钉扎的自旋减速超流体中的自我终止的涡旋重排

S V Anantharaman* 和 Dipankar Bhattacharya†
Department of Physics, Ashoka University, Sonipat, 131029, India(
日期：2026年11月25日)

在带有钉扎中心的自旋减速容器中，超流体会出现量子化涡旋的突然集体迁移。这一过程的起始、发展和终止仍未得到充分理解。在此，我们表明：1）当涡旋阵列中具有最小张角的一个扇区在靠近壁面处变为空缺时，涡旋会发生首次涌出；2）受这一涌出驱动，边界附近超流流动的强度持续减弱，从而阻止涡旋继续逸出；3）由此产生的耗尽区具有明确的尺寸——主要由临界脱钉速度、容器尺寸和初始旋转速率决定——从而限制了传递给容器的角动量。最后，我们讨论其与脉冲星 glitch 的相关性。

arXiv:2611.33103v1 [astro-ph.HE] 24 Nov 2026

概述。– 超流体和量子凝聚体通过形成具有量子化环流、排列成阿布里科索夫晶格的涡旋来旋转。这类流体的宏观速度场仿佛是在与容器同步旋转的刚体 [1, 2]。容器减速时，流体通过按照旋转速率成比例地减少涡旋数密度来保持与容器同步，最外层的涡旋则在容器壁处湮灭。在整个过程中，阵列始终保持阿布里科索夫构型，只是涡旋密度不断降低。因此，记录到的容器自旋减速过程是平滑的。钉扎中心——即与容器共同旋转、涡旋会附着其上的非超流体特征——会彻底改变这种行为。在存在涡旋钉扎的情况下，减速容器的自旋减速过程中会间歇性地出现突然的自旋加速 [3, 4]。人们认为，脉冲星 glitch 是这一现象的天体物理表现 [5–8]。多项采用微观（量子）和介观（点涡旋）方法的数值研究表明，自旋加速的根本原因是阵列发生突然重排，在此过程中，若干涡旋解除钉扎并离开超流体 [9–13]。近期一项宏观（流体动力学）研究表明，粗粒化涡量也呈现出类似行为 [14]。然而，决定此类重排进程的条件仍未得到充分研究。在本文中，我们概述其中的作用机制，提出与首次自旋加速相关的条件，并证明存在决定由此形成的涡旋稀少区的特征方位角尺度和径向尺度；该区域主要由三个量控制：使涡旋脱离钉扎位点所需的临界局部流动（$v_{\rm crit}$）、容器半径（R）以及超流体的初始旋转速率（Ω_0）。空缺的空间范围限制了传递给容器的净角动量，促使我们估算蟹状星云脉冲星和船帆座脉冲星的特征尺度及相应的 glitch 大小。

钉扎的自旋减速超流体.–考虑一种超流体，它最初与其圆柱形容器同步旋转（容器半径为 R，并以 Ω_0 的速率逆时针旋转），并假设构成阵列的涡旋始终保持直线。这一假设使我们能够仅通过研究流体的一个横截面来描述其动力学，但无法处理湍流 [15]。这种均匀阵列的涡旋密度 n_v 与旋转速率之间遵循 Onsager-Feynman 关系： $n_v\kappa = 2\Omega_0$, , 其中 $\kappa = h/m$ 是环量子， h 是普朗克常数， m 是相关玻色组分的质量。该构型在实验室参考系中的宏观速度场以极坐标表示为 $\mathbf{v_s}(r,\ \theta) = r\Omega_0\ \hat{}\theta$，其中 r 是容器中心到所考虑超流体质元的径向距离， θ 是相对于正X轴的夹角。此外，假设钉扎位点充满整个区域且均匀分布，使每个被钉扎的涡旋都具有明确且与位置无关的作用力，等价地说，具有临界脱钉速度 $v_{\rm crit}$。当容器参考系中的局部流速超过 $v_{\rm crit}$ 时，涡旋便会脱钉，此后它只随流动运动，只有进入亚临界区域时才会被再捕获。当容器以恒定速率自旋减速时，超流体与钉扎的涡旋阵列之间会产生转动滞后，并随时间线性增长。在此阶段，速度滞后在边界处最大。最终，边界处的滞后达到脱钉阈值，此时超流体在容器参考系中的速度场

参考系中，由 $\mathbf{v_s} = v_{\rm crit}(r/R)\ \hat{}\theta$ 给出。下文中，除非另有说明，流动场均在容器参考系中处理。

扰动.– 在无限大的圆柱形容器中，边界处的所有涡旋都经历相同的局部流动。然而，在有限尺寸装置中，涡旋阵列的三角晶格与边界不相容，因此在容器壁附近产生缺陷，导致圆柱对称性破缺。我们假设，这种因素以及其他可能存在的缺陷，会使初始脱钉偏向于外围附近的某个局部区域，从而形成一个深度较小 d 、张角为 ϕ的空缺扇区。请注意，从初始均匀涡旋阵列中移除任意一个涡旋，会导致切向流增加

在空缺径向内侧的各点处，并使径向外侧各点处的切向流减小。对于耗竭扇区而言，这意味着质心径向内侧各点处的切向场增强，其中扇区尖端处的增幅最大，如图1所示。空缺还会影响径向分量，使其变为非零。然而，对于较小的扇区，这一贡献在靠近容器壁处会减弱，因为超流体的径向速度趋近于零。我们通过在容器外部引入镜像涡旋来施加这一边界条件。对所有缺失涡旋的贡献进行积分后，尖端处改变后的场在 d 的线性阶、且 ϕ 较小时，结果为

$$\mathbf{v_{tip}} = \left[v_{\mathrm{crit}} \frac{R-d}{R} + \frac{\Omega_0 d}{\pi}\phi - \frac{\Omega_0 d}{3\pi}\phi \right] \hat{\theta}, \qquad (1)$$

其中，右侧第一项表示自旋减速过程中形成的滞后，第二项体现空缺扇区的影响，第三项则通过考虑该扇区的像来计及边界的作用。对于 ϕ 的任意小值，尖端处的流速仍低于临界解钉阈值。因此，对阵列的首次扰动不会立即导致更深处涡旋脱钉。方程（1）和方程（3）的推导见补充材料。

涌出。– 随着自旋减速诱导的单个脱钉使扇区扩大，尖端处的流动在足够大的张角 ϕ^* 下变为临界值，其满足

$$\phi^* = \frac{3\pi v_{\mathrm{crit}}}{2R\Omega_0}, \qquad (2)$$

从而导致尖端处的一个涡旋脱钉。若将耗竭扇区视为一块与均匀涡旋阵列（具有逆时针环流）恰好重叠的反向旋转涡旋（具有顺时针环流）区域，并将尖端视为具有虽小但有限的曲率，则后续运动便显而易见。根据斯托克斯定理，空缺会沿其等高线诱导出顺时针场：在尖端处与自旋减速滞后平行，而在壁面处则反平行。见图（1）。这表明，从尖端脱钉的涡旋将沿扇区的切向前向臂流动。然而，一个脱钉涡旋沿等高线向径向外侧发生微小位移，会产生与移除涡旋不同的双重效应：它会增强径向内侧位置处的切向场（即其尾迹中的切向场），同时也会增强其正前方的场，从而促进扇区臂上两个方向的涡旋脱钉。这一过程的确切机制有待详细研究。不过，我们可以将沿等高线的涡旋涌出近似为连续损失薄层涡旋，使扇区深度按比例增加，同时保持张角 ϕ^* 不变。方程（1）表明，在这种情形下，尖端处的流动始终处于临界状态，这意味着涡旋会持续从尖端脱钉，扇区深度也随之增长。

再捕获。– 方程（1）能否有效描述该动力学过程，关键取决于这样一个假设：所有脱钉涡旋都会离开流体。然而，在壁面附近，径向速度场接近于零，这就引出了一个问题：涡旋如何到达边界并湮灭。耗散对于解决这一问题至关重要。相互摩擦会对一个随局部切向流（沿正 $\hat{\theta}$ 方向）运动的涡旋施加径向向外的马格努斯力，从而导致其向外漂移并最终湮灭。然而，正如前文所强调的，扩大的扇区会导致容器壁附近的切向场减弱，进而降低漂移速度。边界处的场 $\mathbf{v_{wall}}$同时以张角和深度的非线性函数形式变化；当 ϕ^* 较小时，可将其很好地近似为

$$\mathbf{v_{wall}} = \left[v_{\mathrm{crit}} - \frac{\Omega_0 d}{\pi}\phi^* \left(\frac{d}{R}\phi^* \left(\frac{\pi}{2} - \phi^* \right) - \ln\left(\phi^*\right) \right) - \frac{\Omega_0 d}{\pi}\phi^* \left(\frac{3(1-\phi^{*^2})}{4} \right) \right] \hat{\theta}, \qquad (3)$$

其中，右侧第一项是自旋减速过程中形成的滞后，第二项体现空缺扇区的影响，第三项则通过考虑该扇区的像来计入边界的作用。当空缺深度超过某一值时，边界处的切向场$\hat{}$会与负 θ 方向对齐。因此，该区域中涌出的前沿会受到径向向内的马格努斯漂移，从而有效地阻止涡旋逸出。使这种行为出现的扇区深度 d^*，正是边界处由式（3）给出的切向场为零、从而促使涡旋再捕获时对应的深度。

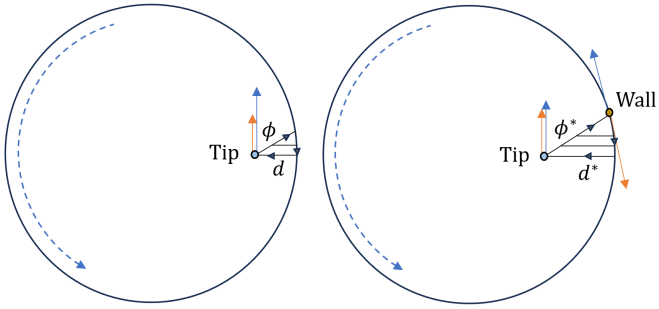

图1. 存在无涡旋扇区时的超流流动示意图。条纹区域表示无涡旋区，容器的其余部分具有涡旋均匀分布。蓝色虚线箭头表示容器的旋转方向。蓝色和橙色实线箭头分别表示初始切向流动和扇区的影响。紫色箭头表示由于缺失涡旋，空缺区域等高线上的流动方向。左）扰动——边界附近一个深度为 d、张角为 ϕ 的小扇区中的涡旋被耗尽，使尖端处的切向流增强。右）再捕获——该扇区现在远大于初始大小，其深度为 d^*、张角为 ϕ^*。尖端处的净流动高于临界值，而壁面处（扇区的前伸臂与边界相接的位置）的流动恰好为零。

终止。– 此时，扇区尖端远离边界，受到的场为

$$\begin{aligned}\mathbf{v_{tip}} &= \left[v_{\rm crit}\frac{R-d^*}{R}+\frac{\Omega_0 d^*}{\pi}\phi^*\right]\hat{\theta}\\ &= \left[v_{\rm crit}\left(1+\frac{d^*}{2R}\right)\right]\hat{\theta},\end{aligned} \tag{4}$$

此处流动超过临界值，表明脱钉仍在继续。然而，随后容器壁附近涡旋的重新填充会降低扇区尖端处的流动，使该区域逐渐变为亚临界。方程（1）表明，当重构后的区域所张角为 $\sim \pi v_{\rm crit}/R\Omega_0$ 时，远离壁面的脱钉会完全停止。虽然我们没有考察这一阶段阵列的动力学，但值得指出的是，重新钉扎的涡旋所产生的屏蔽效应会限制超流体内部进一步发生重排，从而不再有涡旋逸出。

角动量传递。– 与圆柱形容器同步旋转的超流体，其净角动量为 $L_s = I_s\Omega_0,$，其中 I_s 是流体相对于容器中心的转动惯量。通过 [16] 可以明确看出每个涡旋对总角动量的贡献。

$$L_s = I_s\Omega_0\sum_{i=1}^{N}\frac{(R^2-r_i^2)}{NR^2/2}, \tag{5}$$

对于均匀涡旋阵列，L_s 恰好等于 $I_s\Omega_0$。这一表达式表明，位于任意半径处的涡旋仅对其所在位置以外的流体贡献净角动量。对于沿径向向外重排的涡旋，超流体的净角动量会持续减少。对耗减区域积分方程（5），可得缺失涡旋扇区所导致的角动量减少量，该扇区的张角为 ϕ^*，深度为 d:

$$\Delta L_s = I_s\Omega_0\left(\frac{d^2}{R^2}\right)\left(\frac{\phi^*}{\pi/2}\left(1-\frac{d}{2R}\right)^2\right), \tag{6}$$

其中，第一个方括号项反映了式（5）所示的贡献随半径的变化，第二个方括号项则计及扇区几何形状。角动量守恒保证容器的旋转速率按比例增加，增量为 $\Delta\Omega_c = \Delta L_s/I_c$，其中 I_c 是容器绕旋转轴的转动惯量。随后，超流体两端的速度滞后减小为

$$\Delta v_c = \frac{\Omega_0 d}{\pi}\phi^*\left[\frac{2I_s}{I_c}\frac{d(R-d)}{R^2}\left(1-\frac{d}{2R}\right)^2\right]. \tag{7}$$

方程（1）和方程（3）表明，缺失扇区通过 $\sim\Omega_0\phi^* d/\pi$ 改变了尖端和壁面处的流动。

对于满足 $I_s/I_c \le 1$ 的大质量容器，方程（7）表明，角动量的传递在涡旋的涌出和再捕获过程中仅起次要作用。因此，我们可以用张角 ϕ^* 和扇区深度 d^* 来刻画由此产生的耗减区。随后，由重排引起的容器总自旋加速可近似表示为

$$\Delta\Omega_c^* = \Omega_0\left[\frac{I_s}{I_c}\frac{d^{*2}}{R^2}\frac{\phi^*}{\pi/2}\left(1-\frac{d^*}{2R}\right)^2\right]. \tag{8}$$

在这里，我们没有明确考虑会改变动力学演变速率的因素，例如作用于运动涡旋的耗散，以及容器的自转减速率。不过，假设这些参数处于有利于涡旋重排的范围内，我们发现，涌现出的空间尺度以及容器由此产生的自旋加速，主要取决于三个量：临界脱钉速度 $v_{\rm crit}$、容器半径 R以及初始旋转速率 Ω_0。

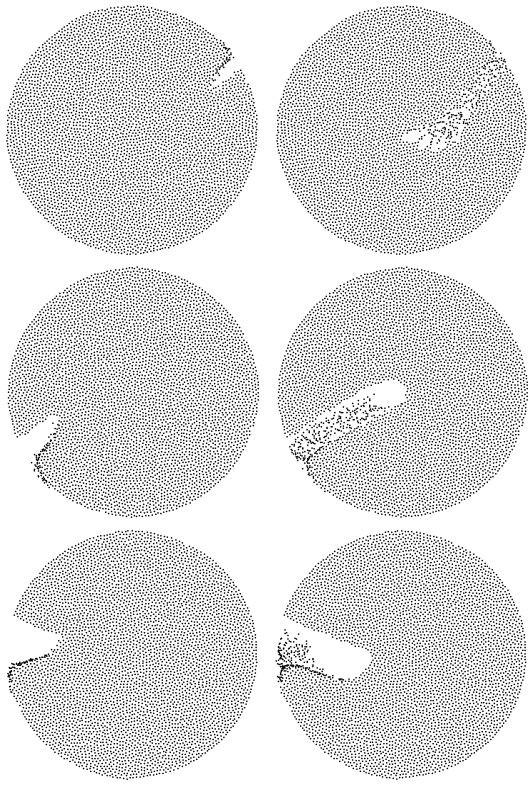

图 2。在模拟中观察到的涡旋阵列状态：涌出结束时（左）和整个事件结束时（右），从上到下排列，$v_{\rm crit}$（30、60、90）逐渐增加。黑点表示涡旋。钉扎位点的数量多于涡旋，因而未显示。在所有情况下，容器半径为 R=10。涌出结束时记录的张角 ϕ^*和深度 d^* 均随 $v_{\rm crit}$增加。然而，在整个事件结束时显现的扰动总深度则随 $v_{\rm crit}$减小。

超流体模拟。–采用此前建立的设置 [10, 13], , 我们模拟半径为 $R = 10$、转动惯量为 $I_c = 1$，且具有 10^5 个按正方晶格排列的相同钉扎点的旋转减速圆柱形容器的横截面。容器最初以角速度 $\Omega_0 = 50$旋转，其中容纳着转动惯量为 $I_s = 1$、含有 $N = 5 \times 10^3$个钉扎点涡旋的超流体，每个涡旋的量子化环流为 $\kappa = 2\pi$。这里，我们采用无量纲坐标系，长度单位为 1，时间单位由 κ 构造，质量单位则由 I_c导出。所有其他量均通过这组基本单位定义。模拟器的具体细节，包括钉扎的实现方式，见补充材料（SM）。初始时，超流体与容器同步旋转。在时间 $t = 0$，开始线性自旋减速，此后持续追踪涡旋阵列的状态和容器的旋转速率。我们进行了三次这样的模拟，唯一的区别是表征钉扎点的临界脱钉速度 $v_{\rm crit}$。所选取的$v_{\rm crit}$ （30、60、90）确保了由式（2）给出的临界张角远大于有限涡旋阵列所能提供的最小角分辨率；该分辨率由平均涡旋间距与容器半径之比给出。图 2 展示了三次模拟中的以下状态：a）首次涌出结束时的阵列状态，该状态通过研究边界处的速度场估算得出；b）整个重排结束时的状态。每种情况下重排过程的动画，以及超流体中速度场的演变，见补充材料。耗尽区的特征尺度清晰可见。还可以看到，涌出后的重排拓宽了尖端，并改变了涡旋受到扰动的深度。我们从涌出结束时的构型中提取 ϕ^* 和d^* 的值，并将 $\Delta\Omega_c^*/\Omega_0$ 的值作为整个事件结束时记录到的分数自旋增量。在表 I 中，我们将这些结果与解析公式所得的估算值进行比较，发现两者相符。这表明，对于张角较小的扇区，涌出后重排对角动量净转移的贡献微乎其微，从而验证了前文提出的机制。

脉冲星突变。– 脉冲星是主要因磁偶极辐射而发生自旋减速的中子星。一些脉冲星会出现突然的自旋加速，称为脉冲星 glitch，其旋转速率会在数月至数年内逐渐恢复到原来的水平，这表明其中存在超流体 [8, 18]。人们认为，恒星的内壳层和外核心分别含有单态和三重态的中子超流体。前一区域中的涡旋预计会钉扎在核晶格位置上，从而使超流体的旋转与外壳的旋转脱耦。另一方面，核心中的涡旋因超导质子的拖曳效应而具有强磁性。这使得超流体能够通过电子散射与外壳共转。然而，该区域中的超导质子也会使磁场形成由磁通管构成的阵列，而这些磁通管可能充当钉扎中心[6]。尽管结构方面仍存在不确定性，但与前文讨论的情形显然有相似之处：量子化涡旋和钉扎结构都可能延伸至自旋减速恒星的广大区域，从而可能发生突然的涡旋重排。在脉冲星突变研究中，决定其发生、演变和终止的条件仍未解决。我们通过估算两颗脉冲星——蟹状星云脉冲星和船帆座脉冲星——的分数自旋增量 $\Delta\Omega_c^*/\Omega_0$ ，并将其与观测到的分数突变幅度进行比较，探究前文阐明的机制与脉冲星突变的相关性。我们将恒星近似为半径为 R 、以 Ω_0 的速率旋转的圆柱形容器，并假设其中有大量相同的钉扎点，其特征参数为临界脱钉速度 $v_{\rm crit}$。此外，设参与突变的超流体储库具有转动惯量 I_s，恒星其余部分的转动惯量为 I_c。中子星的半径已被较准确地限定在约 10 km；其旋转速率和分数转动惯量 I_s/I_c 均已根据观测推断得出；而外壳各处的临界脱钉速度，则通过考虑不同密度下的微观核相互作用，以及将涡旋蠕变理论应用于观测到的突变恢复过程进行估算 [19–24]。表 II 汇总了蟹状星云脉冲星和船帆座脉冲星的相关数值，以及ϕ^*、d^*和 $\Delta\Omega_c^*/\Omega_0$的估算值。估算结果表明，蟹状星云脉冲星的分数自旋增量为 $\sim 10^{-10}$ ，船帆座脉冲星则为 $\sim 10^{-5}$ 。

表 I. 对比三种仅临界脱钉速度 $v_{\rm crit}$ 不同的情形中，模拟所得的特征尺度和分数自旋增量与分析估算值。下标 $_{sim}$ 表示与模拟相关的量。所有单位均如正文所述。

$v_{\rm crit}$	ϕ^*_{sim}	d^*_{sim}	$\Delta\Omega^*_{c,\ sim}/\Omega_0$	ϕ^*	d^*[17]	$\Delta\Omega_c^*/\Omega_0$
30	0.350	3.200	0.015	0.280	3.140	0.013
60	0.590	4.000	0.039	0.570	4.320	0.041
90	0.870	5.100	0.049	0.850	5.000	0.082

表 II. 对两颗具有代表性的脉冲星——蟹状星云脉冲星和船帆座脉冲星——的特征尺度和分数自旋增量进行估算，并与相关恒星参数一同列出。单位见表头。

脉冲星	R 千米	Ω_0 弧度 秒$^{-1}$	I_s/I_c —	$v_{\rm crit}$ 千米 秒$^{-1}$	ϕ^* 10^{-4} 弧度	d^* 千米	$\Delta\Omega_c^*/\Omega_0$ —
Crab	10	188	10^{-4}	0.1	2.5	0.7	$\sim 10^{-10}$
Vela	10	70	10^{-2}	10	670.0	1.9	$\sim 10^{-5}$

尽管两颗脉冲星都出现过不同幅度的突变，但蟹状星云脉冲星的大多数突变的分数变化约为10^{-9}，而船帆座脉冲星的大多数突变据观测约为10^{-6}，接近所得估算值 [21]。这里建立的简单图景表明，脉冲星突变可能会使深度超过外壳厚度的区域脱离钉扎（~ 1 km）。这一推论对于具有球形结构、物理性质随半径分层变化的真实脉冲星是否适用，仍需进一步探讨。

结论与讨论。– 钉扎的自旋减速超流体会经历涡旋阵列的突然重构，并表现为容器旋转速率的自旋加速。我们证明，这是一个会自我终止的过程，具有明确的空间范围；其动力学主要由速度场的演化决定，并受到角动量转移的强化。该过程所预示的蟹状星云脉冲星和船帆座脉冲星的典型自旋加速，大致符合观测。将复杂系统重新表述为简单的分析框架，有助于我们认识涡旋重排的自我终止机制；然而，本文考虑的理想条件意味着，这项研究必然只是一个极限情形。例如，在非均匀钉扎景观中（如中子星内），阵列如何演化尚不明确。不过可以确定的是，重构结束时阵列的速度场呈非轴对称，具有两个尺度，ϕ^* 和 d^*。在下一次事件发生之前，这种流动在容器参考系中几乎保持冻结。在中子星中，这些特征会产生电流四极矩，有望产生连续引力波；我们将这一研究方向留待未来探讨 [25, 26]。本文讨论的这一范式虽兼具不稳定性与雪崩的定性特征，却不易归入其中任何一类。线性不稳定性通常指无穷小扰动 [27]的指数增长，而BTW沙堆处于临界态时所展现的雪崩则没有特征尺度 [28]。然而，本文探讨的现象并不会放大任意扰动，其重排具有明确的角向和径向范围。为强调这一差异，我们将这一过程称为相互运动，意指其动力学由相互作用所支配。

致谢.– 本文受益于COST行动SCALES（CA24139）内部的讨论，该行动由COST（欧洲科学技术合作组织）支持。作者感谢阿育王大学（AU）和Axis银行一直以来的支持。模拟在AU的两台不同机器上运行：Aryabhatta（感谢Suratna Das教授，Umang Kumar协助获得访问权限）和Tao（感谢Garima Mishra教授，并由Souradeep Sengupta和Bidisha Mukherjee协助）。补充动画使用Matplotlib这一Python软件包制作 [29]。

数据可用性.– 本文所使用的模拟数据可根据请求通过向通讯作者发送电子邮件获取。不过，作者开发的代码已通过以下代码仓库公开：github.com/ananth-94/vortexsimulator。引用介绍这些代码的文章即可使用它们 [13]。

* anantharaman.sv phd20@ashoka.edu.in ananth.academic@gmail.com † dipankar.bhattacharya@ashoka.edu.in

[1] L. Onsager，《统计流体动力学》，Il Nuovo Cimento **6**，279（1949年）。[2] R. P. Feynman，《量子力学在液氦中的应用》第二章，载于*Progress in Low Temperature Physics* 1 1955 17 53，第卷（Elsevier，）第–页。[3] J. S. Tsakadze 和 S. J. Tsakadze，《缓慢旋转的氦 II 的性质与脉冲星的超流性》，《低温物理学杂志》**39**，649（1980年）。[4] L. Skrbek 和 C. F. Barenghi，《量子流体与中子星的自旋减速及其突变：重新审视 J. S. Tsakadze 和 S. E. Tsakadze 的实验》，《物理评论：流体》**11**，114701（2026年）。[5] P. W. Anderson 和 N. Itoh，《脉冲星突变与躁动作为硬超流性现象》，《自然》**256**，25（1975年）。[6] J. A. Sauls，《中子星内部的超流性》，载于 *Timing Neutron Stars*，H. ¨Ogelman 和 E. P. J. van den Heuvel 编（Springer Netherlands，Dordrecht，1989年），第457–490页。[7] V. Graber、N. Andersson 和 M. Hogg，《实验室中的中子星》，Int. J. Mod. Phys. D **26**，1730015（2017年）。[8] D. Antonopoulou、B. Haskell 和 C. M. Espinoza，《脉冲星突变：观测与物理解释》，《物理学进展报告》**85**，126901（2022年）。[9] L. Warszawski 和 A. Melatos，《脉冲星突变的 Gross–Pitaevskii 模型》，《皇家天文学会月报》**415**，1611（2011年）。[10] G. Howitt、A. Melatos 和 B. Haskell，《模拟脉冲星突变：二维超流涡旋运动的 N 体求解器》，《皇家天文学会月报》**498**，320（2020年）。[11] E. Poli、T. Bland、S. J. M. White、M. J. Mark、F. Fer- laino、S. Trabucco 和 M. Mannarelli，《旋转超固体中的突变》，《物理评论快报》**131**，223401（2023年）。[12] I.-K. Liu、A. W. Baggaley、C. F. Barenghi 和 T. S. Wood，《中子星中的涡旋雪崩与集体运动》，《天体物理学杂志》**984**，83（2025年）。[13] S. V. Anantharaman、D. Bhattacharya、M. A. Alpar 和 E. G¨ugercino˘glu，《由触发式涡旋陷阱导致的脉冲星突变》，《皇家天文学会月报》**553**，stag2072（2026年）。[14] C. Perkins、A. Igoshev 和 T. Wood，《中子星壳层中突变的流体动力学模拟》（2026年），发表于 SCALES 2026，科英布拉，葡萄牙。[15] R. J. Donnelly，*Quantized Vortices in Helium II*，《低温物理学剑桥研究丛书》第3卷（剑桥大学出版社，1991年）。

[16] A. L. Fetter, 《非理想玻色气体中的涡旋：I. 凝聚态》, 《物理评论》**138**, A429（1965年）。[17] 我们使用补充材料中推导出的公式（18），而不是公式（3）中给出的简化形式，以获得 d^*的相关值，因为我们的模拟中涉及的张角不一定很小。[18] R. N. Manchester, 《脉冲星漏拍》, 《自然》**343**, 317（1990年）。[19] B. Link、R. I. Epstein 和 J. M. Lattimer, 《关于中子星结构和状态方程的脉冲星约束》, 《物理评论快报》**83**, 3362（1999年）。[20] C. M. Espinoza、A. G. Lyne、B. W. Stappers 和 M. Kramer, 《对102颗脉冲星中315次突变的自转研究》, 《皇家天文学会月报》**414**, 1679（2011年）。[21] A. Basu、B. Shaw、D. Antonopoulou、M. J. Keith、A. G. Lyne、M. B. Mickaliger、B. W. Stappers、P. Weltevrede 和 C. A. Jordan, 《乔德雷尔班克脉冲星突变目录：70颗脉冲星中的106次新自转突变》, 《皇家天文学会月报》**510**, 4049（2022年）。[22] M. A. Alpar、D. Pines、P. W. Anderson 和 J. Shaham, 《中子星的涡旋蠕动与内部温度。I——一般理论》, 《天体物理学杂志》**276**, 325（1984年）。[23] M. A. Alpar、M. A. Anderson、D. Pines 和 J. Shaham, 《中子星的涡旋蠕动与内部温度。II——船帆座脉冲星》, 《天体物理学杂志》**278**, 791（1984年）。[24] S. Seveso、P. M. Pizzochero、F. Grill 和 B. Haskell, 《中子星壳层中的介观钉扎力》, 《皇家天文学会月报》**455**, 3952（2016年）。[25] K. S. Thorne, 《引力辐射的多极展开》, 《现代物理评论》**52**, 299（1980年）。[26] T. Cheunchitra、A. Melatos、J. B. Carlin 和 G. Howitt, 《来自发生突变的脉冲星的持续引力辐射——II. 随涡旋数更新的标度关系》, 《皇家天文学会月报》**528**, 1360（2024年）。[27] L. D. Landau 和 E. M. Lifshitz, *Fluid mechanics*, 第2版, 《理论物理学教程》第v. 6卷（培格曼出版社，牛津，英格兰；纽约，1987年）。[28] P. Bak、C. Tang 和 K. Wiesenfeld, 《自组织临界性：对1/f噪声的解释》, 《物理评论快报》**59**, 381（1987年）。[29] J. D. Hunter, 《Matplotlib：一个二维图形环境》, 《计算科学与工程》**9**, 90（2007年）。[30] J. Barnes 和 P. Hut, 《一种层次化的 O(N log N) 力计算算法》, 《自然》**324**, 446（1986年）。

补充材料

小扇区深度下尖端处的速度场

第一次脱钉会形成一个深度为 d、张角为 ϕ的小扇区，其中没有涡旋，而阵列的其余部分仍处于钉扎状态。超流速度场由以下几部分贡献构成：自旋减速产生的速度滞后、移除扇区以及相应的像扇区。在尖端处，自旋减速导致的速度滞后为

$$\mathbf{v_{tip,\ lag}} = v_{\rm crit}\frac{R-d}{R}\ \hat{\theta}. \tag{9}$$

移除扇区的贡献可通过对其中各个阵列元件的影响进行积分得到，这些元件具有面密度为 n_v的反向旋转涡旋。在此，我们认为扇区的两条臂具有相同的长度d，且张角很小。偏离X轴后，这种几何形状与容器的实际边界变得不相容。然而，这只会对尖端处的场产生高阶修正，以下不予考虑。利用昂萨格–费曼关系，将单位面积的净环量（$n_v\kappa$）表示为初始旋转速率的形式，可得

$$\begin{aligned}\mathbf{v_{tip,\ sec}} &= -n_v\int_0^{\phi}d\phi'\int_0^{d}\left[\left(\frac{-\kappa}{2\pi r'}\right)\cos\phi'\right]r'dr'\ \hat{\theta}\\ &= \frac{\Omega_0 d}{\pi}\phi\ \hat{\theta},\end{aligned} \tag{10}$$

其中， r' 是从尖端到任意一个元素的距离， ϕ' 是相对于正X轴所张的角度。此外，容器壁不允许超流体产生径向流。通过在边界外引入镜像涡旋来实现这一条件：位于半径 r 、相对于容器中心角度为 θ处的阵列元素，其对应的镜像涡旋具有相反的环量，并被放置在 R^2/r 和 θ处。在存在耗减区域时，为了维持正确的边界条件，也需要移除相应的镜像涡旋。尖端处的合成效应可通过精确积分求得。然而，像扇区的首阶贡献可通过将涡旋置于其质心处来近似。对于较小的扇区深度和张角，注意到该像几乎就是关于边界的简单反射。在这种情况下，我们可以近似认为所有涡旋都位于X轴上，与尖端共线，并处于容器壁外侧距离 $d/2$处，从而得到

$$\begin{aligned}\mathbf{v_{tip,\ img}} &= -n_v\frac{\kappa}{2\pi(3d/2)}\int_0^{\phi}d\phi'\int_0^{d}r'dr'\ \hat{\theta}\\ &= -\frac{\Omega_0 d}{3\pi}\phi\ \hat{\theta}.\end{aligned} \tag{11}$$

因此，尖端处的净切向流为（参见方程（**1**））

$$\mathbf{v_{tip}} = \left[v_{\rm crit}\frac{R-d}{R}+\frac{\Omega_0 d}{\pi}\phi-\frac{\Omega_0 d}{3\pi}\phi\right]\hat{\theta}.$$

中等扇区深度下壁面处的速度场

壁面处的流动由三项组成，与尖端处类似，其中自旋减速导致的速度滞后具有如下简单形式

$$\mathbf{v_{wall,\ lag}} = v_{\rm crit}\ \hat{\theta}. \tag{12}$$

将被移除的扇区近似为直角三角形，并使斜边与前向臂对齐，可以让我们

将其影响积分为

$$\mathbf{v_{wall,\ sec}} = n_v \int_0^{\alpha} d\alpha' \int_0^{y\ /\cos\alpha'} \left[\left(\frac{-\kappa}{2\pi r'}\right) \cdot \sin\left(\alpha' + \tan^{-1}\left(\frac{d}{R}\tan\phi\right)\right)\right] r' dr'\ \hat{\theta}, \tag{13}$$

其中， r' 是从壁面到空缺区域内任意一点的距离， α' 是该点相对于三角形垂线（垂直于 X轴）所张的角， $y \sim d(\tan\phi)$是垂线的高度， $\alpha = \frac{\pi}{2} - \phi$ 是前向臂相对于垂线所张的角。任意一点在壁面诱导的总流动都包含一个沿切向的分量，其投影由正弦项表示。计算该积分可得

$$\mathbf{v_{wall,\ sec}} = -\frac{\Omega_0 d}{\pi}\tan\phi\left(\frac{d}{R}\phi\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) - \ln\left(\sin\phi\right)\right)\hat{\theta}, \tag{14}$$

其中， d的二次项源于边界的曲率。对于深度中等和较大的扇区，相应的像已不能再视为简单反射。不过，将所有涡旋置于质心处，仍可求得主导阶贡献。实际扇区的尖端在 X轴上对应的像，距边界为 $Rd/(R-d)$，构成像三角形的底边。垂线的高度为 $\sim d\tan\phi$。因此，像斑块产生的场为

$$\mathbf{v_{wall,\ img}} = -\left(n_v \frac{d^2}{2}\tan\phi\right)\frac{\kappa}{2\pi r_{cent}} \cdot \sin\left(\beta_{cent}\right)\cos\left(\tan^{-1}\left(\frac{d}{R}\tan\phi\right)\right)\ \hat{\theta}, \tag{15}$$

其中， r_{cent} 是壁面到质心的距离， β_{cent} 是相对于垂直方向所张的角。第一个括号内的项是扇区中的涡旋总数，而正弦项与余弦项的乘积则将壁面处诱导的总流动投影到局部切线上。质心所张的角

$$\beta_{cent} = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2\left(1 - d/R\right)\tan\phi}\right) \tag{16}$$

在中等深度下可简化为 $2(1-d/R) \sim 1$，因此可将式（15）改写为

$$\mathbf{v_{wall,\ img}} = -\frac{\Omega_0 d}{\pi}\left(\frac{3}{8}\sin\left(2\tan^{-1}\frac{1}{\tan\phi}\right)\right)\hat{\theta}. \tag{17}$$

因此，壁面处的净切向流为

$$\mathbf{v_{wall}} = \left[v_{\text{crit}} - \frac{\Omega_0 d}{\pi}\tan\phi\left(\frac{d}{R}\phi\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) - \ln\left(\sin\phi\right)\right) - \frac{\Omega_0 d}{\pi}\frac{3}{8}\sin\left(2\tan^{-1}\frac{1}{\tan\phi}\right)\right]\hat{\theta}. \tag{18}$$

对于 $\phi \ll 1$，这可化简为（参见公式(3)）

$$\mathbf{v_{wall}} = \left[v_{\text{crit}} - \frac{\Omega_0 d}{\pi}\phi\left(\frac{d}{R}\phi\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) - \ln\left(\phi\right)\right) - \frac{\Omega_0 d}{\pi}\phi\left(\frac{3(1-\phi^2)}{4}\right)\right]\hat{\theta}.$$

补充材料

超流体模拟器

文献 [10]介绍了一种数值方法，用于研究圆柱形容器中经历自旋减速的钉扎超流体的演化。我们采用了该方法的增强版本，利用 Barnes-Hut 方案将成组的涡旋聚类为一个位于其质心处的有效涡旋，从而显著提升计算性能 [13, 30]。这一二维形式体系的核心是将涡旋视为决定超流体速度场的点状实体，同时使其响应局部流动。大量与容器共同旋转、且对涡旋具有局部影响范围的钉扎中心，被排列成均匀正方晶格。此外，对于相对于容器运动的涡旋，还赋予其微弱的耗散；而边界则通过镜像涡旋加以设定。对于含有 N 个涡旋的超流体，任意涡旋在容器参考系中所经历的速度场为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} = \mathcal{R}_{\phi_{\mathrm{diss}}}\begin{pmatrix} v_{i,x} \\ v_{i,y} \end{pmatrix}, \tag{S1}$$

其中

$$\begin{aligned} v_{i,x} = &-\sum_{j\neq i}\frac{\kappa y_{ij}}{2\pi r_{ij}^2} + \sum_{j_{\mathrm{img}}=1}^{N}\frac{\kappa y_{ij_{\mathrm{img}}}}{2\pi r_{ij_{\mathrm{img}}}^2} + \Omega_c y_i + \\ &\frac{v_{\mathrm{crit}}}{\xi e^{-1/2}}\exp\left[-\frac{r_{i,\mathrm{pin}}^2}{2\xi^2}\right](y_i - y_{\mathrm{pin}}), \end{aligned} \tag{S2}$$

and

$$\begin{aligned} v_{i,y} = &\sum_{j\neq i}\frac{\kappa x_{ij}}{2\pi r_{ij}^2} - \sum_{j_{\mathrm{img}}=1}^{N}\frac{\kappa x_{ij_{\mathrm{img}}}}{2\pi r_{ij_{\mathrm{img}}}^2} - \Omega_c x_i - \\ &\frac{v_{\mathrm{crit}}}{\xi e^{-1/2}}\exp\left[-\frac{r_{i,\mathrm{pin}}^2}{2\xi^2}\right](x_i - x_{\mathrm{pin}}). \end{aligned} \tag{S3}$$

此处， x_i 和 y_i 表示涡旋在笛卡尔平面上的位置，位置以容器中心为原点计算。 r_{ij} 表示给定一对涡旋之间的距离，其中 x_{ij} 和 y_{ij} 分别为笛卡尔分量。$r_{ij_{\mathrm{img}}}$、$x_{ij_{\mathrm{img}}}$和$y_{ij_{\mathrm{img}}}$表示涡旋与镜像涡旋对的相应类似量。$r_{i,\mathrm{pin}}$ 表示所考察涡旋与最近钉扎点之间的距离，该钉扎点位于（x_{pin}， y_{pin}）。κ 表示每个涡旋所带的环量子，Ω_c 表示容器的角速度。方程 (S2) 和方程 (S3) 右侧的各项依次考虑了其他涡旋的作用、通过镜像涡旋施加的边界效应、容器的旋转，以及钉扎点的影响，这些因素对所考察涡旋的影响。每个钉扎点由一个高斯势描述，它使附近涡旋顺时针旋转，与一个涡旋对另一个涡旋产生的逆时针作用相反。每个钉扎点在特征钉扎半径 ξ处提供最大速度 v_{crit} ，超过该距离后，钉扎点的影响会迅速衰减。旋转矩阵 $\mathcal{R}_{\phi_{\mathrm{diss}}}$考虑了系统中的耗散相互作用，使自由涡旋略微沿径向向外运动；这一运动以小角度 ϕ_{diss} 描述，相对于其快速的方位运动而言。给定阵列的初始构型后，通过对上述方程进行数值积分，演化容器中涡旋的位置。我们的模拟分为两个阶段：弛豫和自旋减速。

弛豫

最初，容器以恒定速率 Ω_c =Ω_0, 旋转，并且 N 个环量为 κ 的涡旋均匀分布在半径为 R的横截面上。初始涡旋数的选择使得根据 Onsager-Feynman 关系得到的超流体旋转速率与容器旋转速率相匹配。随后，根据方程（S1）对该构型进行时间演化，同时将容器旋转速率保持为 Ω_0, ，直至系统内的所有涡旋最初都被钉扎。

自旋减速

系统弛豫至钉扎构型后，我们开始在恒定转矩 N_{ext} 作用下使容器线性减速。此时刻在我们的模拟中记为 t =0 。在总角动量守恒的条件下，容器的旋转速率随时间变化如下：

$$\frac{d\Omega_c}{dt} = \frac{N_{\mathrm{ext}}}{I_c} - \frac{1}{I_c}\frac{dL_s}{dt}, \tag{S4}$$

其中， N_{ext} 为负值， I_c 为容器的转动惯量。与给定涡旋构型相对应的超流体总角动量可表示为 [16]

$$L_s = I_s\Omega_0\sum_{i=1}^{N}\frac{(R^2 - r_i^2)}{NR^2/2}, \tag{S5}$$

对于初始均匀的阵列， L_s 恰好等于 $I_s\Omega_0$ ，其中 I_s 是超流体的转动惯量。因此，在一小段时间间隔 Δt内，容器旋转速率的变化与涡旋位置的变化密切相关，具体表示为

$$\Delta\Omega_c = \frac{N_{\mathrm{ext}}}{I_c}\Delta t - \Omega_0\frac{I_s}{I_c}\Delta\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{(R^2 - r_i^2)}{NR^2/2}\right). \tag{S6}$$

表 SI。本文所述模拟相关参数的汇总。单位如正文所述。

标准参数
容器半径，$R = 10$
涡旋数，$N_v = 5 \times 10^3$
耗散角，$\phi_{\mathrm{diss}} = 0.1$
超流体转动惯量，$I_s = 1$
容器转动惯量，$I_c = 1$
钉扎点数，$N_{\mathrm{pin}} = 10^5$
最大钉扎速度，$v_{\mathrm{crit}} = 30$，60，和 90
钉扎点影响范围，$\xi = 0.5\,a$
模拟运行时间，$T_{\mathrm{run}} = 2000\,T_0$
初始旋转速率，$\Omega_0 = 50$
初始旋转周期，$T_0 = 2\pi/\Omega_0 = 0.126$
自转减速率，$N_{\mathrm{ext}}/I_c = -2.5 \times 10^{-4}\Omega_0/T_0$
默认积分时间步长，$\Delta t = 0.005\,T_0$

旋转速率的这一变化会在每个时间步结束时更新。注意，式 (S6) 表明，当涡旋阵列完全钉扎时，容器会线性减速；而当涡旋向径向外侧迁移时，容器则会加速。

设置

我们进行了三次模拟，仅改变最大钉扎速度 v_{crit}。上文定义并在模拟中采用的参数值列于表 SI。此外，为符合正文所述分析的条件，我们采取了两项措施：1) 将每个位点的影响范围（ξ）设为平均位点间距（a）的一半，以模拟填充区域式钉扎；2) 只有在初始涡旋构型经过弛豫、接近阿布里科索夫态后，才启用钉扎晶格，以确保在自旋减速之前，钉扎阵列尽可能均匀。

可视化

我们提供了三个视频，展示每个模拟中的第一次重排，相关的临界脱钉速度标注在面板标题中。动画分为两个面板，左侧展示涡旋阵列的演化，右侧展示超流体中的速度场。左侧面板中的黑点代表涡旋，其中的钉扎点被隐藏，以保持视觉效果。右侧面板中的箭头表示局部流动的方向，箭头的颜色表示其大小。竖直色标将流速（以 v_{crit} 归一化）映射为从白色（最弱）经蓝色（中等）到黑色（最强）的渐变。必须强调的是，箭头的长度始终相同，因此并不表示流速大小。时间显示在面板左下方，容器的瞬时旋转速率（Ω_c）显示在右下方。旁侧的细箭头代表旋转速率变化的代理量，其中向下和向上分别表示自旋减速和自旋加速的容器。下方展示了一个示例性快照。

