三希格斯产生：探索希格斯势与反常顶夸克-希格斯耦合的窗口

John M. Campbell[1],Giuseppe De Laurentis[2], R. Keith Ellis[3], Michelle Gensmann[4,5],Ulrich Haisch[4⋆]、Luca Panizzi[6], Andreas Papaefstathiou[7†] 和 Gilberto Tetlalmatzi-Xolocotzi[8]

1 费米国家加速器实验室，美国伊利诺伊州巴达维亚市 PO Box500，IL 60510-50112 欧洲核子研究中心理论物理系，CH-1211 日内瓦23，瑞士**3** 粒子物理现象学研究所，杜伦大学，英国杜伦 DH1 3LE**4** 马克斯·普朗克物理学研究所，Boltzmannstr. 8，85748 Garching，德国**5** 理论物理研究所，卡尔斯鲁厄理工学院，Wolfgang-Gaede-Str. 1，76131 Karlsruhe，德国**6** 物理系，卡拉布里亚大学，I-87036 Arcavacata di Rende，Cosenza，意大利**7** 物理系，肯尼索州立大学，830 Polytechnic Lane，Marietta，GA 30060，美国**8** 理论物理 1，锡根粒子物理中心（CPPS），锡根大学，Walter-Flex-Str. 3，57068 Siegen，德国

⋆ haisch@mpp.mpg.de †apapaefs@kennesaw.edu

预印本：FERMILAB-PUB-26-0464-T，LHCHWG-2026-017，MPP-2026-181

arXiv:2611.33105v1 [hep-ph] 24 Nov 2026

摘要

我们对 κ框架下的三希格斯产生进行了全面研究，将其作为探测希格斯势和反常顶夸克-希格斯耦合的手段。在领先阶，我们推导出简洁的参数化公式，以三次和四次希格斯自耦合修正因子 κ_3 和 κ_4、顶夸克汤川耦合修正因子 κ_t，以及反常双顶夸克-双希格斯和双顶夸克-三希格斯耦合修正因子 κ_{2t} 和 κ_{3t}表示包容的$gg \to 3h$ 截面。这些参数化公式能够快速、准确地诠释当前和未来的大型强子对撞机测量。将其应用于LHC第二轮运行数据和高亮度大型强子对撞机的预期结果后，我们量化了 κ_t、 κ_{2t}和 κ_{3t}对 κ_3 和 κ_4约束的影响，并从现有大型强子对撞机数据中得出了对 κ_{3t} 的首个直接约束。我们还表明，产生几乎相同包容率的参数点可能对应不同的运动学分布，这证明微分测量有望消除简并，并提升未来三希格斯搜索的灵敏度。

版权归作者所有。本作品投稿至 SciPost Physics。许可信息将在发表后公布。出版信息将在发表后公布。

收稿日期 接受日期 发布日期

目录

1 引言 2

2 在 κ框架下的三希格斯产生 3 2.1 总截面 5 2.2 微分分布 11

3 结论 12

A 顶夸克-希格斯接触相互作用的微扰幺正性界限 15

参考文献 16

1 引言

希格斯玻色子的发现 2012 [1, 2] 补全了标准模型（SM）的粒子内容，并确立了电弱（EW）对称性破缺机制。此后，大型强子对撞机（LHC）物理计划的一项主要目标，便是不断提高对希格斯玻色子性质的测量精度。尽管其与电弱规范玻色子和第三代费米子的耦合已被约束在百分之几到百分之十的范围内，但其自相互作用仍基本未得到探索。因此，测量希格斯自耦合是对撞机物理尚待实现的最重要目标之一，因为它们能直接探测希格斯势的形状以及电弱对称性破缺的动力学。

在标准模型中，希格斯势 $V = \lambda\left(H^\dagger H - v^2/2\right)^2$ 由单一的四次耦合 $\lambda = m_h^2/(2v^2)$ 决定。电弱对称性破缺后，希格斯双重态可在幺正规范下写为 $H = \left(0, (v+h)/\sqrt{2}\right)^T$，而希格斯势的形式为

$$V = \frac{m_h^2}{2} h^2 + \lambda_3 v h^3 + \lambda_4 h^4 , \tag{1.1}$$

其定义了三次和四次希格斯自耦合 λ_3 和 λ_4。标准模型对这些耦合给出了唯一的预测值，

$$\lambda_3^{\mathrm{SM}} = \lambda , \qquad \lambda_4^{\mathrm{SM}} = \frac{\lambda}{4} , \tag{1.2}$$

一旦希格斯玻色子质量 $m_h \simeq 125\mathrm{GeV}$ 和真空期望值 $v \simeq 246\mathrm{GeV}$ 确定。任何偏离这些预测的情况，都将为超出标准模型的物理提供证据，例如扩展标量扇区、复合希格斯模型或电弱重子生成机制。关于此类超出标准模型（BSM）情景的讨论，可参见例如参考文献 [3–7]。

在大型强子对撞机上，双希格斯产生是直接探测三线性希格斯自耦合的主要手段，而单希格斯过程中的圈诱导效应则提供了互补约束 [8–17]。这些测量通常在 κ-框架 [18–20], 下进行解释，该框架通过耦合修正因子来描述相对于标准模型的偏离。对于希格斯三线性自耦合，定义

$$\kappa_3 = \frac{\lambda_3}{\lambda_3^{\mathrm{SM}}} . \tag{1.3}$$

利用大型强子对撞机 LHC第二轮运行的完整 $\sqrt{s} = 13\text{TeV}$ 数据集，ATLAS 和 CMS 合作组得出了合并后的 95% 置信水平（CL）约束 [21]

$$-0.71 < \kappa_3 < 6.1 \quad (\text{ATLAS} + \text{CMS}), \tag{1.4}$$

假设其他所有希格斯耦合均取标准模型值。高亮度大型强子对撞机（HL-LHC）的每个实验积分亮度为 3 ab^{-1}，ATLAS 和 CMS 的总积分亮度为 6 ab^{-1}，预计可将这一灵敏度提升至

$$0.5 < \kappa_3 < 1.7 \quad (\text{HL-LHC}). \tag{1.5}$$

这一预期基于参考文献 [22] 中的研究。

对四次希格斯自耦合进行约束要困难得多。通常将其参数化为

$$\kappa_4 = \frac{\lambda_4}{\lambda_4^{\text{SM}}}, \tag{1.6}$$

而三希格斯产生是强子对撞机上对其唯一的直接探测手段。然而，在 $\sqrt{s} = 14\,\text{TeV}$ 下，标准模型截面仅约为 100 ab；该截面是在量子色动力学（QCD）的次次领头阶（NNLO）计算得到的 [23], ，这使得此类测量在实验上极具挑战性。ATLAS [24] 和 CMS [25] 当前的搜索结果给出

$$-230 < \kappa_4 < 240 \quad (\text{ATLAS}), \qquad -177 < \kappa_4 < 185 \quad (\text{CMS}), \tag{1.7}$$

在 95% 置信水平下，假设其他所有耦合都与标准模型相似，特别是 $\kappa_3 = 1$。近期一项高亮度大型强子对撞机研究 [26] 预计这些界限将改善至

$$-81 < \kappa_4 < 89 \quad (\text{HL-LHC}), \tag{1.8}$$

ATLAS 和 CMS 的积分亮度合计为 6ab^{-1} 。除了三希格斯产生，双希格斯产生也通过两圈电弱修正 [26–30], 对 κ_4 敏感，尽管由此得到的约束通常较弱。四希格斯产生同样对 κ_4敏感，但再次只能给出较弱的直接约束 [31]。

本文在 κ框架下，对胶子融合产生三希格斯进行了全面研究。我们推导了包容截面的紧凑参数化表达式，其参数包括三线性和四次希格斯自耦合修正因子 κ_3 和 κ_4、顶夸克 Yukawa 耦合修正因子 κ_t，以及双顶夸克-双希格斯和双顶夸克-三希格斯耦合修正因子 κ_{2t} 和 κ_{3t}。本文纳入了顶夸克-希格斯接触相互作用，因为在希格斯玻色子以非线性方式实现的超出标准模型情景中，这些相互作用可能相当显著——例如参见参考文献 [32–35]。这些参数化为诠释当前和未来的大型强子对撞机测量提供了便捷框架。我们利用它们对 κ_3 和 κ_4 施加约束，其中包括相关变化对 κ_t的影响，并研究 κ_{2t}和 κ_{3t}的效应，从现有大型强子对撞机数据中首次得出针对 κ_{3t} 的专门约束。最后，我们展示了微分分布如何提供额外的灵敏度，并消除仅凭包容率无法解决的 κ 参数简并。附录 A 推导了 κ_{2t} 和 κ_{3t} 的微扰幺正性界限。LHC希格斯工作组在参考文献 [36]中介绍了另一项在胶子融合框架下对三希格斯产生的互补研究。该研究侧重点不同，也研究了 $\text{t}\bar{\text{t}}\text{hh}$ 产生。我们建议感兴趣的读者同时参阅这两项研究。

2 κ框架下的三希格斯产生

过去二十年来，强子对撞机上的三希格斯产生一直是理论研究的热点 [6, 23, 26, 27, 29, 35–52]。在标准模型中，胶子融合

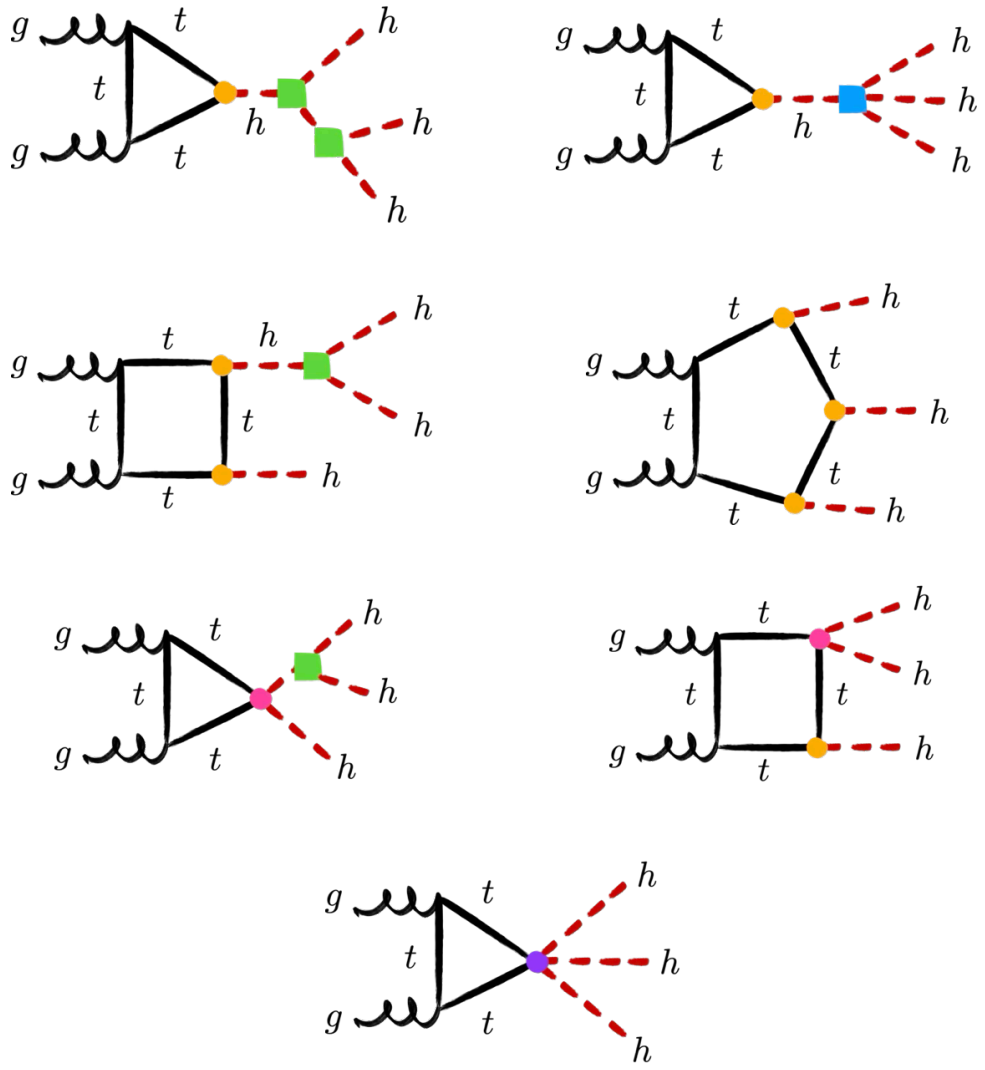


图1：通过胶子融合产生三希格斯的代表性单圈费曼图，展示了三角形、盒形和五边形拓扑。绿色和蓝色方块分别表示三次和四次希格斯自耦合，而橙色、洋红色和紫色圆圈分别表示顶夸克与一个、两个和三个希格斯玻色子耦合的顶点。

过程 $gg \to 3h$ 由图1第一、二行所示的单圈拓扑主导。图中，绿色和蓝色方块分别表示三次和四次希格斯自耦合的插入，橙色圆圈则表示顶夸克汤川耦合。第三行的两个图示例性地展示了涉及两个顶夸克与两个希格斯玻色子之间接触相互作用的超出标准模型贡献，以洋红色圆圈表示；第四行的图则展示了涉及两个顶夸克与三个希格斯玻色子之间接触相互作用的超出标准模型贡献，以紫色圆圈表示。在标准模型中，底夸克圈对$gg \to 3h$ 产生截面的影响在大型强子对撞机能区仅约为 0.2% [52]。因此，在下文给出的数值计算中，我们忽略这些贡献。

κ框架拉格朗日量中用于参数化相互作用的相关项

图中突出显示的顶点1可写为

$$\mathcal{L}_\kappa \supset -\kappa_3 v\lambda h^3 - \kappa_4 \frac{\lambda}{4} h^4 - \kappa_t \frac{y_t}{\sqrt{2}} \bar{t}th - \kappa_{2t} \frac{y_t}{\sqrt{2}v} \bar{t}th^2 - \kappa_{3t} \frac{y_t}{\sqrt{2}v^2} \bar{t}th^3 , \tag{2.1}$$

其中 κ_3 和 κ_4 分别在方程（1.3）和（1.6）中引入，而 $y_t = \sqrt{2}m_t/v$，其中 m_t 表示顶夸克质量。参数 κ_t 因此刻画了顶夸克汤川耦合的修正，而 κ_{2t} 和 κ_{3t} 分别刻画了两个顶夸克与两个和三个希格斯玻色子之间的接触相互作用。对于 $\kappa_3 = \kappa_4 = \kappa_t = 1$和 $\kappa_{2t} = \kappa_{3t} = 0$, 从方程（2.1）可恢复标准模型。需要指出的是，文献中对方程（2.1）中的各项采用了不同的归一化方式和命名。参见例如参考文献 [46, 47, 53, 54]。方程（2.1）所采用的归一化方式类似于希格斯有效场论（希格斯有效场论）框架中通常使用的约定 [53, 54]。

为确定包容性的$gg \to 3h$ 产生截面对 κ_3、 κ_4、κ_t、 κ_{2t}和 κ_{3t}的依赖关系，我们采用文献 [52]中计算的领头阶（LO）矩阵元，并将其实现于MCFM [55–58] 部分子级事件生成器中。我们取$m_h = 125$GeV、$m_t = 173$GeV和$v = 246.22$ GeV作为输入参数，并使用PDF4LHC21 部分子分布函数（PDFs） [59]。重整化尺度和因子化尺度动态选取为 $\mu_R = \mu_F = m_{3h}/2$，其中 m_{3h} 表示三希格斯系统的不变质量。我们还使用MadGraph5_aMC@NLO [60], 生成圈诱导的领头阶部分子级样本，所用输入参数、部分子分布函数和尺度选取均相同。两种方法所得结果的一致性在约1%以内，这为我们独立计算截面的数值结果提供了重要验证。

2.1 包容截面

在质心能量为 $\sqrt{s} = 13$ TeV、 $\sqrt{s} = 13.6$ TeV 和 $\sqrt{s} = 14$ TeV 时，我们将领头阶截面参数化为

$$\sigma_{\rm LO}^{\sqrt{s}} = \left(\sigma_{\rm LO}^{\sqrt{s}}\right)_{\rm SM} \sum_{n,m} c_{nm}^{\sqrt{s}} \left(\Delta\kappa_3\right)^n \left(\Delta\kappa_4\right)^m , \tag{2.2}$$

其中 $\Delta\kappa_i = \kappa_i - 1$ 对于 $i = 3,4$。相应的标准模型领头阶截面为

$$\left(\sigma_{\rm LO}^{13\,\rm TeV}\right)_{\rm SM} = 42.0\,\text{ab}, \qquad \left(\sigma_{\rm LO}^{13.6\,\rm TeV}\right)_{\rm SM} = 47.3\,\text{ab}, \qquad \left(\sigma_{\rm LO}^{14\,\rm TeV}\right)_{\rm SM} = 51.0\,\text{ab}. \tag{2.3}$$

对于 $\sqrt{s} = 13$TeV，方程 $c^{\sqrt{s}}{}_{nm}$ （2.2）中出现的系数为

$$\begin{aligned} c_{00}^{13\,\rm TeV} &= 0.106\kappa_t^2 - 0.682\kappa_t^3 + 1.93\kappa_t^4 - 3.29\kappa_t^5 + 2.94\kappa_t^6 \\ &\quad + \kappa_{2t}\left(1.61\kappa_t - 7.83\kappa_t^2 + 15.6\kappa_t^3 - 14.8\kappa_t^4\right) + \kappa_{2t}^2\left(6.98 - 22.4\kappa_t + 37.1\kappa_t^2\right) \\ &\quad + \kappa_{3t}\left(3.75\kappa_t - 11.5\kappa_t^2 + 0.464\kappa_t^3 + 37.7\kappa_{2t} - 60.2\kappa_{2t}\kappa_t\right) + 67.8\kappa_{3t}^2 , \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned} c_{10}^{13\,\rm TeV} &= 0.257\kappa_t^2 - 1.52\kappa_t^3 + 3.68\kappa_t^4 - 3.29\kappa_t^5 \\ &\quad + \kappa_{2t}\left(3.49\kappa_t - 13.4\kappa_t^2 + 15.6\kappa_t^3\right) + \kappa_{2t}^2\left(14.0 - 22.4\kappa_t\right) \\ &\quad + \kappa_{3t}\left(4.05\kappa_t - 11.5\kappa_t^2 + 37.7\kappa_{2t}\right) , \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$c_{20}^{13\,\rm TeV} = 0.287\kappa_t^2 - 1.25\kappa_t^3 + 1.84\kappa_t^4$$

$$+ \kappa_{2t}\left(2.82\kappa_t - 6.71\kappa_t^2\right) + 6.98\kappa_{2t}^2 + 2.02\kappa_{3t}\kappa_t , \tag{2.6}$$

$$c_{30}^{13\,\rm TeV} = 0.159\kappa_t^2 - 0.418\kappa_t^3 + 0.940\kappa_{2t}\kappa_t , \tag{2.7}$$

$$c_{40}^{13\,\text{太电子伏特}}=0.0397\kappa_t^2, \tag{2.8}$$

$$c_{01}^{13\,\text{TeV}}=0.0830\kappa_t^2-0.265\kappa_t^3+0.0897\kappa_t^4+\kappa_{2t}\left(0.674\kappa_t-1.12\kappa_t^2\right)+1.73\kappa_{3t}\kappa_t, \tag{2.9}$$

$$c_{11}^{13\,\text{TeV}}=0.0980\kappa_t^2-0。265\kappa_t^3+0。674\kappa_{2t}\kappa_t, \tag{2.10}$$

$$c_{21}^{13\,\text{TeV}}=0.0490\kappa_t^2, \tag{2.11}$$

$$c_{02}^{13\,\text{TeV}}=0。0170\kappa_t^2. \tag{2.12}$$

在 $\sqrt{s}=13.6$ TeV 时，相应的系数为

$$\begin{aligned}c_{00}^{13.6\,\text{TeV}}&=0.105\kappa_t^2-0.677\kappa_t^3+1.92\kappa_t^4-3.27\kappa_t^5+2.92\kappa_t^6\\&+\kappa_{2t}\left(1.61\kappa_t-7.79\kappa_t^2+15.5\kappa_t^3-14.8\kappa_t^4\right)+\kappa_{2t}^2\left(6.99-22.4\kappa_t+37.3\kappa_t^2\right)\\&+\kappa_{3t}\left(3.76\kappa_t-11.6\kappa_t^2+0.348\kappa_t^3+38.0\kappa_{2t}-60.7\kappa_{2t}\kappa_t\right)+69.3\kappa_{3t}^2,\end{aligned} \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned}c_{10}^{13.6\,\text{TeV}}&=0.255\kappa^2t-1.50\kappa^3t+3.66\kappa^4t-3.27\kappa^5t\\&+\kappa_{2t}\left(3.48\kappa_t-13.4\kappa_t^2+15.5\kappa_t^3\right)+\kappa_{2t}^2\left(14.0-22.4\kappa_t\right)\\&+\kappa_{3t}\left(4.04\kappa_t-11.6\kappa_t^2+38.0\kappa_{2t}\right),\end{aligned} \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned}c_{20}^{13.6\,\text{TeV}}&=0。285\kappa^2t-1。24\kappa^3t+1。83\kappa^4t\\&+\kappa_{2t}\left(2.80\kappa_t-6.68\kappa_t^2\right)+6.99\kappa_{2t}^2+2.02\kappa_{3t}\kappa_t,\end{aligned} \tag{2.15}$$

$$c_{30}^{13.6\,\text{TeV}}=0.157\kappa_t^2-0.414\kappa_t^3+0.935\kappa_{2t}\kappa_t, \tag{2.16}$$

$$c_{40}^{13.6\,\text{TeV}}=0.0394\kappa_t^2, \tag{2.17}$$

$$c_{01}^{13.6\,\text{TeV}}=0.0825\kappa_t^2-0.263\kappa_t^3+0.0878\kappa_t^4+\kappa_{2t}\left(0.673\kappa_t-1.12\kappa_t^2\right)+1.74\kappa_{3t}\kappa_t, \tag{2.18}$$

$$c_{11}^{13.6\,\text{TeV}}=0.0973\kappa_t^2-0.263\kappa_t^3+0.673\kappa_{2t}\kappa_t, \tag{2.19}$$

$$c_{21}^{13.6\,\text{太电子伏特}}=0.0487\kappa_t^2, \tag{2.20}$$

$$c_{02}^{13.6\,\text{太电子伏特}}=0.0169\kappa_t^2. \tag{2.21}$$

最后，对于 $\sqrt{s}=14$TeV，我们得到

$$\begin{aligned}c_{00}^{14\,\text{TeV}}&=0.104\kappa_t^2-0.674\kappa_t^3+1.91\kappa_t^4-3.25\kappa_t^5+2.91\kappa_t^6\\&+\kappa_{2t}\left(1.60\kappa_t-7.77\kappa_t^2+15.5\kappa_t^3-14.7\kappa_t^4\right)+\kappa_{2t}^2\left(6.99-22.4\kappa_t+37.4\kappa_t^2\right)\\&+\kappa_{3t}\left(3.76\kappa_t-11.6\kappa_t^2+0.274\kappa_t^3+38.2\kappa_{2t}-60.9\kappa_{2t}\kappa_t\right)+70.3\kappa_{3t}^2,\end{aligned} \tag{2.22}$$

$$\begin{aligned}c_{10}^{14\,\text{TeV}}&=0.253\kappa^2t-1.50\kappa^3t+3.64\kappa^4t-3.25\kappa^5t\\&+\kappa_{2t}\left(3.47\kappa_t-13.3\kappa_t^2+15.5\kappa_t^3\right)+\kappa_{2t}^2\left(14.0-22.4\kappa_t\right)\\&+\kappa_{3t}\left(4.04\kappa_t-11.6\kappa_t^2+38.2\kappa_{2t}\right),\end{aligned} \tag{2.23}$$

$$\begin{aligned}c_{20}^{14\,\text{TeV}}&=0。283\kappa^2t-1。23\kappa^3t+1。82\kappa^4t\\&+\kappa_{2t}\left(2.79\kappa_t-6.66\kappa_t^2\right)+6.99\kappa_{2t}^2+2.02\kappa_{3t}\kappa_t,\end{aligned} \tag{2.24}$$

$$c_{30}^{14\,\text{太电子伏特}}=0.156\kappa_t^2-0.411\kappa_t^3+0.931\kappa_{2t}\kappa_t, \tag{2.25}$$

$$c_{40}^{14\,\text{TeV}}=0。0391\kappa_t^2, \tag{2.26}$$

$$c_{01}^{14\,\mathrm{TeV}} = 0.0822\kappa_t^2 - 0.262\kappa_t^3 + 0.0866\kappa_t^4 + \kappa_{2t}\left(0.673\kappa_t - 1.12\kappa_t^2\right) + 1.75\kappa_{3t}\kappa_t\,, \quad (2.27)$$

$$c_{11}^{14\,\mathrm{TeV}} = 0.0969\kappa_t^2 - 0.262\kappa_t^3 + 0.673\kappa_{2t}\kappa_t\,, \quad (2.28)$$

$$c_{21}^{14\,\text{太电子伏特}} = 0.0485\kappa_t^2\,, \quad (2.29)$$

$$c_{02}^{14\,\text{太电子伏特}} = 0.0169\kappa_t^2\,. \quad (2.30)$$

系数 $c_{nm}^{\sqrt{s}}$ 在所考虑的质心能量范围内仅有轻微变化。由于它们已按标准模型截面归一化，因此预计部分子分布函数的选择同样不会对其产生显著影响。它们的相对蒙特卡洛不确定度（包括对 VEGAS [61] 次调用数量所导致的残余依赖性的估计）约为千分之几，因此某些系数的第三位数字可能有一两个单位的不确定性。例外是 $\kappa_{3t}\kappa^3{}_t$ 项 $c_{00}^{\sqrt{s}}$，该项源于较大的抵消，其不确定度为 2%–4%，因此只有前两位数字是有意义的。参数化结果还以机器可读格式作为辅助文件提供，随本文的 arXiv 投稿一同发布；文件采用完整数值精度，并包含所有系数的蒙特卡洛不确定度及其相关性。系数 $c_{nm}^{\sqrt{s}}$ 的高阶量子色动力学修正目前尚不清楚，不过原则上可以在无限顶夸克质量极限下对其进行估计。在标准模型中，这些修正使包容截面在量子色动力学的次次领头阶下增加约 1.7 倍的 K因子 [23]。参考文献 [36, 46, 47, 49, 52]中也给出了大型强子对撞机上三希格斯玻色子胶子融合截面的类似参数化结果。

图2中的两个面板展示了基于完整的 LHC第二轮运行数据集以及高亮度大型强子对撞机预期结果，对希格斯自耦合 κ_3 和 κ_4的灵敏度；每个实验的积分亮度为 3 ab^{-1} 。红色轮廓表示利用方程 (2.4)–(2.12) 和方程 (2.22)–(2.30) 中的参数化，由胶子融合产生三希格斯得出的 95%置信水平约束，并按方程 (2.3) 给出的相应标准模型领头阶截面归一化。对于 LHC第二轮运行，我们施加上限 $\mu_3^{\text{LHC Run 2}}\,\mathrm{h} < 588$ [25]；对于高亮度大型强子对撞机，我们则采用预期上限 $\mu_3^{\text{HL-LHC}}\,\mathrm{h} < 125$，与 [62]一致。在整个分析中，我们取 $\kappa_{2t} = \kappa_{3t} = 0$，黑色点表示标准模型预言。左侧面板显示，$\Delta\kappa_t = \pm 10\%$ 的偏移（其中 $\Delta\kappa_t = \kappa_t - 1$）会明显影响所得约束。LHC第二轮运行数据在 95%置信水平下仍允许此类偏移 [63, 64]。文献 [50] 已指出这一现象，其起因是方程 (2.4)–(2.30) 中出现的系数 $c_{nm}^{\sqrt{s}}$ 对 κ_t具有很强的幂律依赖。预计到高亮度大型强子对撞机运行结束时，顶夸克汤川耦合的测量精度将在 95%置信水平下达到 $\Delta\kappa_t = \pm 5\%$ [22]。因此，它对 κ_3–κ_4 平面中 $\mathrm{g\,g} \to 3\mathrm{h}$ 约束的影响将会减小，如右侧面板所示。最后值得指出的是，高亮度大型强子对撞机预期的 $\mathrm{g\,g} \to 3\mathrm{h}$ 约束与微扰幺正性 [6, 65, 66],所施加的约束相当；后者在两个面板中均以黑色虚线轮廓圈出的黄色区域表示。

图 3 和 4 分别展示了 κ_3–κ_{2t} 和 κ_4–κ_{2t} 平面上的灵敏度。红色等高线表示按照上述流程得到的胶子融合三希格斯产生的95%置信水平约束。除了 κ_t 按等高线标签所示变化外，所有未在坐标轴上显示的参数均固定为标准模型值，黑点表示标准模型预言。如图 2 所示，左侧各图表明，顶夸克汤川耦合变化 $\Delta\kappa_t = \pm 10\%$ 会显著影响所得约束；而右侧各图中考虑的较小变化 $\Delta\kappa_t = \pm 5\%$ 只会带来轻微改变。对于 κ_{2t}，LHC第二轮运行中的三希格斯产生给出

$$-5.1 < \kappa_{2t} < 5.3\,, \quad (2.31)$$

而预计高亮度大型强子对撞机将把这一范围收窄至

$$-2.3 < \kappa_{2t} < 2.5\,, \quad (2.32)$$

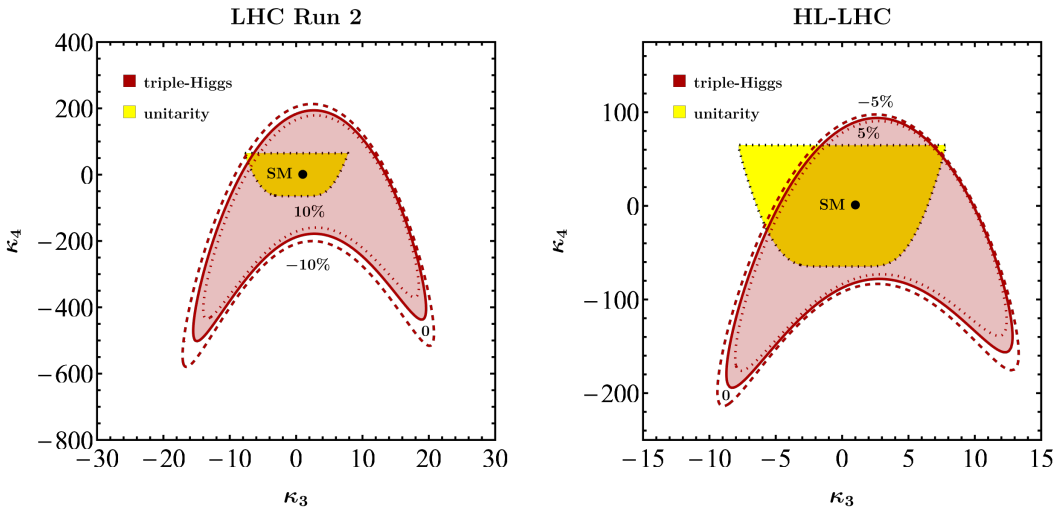


图2：LHC第二轮运行（左）和高亮度大型强子对撞机（右）中 κ_3–κ_4 平面的约束。红色轮廓表示胶子融合产生三希格斯过程给出的95%置信水平允许区域。实线红色轮廓对应于 $\kappa_t = 1$，而在LHC第二轮运行中，虚线（点线）轮廓分别对应 $\Delta\kappa_t = -10\%$（$\Delta\kappa_t = 10\%$），在高亮度大型强子对撞机中分别对应 $\Delta\kappa_t = -5\%$（$\Delta\kappa_t = 5\%$），其中 $\Delta\kappa_t = \kappa_t - 1$。我们设定$\kappa_{2t} = \kappa_{3t} = 0$。黑色点表示标准模型预言。由黑色点线轮廓界定的黄色区域表示树级$hh \to hh$ 散射所对应的微扰幺正性界限。

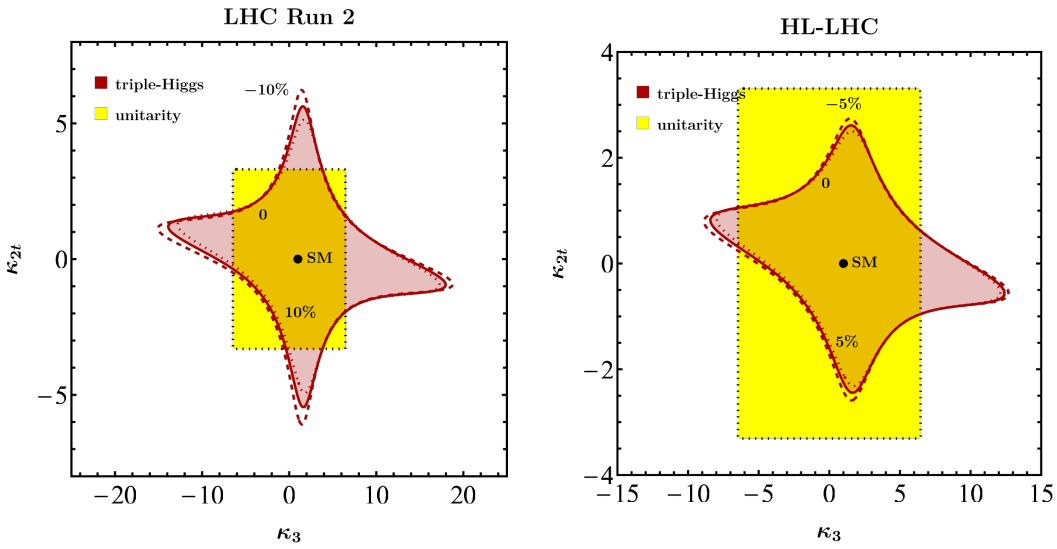


图3：与图 2相同，但为 κ_3–κ_{2t} 平面，分别对应LHC第二轮运行（左）和高亮度大型强子对撞机（右）。我们固定 $\kappa_4 = 1$和 $\kappa_{3t} = 0$。实线红色轮廓对应于$\kappa_t = 1$，而虚线和点线轮廓对应于图2图注中规定的变化。由黑色点线轮廓界定的黄色区域表示树级$hh \to hh$ 和 $t\bar{t} \to hh$ 散射所对应的微扰幺正性界限。

在95%的置信水平下。这些限制是通过固定 $\kappa_3 = \kappa_4 = \kappa_t = 1$和 $\kappa_{3t} = 0$得到的。在相同假设下，我们注意到，在LHC第二轮运行中获得的双希格斯产生信号强度的95%置信水平约束，$\mu_2^{\text{LHC Run 2}}{}_h < 2.5$ [21]，已经意味着

$$-0.19 < \kappa_{2t} < 0.72, \tag{2.33}$$

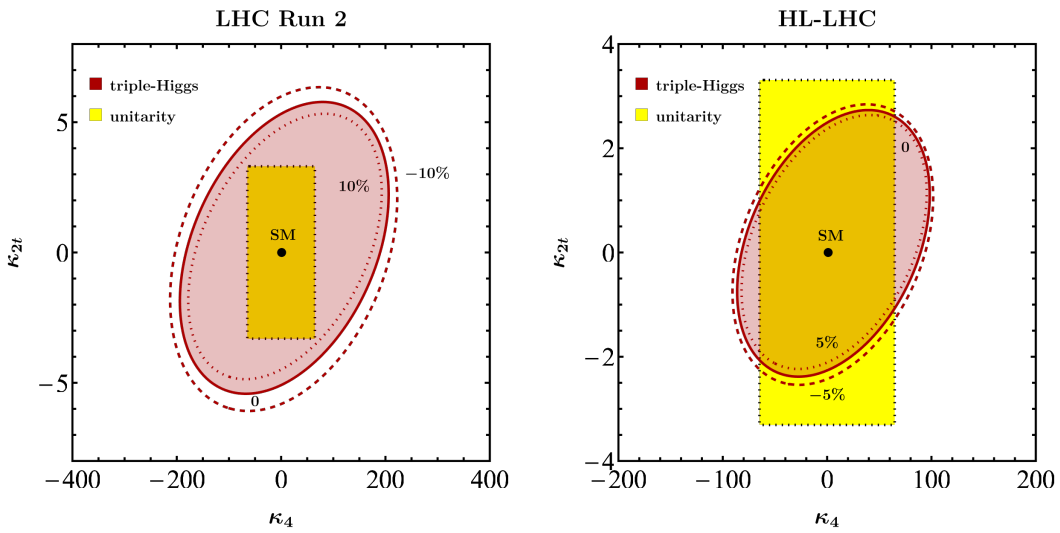


图4：与图3相同，但位于 κ_4–κ_{2t} 平面，分别对应大型强子对撞机第二轮运行（左）和高亮度大型强子对撞机（右）。我们固定 $\kappa_3 = 1$ 和 $\kappa_{3t} = 0$。红色实线轮廓对应$\kappa_t = 1$，而虚线和点线轮廓对应图2图注中指定的变化。由黑色点线轮廓围定的黄色区域表示树级$hh \to hh$ 和$t\bar{t} \to hh$ 散射给出的微扰幺正性界限。

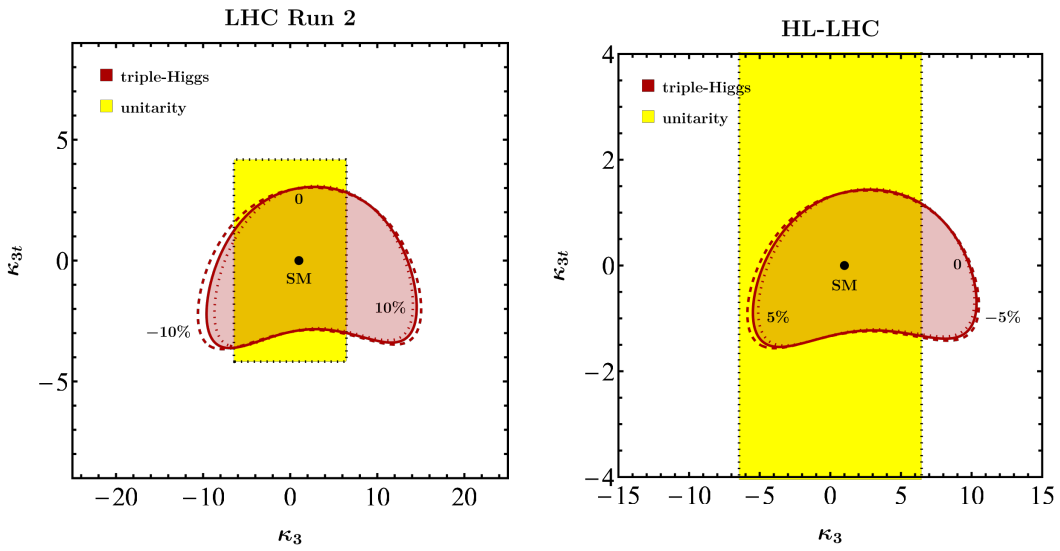


图5：与图2相同，但位于 κ_3–κ_{3t} 平面，分别对应大型强子对撞机第二轮运行（左）和高亮度大型强子对撞机（右）。我们固定 $\kappa_4 = 1$和 $\kappa_{2t} = 0$。红色实线轮廓对应$\kappa_t = 1$，而虚线和点线轮廓对应图2图注中指定的变化。由黑色点线轮廓围定的黄色区域表示树级$hh \to hh$ 和$t\bar{t} \to 3h$ 散射给出的微扰幺正性界限。

其中所引用的界限是利用参考文献 [53, 54] 中给出的表达式得到的。请注意，方程（2.31）中的界限弱于方程（κ_{2t} A.5）推导出的微扰幺正性界限，而方程（2.32）和（2.33）中的界限则更强。图3 和4中也用黑色虚线轮廓圈出的黄色区域标示了方程（A.5）给出的界限。因此，在单参数分析中，三希格斯产生预计无法比双希格斯产生对 κ_{2t} 提供更强的约束。不过，在多参数拟合中，它可以提供互补信息，尤其是在拟合涉及 κ_4时；该参数仅受到较弱的

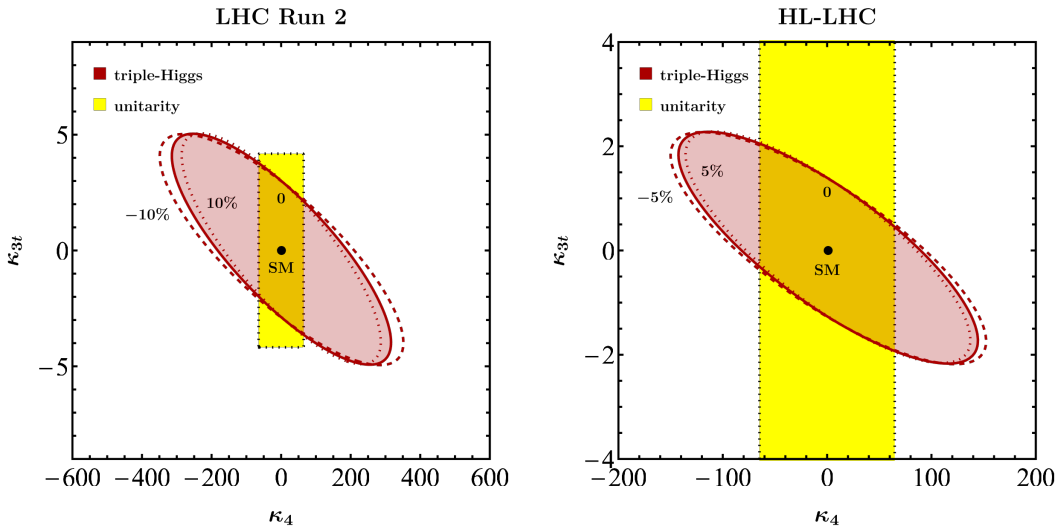


图6：与图4相同，但展示了大型强子对撞机第二轮运行（左）和高亮度大型强子对撞机（右）中的 κ_4–κ_{3t} 平面。我们固定 $\kappa_3 = 1$ 和 $\kappa_{2t} = 0$。实红色等高线对应于$\kappa_t = 1$，而虚线和点线等高线对应于图2标题中所规定的变化。由黑色点线等高线界定的黄色区域表示树级$hh \to hh$ 和$t\bar{t} \to 3h$ 散射所给出的微扰幺正性界限。

双希格斯 [26–30] 产生以及四希格斯 [31] 产生的约束。

图5 和6 分别展示了 κ_3–κ_{3t} 和 κ_4–κ_{3t} 平面中的灵敏度。红色等高线显示了通过胶子融合产生三希格斯所得到的95%置信水平约束，具体采用上述方法获得。除 κ_t外（其变化如等高线标签所示），坐标轴未显示的所有参数均固定为标准模型值，黑点表示标准模型预言。如图2所示，左图表明，顶夸克汤川耦合变化 $\Delta\kappa_t = \pm 10\%$会显著影响所得约束，而右图中考虑的较小变化 $\Delta\kappa_t = \pm 5\%$仅导致适度变化。对于耦合修正因子 κ_{3t}，大型强子对撞机第二轮运行中的三希格斯产生提供了

$$-2.9 < \kappa_{3t} < 3.0\,, \tag{2.34}$$

而预计高亮度大型强子对撞机将把这一范围提高到

$$-1.3 < \kappa_{3t} < 1.4\,, \tag{2.35}$$

在95%的置信水平下。方程（2.34）和（2.35）中给出的界限是在固定 $\kappa_3 = \kappa_4 = \kappa_t = 1$和 $\kappa_{2t} = 0$的情况下得到的。与方程（A.5）中推导出的 κ_{3t} 微扰幺正性界限相比，这两个界限都更严格；该微扰幺正性界限也在图5和6 中以黑色点状轮廓线包围的黄色区域表示。据我们所知，方程（2.34）中的限制构成了首个基于现有大型强子对撞机数据、针对由 κ_{3t} 参数化的顶夸克-希格斯接触相互作用的约束。参考文献 [46, 47]也得到了与方程（2.35）相当的高亮度大型强子对撞机预期结果。至于 κ_4，$gg \to 3h$ 产生因此为探测 κ_{3t}提供了特别敏感的手段，因为这一耦合修正因子在微扰理论的第一阶就会对该过程产生贡献。

对.....的显著敏感性 κ_{3t} 对于在当前及预期约束下可容纳的三希格斯信号大小同样具有重要影响。例如，如果 κ_3 和 κ_4 自由变化，而 $\kappa_t = 1$ 和 $\kappa_{2t} = \kappa_{3t} = 0$保持不变，则公式（1.4$hh \to hh$给出的微扰幺正性界限共同允许信号强度达到 $\mu_3^{\text{HL-LHC}}{}_h \lesssim 100$。相反，施加公式（1.5）给出的预期约束后，该上限降至 $\mu_3^{\text{HL-LHC}}{}_h \lesssim 85$。如果改为让 κ_3 和 κ_{2t} 自由变化，同时固定 $\kappa_4 = \kappa_t = 1$ 和

$\kappa_{3t} = 0$，公式（1.4）与公式（2.33）结合后得到 $\mu_3^{\text{HL-LHC}}\,\text{h} \lesssim 130$。采用公式（1.5）中的预期约束后，该上限降至 $\mu_3^{\text{HL-LHC}}\,\text{h} \lesssim 9$。因此，仅有 κ_3 和 κ_{2t} 偏离其标准模型值的情景，不太可能在大型强子对撞机上产生可观测的三希格斯信号。事实上，施加预期约束$0.77 < \mu_2^{\text{HL-LHC}}\,\text{h} < 1.23$ [67] 后，对于 $\kappa_4 = \kappa_t = 1$ 和 $\kappa_{3t} = 0$，最大信号强度被限制为 $\mu_3^{\text{HL-LHC}}\,\text{h} \lesssim 25$。类似地，在固定 $\kappa_3 = \kappa_t = 1$ 和 $\kappa_{3t} = 0$的同时，允许 κ_4 和 κ_{2t} 自由变化，并施加公式（2.33），得到 $\mu_3^{\text{HL-LHC}}\,\text{h} \lesssim 110$。相比之下，允许 κ_3 或 κ_4 中的任一个与 κ_{3t}共同变化，同时分别满足来自$\text{hh} \to \text{hh}$和$\text{t}\bar{\text{t}} \to 3\text{h}$的微扰幺正性约束，并将其余 κ 参数全部固定为标准模型值，即使在适用情况下施加公式（1.5）的预期约束后，也很容易得到超过当前大型强子对撞机第二轮运行限制 $\mu^{\text{LHC}}\,\text{Run 2}\ 3\text{h} < 588$ [25]的信号强度。这一显著增强反映了$\text{g g} \to 3\text{h}$截面对 κ_{3t}的显著依赖。由于在树图级，除三希格斯产生外的其他测量都无法约束 κ_{3t}，因此它在$\text{g g} \to 3\text{h}$中发挥着尤为独特的作用，并促使人们制定涉及 κ_{3t}的专门基准情景。

2.2 微分分布

三线性和四次希格斯自耦合的改变，不仅会影响包容性三希格斯产生率，也会影响$gg \to 3h$末态的运动学性质。图7 和8 展示了这一行为，给出了高亮度大型强子对撞机上标准模型及八种超出标准模型基准情景的归一化分布。图例中未标明的 κ 参数均固定为标准模型值，如方程（2.1）下方所述。左、右图分别展示三希格斯系统的不变质量m_{3h}，以及希格斯横向动量的标量和 $\sum p_{T,h}$。所有基准点均满足上文讨论的微扰幺正性约束，并以包容率几乎相同的点成对排列。图7 中的上、下两行分别对应$\mu_3^{\text{HL-LHC}}{}_{h} \simeq 60$ 和$\mu_3^{\text{HL-LHC}}{}_{h} \simeq 90$；图8 中的上、下两行则分别对应$\mu_3^{\text{HL-LHC}}{}_{h} \simeq 140$ 和$\mu_3^{\text{HL-LHC}}{}_{h} \simeq 240$。每对情景的包容截面之差均小于约5%。

图 7 上排的基准点仅在 κ_3 和 κ_4上有所不同。尽管它们的包容率几乎相同，但其 m_{3h} 和 $\sum p_{T,h}$ 分布最多相差约 50%，尤其是在峰值附近和高能尾部。在此，我们设定 $\kappa_t = 1$ 和 $\kappa_{2t} = \kappa_{3t} = 0$。改变 κ_t 主要会对未归一化谱进行缩放，因此对归一化后的形状影响甚微 [50]。因此，微分信息能够区分在包容率层面几乎简并的基准情景，并有望将高亮度大型强子对撞机的灵敏度扩展至方程（1.8）所给出的预期区间之外；该区间仅基于包容率 [26]。图 7 下排的基准点也呈现出类似的简并：要么 κ_3，要么 κ_4，同时伴随一个非标准模型的 κ_{2t}取值。尽管它们的包容率几乎相同，但相应的运动学形状有所不同，这表明微分可观测量有助于区分希格斯自耦合与顶夸克-希格斯接触相互作用的不同组合。不过需要指出的是，图 7 中所示的所有基准点均低于高亮度大型强子对撞机信号强度的预期上限。因此，要利用它们形状上的差异，需要提高实验灵敏度。

图8 中的基准情景展示了 κ_{3t} 对三希格斯产生运动学性质的影响。由于它们的信号强度超过了高亮度大型强子对撞机预期的上限，$\mu_3^{\text{HL-LHC}}{}_{h} < 125$，其独特的运动学形状对未来搜寻尤为重要，并可能提高对 κ_{3t}非零情景的灵敏度。如上方各图所示，κ_{3t} 非零且 κ_3 或 κ_4 取值偏离标准模型值的超出标准模型情景，可产生高于高亮度大型强子对撞机预期灵敏度的信号强度。然而，当 κ_3、κ_4和 κ_{3t} 的取值均偏离其标准模型值时，形状差异最为显著，如下方各图所示。这是因为在这种情况下，对$gg \to 3h$ 有贡献的不同拓扑之间的干涉增强。总的来说，

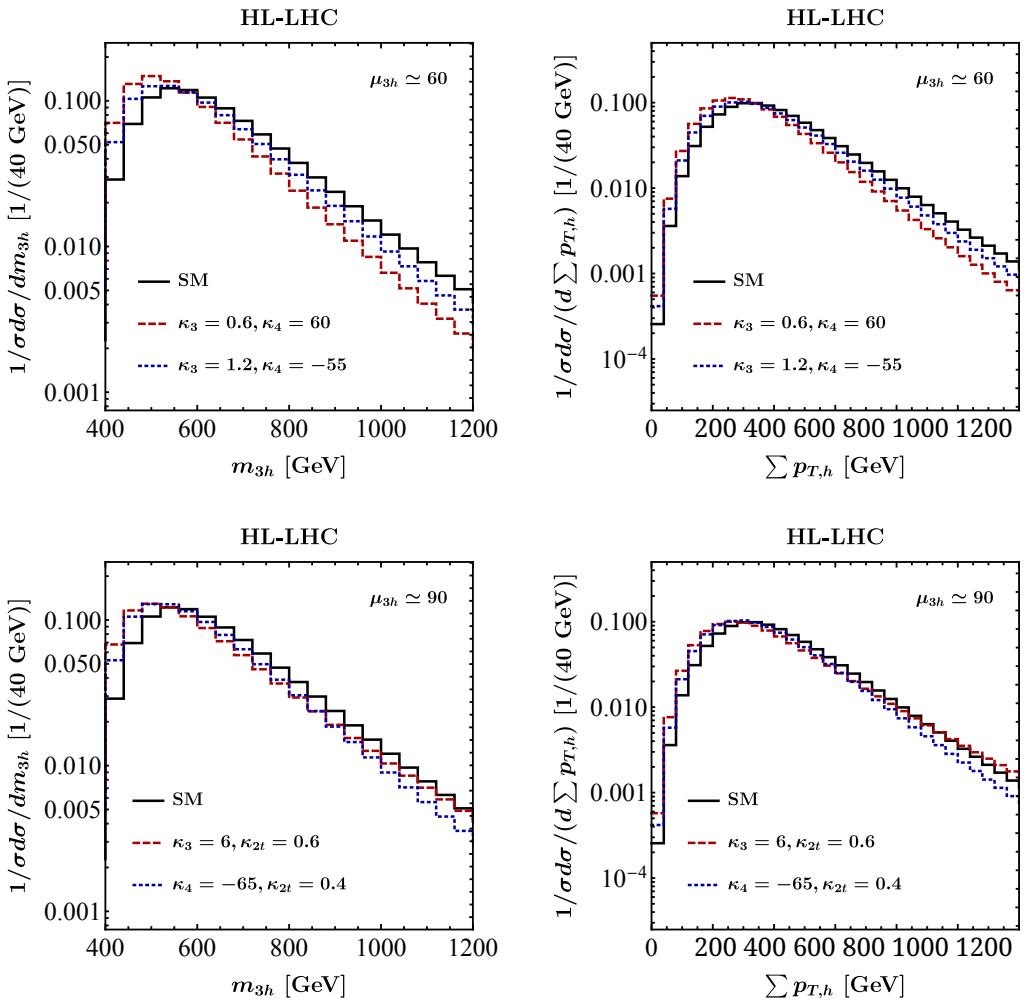


图 7：在高亮度大型强子对撞机上，标准模型（黑色实线）以及四种$gg \to 3h$产生过程的归一化运动学分布，后者对应于图中所示的四种κ基准情景（红色虚线和蓝色点线）。图中未标示的κ参数均固定为标准模型值，具体如方程（2.1）所述。左图和右图分别展示了三希格斯系统的不变质量m_{3h}以及希格斯玻色子横向动量的标量和，$\sum_h p_T$，$_h$。上图和下图中的超出标准模型的预测分别对应于$\mu_3^{\text{HL-LHC}}{}_h \simeq 60$和$\mu_3^{\text{HL-LHC}}{}_h \simeq 90$。更多详情请参见正文。

图 7 和 8 表明，微分信息能够消除包容率中无法显现的参数简并，并提高对希格斯自耦合和顶夸克-希格斯接触相互作用的灵敏度。因此，在未来高亮度大型强子对撞机对g g $\to 3h$产生的搜寻中，除了包容率之外，还应采用运动学可观测量。

3 结论

与希格斯玻色子和电弱规范玻色子及第三代费米子的耦合已在接受日益精确的探测不同，LHC第二轮运行数据仍未对希格斯自耦合施加多少限制。因此，希格斯势仍有很大空间可在超出标准模型情景中发生显著改变。事实上，理论考量和

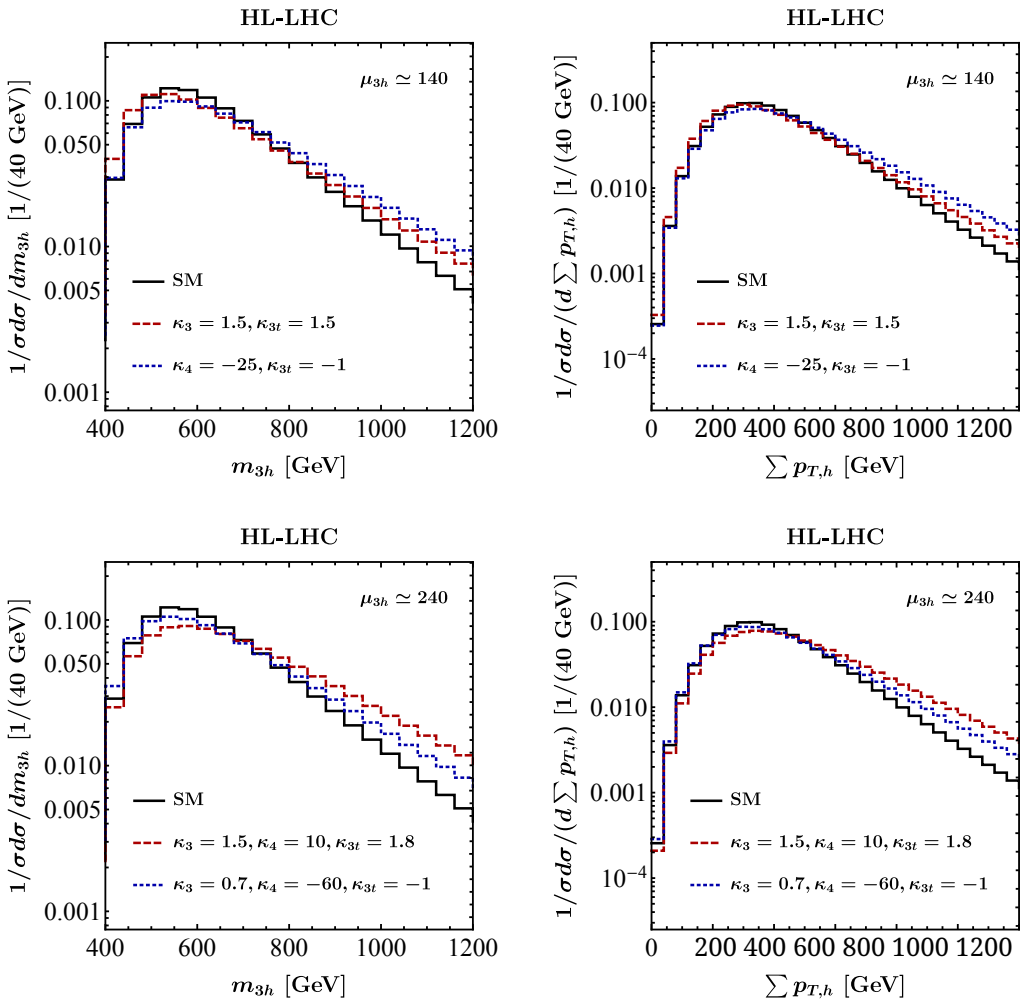


图 8：与图 7相同，但对应于 κ 框架中的另外四个基准情景，如各面板所示。面板中未标明的 κ 参数均固定为标准模型值，具体规定见方程（2.1）下方。上方和下方面板中的超出标准模型的预测分别对应于 $\mu_3^{\mathrm{HL-LHC}}{}_{h} \simeq 140$ 和 $\mu_3^{\mathrm{HL-LHC}}{}_{h} \simeq 240$。

明确的紫外完备模型表明，即使希格斯自耦合偏离超过 200%，在无需精细调节参数的情况下，仍可与当前的单希格斯测量相容 [5]。因此，在高亮度大型强子对撞机及未来对撞机上测量多希格斯产生，为探索参数空间中尚未受到充分约束的区域提供了独特机会；即使单希格斯可观测量仍接近其标准模型预言，也具有显著的发现潜力。顶夸克-希格斯接触相互作用也存在类似情况；在采用非线性希格斯实现的超出标准模型情景中，这些相互作用同样可能发生显著改变 [32]。

在本文中，我们在 κ框架下推导了胶子融合三希格斯产生的紧凑“袖珍公式”，该公式在微扰理论的领头阶有效，并保留了对 κ_3、κ_4、κ_t、κ_{2t} 和 κ_{3t} 的完整依赖，适用于质心能量为 $\sqrt{s} = 13$ TeV、$\sqrt{s} = 13.6$ TeV 和 $\sqrt{s} = 14$ TeV 的情形。由于我们的推导基于灵活的矩阵元实现，将这些“袖珍公式”扩展至其他耦合修正（例如希格斯有效场论 [54], 次领头阶中出现的修正）相对直接。这些“袖珍公式”以机器可读格式作为辅助文件随 arXiv 投稿一并提供，

本文中以完整数值精度给出，并附有所有系数的蒙特卡洛不确定度及其相关性。我们的结果补充了 LHC希格斯工作组在参考文献 [36], 中的研究；该研究侧重于在希格斯有效场论中对包含性分布和微分分布进行建模，也涵盖了 $t\bar{t}hh$ 产生。两项工作结合起来，为解读大型强子对撞机上的三希格斯搜索提供了一套一致的基础，我们鼓励读者将两者结合使用。

将这些参数化应用于当前和预期的大型强子对撞机数据后，我们发现，目前 κ_t 的不确定性会对 κ_3–κ_4 平面中的约束结果产生明显影响。这一效应在文献 [50]中也曾被指出。在高亮度大型强子对撞机中，这种依赖性会减弱，因为预计顶夸克的约卡awa耦合能够以几个百分点的精度确定。对于 κ_{2t}（其对双顶夸克-双希格斯接触相互作用进行参数化），在单参数分析中，三希格斯产生不太可能提供比双希格斯产生更强的约束。不过，在全局拟合中，它仍能提供互补信息，尤其是在纳入 κ_4之后，因为双希格斯 [26–30] 和四希格斯 [31] 产生对该耦合的约束仍然很弱。对于 κ_{3t}（其对双顶夸克-三希格斯接触相互作用进行参数化），我们利用现有大型强子对撞机数据首次获得了对该耦合的约束，如方程（2.34）所示。即使在 $\mathcal{O}(1)$取值下，它对三希格斯产生也已具有显著影响；这一影响源于图1最后一个图示所展示的接触相互作用拓扑。由于该贡献不涉及内部希格斯传播子，因此不受传播子抑制。因而，胶子融合三希格斯产生为探测 κ_{3t}提供了特别敏感的手段。

我们的结果进一步表明，导致包容性$gg \to 3h$ 速率几乎相同的参数取值，仍可能产生不同的运动学分布。对于 κ_3 和 κ_4 的不同组合，以及涉及由 κ_{2t} 和 κ_{3t}参数化的顶夸克-希格斯接触相互作用的情景，情况都是如此。尤其值得关注的是，具有非零 κ_{3t} 且 κ_3 和/或 κ_4取值偏离标准模型值的超出标准模型情景；这类情景既可能使信号强度超过高亮度大型强子对撞机预期的上限，$\mu_3^{\text{HL-LHC}}{}_h < 125$ [62]，也会呈现独特的运动学形状。我们尤其发现了混合型 κ_3、κ_4和 κ_{3t} 基准情景：它们的包容率几乎相同，$\mu_3^{\text{HL-LHC}}{}_h \simeq 240$，但归一化后的运动学分布与标准模型预言及彼此之间均有明显差异。这些例子说明，微分信息能够消解包容率中仍然隐匿的参数简并，从而在未来三希格斯搜索中进一步提高对希格斯自耦合和顶夸克-希格斯接触相互作用的灵敏度。</output>

在单参数分析中，对高亮度大型强子对撞机的预期灵敏度 κ_4 仍然有限，约束仅达到 $|\kappa_4| \lesssim 80$，与基于微扰幺正性论证得出的约束相当 [6, 65, 66]。未来环形对撞机拟议中的强子对撞机阶段，可将对四次希格斯自耦合的灵敏度提高约一个数量级 [27, 29, 40–42, 44–49, 51]。然而，要达到 50% 的精度，很可能需要未来 μ子对撞机的能力 [68]。

致谢

本研究在LHC希格斯工作组框架内开展，是CERN报告5的一项贡献。我们感谢工作组成员所进行的宝贵讨论，也感谢 Alexan- dra Carvalho、Ennio Salvioni、Angela Taliercio 和 Eleni Vryonidou 提出的有益意见，这些意见帮助我们改进了稿件。UH 感谢 Konstantin Schmid 参与有益的讨论。我们感谢使用 Claude Opus 5.5（Anthropic）这一人工智能助手；它对人工编写的MCFM 实现进行了交叉核验，该实现计算了具有反常希格斯耦合的$gg \to 3h$ 振幅，并帮助提高了以下参数化的准确性

方程（2.4）–（2.30），通过从平方振幅的精确分解推导这些结果，而非进行拟合。所有结果均由作者核验；作者对本研究内容承担全部责任。本稿由 Fermi Forward Discovery Group, LLC 根据与美国能源部科学办公室高能物理办公室签订的合同（编号 89243024CSC000002）撰写。GDL 感谢欧盟地平线欧洲计划研究与创新项目通过玛丽·斯克沃多夫斯卡-居里资助协议（编号 101270050）提供支持。RKE 感谢获得莱弗休姆信托基金颁发的莱弗休姆荣休奖学金。AP 感谢美国国家科学基金会（资助编号 PHY 2210161）以及美国能源部科学办公室核物理办公室（奖励编号 DE-SC0025728）提供支持。

A 顶夸克-希格斯接触相互作用的微扰幺正性界限 s

与耦合修正因子 κ_{2t} 和 κ_{3t} 成正比的顶夸克-希格斯接触相互作用（在公式（2.1）中引入）会产生 t ¯t $\to$ hh 和 t ¯t $\to$ 3h 的树级振幅。在高能极限 ˆs $\gg$ m^2 t 下，其中 ˆs 表示 t ¯t 系统的部分子质心能量的平方，标量双线性 ¯t t 选择顶夸克和反顶夸克相同的物理螺旋度。等价地，对于 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，旋量乘积 ¯v(p2, λ_2) u(p1, λ_1) 为零，误差项受 m$_t$/$\sqrt{\text{ˆs}}$ 抑制。因此，在领先阶，只有两种螺旋度构型 $(\lambda_1, \lambda_2) = (\pm 1/2, \pm 1/2)$ 有贡献。在标准约定中，反顶夸克的物理螺旋度为 λ_2，而其沿 z轴的自旋投影为 $-\lambda_2$，因为反顶夸克沿 −z 方向运动。因此，总角动量投影为 J$_z$ = $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$。由此，所得振幅由 J = 0 分波主导。

在高能极限下，对初态顶夸克自旋取平均，并计入末态相同希格斯玻色子的影响后，总截面为

$$\sigma(t\bar{t} \to hh) = \frac{\kappa_{2t}^2 y_t^2}{32\pi} \frac{1}{v^2}, \qquad \sigma(t\bar{t} \to 3h) = \frac{3\kappa_{3t}^2 y_t^2}{1024\pi^3} \frac{\hat{s}}{v^4}, \tag{A.1}$$

其中，这两个表达式分别使用了积分后的无质量双体和三体相空间体积 $\Phi_2(\hat{s}) = 1/(8\pi)$和 $\Phi_3(\hat{s}) = \hat{s}/(256\pi^3)$，以及末态相同希格斯玻色子的 2! 和 3! 对称因子。由于顶夸克-希格斯接触相互作用是色荷中性的，因此只有色单态 $t\bar{t}$ 道有贡献。上面的截面是针对这一道给出的。进行颜色平均会引入一个整体因子 1/3，但微扰幺正性界限也会按相同因子缩放，因此对 κ_{2t} 和 κ_{3t} 的最终界限保持不变。

对于具有确定螺旋度构型的双粒子初态，微扰幺正性对与单个分波 J 相关的独占截面给出的界限为

$$\sigma^J_{\text{excl}} \leq \frac{4\pi(2J+1)}{\hat{s}}. \tag{A.2}$$

这里，σ^J excl 指固定的初始螺旋度构型。由于四种初始自旋组合中只有两种会产生非零振幅，对初始自旋取平均后得到$\sigma = \sigma^J$ excl/2。令 $J = 0$ 分波达到饱和，则得到

$$\sigma \leq \frac{2\pi}{\hat{s}}. \tag{A.3}$$

这与$t\bar{t} \to hh$ 过程中的玻色对称性一致。由于接触振幅各向同性，它显然在交换两个相同希格斯玻色子时保持不变，对应于变换 $\theta \to \pi - \theta$。相关的 Wigner 矩阵元

为$d^J_{0,0}(\theta) = P_J(\cos\theta)$，其中$P_J(\cos\theta)$表示$J^{\text{th}}$勒让德多项式，且满足$d^J_{0,0}(\pi-\theta) = (-1)^J d^J_{0,0}(\theta)$。因此，玻色对称性要求部分波展开仅包含偶数值的$J$，其中$J = 0$是允许的最低分波。

将界（A.3）应用于方程（A.1中的两个截面，得到

$$|\kappa_{2t}| \le 8\pi \frac{v}{y_t\sqrt{\hat{s}}}, \qquad |\kappa_{3t}| \le 32\sqrt{\frac{2}{3}}\pi^2 \frac{v^2}{y_t\hat{s}}, \tag{A.4}$$

这与量纲分析的预期一致：与五维相互作用相关的修正项κ_{2t}受限于$1/\sqrt{\hat{}}s$，而与六维相互作用相关的修正项κ_{3t}受限于$1/\hat{}s$。这些界仅适用于物理希格斯玻色子。由标准模型有效场论中的完整电弱对称六维算符得到的相应界必然更严格，因为它还包括应有的戈德斯通玻色子道，例如参考文献[69]中对此进行了明确说明。

为确保我们对$gg \to 3h$微分分布高能尾部的预测仍处于κ框架的有效范围内，我们将分析限制在部分子质心能量低于$t\bar{}t \to hh$和$t\bar{}t \to 3h$子振幅达到微扰幺正性界的能标。根据图7和8所示的分布，我们采用$\sqrt{\hat{}}s = 2\text{TeV}$作为代表性基准。在此能量下，对于$y_t \simeq 0.94$，我们得到 –

$$|\kappa_{2t}| \le 3.3, \qquad |\kappa_{3t}| \le 4.2. \tag{A.5}$$

这些界限用于第2节所述的分析中。

参考文献

[1] G. Aad 等，利用大型强子对撞机上的 *ATLAS*探测器搜寻标准模型希格斯玻色子时发现一种新粒子，Phys. Lett. B **716**，1（2012年），doi：10.1016/j.physletb.2012.08.020，1207.7214。

[2] S. Chatrchyan 等，利用大型强子对撞机上的 *CMS* 实验发现质量为 *125 GeV* 的新玻色子，Phys. Lett. B **716**，30（2012年），doi：10.1016/j.physletb.2012.08.021，1207.7235。

[3] J. Alison 等，对撞机上的希格斯玻色子势：现状与展望，Rev. Phys.**5**，100045（2020），doi：10.1016/j.revip.2020.100045，1910.00012。

[4]H. Bahl、J. Braathen 和 G. Weiglein，三线性希格斯耦合对扩展希格斯扇区的新约束，《物理评论快报》**129**（23），231802（2022），doi：10.1103/PhysRevLett.129.231802，2202.03453。

[5] G. Durieux、M. McCullough 和 E. Salvioni，希格斯自耦合边界的绘制，JHEP**12**，148（2022），doi：10.1007/JHEP12(2022)148，[勘误：JHEP **02**，165（2023）]，2209.00666。

[6] P. Stylianou 和 G. Weiglein，来自大型强子对撞机及更高能区三希格斯产生的三线性和希格斯四次耦合约束，《欧洲物理学杂志C》**84**（4），366（2024），doi：10.1140/epjc/s10052-024-12722-9，2312.04646。

[7] V. Maura, B. A. Stefanek 和 T. You，精度弥补能量：*Tera-Z* 上的电弱精密检验，JHEP **10**，022（2025），doi：10.1007/JHEP10(2025)022，2412.14241。

[8] M. Gorbahn 和 U. Haisch，《三线性希格斯耦合的间接探测：g g → h 和 h → $\gamma\gamma$》，JHEP 10，094（2016），doi:10.1007/JHEP10(2016)094，1607.03773。[9] G. Degrassi、P. P. Giardino、F. Maltoni 和 D. Pagani，《通过大型强子对撞机上的单希格斯产生探测希格斯自耦合》，JHEP 12，080（2016），doi:10.1007/JHEP12(2016)080，1607.04251。[10] W. Bizo´n、M. Gorbahn、U. Haisch 和 G. Zanderighi，《利用矢量玻色子融合和大型强子对撞机上的伴随希格斯产生约束三线性希格斯耦合》，JHEP 07，083（2017），doi:10.1007/JHEP07(2017)083，1610.05771。[11] F. Maltoni、D. Pagani、A. Shivaji 和 X. Zhao，《通过大型强子对撞机上的单希格斯微分测量确定三线性希格斯耦合》，《欧洲物理学杂志C》77(12)，887（2017），doi:10.1140/epjc/s10052-017-5410-8，1709.08649。[12] M. Gorbahn 和 U. Haisch，《含修正三线性希格斯耦合的希格斯伴喷注产生双圈振幅》，JHEP 04，062（2019），doi:10.1007/JHEP04(2019)062，1902.05480。[13] U. Haisch 和 G. Koole，《大型强子对撞机上的非壳希格斯产生：探测三线性希格斯耦合》，JHEP 02，030（2022），doi:10.1007/JHEP02(2022)030，2111.12589。[14] J. Gao、X.-M. Shen、G. Wang、L. L. Yang 和 B. Zhou，《通过希格斯玻色子+喷注产生探测希格斯玻色子三线性自耦合》，Phys. Rev. D 107(11)，115017（2023），doi:10.1103/PhysRevD.107.115017，2302.04160。[15] U. Haisch 和 M. Niggetiedt，《含希格斯三次自耦合的希格斯伴喷注产生精确双圈振幅》，JHEP 10，236（2024），doi:10.1007/JHEP10(2024)236，2408.13186。[16] A. Ghosh、M. Griese、U. Haisch 和 T. H. Park，《通过非壳希格斯产生，利用神经模拟推断希格斯三线性自耦合》，《欧洲物理学杂志C》86(4)，415（2026），doi:10.1140/epjc/s10052-026-15605-3，2507.02032。[17] A. Gevorgyan 等，《非壳希格斯玻色子测量：汤川耦合、自耦合、复合性与宽度》（2026），2607.23352。[18] A. David、A. Denner、M. Duehrssen、M. Grazzini、C. Grojean、G. Passarino、M. Schu- macher、M. Spira、G. Weiglein 和 M. Zanetti，《大型强子对撞机希格斯横截面工作组关于探索类希格斯粒子耦合结构的临时建议》（2012年），1209.0040。[19] J. R. Andersen 等，《大型强子对撞机希格斯产生截面手册：3. 希格斯性质》（2013年），doi:10.5170/CERN-2013-004，1307.1347。[20] D. de Florian 等，《大型强子对撞机希格斯产生截面手册：4. 揭示希格斯扇区的本质》，CERN Yellow Rep. Monogr. 2，1（2017），doi:10.23731/CYRM-2017-002，1610.07922。[21] G. Aad 等，《ATLAS 和 CMS 对大型强子对撞机上希格斯玻色子对产生搜索的联合分析》，$\sqrt{s} = 13$ TeV（2026），2602.23991。[22] ATLAS 和 CMS 对高亮度大型强子对撞机物理预期的重点介绍，欧洲核子研究中心，日内瓦，（2025），https://cds.cern.ch/record/2929200.[23] D. de Florian、I. Fabre 和 J. Mazzitelli，《量子色动力学次次领头阶下强子对撞机上的三希格斯产生》，JHEP 03，155（2020），doi:10.1007/JHEP03(2020)155，1912.02760。

[24] G. Aad等，使用ATLAS探测器在$\sqrt{s} = 13$ TeV质子-质子碰撞中搜索六底夸克末态的三希格斯玻色子产生，《Phys. Rev. D》111(3)，032006（2025），doi:10.1103/PhysRevD.111.032006，2411.02040。[25] A. Gevorgyan等，在$\sqrt{s} = 13$ TeV质子-质子碰撞中搜索含六个底夸克末态的非共振三希格斯玻色子产生（2026），2607.05145。[26] J.-L. Ding等，利用多希格斯产生约束希格斯势（2026），đoi:10.21468/SciPostPhysCommRep.24，2601.13248。[27]W. Bizo´n、U. Haisch和L. Rottoli，未来强子对撞机中双希格斯产生对四次希格斯自耦合的约束，JHEP 10，267（2019），doi:10.1007/JHEP10(2019)267，1810.04665。[28] S. Borowka、C. Duhr、F. Maltoni、D. Pagani、A. Shivaji和X. Zhao，通过强子对撞机中的双希格斯玻色子产生探测标量势，JHEP 04，016（2019），doi:10.1007/JHEP04(2019)016，1811.12366。[29]W. Bizo´n、U. Haisch、L. Rottoli、Z. Gillis、B. Moser和P. Windischhofer，《关于未来强子对撞机中双希格斯产生的四次希格斯自耦合约束》的补遗 *[*JHEP 10（2019） *267]*，JHEP 02，170（2024），doi:10.1007/JHEP02(2024)170，2402.03463。[30] H. T. Li、Z.-G. Si、J. Wang、X. Zhang和D. Zhao，具有截面三次和四次幂依赖关系的希格斯玻色子自耦合改进约束，《Chin. Phys. C》49(2)，023107（2025），doi:10.1088/1674-1137/ad9d1d，2407.14716。[31] A. Papaefstathiou和G. Tetlalmatzi-Xolocotzi，高亮度大型强子对撞机中的四希格斯玻色子产生（2026），2608.16998。[32]M. Gillioz、R. Gröber、C. Grojean、M. Mühlleitner和E. Salvioni，复合模型中的希格斯低能定理（及其修正），JHEP 10，004（2012），doi:10.1007/JHEP10(2012)004，1206.7120。[33] R. Contino、M. Ghezzi、C. Grojean、M. Mühlleitner和M. Spira，轻希格斯型标量的有效拉格朗日量，JHEP 07，035（2013），doi:10.1007/JHEP07(2013)035，1303.3876。[34] H.-L. Li、L.-X. Xu、J.-H. Yu和S.-H. Zhu，有效场论、希格斯非线性、复合性与（中性）自然性相遇，JHEP 09，010（2019），doi:10.1007/JHEP09(2019)010，1904. 05359。[35]P. Agrawal、D. Saha、L.-X. Xu、J.-H. Yu和C. P. Yuan，确定未来对撞机中希格斯势的形状，《Phys. Rev. D》101(7)，075023（2020），doi:10.1103/PhysRevD.101.075023，1907.02078。[36] A. Bethani、V. Cairo、A. Carvalho、T. Lange、S. Merianos、A. Papaefstathiou、X. Li和C. Zhou，使用矩阵方法，在LHC和高亮度大型强子对撞机中对类标准模型耦合和希格斯有效场论下HHH及$t\bar{t}$ H H过程中的多希格斯信号进行建模（2026），LHCHWG-2026- 013。[37] T. Plehn和M. Rauch，强子对撞机中的希格斯四次耦合，《Phys. Rev. D》72，053008（2005），doi:10.1103/PhysRevD.72.053008，hep-ph/0507321。

[38] T. Binoth、S. Karg、N. Kauer和R. Rückl，标准模型及其扩展中的多希格斯玻色子产生，《Phys. Rev. D》74，113008（2006），doi:10.1103/PhysRevD.74.113008，hep-ph/0608057。[39]F. Maltoni、E. Vryonidou和M. Zaro，次领头阶胶子-胶子融合中双希格斯和三希格斯产生的顶夸克质量效应，JHEP 11，079（2014），doi:10.1007/JHEP11(2014)079，1408.6542。[40] A. Papaefstathiou和K. Sakurai，100 TeV质子-质子对撞机中的三希格斯玻色子产生，JHEP 02，006（2016），doi:10.1007/JHEP02(2016)006，1508.06524。[41] C.-Y. Chen、Q.-S. Yan、X. Zhao、Y.-M. Zhong和Z. Zhao，在100 TeV强子对撞机中通过4b2γ 衰变道探测三希格斯产生，《Phys. Rev. D》93(1)，013007（2016），doi:10.1103/PhysRevD.93.013007，1510.04013。[42] B. Fuks、J. H. Kim和S. J. Lee，在质心能量为100 TeV的质子-质子碰撞中探测希格斯自相互作用，《Phys. Rev. D》93(3)，035026（2016），doi:10.1103/PhysRevD.93.035026，1510.07697。[43] D. de Florian和J. Mazzitelli，三希格斯玻色子产生截面的两圈修正，JHEP 02，107（2017），doi:10.1007/JHEP02(2017)107，1610.05012。[44] W. Kilian、S. Sun、Q.-S. Yan、X. Zhao和Z. Zhao，多希格斯玻色子末态中的新物理，JHEP 06，145（2017），doi:10.1007/JHEP06(2017)145，1702.03554。[45] B. Fuks、J. H. Kim和S. J. Lee，利用τ轻子和b喷注仔细检验未来100 TeV质子-质子对撞机中的希格斯四次耦合，《Phys. Lett. B》771，354（2017），doi:10.1016/j.physletb.2017.05.075，1704.04298。[46]A. Papaefstathiou和G. Tetlalmatzi-Xolocotzi，当前及未来质子对撞机中具有反常相互作用的多希格斯玻色子产生，JHEP 06，124（2024），doi:10.1007/JHEP06(2024)124，2312.13562。[47]H. Abouabid等，HHH白皮书，《欧洲物理学杂志C》84，1183（2024），doi:10.1140/epjc/s10052-024-13376-3，2407.03015。[48] Z. Dong、X. Sun、B. Guo、L. Zhang、Z. Li、J. Wang、Z. Li、Y. Ban和Y. Mao，在100 TeV强子对撞机中通过 4τ2b衰变道探测三希格斯产生，JHEP 08，040（2025），doi:10.1007/JHEP08(2025)040，2504.04037。[49] U. Haisch、A. Sankar和G. Zanderighi，四次希格斯自耦合的新探针（2025），2505.20463。[50] L. Panizzi，顶夸克汤川耦合在LHC三希格斯产生中的作用，《Phys. Rev. D》113(5)，L051706（2026），doi:10.1103/5ssz-3nh7，2512.03003。[51] B. Fuks、A. Papaefstathiou和G. Tetlalmatzi-Xolocotzi，通过未来强子对撞机中的三希格斯玻色子产生提取希格斯自耦合约束，《欧洲物理学杂志C》85(11)，1309（2025），doi:10.1140/epjc/s10052-025-15051-7，2509.16364。[52]J. M. Campbell、G. De Laurentis和R. K. Ellis， $0 \to g\ g\ H\ H\ H$振幅的解析结果，JHEP 01，157（2026），doi:10.1007/JHEP01(2026)157，2507.19313。[53] G. Buchalla、M. Capozi、A. Celis、G. Heinrich和L. Scyboz，具有完整m_t-依赖性的非线性有效场论中的希格斯玻色子对产生：次领头阶量子色动力学，JHEP 09，057（2018），doi:10.1007/JHEP09(2018)057，[勘误：JHEP 06，094（2025）]，1806。05162。

[54] I. Brivio、R. Gröber 和 K. Schmid，《希格斯有效场论中胶子融合产生希格斯玻色子对的高阶计算》，JHEP 05, 031 (2026)，doi:10.1007/JHEP05(2026)031, 2511.23411.[55] J. M. Campbell 和 R. K. Ellis，《强子对撞机上的矢量玻色子对产生：最新进展》，Phys. Rev. D 60, 113006 (1999)，doi:10.1103/PhysRevD.60.113006, hep-ph/9905386.[56] J. M. Campbell、R. K. Ellis 和 C. Williams，《大型强子对撞机上的矢量玻色子对产生》，JHEP 07, 018 (2011)，doi:10.1007/JHEP07(2011)018, 1105.0020.[57] J. M. Campbell、R. K. Ellis 和 W. T. Giele，《MCFM的多线程版本》，《欧洲物理学杂志C》75(6), 246 (2015)，doi:10.1140/epjc/s10052-015-3461-2, 1503.06182.[58] J. Campbell 和 T. Neumann，《使用MCFM进行精确现象学研究》，JHEP 12, 034 (2019)，doi:10.1007/JHEP12(2019)034, 1909.09117.[59] R. D. Ball 等，《PDF4LHC21：大型强子对撞机第三轮运行的全局PDF拟合组合》，J. Phys. G 49(8), 080501 (2022)，doi:10.1088/1361-6471/ac7216, 2203.05506.[60] J. Alwall、R. Frederix、S. Frixione、V. Hirschi、F. Maltoni、O. Mattelaer、H. S. Shao、T. Stelzer、P. Torrielli 和 M. Zaro，《树级和次领头阶微分截面的自动化计算及其与部分子簇射模拟的匹配》，JHEP 07, 079 (2014)，doi:10.1007/JHEP07(2014)079, 1405.0301.[61] G. P. Lepage，《一种自适应多维积分新算法》，J. Comput. Phys. 27, 192 (1978)，doi:10.1016/0021-9991(78)90004-9.[62] ATLAS实验在六底夸克末态下测量三希格斯产生的高亮度大型强子对撞机前景，欧洲核子研究中心，日内瓦，(2025)，https://cds.cern.ch/record/2924772.[63] G. Aad 等，《ATLAS实验发现希格斯玻色子十年后对其相互作用的详细绘图》，Nature 607(7917), 52 (2022)，doi:10.1038/s41586-022-04893-w,[勘误：Nature 612, E24 (2022)], 2207.00092.[64] A. Tumasyan 等，《CMS实验发现希格斯玻色子十年后对其的描绘》，Nature 607(7917), 60 (2022)，doi:10.1038/s41586-022-04892-x,[勘误：Nature 623, (2023)], 2207.00043.[65] T. Liu、K.-F. Lyu、J. Ren 和 H. X. Zhu，《探测希格斯玻色子四次自相互作用》，Phys. Rev. D 98(9), 093004 (2018)，doi:10.1103/PhysRevD.98.093004, 1803.04359.[66] L. Di Luzio、R. Gröber 和 M. Spannowsky，《最大化三线性希格斯自耦合：它能有多大？》，《欧洲物理学杂志C》77(11), 788 (2017)，doi:10.1140/epjc/s10052- 017-5361-0, 1704.02311.[67] ATLAS合作组，《ATLAS探测器在高亮度大型强子对撞机上联合$b\bar{b}\gamma\gamma$ 和$b\bar{b}\tau^+\tau^-$ 末态对希格斯玻色子对产生的预期灵敏度》，欧洲核子研究中心，日内瓦，2022，https://cds.cern.ch/record/2798448.[68]M. Chiesa、F. Maltoni、L. Mantani、B. Mele、F. Piccinini 和 X. Zhao，《在多TeV μ子对撞机上测量四次希格斯自耦合》，JHEP 09, 098 (2020)，doi:10.1007/JHEP09(2020)098, 2003.13628.[69] L. C. Bresciani、G. Levati 和 P. Paradisi，《振幅与分波幺正性界》，Phys. Rev. D 113(7), L071702 (2026)，doi:10.1103/tp6m-mcyn, 2504.12855.