 $t > 0$，在 j 上最小化 $A_j/t - r_j$，等价于最小化仿射函数 $A_j - r_j t$。当 ν、P_j和 F_j 均为有理数时，这些仿射函数的所有两两交点都是有理数。在任意一个内部没有交点的子区间 $[u,v] \subseteq [e^{-x},1]$ 上，单个指标 j在整个$[u,v]$上始终取最小值，其贡献的积分为

$$\int_u^v \Big(\frac{A_j}{t} - r_j\Big)\,dt = A_j \log\frac{v}{u} - r_j(v-u). \tag{A.13}$$

A.4 独立优惠券排名

在本小节中，我们对 Γ_{coup}进行界定。关键在于，优惠券排名均匀随机且独立于委托人价值，因此，具有两个活跃端点的优惠券很少会排在只有一个活跃端点的优惠券之前。

固定一个接受规则，并回顾一下：在中心 i 处于活跃状态的条件下， P_i 是其私有触发概率。定义

$$\lambda_i = \frac{p(1-P_i)}{1-p}, \qquad s_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i = \frac{a-x}{1-p}.$$

对所有私有结果（即门和一次性报价）进行积分后，不发生私有触发项且活跃中心集合等于 $A \subseteq \{1,\dots,n\}$ 的概率为

$$(1-p)^n \prod_{i\in A} \lambda_i. \tag{A.14}$$

优惠券资格判定仅取决于端点委托人价值和固定规则，因此独立于私有结果和随机优惠券排名。

固定截断值 $J_0 = 12$。每个满足 $|A| > J_0$ 的活跃集合 A 都有优惠券超额 $d + r - |A| \le d + 2 - 13 < 0$，因此舍弃满足 $|A| > J_0$ 的集合，可得到 Γ_{coup} 的上界。沿着任意一列接受规则，我们取一个子序列，使得 $x \to x_* \in [0,a]$，并令 $s = a - x_*$。若 $s = 0$，则可直接由 (A.14) 得出 $\limsup \Gamma_{\mathrm{coup}} \le 0$。否则， $s_n \to s > 0$，且归一化概率权重 $\varpi_i = \lambda_i/s_n$ 满足 $\max_i \varpi_i = O(1/n)$。对于每个 $1 \le m \le J_0$，将 (A.14) 乘以预期优惠券超额 $\gamma(A)$，并对具有 m个元素的支撑集 A 求和，结果为

$$(1-p)^n \frac{s_n^m}{m!}\,\mathbb{E}\big[\gamma(\{V_1,\dots,V_m\})\,\mathbf{1}\{V_1,\dots,V_m \text{ distinct}\}\big],$$

其中 $V_1,\dots,V_m$ 独立同分布，分布律为 ϖ。由于 $|\gamma(A)| \le J_0 + 3$ 有界，且 $V_1,\dots,V_{J_0}$ 之间发生碰撞的概率为 $O(1/n)$，互异性限制使总和发生的变化为 $o(1)$。

令 $U \subseteq \{1, \dots, n\}$ 为这样一组中心 i：当 $\{i\}$ 是唯一的活跃中心时，至少有一份优惠券报告符合资格。对于每个 $i \in U$，我们固定一份这样的合格报告，该选择与随机排名无关，并称其为 i 的见证；其优惠券与 i 相连，且至多有另一个端点$j(i)$。在 $V_1, \dots, V_{J_0}$ 中，某个抽样对等于 $(i, j(i))$ 的概率，对于抽样的某个 $i \in U$，至多为 $J_0(J_0-1)\max_\ell \varpi_\ell = O(1/n)$。除该碰撞事件外，每个抽样所得的 U 成员的见证在完整的活跃支撑集 A上仍符合资格，因为其中包含的任何非活跃端点仍然是非活跃的，因此它仍有 $r = 1$ 个活跃端点。此外，U 中不同抽样成员的见证优惠券互不相同，因为若共享一张优惠券，这两个成员就会是它的端点，从而造成已排除的碰撞。

引理 A.5 (秩竞赛)。 假设一个大小为 $m \geq 1$ 的活跃支撑集 A 包含 U 中的 $k \geq 1$ 个元素，且避开见证碰撞事件。在 $C_m = \binom{m}{2}$ 的条件下，其预期优惠券超额满足

$$\gamma(A) \leq h_m(k) := 1 + d - m + \frac{C_m}{C_m + k},$$

其中，最后一个分数在 $m = k = 1$ 时按 0 解释。

证明。 k 个不同的见证优惠券会触发一个优惠券触发项，且每个优惠券都有 $r = 1$ 个活跃端点。至多有 C_m 个优惠券的两个端点都在 A 中，并且它们都不与见证优惠券重合。在 $\mathcal{E}$ 上所有优惠券的均匀随机排序中，这些至多 $C_m + k$ 个不同的优惠券各自成为排名最高者的可能性相同，因此，某个具有两个活跃端点的优惠券排在所有 k 个见证之前的概率至多为 $C_m/(C_m + k)$。不符合资格的成对优惠券以及其他只有一个活跃端点的合格优惠券，只会降低这一概率。因此，触发优惠券的活跃端点数的期望至多为 $1 + C_m/(C_m + k)$，其超额$d + r - m$ 的期望至多为 $h_m(k)$。 □

现在考虑支撑集 $A \subseteq \{1, \dots, n\} \setminus U$。此类支撑集上的任何合格优惠券都必须有两个端点处于激活状态，因为若一份合格报告只有一个端点处于激活状态，该端点就会属于 U；而没有激活端点的报告值为 $b + d < 1$。令 G 为定义在 U^c 上的图，其边是满足以下条件的点对 ij：当两个端点都处于激活状态时，$\{\kappa_{ij}, c_i, c_j\}$ 符合资格。于是，当且仅当 A 包含 G的一条边时，$A \subseteq U^c$ 上才会发生优惠券触发项。令 r_m 表示 m 个来自 $\varpi|_{U^c}$ 的独立同分布样本所张成的边属于 G的概率。将所有 m 耦合到同一个无限独立同分布序列上，可得 $0 \leq r_2 \leq r_3 \leq \cdots \leq 1$。记 w 为补集的极限权重，则补集通过 J_0 产生的总贡献至多为

$$\sum_{m=2}^{J_0} \frac{w^m}{m!}(d + 2 - m) r_m \leq r_2 K(w) \leq \max\{0, K(w)\}, \qquad K(w) := \sum_{m=2}^{J_0} \frac{w^m}{m!}(d + 2 - m), \quad \text{(A.15)}$$

因为对于 $m = 2$， $d + 2 - m > 0$ 成立，而对于所有 $m \geq 3$， $d + 2 - m < 0$ 成立，所以将 r_m 替换为 $r_2 \leq r_m$ 来处理$m \geq 3$ 只会使总和增大。

我们进一步取一个子序列，使得 $\sum_{i \in U} \lambda_i \to u \in [0, s]$。将 m 独立同分布的标签按二项分布分配到 U，其质量为 u，以及 U^c，其质量为 $s - u$，并应用引理 A.5和（A.15）可得

$$\limsup_{n \to \infty} \Gamma_{\text{coup}} \leq e^{-a}(S(u, s) + \max\{0, K(s - u)\}), \quad \text{(A.16)}$$

其中

$$S(u, s) = \sum_{m=1}^{J_0} \sum_{k=1}^{m} \frac{u^k (s - u)^{m-k}}{k!(m - k)!} h_m(k).$$

引理 A.6（端点凸性）。对于每个 $0 \le s \le a$ 和 $0 \le u \le s$,

$$S(u,s) + \max\{0, K(s-u)\} \le D(s) := \max\{0, K(s), A(s)\},$$

其中

$$A(s) := \sum_{m=1}^{J_0} \frac{s^m}{m!}\Big(2 + d - m - \frac{2}{m+1}\Big).$$

证明。 $s = 0$ 的情形显然。对于 $s > 0$, 写作 $t = u/s \in [0,1]$。对于每个 $m \ge 2$, $S(u,s)$ 的 m 次部分为 $(s^m/m!)\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}a_k t^k(1-t)^{m-k}$, 其中 $a_0 = 0$, 且对于 $k \ge 1$, 有 $a_k = h_m(k)$。该伯恩斯坦多项式关于 t 的二阶导数（不含因子 $s^m/m!$）为$m(m-1)\sum_{k=0}^{m-2}\binom{m-2}{k}(a_{k+2}-2a_{k+1}+a_k)t^k(1-t)^{m-2-k}$。对于 $k \ge 1$, 不等式 $a_{k+2}-2a_{k+1}+a_k \ge 0$ 由 $k \mapsto C_m/(C_m+k)$ 的凸性得出。对于 $k = 0$, 我们有

$$a_2 - 2a_1 + a_0 = m - 2 - d + \frac{2}{(C_m+1)(C_m+2)} \ge 0,$$

因为 $m = 2$ 这等于 $1/3 - d \ge 0$ 由（A.1）, 且对于 $m \ge 3$ 它严格为正。 $m = 1$项是线性的。因此 S（$\cdot$ s）在 $[0,s]$上是凸的。

对于 $S(u,\ s) + K(s-u)$, $k = 0$ 次数为 $m \ge 2$ 的系数变为 $a_0 = d + 2 - m = 1 + d - m + C_m/C_m = h_m(0)$, 因此序列（$a_0$, ……, a_m）遵循相同的凸公式, 并且S（$\cdot$ s）$+K$（$s-\cdot$）也是凸的。这两个凸函数在 $[0,s]$ 上的最大值由其在端点处的值所界定。在 $u = 0$处, 它等于 $\max\{0,\ K(s)\}$; 在 $u = s$处, 它等于 $A(s)$, 因为$C_m/(C_m+m) = (m-1)/(m+1)$, 且 $m = 1$ 系数为 d。 □

结合（A.3）、引理 A.4、（A.16）和引理 A.6, 只需证明: 对于每个$x \in [0,a]$, 存在一个乘数 $\nu \ge 0$ 属于某个有限集合, 使得

$$\rho_\nu(x) := e^{-a}D(a-x) + \nu a - \Phi_\nu(x) < \Delta + \varepsilon, \qquad \Delta = \frac{1}{400}, \quad \varepsilon = 10^{-6}. \tag{A.17}$$

事实上, 对于每个 n, 选择一个规则, 使其期望收益与上确界的差距小于 $1/n$。我们取一个达到上极限的子序列, 然后再取一个无限子序列, 使得$\{s_0\}$ 的实质性状态保持不变。在实质情形下, 期望收益至多为 $C_n \to v + \Delta$, 其中 $v = a + b + e^{-(a+b)}$。在非实质情形下, 我们进一步抽取子序列, 使得 $x \to x_*$ 和$\sum_{i\in U}\lambda_i \to u$。在 x_* 处选择经证明的乘数, 并利用 D 和 Φ_ν 的连续性, 即可在同一个上极限上得到界 $v + \Delta + \varepsilon$。

A.5 基准与常数 β

在本小节中, 我们通过展示每种实现下的一个可行选择, 给出基准 V_n 的下界, 并定义常数 β。

设 $z = a + b = 143/200$, $Q = e^{-z}$, $v = z + Q$ 和 $C = v + \Delta$。令 $\ell \in \{0, \dots, n\}$ 为成功尾部的最大索引; 若 $N_B = 0$, 则 $\ell = 0$。可行集为 $\{c_1, \dots, c_n, t_1, \dots, t_\ell, \tau_\ell\}$; 若 $\ell = n$, 则省略 τ_ℓ。其委托人价值为 $N_A + N_B + (n-\ell)\eta$。由于 $\mathbb{E}[(n-\ell)\eta] = \eta\sum_{j=1}^{n}(1-\eta)^j \to 1 - e^{-b}$, 这一基础选择达到极限期望 $z + 1 - e^{-b}$。我们在四个互不相交的事件上对其进行改进:

- 若 $N_A = N_B = 0$, 我们选择抬高的安全单元素集合 $\{s_0\}$, 其值为 $C_n = v_n + \Delta$, 而非基准值 b; 这在极限下带来 $Q(v + \Delta - b)$ 的增益。

- 若 $N_A = 0$ 且 $N_B = 1$，我们选择 $\{s_0\}$。唯一成功尾部的索引在 $\{1, \dots, n\}$上均匀分布，因此期望基准值为 $1 + (n-1)\eta/2 \to 1 + b/2$，极限改进为 $Qb(v + \Delta - 1 - b/2)$。根据第 A.6节，$v + \Delta - 1 > b$，这确保 $\{s_0\}$对于所有足够大的 n，在每个尾部索引 ℓ处都严格优于基准选择。

- 若 $N_A = 1$ 且 $N_B = 0$，我们选择唯一活跃中心的最佳私有生成元，其期望值为 $1 + b + L_0$，而非基准值 $1 + b$；极限改进为 QaL_0。
- 若 $N_A = 2$ 且 $N_B = 0$，我们为活跃配对选择配对优惠券生成器 $\{\kappa_{ij},\ c_i,\ c_j\}$，其值为 $2 + b + d$，而非基准值 $2 + b$；极限改进为 $Qa^2 d/2$。

因此，常规离线最优值满足 $\liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}[\mathrm{OPT}_{\mathrm{reg}}] \geq W$，其中

$$W = z + 1 - e^{-b} + Q\left[v + \Delta - b + b\Big(v + \Delta - 1 - \frac{b}{2}\Big) + aL_0 + \frac{a^2 d}{2}\right]. \tag{A.18}$$

由于头奖 J_{jp} 是独立的，且其价值为 H，概率为 $1/H$，因此在其活跃时选择 $\{J_{\mathrm{jp}}\}$，否则选择 $\mathrm{OPT}^{\mathrm{reg}}$，可得 $V_n \geq 1 + (1 - 1/H)\mathbb{E}[\mathrm{OPT}_{\mathrm{reg}}]$，所以 $\liminf_{n\to\infty} V_n \geq 1 + W$。我们定义

$$\beta = \frac{v + \Delta + 10^{-6}}{1 + W}. \tag{A.19}$$

第 A.6 节证明了 $\beta < 9621/20000 = 0.48105$，结合（A.17），即可证明定理 A.1。

A.6 有限证书

本小节列出构造的数值数据，以及上文使用的有限个不等式，即引理 A.2 的弦界、条件（A.17），以及关于 β的界。所有这些内容均已通过精确有理数运算验证。

A.6.1 参数

我们使用 $a = 67/100$、$b = 9/200$、$d = 9/50$、$\Delta = 1/400$，以及五个相互独立的偏置门，每个门以概率 $q = 7/20$ 激活。以 10^{-10} 为单位，门的值为

$$g = (1063860742,\ 1322186165,\ 1613310011,\ 2140778234,\ 3059764500),$$

总和为 $9199899652/10^{10} < 1$。表格 1 和 2 按优先级顺序列出了全部 45 Phase-0 物品以及全部 39 Phase-1 物品，从最高到最低排列，其中激活时的委托人价值以 10^{-10}为单位。

使用这些有理数值，（A.9）–（A.10）给出

$$L_0 = \frac{157338501249385329 77}{32768000000000000000} \approx 0.480159000395.$$

包络 F 具有二进制节点 $N = 21$

$$P = \Big(\frac{1}{128}, \frac{1}{64}, \frac{3}{128}, \frac{1}{32}, \frac{3}{64}, \frac{1}{16}, \frac{5}{64}, \frac{3}{32}, \frac{7}{64}, \frac{1}{8}, \frac{5}{32}, \frac{3}{16}, \frac{1}{4}, \frac{5}{16}, \frac{3}{8}, \frac{7}{16}, \frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, 1\Big);$$

以及有理数值 F_j，其中 $F_1/P_1 = 875061/1000000 = 0.875061$ 和 $F_{21} = 24019923/64000000$；恰好 8 个节点满足 $F_j/P_j > a$。(A.17) 中的乘数为 1024 个有理数 ν_i，是 10^{-7}的倍数，对应于 $[0, a]$中宽度为 $a/1024$的每个单元。数值 F_j 和 ν_i，以及本小节的所有其他数据，均可在本文 arXiv 版本的补充文件中获取。利用这些数据，可以得到以下结论。

J	p	$v \cdot 10^{10}$	J	p	$v \cdot 10^{10}$	J	p	$v \cdot 10^{10}$
0	1	4202791876	7	3/8	1395208298	11	1/2	1395613379
1	1	3213031524	7	1/4	1651051908	12	1	1401807157
2	1	3011116304	7	1/8	1667466912	12	1/2	1612386952
2	3/4	3049627003	8	1	2307491578	12	1/4	1621205876
3	1	2084974000	8	3/4	2361836720	13	1	1017614262
4	1	2723663716	8	1/2	2425463429	13	3/4	1043090462
4	3/4	2759691658	8	1/4	2471039066	13	1/2	1077163296
4	1/2	2848146280	9	1	1633976535	13	1/4	1125511004
5	1	1954139616	9	3/4	1676157594	14	1	975640596
5	3/4	1993045243	10	1	1527086959	14	1/2	1005560602
5	1/2	2014825864	10	3/4	1543846787	14	1/4	1043178169
6	1	1784516708	10	1/2	1627406940	14	1/8	1157094029
6	3/4	1790945508	10	1/4	1656728646	15	1	759131158
6	1/2	1931791608	11	1	1189630358	15	3/4	858001920
7	1	1354734356	11	3/4	1227035267	15	1/2	894276990

表1： 按列读取的有序阶段0物品（$J_r^{(0)}$，$p_r^{(0)}$，$v_r^{(0)}$）：16 个确定性标记和 29 个二进制一次性报价。

J	p	$v \cdot 10^{10}$	J	p	$v \cdot 10^{10}$	J	p	$v \cdot 10^{10}$
0	1	1970668731	4	1/2	1324256220	8	1	569333828
0	3/4	2027048314	4	1/4	1333509509	8	1/2	591275305
0	1/2	2044082689	5	1	730944143	8	1/4	772702104
0	1/4	2080453071	5	3/4	752793850	8	1/8	955152635
1	1	1383777685	5	1/2	836361223	8	1/16	1076454790
2	1	1346782929	5	1/4	903257677	9	1	352908862
2	3/4	1352350844	5	1/8	981704606	11	1	265750800
2	1/2	1433651994	6	1	689428306	11	1/2	377632371
2	1/4	1514685701	6	3/4	708834566	11	1/4	428281060
2	1/8	1697281450	6	1/2	784005826	11	1/8	499188937
3	1	1013285156	6	1/4	945286049	13	1	267809261
3	3/4	1081281321	7	1	308171511	13	1/2	420075553
4	1	1130431825	7	3/4	412771243	13	1/4	462857287

表2： 按列读取的有序阶段 1 物品（$J_r^{(1)}$、$p_r^{(1)}$、$v_r^{(1)}$）：12 个确定性标记和 27 个二进制一次性报价。

1. 所有参数不等式 (A.1)、每个级联的有序性和严格单调性、具有 F 个 $N = 21$ 节点的包络的凹性，以及对所有$1 \le j \le 21$成立的严格上界 $0 \le F_j < P_j$；2. 对于每条弦 $j \in \{1, \dots, 21\}$，满足引理 A.2 的不等式 $V\mathrm{ph}_{t_j}{}^{0}(1, \{0, 1\}^4) \le e_j$，其中$V_{t_j}^{\mathrm{ph}0}$ 由第 A.3.1 节的递推给出；3. 不等式 (A.17) 在覆盖 $[0, a]$ 的全部 1024 个网格单元上一致成立，其最差情况下经认证的上界为 $\le 2.499128087 \times 10^{-3} < \Delta + \varepsilon = 2.501 \times 10^{-3}$；4. $v + \Delta - 1 > b$、(A.18) 中括号内的正性，以及严格的有理上界$\beta \le 0.481043999746 < 9621/20000 = 0.48105$。

A.6.2 单元上的指数函数、对数函数与凸性

最后两个断言涉及指数函数和对数函数，第三个则是关于整个单元的陈述。我们将它们化为有限个有理数不等式，如下所示。

对于每个有理数 $0 \le t \le 1$，根据交错级数定理，次数为 18 和 19 的连续泰勒部分和夹住 e^{-t}，因为 $t^k/k!$ 在 $k \ge 1$ 时递减。由于 $a + b = 143/200 < 1$，所有出现的指数函数，即 e^{-x} （对于 $x \in [0, a]$）、 e^{-a}、e^{-b} 和 $e^{-(a+b)}$，其自变量都在 $[0, 1]$ 中。对于有理数 $x \in [0, a]$，令 $\ell \le e^{-x} \le h$ 为这个夹逼区间。于是 $\ell \ge 1/2$，因为 $a = 67/100 < \ln 2$。

为了从下方估计 (A.12) 中的积分，在 $[\ell, 1]$ 上按仿射函数 $A_k - r_k t$ 在 $(\ell,1)$ 内的两两交点进行划分。在每个由此得到的线段 $[u, v]$上，单个指标 j取最小值，因此适用 (A.13)。由于 $1/2 \le \ell \le u < v \le 1$，比值 $y = v/u$ 位于 $[1, 2]$, 中，因此$z = (y - 1)/(y + 1) \in [0, 1/3]$ 并且

$$\log y = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{2k+1} \ge 2 \sum_{k=0}^{15} \frac{z^{2k+1}}{2k+1}.$$

由于 $A_j \ge 0$，将此下界代入 (A.13) 可得 $\int_\ell^1 \min_j(A_j/t - r_j)\, dt$ 的一个有理数下界。将积分的下端点从 ℓ 移至 $e^{-x} \in [\ell, h]$，至多会减去 $(h - \ell)\max_j(A_j/\ell + r_j)$，因为在 $[\ell, e^{-x}]$ 上，$\min_j(A_j/t - r_j) \le \max_j(A_j/\ell + r_j)$。此外，由于 $x + 1 - a > 0$，量 $a - 1 + (x + 1 - a)\ell$ 是该初等项的一个下界。综上，可得 $\Phi_\nu(x)$ 的一个有理数下界。

对于单元上的凸性，在 $D(s)$ 的定义中，每个多项式 $q_{\mathrm{poly}} \in \{0, K, A\}$ 在所有 $m \ge 2$ 下，在 $s^m/m!$ 上的系数均至少为 $1 - m$，因此

$$q''_{\mathrm{poly}}(s) \ge -\sum_{m=2}^{\infty} (m-1) \frac{s^{m-2}}{(m-2)!} = -(1+s)e^s \qquad (0 \le s \le a).$$

因此，$e^{-a} q''_{\mathrm{poly}}(a - x) \ge -e^{-a}(1 + a - x)e^{a-x} \ge -(1 + a) > -2$，因为 $a = 67/100 < 1$。此外，根据引理 A.4(1)，该引理只要求条件 $0 \le F_j < P_j$ 对全部 21 个节点均成立；φ_ν 严格递减，且 $-\Phi_\nu$ 在 $[0, a]$上为凸。因此，对每个 q_{poly}，$e^{-a} q_{\mathrm{poly}}(a - x) + \nu a - \Phi_\nu(x) + x^2$ 均为凸函数，而对q_{poly} 取最大值仍保持凸性。由此可得，在任意网格单元$[L, L + H_0]$ 上，只要 $H_0 = a/1024$,

$$\max_{x \in [L, L+H_0]} \rho_\nu(x) \le \max\{\rho_\nu(L),\ \rho_\nu(L + H_0)\} + \frac{2H_0^2}{8}.$$

因此，第三个结论可由每个单元端点处 ρ_ν 的上界推出，其中该单元的乘数为 ν；这些上界由 e^{-a} 的泰勒上界（因为 $D \geq 0$）以及上述 Φ_ν 的下界得到。

对于第四个断言， L_0 是上文计算出的有理数，而$e^{-(a+b)}$ 和 e^{-b} 的泰勒夹逼给出界 $v_{\mathrm{lo}} + \Delta \leq v + \Delta \leq v_{\mathrm{hi}} + \Delta$ 和 $W_{\mathrm{lo}} \leq W \leq W_{\mathrm{hi}}$，其中上界使用相反的指数端点。将下分子除以 $1 + W_{\mathrm{hi}}$，将上分子除以 $1 + W_{\mathrm{lo}}$，即可得到 β的所述上界。结合第A.2–A.5节的解析化简，定理A.1的证明至此完成。 □