CANON：代理程序辅助构造费曼积分的规范微分方程

Dong-Shan Jian,[1], * *Yuanche Liu,*[2], † *Yan-Qing Ma,*[3,4], ‡ *Bo-Xuan Shi,*[4], § *Yu Wu,*[5], ¶ *Zihao Wu,*[6,7], ** 和 *Yang Zhang*[2,4,8], ††

[1] *School of Physics, Peking University, Beijing 100871, China*
[2] *Interdisciplinary Center for Theoretical Study, University of Science and Technology of China, Hefei, Anhui 230026, China*
[3] *School of Physics and State Key Laboratory of Nuclear Physics and Technology, Peking University, Beijing 100871, China*
[4] *Center for High Energy Physics, Peking University, Beijing 100871, China*
[5] *LAPTh, Université Savoie Mont Blanc, CNRS, B.P. 110, F-74941 Annecy-le-Vieux, France*
[6] *State Key Laboratory of Nuclear Physics and Technology, Institute of Quantum Matter,South China Normal University, Guangzhou 510006, China*
[7] *Guangdong Basic Research Center of Excellence for Structure and Fundamental Interactions of Matter, Guangdong Provincial Key Laboratory of Nuclear Science, Guangzhou 510006, China*
[8] *Peng Huanwu Center for Fundamental Theory, Hefei, Anhui 230026, China*

arXiv:2611.33100v1 [hep-ph] 24 Nov 2026

在通过规范微分方程方法计算多圈费曼积分时，构造规范基是一项重要步骤。目前，实现这一目标的方法多种多样，但其中没有任何一种方法具有普适性。因此，获得有效基底通常需要反复尝试和验证。本文提出 CANON，这是一个由代理程序辅助的框架，旨在使这一搜索与验证过程更加便捷、高效。在该工作流中，代理程序选择方法并调用相应工具，以修订基底方案或相关的微分方程组。随后，独立程序会验证代理程序的结果是否有效；如果验证失败，则要求代理程序重试。该框架包含一个专用的状态管理工具，用于支持需要多个子代理的长程基底搜索任务。其模块化架构也便于今后扩展框架本身。本文通过将该框架应用于若干两圈和三圈积分族，展示了其实际效果。

I. 引言

大型强子对撞机上的精密测量是检验标准模型和探索新物理的关键途径之一。实现这些目标还需要具有同样小的不确定度的理论预言 [1–3]。这些预言的高阶修正需要多圈费曼积分。近年来，多圈计算技术的发展推动了广泛的高阶计算。这些进展包括 NNLO 光子加双喷注预言、 [4], N^{3}LO W 分布，以及 e^+e^- 湮灭 [5, 6], 中的单包容强子系数函数、 [7],¯全色两圈五粒子振幅和 $tt+$ 喷注产生中的主色双虚贡献 [8]。涉及有质量粒子的例子包括胶子融合希格斯对产生的两圈电弱修正 [9] ，以及两圈重夸克介导的双光子振幅 [10]。

对于涉及高阶修正，或包含大量粒子和质量尺度的过程而言，这些过程

目前备受关注，而多圈积分的计算仍然是一个瓶颈。这是因为，随着圈数、粒子数量和尺度数量的增加，多圈计算的复杂性会迅速增长 [11, 12]。因此，多圈费曼积分的计算仍然是高能物理领域的主要课题之一。

为了计算费曼积分，通常需要对所需的积分（包括张量约化和分部积分（IBP）约化）进行约化，从而将其表示为一组有限的主积分（MIs） [13–18]。主积分可以使用多种方法进行计算，其中包括微分方程法 [19–21]。在这种方法中，通常需要寻找一个规范基，该基可以通过对原始主积分进行变换得到。这一变换使维数正则化参数 ε 从微分方程矩阵中提取出来，尽管基底变换本身可能依赖于该正则化参数。这些矩阵称为规范微分方程（CDE）矩阵，它们使得能够将该基底中积分的正则化参数展开组织为字母表 [22, 23], 上的迭代积分；这在多对数情形下尤其有用。

经过适当归一化的均匀超越权重（UT）积分，是规范基的自然候选项。构造这样的基底及其对应的正则微分方程，是.....的核心瓶颈之一
规范微分方程方法。实际中，这种构造往往需要结合多种不同的方法，从积分代表元的选择，到微分方程的变换，再到低阶

* dsjian@stu.pku.edu.cn
† liuyuanche@mail.ustc.edu.cn
‡ yqma@pku.edu.cn§
shibx@pku.edu.cn
¶wy626@mail.ustc.edu.cn **
wuzihao@mail.ustc.edu.cn
†† yzhphy@ustc.edu.cn

扇区耦合 [24, 25]。

存在多种基于积分的构造方法。其中包括利用对数奇点和常数领先奇点来选择分子与归一化 [26–29]。对数表示也可以直接生成微分方程 [30]。Baikov 表示和逐圈表示有助于在多尺度问题中进行此类搜索 [31–34], ，而维数领先奇点和 Gram 分子则能捕捉四维留数无法显现的贡献 [35, 36]。维数平移也可以得到收敛性更好的准有限表示 [37, 38]；准有限性本身并不意味着均匀超越权重，不过有限基与均匀超越基可以相互关联 [39]。交叉数可用于投影到积分基上 [40–42]。交叉理论和舒伯特几何也能提供有关字母表、联络和基变换的信息 [43–46]。

另一种研究方向包含许多直接处理微分方程的方法。这些方法转而对已有系统进行变换。Lee 算法利用福克斯化约和留数归一化，将正则化参数因子分离出来 [47, 48]；epsilon、Fuchsia 和 Libra 提供了相应的实现与变换工具 [49–51]。Meyer 算法和 CANONICA 通过求解有理函数试探形式来确定变换，其中也包括多个运动学变量的情形 [52, 53]。对于适当的、关于正则化参数呈线性的系统，Magnus 展开可以构造一种变换，以移除联络中与正则化参数无关的部分 [54]。在早期基于种子的构造方法 [55], 基础上，若导数秩足够且字母表试探形式恰当，可使用 INITIAL 程序从单个均匀超越积分的 Picard–Fuchs 方程重构规范基 [56]。几何分部积分排序可整理极大切割上的系统 [57, 58], ，而 Schwinger 参数超几何方法则提供了另一种构造规范基的途径 [59]。

上述方法主要适用于多对数问题。此外，对于非多对数问题，也有各种方法。正则构造采用周期归一化和算法基变换 [60–62]。扩展后的 INITIAL 程序可用于为椭圆费曼积分构造规范微分方程 [63]。其他方法则采用广义被积函数方法 [64–67]以及卡拉比–丘几何 [68–70]。它们的核可以超出代数 d对数形式，积分也可能具有非均匀权重 [71]。尽管已有上述非多对数方法，本文仍聚焦于对数正则形式。

在实践中，上述方法具有不同的输入、适用条件和计算工具。针对给定问题，必须选择合适的工具组合。应用这些工具后，需要通过代数诊断信息来判断这些工具是否成功生成了一个以 ε 因子化的有效正则微分方程。如果没有，例如微分方程中出现秩亏或调节子因子化失败，就必须修改基底中的候选积分或变换 Ansatz。这个工作流程以搜索为主，需要反复尝试多轮并具备专业知识，但验证工作较少，只需检查是否得到了良好的正则微分方程。因此，这个问题非常适合采用人工智能代理辅助自动化。

本文介绍 CANON，这是一种由 AI 智能体辅助、用于协调 UT 基底构造的框架。该框架采用逐扇区方法。它保留相对于有序源主积分的累积基底变换，从而能够结合积分候选式与直接微分方程方法。在方法卡片、扇区几何和代数诊断信息的指导下，代理程序会为特定扇区选择方法，并提出候选积分基底。随后，代理程序启动符号程序来执行计算。之后，它会使用独立的验证工具检查所得变换是否有效。

验证完成后，这些变换将与其对应的数据一同存储，从而支持后续扇区和后续会话中的计算。在完成所有扇区无关搜索后，代理程序会合并全部变换并验证最终结果，其中包括规范基底候选及其对应的正则微分方程。

本文的组织结构如下。第二节将简要介绍费曼积分、规范基和正则微分方程等概念。第三节将介绍 CANON 工作流及其一些重要的详细设计。第四节将通过若干示例展示 CANON 工作流如何寻找并验证规范基。第五节将给出一些讨论与展望。

II. 概念与方法回顾 ODS

A. 从积分族到微分方程

考虑一个具有圈动量k_ℓ、外部动量 p和独立运动学变量 $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_m)$的 L圈积分族。在维数正规化中，$d = d_0 - 2\varepsilon$，并取固定的参考维数 d_0。其成员的指标记号为

$$I_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}, \varepsilon) = \int \prod_{\ell=1}^{L} \frac{\mathrm{d}^d k_\ell}{i\pi^{d/2}} \prod_{j=1}^{N} D_j^{-a_j}. \tag{1}$$

D_j 是逆传播子或辅助标量积。整数指标 a_j 指定其幂次，非正幂次表示分子。传播子带有因果处方，整体归一化是积分族定义的一部分。运动学关系确定它们对 $\boldsymbol{x}$的依赖。具有相同一组正幂传播子的积分构成一个扇区。子扇区使用这些传播子的一个（真）子集。

分部积分恒等式将积分族 [17]中的各个成员联系起来。利用这些恒等式，我们可以通过约化过程，将所需积分表示为选定的有序主积分基底$\boldsymbol{I}$。对主积分求导并约化所得积分，即可得到源微分方程（微分方程） [21]

$$\partial_a \boldsymbol{I} = A_a \boldsymbol{I}, \qquad \partial_a = \frac{\partial}{\partial x_a}. \tag{2}$$

源系统由积分族定义、有序主积分、约化数据以及所有所需运动学方向上的导数指定。

B. 规范形式与基底约定

规范微分方程方法的一项关键任务是找到一个基底 $\boldsymbol{J}$ ，使其微分方程具有正则形式。这等价于寻找一个基底变换，将某个最初并非规范基的基底 $\boldsymbol{I}$ 变换为规范基。该变换可由一个一般情况下可逆的矩阵 $T(\boldsymbol{x},\ \varepsilon)$ 描述，其行列式 $\det T \neq 0$ 满足

$$\boldsymbol{I} = T\boldsymbol{J}, \qquad B_a = T^{-1}(A_a T - \partial_a T). \tag{3}$$

变换后的系统即为 $\partial_a \boldsymbol{J} = B_a \boldsymbol{J}$。请注意，基底变换所允许使用的函数由系数域指定，例如 $(\boldsymbol{x},\ \varepsilon)$ 的有理函数，并在需要时包含代数扩张。此外，该变换在 $\varepsilon = 0$ 处可能存在极点或行列式为零，但在一般情况下仍可逆。

调节参数因子化意味着 B_a/ε 与 ε 无关。此处考虑的规范目标还要求具有共同对数形式 [22]

$$B_a = \varepsilon \sum_k R_k \, \partial_a \log W_k(\boldsymbol{x}), \tag{4}$$

其中正则化参数无关的字母为 W_k ，矩阵 R_k 不依赖于运动学和正则化参数。这些字母构成对数字母表。

式（4）逐阶确定了关于 ε 的运动学依赖。具有统一超越权重（UT）的积分基底 [22],

$$J_i = \varepsilon^k \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n J_i^{(n)}, \tag{5}$$

其中 $J_i^{(n)}$ 且是纯的，具有超越权重 n [22]，满足规范微分方程。

C. 扇区层级与构造策略

分析或变换微分方程时，常采用逐扇区的方法。若按扇区排列主积分，并将子扇区排在前面，则源联络矩阵具有块下三角形式 [52]。本文将 $\boldsymbol{I}_c$ 称为扇区切割当前扇区的主积分，并将子扇区积分视为零。切割后的主积分所对应的对角扇区系统，在本文中称为该扇区的核心 ，即

$$\partial_a \overline{\boldsymbol{I}}_c = A_{c,a} \overline{\boldsymbol{I}}_c, \tag{6}$$

扇区的核心变换 T_c 定义为 $\boldsymbol{I}_c = T_c \boldsymbol{K}_c$。核心变换的目标是使 $\partial_a \boldsymbol{K}_c = \varepsilon F_{c,\ a} \boldsymbol{K}_c$，其中 $F_{c,\ a}$ 不依赖于 ε。

III. CANON 代理程序工作流

默认情况下，CANON 工作流会从底部到顶部遍历所有积分扇区。在处理某个扇区时，它首先会提出一项方案，其中包含当前扇区的候选积分及相应的微分方程。然后，它会对其进行验证。验证包括两个方面。首先，它会检查与扇区切割积分对应的核心系统，要求该系统为 ε 因子化且完全排序。其次，它会检查候选积分与子扇区积分之间的耦合，要求非对角块也为 ε因子化。如果通过验证步骤，则当前扇区被视为已完成。否则，代理程序会修订方案，并再次修订修订后的方案。如果某个扇区已完成，则会存储其处理过程中所需的信息，以支持后续超扇区的处理。当所有请求的扇区都完成后，CANON 会运行最终检查，以测试正则微分方程的变换有效性和 d-log 性质，并确定项目是否完成。图 1 总结了这一工作流。

A. 主智能体与工作智能体的协调 ts

CANON 提供一个与用户交互的主智能体，由其协调计算并根据当前结果选择下一步，同时由状态安排程序提供支持。主智能体为每个工作智能体分配一个具体问题、输入文件和约定，并设定资源预算。工作智能体应用选定的方法，并提交其关于候选基底的方案。随后，主智能体会测试这些候选项，并决定结果是否已可用于后续计算。

B. 代理程序工作流中的方法卡片 ow

方法卡是一种科学参考资料，用于描述某种基构造方法（通常包括一项技能及代理程序所需的一些相关脚本）、其输入约定、适用条件和已实现脚本。在一项任务中，工作智能体会结合这些信息与当前诊断，选择或调整基构造尝试。多张方法卡可以针对同一个

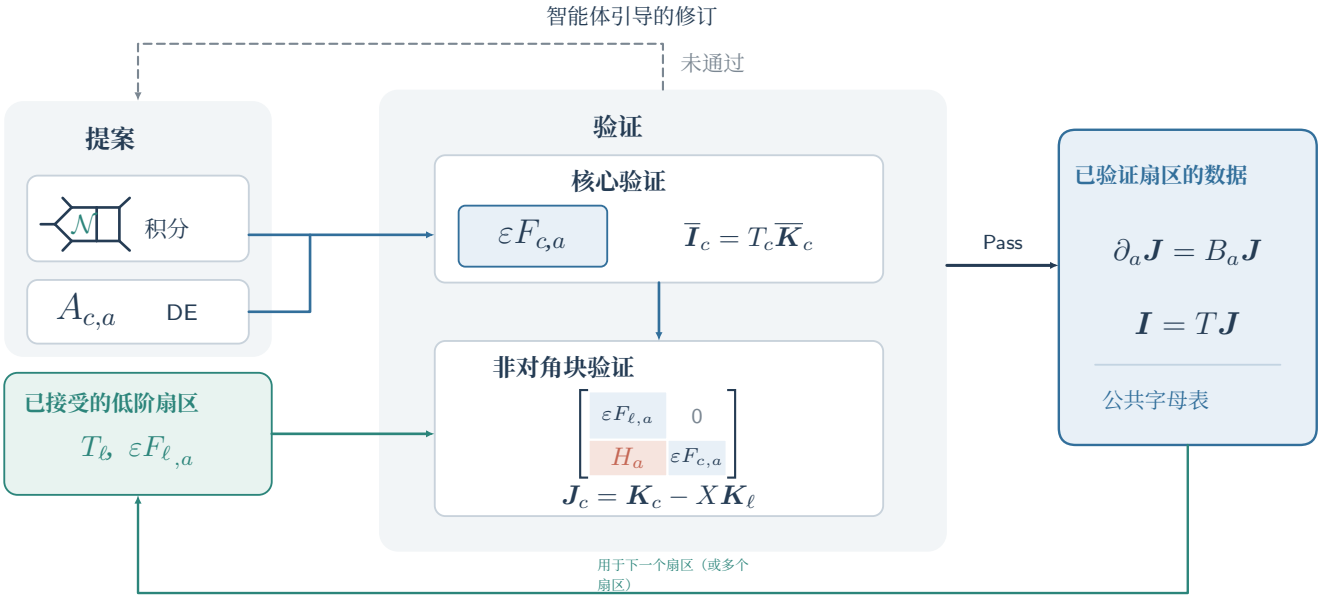

图 1. 某个扇区中的工作流程。积分代表元和直接微分方程变换为核心检查提供输入。通过检查的核心与已接受的低扇区变换相结合，从而完成耦合系统。蓝色方框表示 ε 形式；红色耦合项需要低扇区修正。验证会检查累积变换和公共对数字母表。虚线反馈用于指导修订，而已接受的结果则为后续扇区提供低扇区输入。积分和矩阵方框均为示意图。

未解决的问题，工作智能体会在一些人工指导的指令下，自行决定使用哪一张。不同方法提出的方案可以组合起来，并针对同一个源系统进行检查。这些方法提示与代理程序模型及宿主环境相互独立。不过，更换底层语言模型会影响我们的工作流在提出积分候选项时的表现，因为不同模型在选择方法卡时各有倾向，从而影响最终结果。一般而言，我们建议用户在 CANON 工作流中使用更强大的语言模型，以确保能够高效地找到基底。

C. 持久化研究状态与制品 r euse

规范基构造等长期研究很容易耗尽 AI 智能体的上下文，导致工作流性能下降。因此，这类任务需要子代理和持久化状态管理。我们的持久化记录由一个有向无环任务图、执行尝试和已登记制品组成，从而为 CANON 工作流提供外部的长期安排。在任务图中，每个节点都指定一个计算任务以及接受结果的标准。当所有直接前置任务都已被接受时，任务即准备就绪，表示为 $\mathcal{D}_i \subseteq \mathcal{C}$，其中 $\mathcal{D}_i$ 是其前置任务集合，$\mathcal{C}$ 是已完成任务的集合。随着计算的推进，协调器会扩展该图。

图 2 展示了从准备就绪到完成的过程。每次工作者认领都会创建一条独立的执行记录和一个工作目录。主智能体会审查提交的计算及其验证结果，如果它们符合任务标准，就接受该结果。接受操作会使该结果对依赖任务可用。状态管理器会记录这一决定并更新相关任务的就绪状态。

主智能体会拒绝失败的尝试，并保留其诊断信息和制品。重试会将任务状态恢复为就绪；否则任务仍处于失败状态。外部条件（即计算资源耗尽或人工指令）可能会阻止任务继续，直到主智能体确认可以恢复工作。重试和中断期间，先前已验证的低扇区基仍可使用。

制品以引用形式存储，并附带内容哈希，包括有序主积分、微分方程、约化规则和累积变换。如果 $\mathcal{A}_j^\star$ 表示任务 j的已接受执行所产生的制品，则任务 i会复用 $\mathcal{I}_i = \bigcup_{j \in \mathcal{D}_i} \mathcal{A}_j^\star$。新增或修改的结果会单独登记。

D. 模块化设计与扩展

为提升解决最前沿问题的灵活性和效率，CANON 将大部分工作流程拆分为可插拔组件，包括运动学参数化、主积分发现、IBP约化、基底构造

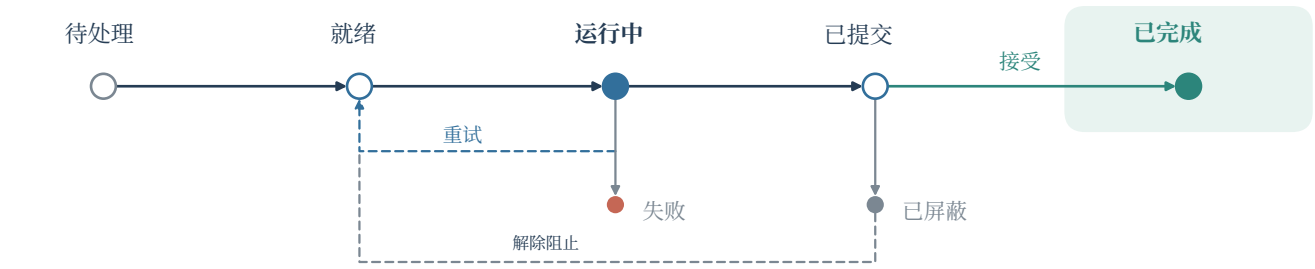

图 2。CANON 中的持久化研究状态与制品复用。该图展示了 CANON 工作流的任务进度。

和验证。每个组件都提供科学指令，并通过共享设置进行通信，以保持基底顺序、归一化和累积变换。组件可以在同一智能体工作流中替换或组合，且其输出由独立例程检查。

对于某些复杂问题，额外的强大插件可能发挥重要作用。第四节 D 中给出了一个相关示例。

E. CANON 工作流的输出

CANON 工作流可以按照用户定义的格式提供结果。默认情况下，CANON 会提供一组规范基（Mathematica 表达式格式）以及一份 PDF 报告，其中包含工作流摘要和详细清单，展示 CANON 如何逐扇区寻找每个规范基候选项。PDF 报告中还包含 CANON 所用方法的引文及相应链接，方便用户在研究工作中引用这些方法。除默认输出外，用户还可以让 CANON 执行解析重构，或使用其他用户自定义程序包，以获得完整的解析正则微分方程矩阵及相应的字母表。

IV. 示例

本节展示一些示例。对于 IV A、IV B 和 IVC 节中的示例，所有规范基及其对应的规范微分方程均由公开的 CANON 工作流独立构造。表I总结了这些示例及其验证。对于 IV D 节中的示例，我们在工作流中引入了额外的私有模块，以获得完整的积分族结果。

A. 含一个内部质量的非壳上双盒图

第一个示例是图 3(a) 中的平面双盒图族。外部动量和圈动量的维数为 $d = 4 - 2\varepsilon$。我们采用全入射动量约定，$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0$，其中 $p_1^2 = p_2^2 = 0$、$p_3^2 = Q_3^2$ 和 $p_4^2 = Q_4^2$。独立变量为

$$\boldsymbol{x} = (s, t, Q_3^2, Q_4^2, m^2),$$
$$s = (p_1 + p_2)^2, \qquad t = (p_2 + p_3)^2.$$

这五个变量仍保持一般性。该积分族包含分布在 24 个非零扇区中的 37 个主积分，其中七传播子顶层扇区包含三个主积分。取圈动量 k_1、k_2，物理逆传播子为

$$\begin{aligned} D_1 &= k_1^2, & D_2 &= (k_1 + p_1)^2, \\ D_3 &= (k_1 - p_2)^2, & D_4 &= (k_2 + p_1)^2, \\ D_5 &= (k_2 - p_2)^2, & D_6 &= (k_1 - k_2)^2, \\ D_7 &= (k_2 - p_2 - p_3)^2 - m^2. \end{aligned} \tag{7}$$

不可约标量积（ISP）坐标为

$$D_8 = k_2^2, \qquad D_9 = (k_1 - p_2 - p_3)^2. \tag{8}$$

它们的指标满足 a_8、$a_9 \le 0$，因此提供了分子插入。

完备联络使用 21 个活跃的对数字母。其代数部分包含唯一的平方根

$$r = \sqrt{(s - Q_3^2 - Q_4^2)^2 - 4Q_3^2 Q_4^2}.$$

其中十七个字母是关于这五个变量的有理函数，另外四个具有 $(a + r)/(a - r)$ 的形式，其中 a 表示某个由运动学变量构成的多项式，列如下：

$$a \in \{s + Q_3^2 - Q_4^2,\ s - Q_3^2 + Q_4^2,$$
$$s - Q_3^2 - Q_4^2 + 2m^2,\ s - Q_3^2 - Q_4^2 + 2t\}.$$

累积变换在全部五个方向上都满足精确的规范恒等式。最终验证还会检查可积条件，并重建每个微分矩阵。

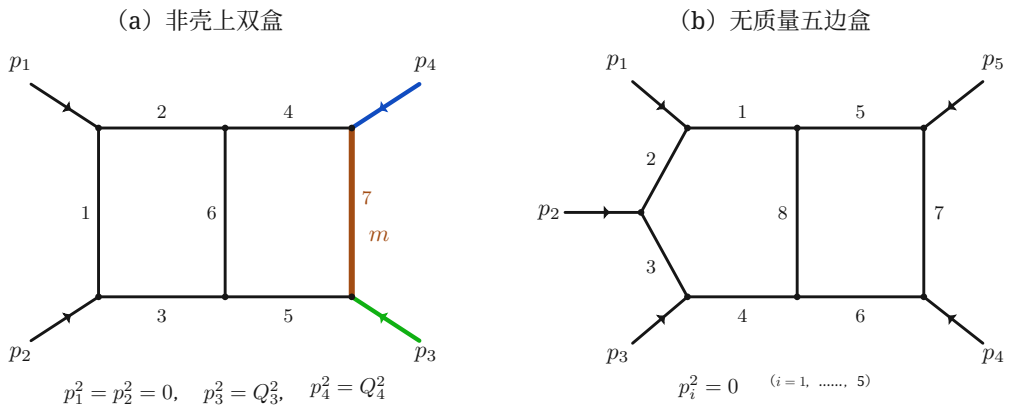

图 3. 双圈示例的顶层扇区。所有外部动量均流入。内部标号给出了积分族定义中的传播子位置；辅助分子分母未列出。在（a）中，第 7 条线的质量为 m，其余所有内部线均为无质量。外部虚度 Q_3^2 和 Q_4^2 相互独立。在（b）中，所有内部线和外部线均为无质量。

应用 CANON 工作流前后的这个示例的微分方程系统显示在图 4 的左栏中。

B. 无质量双圈五点五边形盒

第二个例子是图 3(b) 中的五边形盒（外部动量和圈动量的维数为$d = 4 - 2\varepsilon$）。这是一个标准的多尺度测试，包含 46 个扇区中的 61 个主积分。其规范系统和五边形函数已知 [72]。我们保留五个相邻不变量 $\boldsymbol{x} = (s_{12}, s_{23}, s_{34}, s_{45}, s_{51})$，其中$s_{ij} = (p_i + p_j)^2$、$p_i^2 = 0$和$\sum_i p_i = 0$。源系统包含对全部五个不变量（包括整体尺度方向）的导数。取圈动量为 k_1，k_2，八个物理逆传播子为

$$\begin{aligned} D_1 &= k_1^2, & D_2 &= (k_1 + p_1)^2, \\ D_3 &= (k_1 + p_1 + p_2)^2, & & \\ D_4 &= (k_1 + p_1 + p_2 + p_3)^2, & & \\ D_5 &= k_2^2, & D_6 &= (k_2 + p_1 + p_2 + p_3)^2, \\ D_7 &= (k_2 - p_5)^2, & D_8 &= (k_1 - k_2)^2. \end{aligned} \tag{9}$$

三个不可约标量积坐标为

$$\begin{aligned} D_9 &= (k_1 - p_5)^2, & D_{10} &= (k_2 + p_1)^2, \\ D_{11} &= (k_2 + p_1 + p_2)^2, & & \end{aligned} \tag{10}$$

其中 a_9，a_{10}，$a_{11} \le 0$。即使在 $s_{51} = 1$ 处进行约化，源方程中仍会恢复整体尺度。

对于这个积分族，最终的规范微分方程包含 24 个有效字母。对全部 46 个扇区进行重构，得到一个含 61 个主积分的基底。最终验证确认了精确的规范恒等式、ε 因子化和可积性，并重构了全部五个方向矩阵。

此示例在应用 CANON 工作流之前和之后的微分方程系统，显示在图 4 中间一栏。

C. 一个包含 40 个主积分的三圈积分族

第三个例子是一个包含 40 个主积分、分布于 28 个扇区中的三圈例子。外部动量和圈动量满足 $d = 4 - 2\varepsilon$ 令 $p^2 = \ell^2 = 0$，$(p + \ell)^2 = s$，并令 u 为无量纲变量。对于圈动量 k_1，k_2，k_3，物理逆传播子为

$$\begin{aligned} D_1 &= k_1^2, & D_4 &= \big(k_2 + (1-u)p\big)^2, \\ D_5 &= (k_1 + k_2)^2, & D_6 &= (\ell + k_1 + k_2)^2, \\ D_8 &= k_3^2, & D_9 &= (\ell + k_2 + k_3 - up)^2, \\ D_{11} &= (\ell - p + k_3)^2, & & \\ D_{12} &= (k_1 - k_3 + up)^2. & & \end{aligned} \tag{11}$$

我们保留这十二个量的原始指标编号。剩余四个量是不可约标量积坐标，

$$\begin{aligned} D_2 &= (p + k_3)^2, & D_3 &= (k_1 + up)^2, \\ D_7 &= (k_2 + k_3)^2, & D_{10} &= k_2^2, \end{aligned} \tag{12}$$

其中 a_2，a_3，a_7，$a_{10} \le 0$。因此，该微分系统具有一个运动学尺度 s和一个无量纲变量 u。规范微分方程为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{J} = \varepsilon\big[-3\,\mathbf{1}_{40}\,\mathrm{d}\log s + R_u\,\mathrm{d}\log u + R_{1-u}\,\mathrm{d}\log(1-u)\big]\boldsymbol{J}, \tag{13}$$

其中 R_u 和 R_{1-u} 是常数有理矩阵。活跃字母表仅为 $\{s, u, 1-u\}$，尺度项与比值依赖相分离。

计算使用我们的 DlogBasis-refine 接口（见附录 A）构建候选项，以验证核心系统；构建过程中对圈数（在 LBL Baikov 表示中）、点标记和不可约分子进行了变化。我们使用 CANON

工作流，通过全部 28 个扇区重构基底。最终得到的完整 40 个主积分系统通过了验证检查。

图 4 右侧一栏展示了本例在应用 CANON 工作流前后的微分方程系统。

D. 一个更复杂的基准测试

本小节将展示一个基准测试示例。该积分族包含 426 个主积分，远多于前面三个示例。借助一些额外的私有模块，CANON 工作流在 48 小时内得到了所有规范基，并完成了验证。图 5 展示了应用 CANON 工作流前后的微分方程系统。

本例选自一个尚未发表的项目。相关研究人员已同意发表此处呈现的材料。

V. 总结

本文介绍了 CANON，这是一种 AI 智能体工作流，可自动提出并验证规范基及相应的正则微分方程。它结合专业经验中的多种方法与成熟的软件包，以提出基底方案，并使用 CANON 内置的验证模块检查其有效性。已完成的变换及其输入会被保存，以支持在 CANON 工作流中构建后续的超扇区。CANON 工作流的模块化架构还允许用户插入自行开发的方法或模块，以应对更复杂的规范基问题。

CANON 的结果默认包含规范基，以及一份（PDF 格式的）报告，总结代理程序使用的方法，并附有相关方法的引用文献。如果用户提出要求，结果还可以包含正则微分方程和符号字母表。

这种模块化方法的一种应用，是将 CANON 扩展到包含椭圆扇区的积分族。两圈风筝积分族提供了一个具体的测试案例，因为它包含一个椭圆日出子扇区，且其完整的 ε-形式已知 [60]。从日出积分的周期归一化基出发，代理程序可以为其余积分寻找一个兼容的基。我们期待在未来的唯象学研究中应用 CANON 工作流，并主动加以改进，以深化我们对微扰费曼积分计算的理解并提升其性能。

AI 使用声明：

本文的起草得到了生成式人工智能的辅助。本文的全部内容均经过了全面的人工审阅和修订，作者可以对此负责。

CANON 工作流的开发在人工监督下得到了人工智能智能体的辅助。我们谨此提醒，由于其性能取决于 CANON 中所使用的底层模型，用户应注意性能可能发生变化，以及大语言模型输出的不确定性所带来的潜在风险。

VI. 致谢

我们感谢 Rourou Ma 和 Yongqun Xu 提供的宝贵讨论。Yuanche Liu 获得国家自然科学基金委员会资助，资助编号 124B1014。Yu Wu 获得 ANR-24-CE31-799 资助。Zihao Wu 获得华南师范大学资助，资助编号 43102673。Dong-Shan Jian、Yan-Qing Ma 和 Bo-Xuan Shi 部分获得国家自然科学基金委员会资助（编号 12325503）。Yang Zhang 获得国家自然科学基金委员会资助（编号 12575078 和 12247103）。

数据可用性

CANON 源代码及其文档化接口维护于 https://github.com/Alice-Shimada/CANON-release。随附的档案包含第四节 IVA、IVB 和 IV C 中三个示例的规范基、对数连接以及最终验证记录。

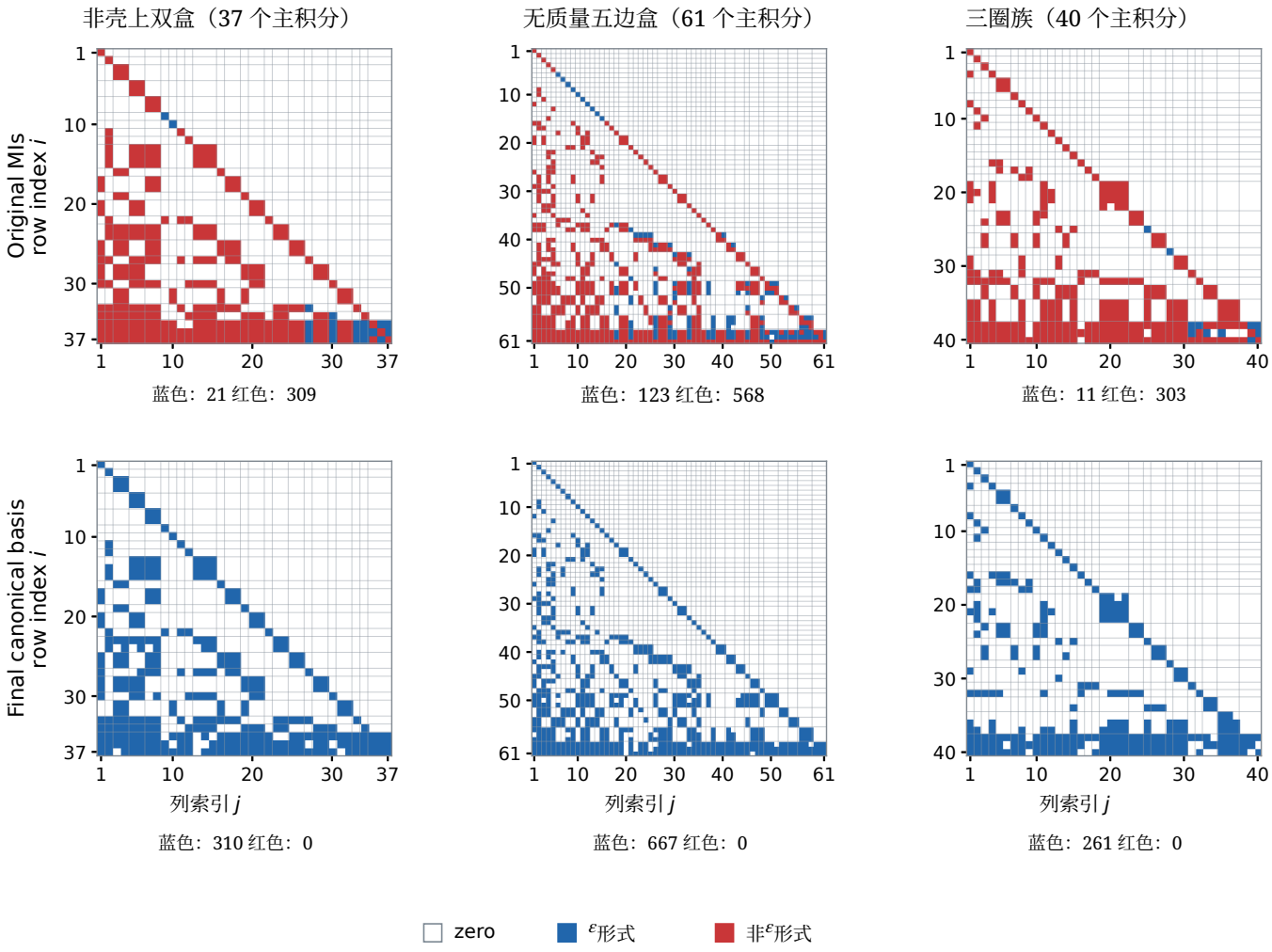

图4. 此图分别比较了 IV A、IV B 和 IV C 节中示例的原始主积分系统与最终正则形式。每个方格汇总了所有微分方向上相同的矩阵位置。白色表示该位置在所有方向上均为零。若某个非零位置的每个方向分量除以 ε 后均与 ε无关，则标为蓝色；否则标为红色。最终面板中没有红色条目，体现了 ε 因子化。上述符号检验在一般运动学条件下验证了这些恒等式。

表I. 三个主要示例的规范系统。最终检验中，所有运动学变量和正则化参数均保持为符号形式。正则联络在每个微分方向上均使用一组共享的常数留数矩阵。

	非壳上双盒图	无质量五边盒	三圈族
扇区	24	46	28
主积分	37	61	40
变量	5	5	2
字母表中的字母	21	24	3
验证	PASS	PASS	PASS

附录 A：科学接口与执行细节

CANON 工作流中的默认约化接口为 Kira3 [73–75]。FIRE 7 [76], NeatIBP [77, 78], 和 Blade [79] 也经过测试，可作为可选的 IBP 约化器。

适用的计算机代数系统包括 Fire- Fly [80, 81] 和Fermat [82], , Fermatica 也可作为可选的 Wolfram 接口 [83]。

对于给定的扇区，代理程序可以使用 DlogBasis-refine 搜索候选积分。这是我们对 DlogBasis 的改编版本 [29]，专为 CANON 工作流设计，

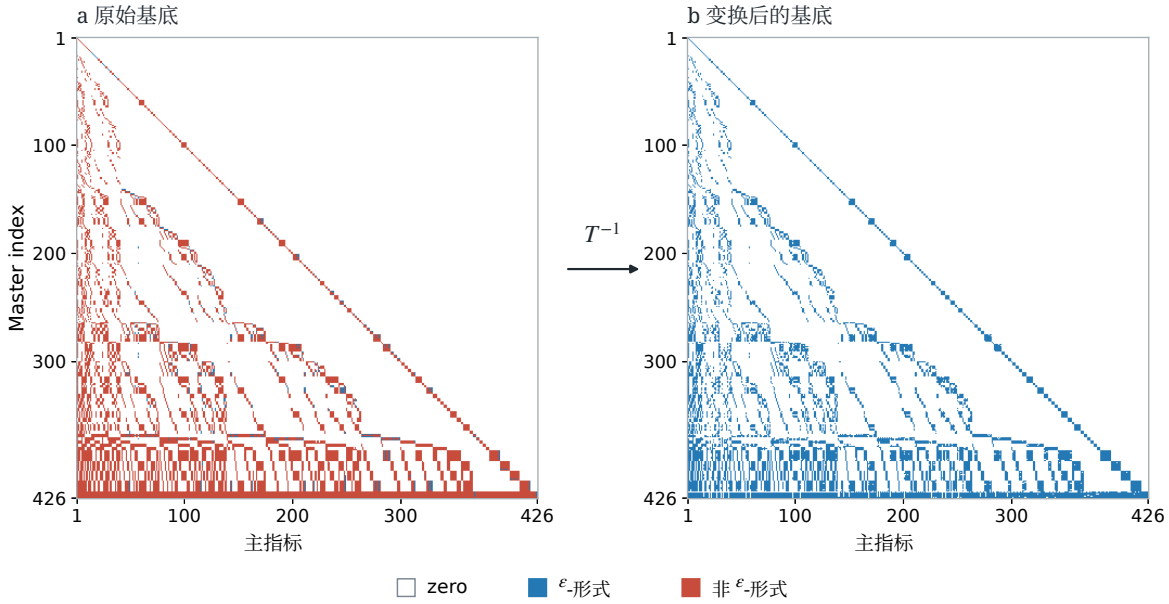

图 5. 对于一个 426 个主积分系统，基底变换 $\boldsymbol{J} = T^{-1}\boldsymbol{I}$ 前后的矩阵结构。两个面板在同一个固定运动学点上合并了相同的导数方向，并将正则化参数保持为符号形式。白色表示在所有方向上均为零的元素；蓝色表示与 ε 成正比且系数与 ε无关的非零元素；红色表示至少在一个方向上不满足这一条件的元素。两个面板使用相同的扇区排序。

表 II. CANON 工作流中采用的不同方法卡片的若干细节

构造	构造原理	CANON 中的输入与范围
基于积分构造	几何与奇点指南 积分候选式和归一化。 IBP约化将这些候选式表示为 源主积分基中的形式，并保留 用于……的低扇区系数 完成 [17, 29, 33, 34]	定义积分族和运动学、有限 分子及传播子幂次界， 归一化假设，以及以下积分的约化数据 所提出的积分
CANONICA	有理规范构造通过 正则化参数展开和递归 扇区变换构造有理规范 [52, 53]	一个或多个运动学变量中的有理源微分方程 更多运动学变量
$\varepsilon = 0$ 多项式构造	有限齐次多项式搜索 针对 $\varepsilon = 0$ 的常数组合 系统，采用有理或代数 归一化前因子	在 $\varepsilon = 0$ 处正则的有理源系统，带有任意 已提供所需的代数生成元
Libra	Fuchs 化（约化为简单 极点）、留数归一化和 调节参数因子化 [47, 51]	单变量中的小型有理系统。 多变量输入需要一个明确的有限 方向性方案，以联合 Fuchsian 形式结束
留数平衡构造	有界有理剪切、整数平移 留数特征值和正则化参数的 因式分解 [47]	一个非平凡变量，可能需要经过精确尺度 分离，且有理极点位置彼此独立 相对于 ε，留数特征值为 $n + c\varepsilon$、 $n \in \mathbb{Z}$

并已被纳入其中。代理程序也可以使用 CANONICA [52, 53]或 Libra [47, 51]，直接从微分方程中寻找基变换。表 II 总结了这些方法在 CANON 中的用法。一旦在合并各扇区后，独立例程会检查完整的基变换是否能使原方程在每个运动学变量下都化为式（4）的规范形式。

[1] P. Azzi *et al.*，《工作组 1 报告：HL-LHC 和 HE-LHC 的标准模型物理》，欧洲核子研究中心黄低专著系列**7**，1（2019），arXiv:1902.04070 [hep-ph]。

[2] G. Heinrich, 《精度前沿的对撞机物理》, 物理学报告 922, 1 (2021), arXiv:2009.00516 [hep-ph]. [3] A. Huss, J. Huston, S. Jones, M. Pellen 和 R. R¨ontsch, 《Les Houches 2023——TeV 对撞机物理：标准模型精度愿景清单报告》, SciPost 物理通讯报告 , 21 (2026), arXiv:2504.06689 [hep-ph]. [4] S. Badger, M. Czakon, H. B. Hartanto, R. Moodie, T. Peraro, R. Poncelet 和 S. Zoia, 《量子色动力学中孤立光子与双喷注伴随产生的次次领先阶计算》, 高能物理学杂志 2023 (10), 071, arXiv:2304.06682 [hep-ph]. [5] X. Chen, T. Gehrmann, N. Glover, A. Huss, T.-Z. Yang 和 H. X. Zhu, 《W玻色子产生中横向质量分布和电荷不对称性的量子色动力学三阶计算》, Phys. Lett. B 840, 137876 (2023), arXiv:2205.11426 [hep-ph]. [6] C.-Q. He, H. Xing, T.-Z. Yang 和 H. X. Zhu, 《正负电子湮灭中单粒子包容强子产生的次次次领先阶量子色动力学计算》, 《物理评论快报》135, 101901 (2025), arXiv:2503.20441 [hep-ph]. [7] B. Agarwal, F. Buccioni, F. Devoto, G. Gambuti, A. von Manteuffel 和 L. Tancredi, 《量子色动力学中的五部分子双圈散射》, 《物理评论 D》109, 094025 (2024), arXiv:2311.09870 [hep-ph]. [8] S. Badger, M. Becchetti, C. Brancaccio, M. Czakon, H. B. Hartanto, R. Poncelet 和 S. Zoia, 《大型强子对撞机上 tt+喷注产生的双虚量子色动力学修正》, 高能物理学杂志 2026 (05), 044, arXiv:2511.11424 [hep-ph]. [9] H.-Y. Bi, L.-H. Huang, R.-J. Huang, Y.-Q. Ma 和 H.- M. Yu, 《大型强子对撞机上双希格斯产生的电弱修正》, 《物理评论快报》132, 231802 (2024), arXiv:2311.16963 [hep-ph]. [10] M. Becchetti, F. Coro, C. Nega, L. Tancredi 和 F. J. Wagner, 《由重夸克圈介导的 $qq \to \gamma\gamma$ 和 gg $\to \gamma\gamma$ 解析双圈振幅》, 高能物理学杂志 2025 (06), 033, arXiv:2502.00118 [hep-ph]. [11] S. Weinzierl, *Feynman Integrals. A Comprehensive Treatment for Students and Researchers*, 《物理学UNITEXT丛书》（施普林格，2022）arXiv:2201.03593 [hep-th]. [12] S. Abreu, R. Britto 和 C. Duhr, 《SAGEX散射振幅综述》第3章: 费曼积分中的数学结构, 《物理学杂志A辑》55, 443004 (2022), arXiv:2203.13014 [hep-th]. [13] G. Ossola, C. G. Papadopoulos 和 R. Pittau, 《在被积函数层次将完整单圈振幅约化为标量积分》, 《核物理B辑》763, 147 (2007), arXiv:hep- ph/0609007. [14] G. Ossola, C. G. Papadopoulos 和 R. Pittau, 《Cut-Tools：一种实现OPP约化方法以计算单圈振幅的程序》, 高能物理学杂志 03, 042, arXiv:0711.3596 [hep-ph]. [15] G. Passarino 和 M. J. G. Veltman, 《魏因伯格模型中 e+ e- 湮灭为 mu+ mu- 的单圈修正》, 《核物理B辑》160, 151 (1979). [16] F. V. Tkachov, 《关于四圈重整化群函数解析可计算性的一条定理》, Phys. Lett. B 100, 65 1981( ). [17] K. G. Chetyrkin 和 F. V. Tkachov, 《分部积分：计算四圈 β-函数的算法》, 《核物理B辑》192, 159 (1981). [18] S. Laporta, 《利用差分方程高精度计算多圈费曼积分》, 现代物理国际杂志A 15

，5087（2000），arXiv:hep-ph/0102033。

[19] A. V. Kotikov, 《微分方程方法：计算有质量费曼图的新技术》, Phys. Lett. B 254，158（1991）。[20] E. Remiddi, 《费曼图振幅的微分方程》, Nuovo Cim. A 110，1435（1997）, arXiv:hep-th/9711188。[21] T. Gehrmann 和 E. Remiddi, 《二圈四点函数的微分方程》, Nucl. Phys. B 580，485（2000）, arXiv:hep-ph/9912329。[22] J. M. Henn, 《用维数正规化简化多圈积分》, Phys. Rev. Lett. 110，251601（2013）, arXiv:1304.1806 [hep-th]。[23] J. M. Henn, 《费曼积分微分方程讲义》, J. Phys. A 48, 153001（2015）, arXiv:1412.2296 [hep-ph]。[24] T. Gehrmann、A. von Manteuffel、L. Tancredi 和 E. Weihs, 《 $qq \to VV$的二圈主积分》, JHEP 2014（06）, 032，arXiv:1404.4853 [hep-ph]。[25] Y. Liu、A. Matija˘si´c、J. Miczajka、Y. Xu、Y. Xu 和 Y. Zhang, 《三圈五点费曼积分的解析计算》, Phys. Rev. D 112，016021（2025）, arXiv:2411.18697 [hep-ph]。[26] N. Arkani-Hamed、J. L. Bourjaily、F. Cachazo 和 J. Trnka, 《平面散射振幅的局部积分》, JHEP 2012（06）, 125，arXiv:1012.6032 [hep-th]。[27] N. Arkani-Hamed、J. L. Bourjaily、F. Cachazo 和 J. Trnka, 《最大超对称散射振幅的奇点结构》, Phys. Rev. Lett. 113，261603（2014）, arXiv: .0354 [hep-th]。[28] Z. Bern、E. Herrmann、S. Litsey、J. Stankowicz 和 J. Trnka, 《对数奇点与最大超对称振幅》, JHEP 2015（06）, 202，arXiv:1412.8584 [hep-th]。[29] J. Henn、B. Mistlberger、V. A. Smirnov 和 P. Wasser, 《构造 d-log 被积函数并计算三圈四粒子散射的主积分》, JHEP 2020（04）, 167，arXiv:2002.09492 [hep-ph]。[30] E. Herrmann 和 J. Parra-Martinez, 《费曼积分的对数形式与微分方程》, JHEP 2020（02）, 099，arXiv:1909.04777 [hep-th]。[31] P. A. Baikov, 《n圈真空积分递推关系的显式解》（1996）, arXiv:hep-ph/9604254。[32] H. Frellesvig 和 C. G. Papadopoulos, 《Baikov表示中的费曼积分切割》, JHEP 2017（04）, 083，arXiv:1701.07356 [hep-ph]。[33] C. Dlapa、X. Li 和 Y. Zhang, 《Baikov表示中的领先奇点与具有均匀超越权重的费曼积分》, JHEP 2021（07）, 227, arXiv:2103.04638 [hep-th]。[34] S. He、Z. Li、R. Ma、Z. Wu、Q. Yang 和 Y. Zhang, 《具有均匀超越权重的费曼积分及其符号学研究》, JHEP 2022（10）, 165，arXiv:2206.04609 [hep-th]。[35] D. Chicherin、T. Gehrmann、J. M. Henn、P. Wasser、Y. Zhang 和 S. Zoia, 《次次领头阶三喷注产生的全部主积分》, Phys. Rev. Lett. 123，041603（2019）, arXiv:1812.11160 [hep-ph]。[36] J. M. Henn、A. Matija˘si´c、J. Miczajka、T. Peraro、Y. Xu 和 Y. Zhang, 《维数正规化下二圈六点费曼积分的计算》, JHEP 2024（08）, 027，arXiv:2403.19742 [hep-ph]。[37] O. V. Tarasov, 《具有不同时空维数的费曼积分之间的联络》

, 物理学

评论 D 54, 6479 (1996), arXiv:hep-th/9606018. [38] A. von Manteuffel、E. Panzer 和 R. M. Schabinger, 《多圈费曼积分的准有限基底》, 高能物理学杂志 2015 (02), 120, arXiv:1411.7392 [hep-ph]. [39] R. M. Schabinger, 《构造具有显式奇点结构的多圈散射振幅》, 《物理评论 D》99, 105010 (2019), arXiv:1806.05682 [hep-th]. [40] P. Mastrolia 和 S. Mizera, 《费曼积分与交叉理论》, 高能物理学杂志 **2019** 02 139, 1810 03818 ( ), [ ] arXiv: . hep-th . [41] J. Chen、X. Jiang、X. Xu 和 L. L. Yang, 《利用交叉理论构造规范费曼积分》, Phys. Lett. B **814**, 136085 2021 2008 03045 ( ), [ ] arXiv: . hep-th . [42] J. Chen、X. Jiang、C. Ma、X. Xu 和 L. L. Yang, 《Baikov 表示、交叉理论与规范费曼积分》, 高能物理学杂志 **2022** 07 066, 2202 08127 ( ), [ ] arXiv: . hep-th . [43] J. Chen 、 B. Feng 和 L. L. Yang, 《交叉理论规则的符号学》, 中国科学: 物理学、力学、天文学 67, 221011 2024 2305 ( ), arXiv: .01283 [hep-th]. [44] S. He、X. Jiang、J. Liu 和 Q. Yang, 《基于舒伯特分析的费曼积分符号学与微分方程》, 高能物理学杂志 2023 (12), 140, [勘误: 高能物理学杂志 04, 063 (2024)], arXiv:2309.16441 [hep-th]. [45] C. Duhr、F. Porkert、C. Semper 和 S. F. Stawinski, 《扭曲上同调中的自对偶性》, 高能物理学杂志 2025 (03), 053, arXiv:2408.04904 [hep-th]. [46] C. Duhr、S. Maggio、F. Porkert、C. Semper、Y. Sohnle 和 S. F. Stawinski, 《规范微分方程与交叉矩阵》, 高能物理学杂志 2026 (02), 211, arXiv:2509.17787 [hep-th]. [47] R. N. Lee, 《化简多圈主积分的微分方程》, 高能物理学杂志 **2015** 04 108, 1411 0911 ( ), [ ] arXiv: . hep-ph . [48] R. N. Lee 和 A. A. Pomeransky, 《黎曼球面上的归一化福克斯形式及多圈积分的微分方程》(2017), arXiv:1707.07856 [hep-th]. [49] M. Prausa, 《epsilon: 用于寻找主积分规范基底的工具》, Comput. Phys. Commun. 219, 361 (2017), arXiv:1701.00725 [hep-ph]. [50] O. Gituliar 和 V. Magerya, 《Fuchsia: 将费曼主积分的微分方程化为 ε 形式的工具》, Comput. Phys. Commun. 219, 329 (2017), arXiv:1701.04269 [hep-ph]. [51] R. N. Lee, 《Libra: 用于变换多圈积分微分系统的软件包》, Comput. Phys. Commun. 267, 108058 (2021), arXiv:2012.00279 [hep-ph]. [52] C. Meyer, 《将多圈费曼积分的微分方程变换为规范形式》, 高能物理学杂志 2017 (04), 006, arXiv:1611.01087 [hep-ph]. [53] C. Meyer, 《利用 CANONICA 将多圈主积分算法化变换至规范基底》, Comput. Phys. Commun. **222**, 295 2018 1705 06252 ( ), [ ] arXiv: . hep-ph . [54] M. Argeri、S. Di Vita、P. Mastrolia、E. Mirabella、J. Schlenk、U. Schubert 和 L. Tancredi, 《主积分的 Magnus 级数与 Dyson 级数》, 高能物理学杂志 2014 (03), 082, arXiv:1401.2979 [hep-ph]. [55] M. H¨oschele、J. Hoff 和 T. Ueda, 《适用于 gg → h 在次次领先阶及更高阶的相空间主积分基底》, 高能物理学杂志 2014 (09), 116, arXiv:1407.4049 [hep-ph]. [56] C. Dlapa , J. Henn , 和 K. Yan , 推导规范微分方程: 从单个均匀权重积分推导费曼积分的规范微分方程, 高能物理学杂志 2020 (05), 025, arXiv:2002.02340 [hep-ph]. [57] I. Bree *et al.* (ε-合作组), 《费曼积分约化与 ϵ因子化微分方程的几何记账指南》, 《物理评论快报》136, 241602 (2026), arXiv:2506.09124 [hep-th]. [58] I. Bree *et al.* (ϵ), 《费曼积分约化与 epsilon 因子化微分方程的新算法》, 《物理评论 D》113, 116019 (2026), arXiv:2511.15381 [hep-th]. [59] M. Jimenez-Santacruz、C. Lopez-Arcos 和 A. Quintero Velez, 《Schwinger 表示中基于 $\mathcal{A}$超几何系统的费曼积分规范微分方程》(2026), arXiv:2609.16107 [hep-th]. [60] L. Adams 和 S. Weinzierl, 《椭圆情形下费曼积分微分方程的 ε 形式》, Phys. Lett. B 781, 270 (2018), arXiv:1802.05020 [hep-ph]. [61] H. Frellesvig, 《关于椭圆费曼积分的 epsilon 因子化微分方程》, 高能物理学杂志 2022 (03), 079, arXiv:2110.07968 [hep-th]. [62] L. G¨orges、C. Nega、L. Tancredi 和 F. J. Wagner, 《关于一种推导超越多重对数的 ϵ 因子化微分方程的方法》, 高能物理学杂志 2023 (07), 206, arXiv:2305.14090 [hep-th]. [63] C. Dlapa、J. M. Henn 和 F. J. Wagner, 《寻找椭圆费曼积分规范微分方程的算法方法》, 高能物理学杂志 2023 (08), 120, arXiv:2211.16357 [hep-ph]. [64] J. Chen、L. L. Yang 和 Y. Zhang, 《关于椭圆费曼积分规范化的一种方法》, 高能物理学杂志 2026 (04), 077, arXiv:2503.23720 [hep-th]. [65] E. Chaubey 和 V. Sotnikov, 《椭圆领先奇点与规范被积函数》, 《物理评论快报》135, 101903 2025 2504 ( ), arXiv: .20897 [hep-th]. [66] L. L. Yang 和 Y. Zhang, 《从 dlog 到 d$\mathcal{E}$: 规范椭圆被积函数与基于纯 eMPL 的模符号字母》(2025), arXiv:2512.19370 [hep-th]. [67] F. Forner、C. C. Mella、C. Nega、L. Tancredi 和 F. J. Wagner, 《被积函数分析、领先奇点与超越多重对数的规范基》, 高能物理学杂志 2026 (10), 213, arXiv:2604.25270 [hep-th]. [68] S. P¨ogel、X. Wang 和 S. Weinzierl, 《等质量香蕉图: 任意圈数、维数正则化参数的任意阶》, 高能物理学杂志 **2023** 04 117, 2212 08908 ( ), [ ] arXiv: . hep-th . [69] C. Duhr、S. Maggio、C. Nega、B. Sauer、L. Tancredi 和 F. J. Wagner, 《卡拉比－丘几何及其推广中的规范微分方程》, 高能物理学杂志 2025 (06), 128, arXiv:2503.20655 [hep-th]. [70] S. Maggio 和 Y. Sohnle, 《关于卡拉比－丘多尺度费曼积分的规范微分方程》, 高能物理学杂志 2025 (10), 202, arXiv:2504.17757 [hep-th]. [71] H. Frellesvig 和 S. Weinzierl, 《关于 ε因子化基与纯费曼积分》, 《SciPost 物理》16, 150 (2024), arXiv:2301.02264 [hep-th]. [72] T. Gehrmann、J. M. Henn 和 N. A. Lo Presti, 《无质量平面散射振幅的五边形函数》, 高能物理学杂志 2018 (10), 103, arXiv:1807.09812 [hep-ph]. [73] P. Maierh¨ofer、J. Usovitsch 和 P. Uwer, 《Kira——费曼积分约化程序》, Comput. Phys. Commun. 230, 99 (2018), arXiv:1705.05610 [hep-ph]. [74] J. Klappert , F. Lange , P. Maierh¨ofer , 以及 J. Uso-

vitsch，《使用 Kira 2.0 和有限域方法进行积分约化》，Comput. Phys. Commun. **266**，108024（2021），arXiv:2008.06494 [hep-ph]。[75] F. Lange、J. Usovitsch 和 Z. Wu，《Kira 3：采用高效播种和优化方程选择进行积分约化》，Comput. Phys. Commun. **322**，109999（2026），arXiv:2505.20197 [hep-ph]。[76] A. V. Smirnov 和 M. Zeng，《FIRE 7：基于模方法的自动约化》，Comput. Phys. Commun. **325**，110200（2026），arXiv:2510.07150 [hep-ph]。[77] Z. Wu、J. Boehm、R. Ma、H. Xu 和 Y. Zhang，《NeatIBP 1.0：用于生成费曼积分小规模分部积分关系的软件包》，Comput. Phys. Commun. **295**，108999（2024），arXiv:2305.08783 [hep-ph]。[78] Z. Wu、J. B¨ohm、R. Ma、J. Usovitsch、Y. Xu 和 Y. Zhang，《使用 NeatIBP 1.1 + Kira 执行分部积分约化》，Comput. Phys. Commun. **316**，109798（2025），arXiv:2502.20778 [hep-ph]。[79] X. Guan、X. Liu、Y.-Q. Ma 和 W.-H. Wu，Blade：用于改进费曼积分分解的块三角形式程序包，Comput. Phys. Commun. **310**，109538（2025），arXiv:2405.14621 [hep-ph]。[80] J. Klappert 和 F. Lange，使用 FireFly 重构有理函数，Comput. Phys. Commun.**247**，106951（2020），arXiv:1904.00009 [cs.SC]。[81] J. Klappert、S. Y. Klein 和 F. Lange，FireFly 中稠密与稀疏有理函数的插值及其他改进，Comput. Phys. Commun.**264**，107968（2021），arXiv:2004.01463 [cs.MS]。[82] R. H. Lewis，Fermat：计算机代数系统，https: //home.bway.net/lewis/，访问日期：2026 年 10 月 8 日。[83] R. N. Lee，Fermatica，https://github.com/rnlg/ Fermatica，Fermat 的 Wolfram 接口；访问日期：2026 年 10 月 8 日。