arXiv:2611.33107v1 [math.CT] 24 Nov 2026

对对称幺半 (∞, n)-范畴的一种内在方法

ARGHAN DUTTA

摘要。我们提出一种定义：将对称幺半 (∞, n)-范畴视为有限带基点集合范畴上的特殊左双 (∞, n)-纤维化。该定义适用于一般的 (∞, n)-范畴模型，前提是其离散对象满足一个温和条件；当该模型是左适当且组合的时，我们构造模型结构，其纤维对象恰好就是这些纤维化。对于 $n = 1$，我们证明此定义恢复了 Lurie 的对称幺半 $(\infty,1)$-范畴：特殊左双 $(\infty,1)$-纤维化的同伦论等价于有限带基点集合范畴上的特殊余笛卡尔纤维化的同伦论。该等价由一个显式的 Quillen 等价实现，而两种构造——阶梯和余笛卡尔串——则在这两种描述之间进行转换。

目录

引言1 1. 一般预备知识 3 2. 作为左双纤维化的对称幺半 (∞, n)-范畴 12 3. 作为余笛卡尔纤维化的对称幺半 $(\infty,1)$-范畴 21 4. 两种描述的比较 28 附录 A. 阶梯延拓引理的证明 46 参考文献 48

引言

高阶范畴上的对称幺半结构。范畴上的对称幺半结构，是对象与态射的张量积及其单位，并且在相干同构意义下满足结合律、单位律和交换律。张量积下的向量空间以及笛卡尔积下的集合范畴是标准例子。在高阶范畴中，张量积必须作用于每个维数的态射，而相容性数据永无止境：例如，结合律在等价意义下成立，该等价又在更高阶等价意义下满足五边形关系，如此等等。

配边的高阶范畴提供了一个重要的动机性例子。拼接配边就是复合，不交并就是张量积，而这两者都已包含在 Atiyah 公理对拓扑量子场论的规定中[Ati88]。一旦允许任意余维的流形，以及配边之间的配边，就会导向高阶范畴 [BD95]。维数为 n 的完全扩张的带框场论，便是从一个配边（∞, n）范畴出发的对称幺半函子；配边假设则将这类理论的空间与目标中的完全可对偶化对象的空间等同起来 [Lur09b, §2.4]。配边范畴的完全 Segal 模型，连同其对称

幺半结构是在 [CS19] 中构造的；局部性和几何结构则在 [GP23, GP26] 中讨论。也有代数方面的例子。代数与双模的高阶 Morita 范畴 [Vit92, DLRS25] 继承了其构造所在范畴的对称幺半结构 [Hau17, JFS17], , 而具有有限极限的范畴中的迭代跨度在笛卡尔积下构成对称幺半范畴 [Hau18]。

文献中的对称幺半 (∞, n)-范畴。在双范畴范围内，张量积、单位及其相容性数据都有明确的表述 [SP09, GO13], , 而双重范畴则被用于构造对称幺半双范畴 [Shu10]。一般来说，定义对称幺半 (∞, n)-范畴有多种方式。可以在带有笛卡尔积的 $(\infty,1)$-范畴 (∞, n)-范畴中，要求一个交换代数对象 [Lur09b, §4.1], ; 这与 [GH15] 中的迭代富集思想相近；对于 $n = 1$，还存在运算子模型和图示点集模型 [KS15, NS17]。也可以要求一个相容的去环化塔 [SP14, CS19, Hau18]。

或者也可以遵循 Segal [Seg74]，并考虑以有限带基点集合的范畴 Fin_* 为索引的 Segal 余预层 $k = \{*, 1, \ldots\ldots, k\}$，即函子 X，从 Fin_* 到 (∞, n)-范畴，并满足对每个 $k \geq 0$，那些 k 惰性 映射

$\langle k\rangle \to 1$（每个映射都保留一个非基点）均诱导出 $(\infty,\ n)$-范畴的等价 s

$$X\langle k\rangle \xrightarrow{\simeq} \big(X\langle 1\rangle\big)^k.$$

这类条件在 [CH21] 中得到了系统研究。在（∞, n）-范畴的具体模型中，对称幺半（∞, n）-范畴被定义为以 Fin_* 为定义域、取值于 [SP14], 中 Segal n-范畴的 Segal 余预层，或取值于 [CS19、JFS17] 中完备 n-重 Segal 空间的 Segal 余预层。在 [GP23], 中，基于 [Rez01、Rez10] 以及 Bousfield 和 Friedlander 关于 Γ-空间的同伦论 [BF78], 构造了通过对范畴 Segal 条件和对称幺半 Segal 条件作局部化而得到的模型结构； [GP26、BSP21] 对这些模型进行了比较。

通过适当的直化—反直化对应，Fin_* 上的余预层对应于 Fin_* 上的余笛卡尔纤维化 [Lur09a, §3.2]。因此，也可以将对称幺半高阶范畴定义为 $_*$ 上的余笛卡尔纤维化 $p\colon \mathrm{E} \to \mathrm{F}$，其基底为 Fin_* 的神经 $\mathrm{F\,in}_*$，并满足相应版本的 Segal 条件；我们称这类余笛卡尔纤维化为特殊。对于 $n = 1$，这是 Lurie 的定义 [Lur17, Definition 2.0.0.7],；Sharma 则比较了有限带基点集合上的拟范畴图与带标记的纤维化呈现[Sha21]。[Nui24] 探讨了这一方法的高维版本；另见 [GHL24] 关于（$\infty, 2$）-范畴的纤维化。

对称幺半 $(\infty,\ n)$-范畴作为左双纤维化。 本文旨在提供一种封装对称幺半结构在（$\infty,\ n$）-范畴上的全部相容性数据的方法，使其不依赖于（$\infty,\ n$）-范畴的某个特定模型。对于 $n = 1$，我们证明，该方法恰好恢复了 Lurie 关于对称幺半（∞，1）-范畴的既有框架。为此，我们在每个维数都采用纤维化观点，但将（$\infty,\ n$）-范畴的余笛卡尔纤维化 $p\colon \mathrm{E} \to \mathrm{F\,in}_*$ 替换为双（$\infty,\ n$）-范畴的左纤维化$P\colon \mathbb{E} \to \mathbb{F}\mathrm{in}_*$，后者在（$\infty,\ n$）-范畴的一般模型中是有意义的。

回顾一下，双 $(\infty,\ n)$-范畴 是一个单纯对象 $\mathbb{E}\,\mathrm{in}\,(\infty,\ n)$-范畴，并满足 Segal 条件[MRR26], ，即对于每个 $m \geq 2$, Segal 映射

$$\mathbb{E}_m \longrightarrow \underbrace{\mathbb{E}_1 \times_{\mathbb{E}_0} \cdots \times_{\mathbb{E}_0} \mathbb{E}_1}_{m \text{ factors}}$$

是（$\infty,\ n$）-范畴之间的等价。我们将 $\mathbb{E}_0$ 称为对象与垂直态射的（$\infty,\ n$）-范畴，将$\mathbb{E}_1$ 称为水平态射与方形的（$\infty,\ n$）-范畴。例如，Fin_*的神经将其每个层都视为离散的（$\infty,\ n$）-范畴，便是$_*$ 中一个双（$\infty,\ n$）-范畴 $\mathbb{F}$，其水平态射是Fin_* 中的映射，而垂直态射全都平凡。

一个左双（$\infty,\ n$）-纤维化是双（$\infty,\ n$）-范畴之间的一个映射 $P\colon \mathbb{E} \to \mathbb{F}\mathrm{in}_*$，满足纤维性条件，并且 $\mathbb{E}$ 的每个水平态射本质上都由其源及其在Fin_*中的像确定，即典范映射

$$\mathbb{E}_1 \longrightarrow \mathbb{E}_0 \times_{(\mathbb{F}\mathrm{in}_*)_0} (\mathbb{F}\mathrm{in}_*)_1$$

是（$\infty,\ n$）-范畴之间的等价；参见定理 2.6。与余笛卡尔纤维化类似，$_*\mathrm{in}\,\mathbb{F}$上的左双纤维化借助 [MRR23] 的直化–反直化构造，编码了取值于（$\infty,\ n$）-范畴的、定义在Fin_* 上的余预层；该余预层在k处的值是 $\mathbb{E}_0$ 在k上的纤维 $\mathbb{E}_0(k)$。因此，我们引入如下概念，并将其作为定理 2.9。

定义。 左双重（$\infty,\ n$）-纤维化 $P\colon \mathbb{E} \to \mathbb{F}\mathrm{in}_*$ 若对于每个 $k \geq 0$，由惰性映射 $k \to 1$ 诱导的纤维 $\mathbb{E}_0(k)$ 与纤维 $\mathbb{E}_0(1)$ 的 k 重乘积之间的比较是（$\infty,\ n$）-范畴的等价，则称其为特殊 。对称幺半（$\infty,\ n$）-范畴 是特殊左双重（$\infty,\ n$）-纤维化。

结果概述。 在本文中，我们首先通过一致性检验表明，对于 $n = 1$，该定义是合理的。准确地说，我们在定理 4.76 中证明：

定理。 由特殊余笛卡尔纤维化 $p\colon \mathcal{E} \to \mathcal{F}\mathrm{in}_*$ 所表示的对称幺半 （∞、1）-范畴，与由特殊左双重纤维化 $P\colon \mathbb{E} \to \mathbb{F}\mathrm{in}_*$ 所表示的对称幺半 （∞、1）-范畴之间，存在同伦理论的等价。

我们通过两个适当模型结构之间的 Quillen 等价来证明这一结果。对于纤维对象而言，该等价由以下两个构造实现。

$$\left\{\text{特殊左双重纤维化 } P\colon \mathbb{E} \to \mathbb{F}\text{在}\ {}_*\right\} \underset{\text{余笛卡尔串}}{\overset{\text{阶梯}}{\rightleftarrows}} \left\{\text{特殊余笛卡尔纤维化 } p\colon \mathrm{E} \to \mathrm{F}\text{ 在}\ {}_*\right\}$$

左双纤维化 $P\colon\ \mathbb{E}\to\mathbb{F}\mathrm{in}_*$ 的阶梯是 Fin_* 上的余笛卡尔纤维化，其对象是 $\mathbb{E}$ 的对象，其态射则由 $\mathbb{E}$ 的一个水平态射后接 $\mathbb{E}$ 的一个垂直态射给出。反过来，余笛卡尔纤维化 $p\colon\ \mathrm{E}\to\mathrm{Fin}_*$ 的余笛卡尔串构成左双纤维化，其水平 m-单形是 E 中由 m 个可复合的余笛卡尔态射组成的串。此外，左双纤维化与余笛卡尔纤维化之间的比较并不依赖于 Fin_* 的任何特殊性质，并且它在任意小范畴的神经上成立；参见定理 4.72。

与其他工作的关系。 左双纤维化与 Fin_* 上的余笛卡尔纤维化之间的等价性也可由 Nuiten 的框架 [Nui24]推出。虽然他的方法针对双重 ∞范畴进行表述，并通过对其纤维化的反射来推进，但我们通过显式模型结构之间的 Quillen 等价来实现这一比较；更多细节请参见定理 4.1，以及关于 Segal 对象上 Grothendieck 构造的 [BdB18] 。

若干组成部分取自已有文献。作为 Segal 对象的双重高阶范畴来自 [MRR26]，而左纤维化条件来自 [Ras21b]。阶梯是 Artin 和 Mazur [AM66],的全单纯集合；我们依赖 Stevenson 的定理，即全单纯集合在 Joyal 模型结构中等价于对角线[Ste25], ，这强化了关于弱同伦等价的经典表述 [CR05]。构成我们 Quillen 等价基础的伴随，是 Joyal 和 Tierney 在单纯集合与双单纯集合之间所给伴随的带标记的纤维化相对版本 [JT07]；另请比较 [Ras21a]。

论文结构。 第 1 节回顾有关有限带基点集合和模型范畴的预备知识。第 2 节和第 3 节分别介绍（特殊的）左双纤维化和（特殊的）余笛卡尔纤维化的同伦理论。第 4 节建立二者之间的等价，并将论证中的一个技术部分推迟到附录 A。

致谢。 作者感谢他的导师 Martina Rovelli，感谢她在整个项目中给予的支持、许多富有洞见的交流以及有益的建议。

1. 一般预备知识

本节汇集全文中使用的预备知识。在第 1.1 节确定约定之后，我们将在第 1.2 节引入惰性扇，在第 1.3 节介绍在单纯集合上对单纯对象的求值，并在第 1.4 节介绍基$\mathbb{F}\mathrm{in}_*$。随后，我们在第 1.5 节回顾所需的有关 Reedy 模型结构和左 Bousfield 局部化的事实，并在第 1.6 节专门讨论单纯集合。

1.1. **约定**。 我们用$\mathbf{M}$ 和$\mathbf{N}$ 表示模型范畴，用 $[0]$ 表示终对象，用 $\varnothing$ 表示始对象，并用$!_A\colon\ A\to[0]$ 表示终映射；空乘积为 $[0]$。除非另有说明模型结构，弱等价、余纤维化和纤维化均指环境模型范畴中的相应概念，并将它们记作

$$A\twoheadrightarrow B\ \text{ a fibration},\qquad A\hookrightarrow B\ \text{ a cofibration},\qquad A\xrightarrow{\sim}B\ \text{ a weak equivalence.}$$

除非特别注明是同伦的，所有极限、余极限和纤维均为通常意义下的对象；对象 X 的点 是一个映射 $[0]\to X$，而纤维是沿一个点作出的拉回。我们用 $\amalg$ 表示二元余积和推出，用 $\coprod$表示带指标的余积和推出。

全文会用到单纯集合上的两种模型结构：$\mathbf{sSet}^{(\infty,0)}$，即 Kan–Quillen 结构，其纤维对象是 Kan复形；以及$\mathbf{sSet}^{(\infty,1)}$，即 Joyal 结构，其纤维对象是拟范畴。两者均在第 1.6 节回顾。单纯集合记作 K、 L、..... ，而$\mathbf{M}$ 中的单纯对象记作 $\mathbb{X}$、 $\mathbb{Y}$、.....。此类对象的单纯方向称为水平方向。通常， m 表示水平次数，而 r 表示单纯集合某一层中的垂直次数； n 始终表示$(\infty$、 $n)$中的维数，而 k 始终表示元数。

记号$\mathbf{R}\mathrm{Map}(X,Y)$表示 X和 Y所在模型范畴中的导出映射空间，或同伦函数复形。它在$\mathbf{sSet}^{(\infty,0)}$ 中定义到弱等价为止，并且总可以取为 Kan复形 [Hir03，定义 17.1.1 和命题 17.1.3]。我们用$\mathbf{M}(X,Y)$表示底层范畴中的态射集合。我们从不将环境范畴作为下标附加到$\mathbf{R}\mathrm{Map}$、Map、$\mathrm{Map}^\flat$或 $\mathrm{Map}^\sharp$上；后三者在需要时定义。左 Bousfield 局部化下，这一约定不会造成歧义： $L_S\mathbf{N}$ 的余纤维化与$\mathbf{N}$ 的相同，而且$\mathbf{N}$ 中的每个弱等价都是 $L_S\mathbf{N}$中的弱等价，因此$\mathbf{N}$ 中的余单纯分解仍是 $L_S\mathbf{N}$中的余单纯分解；只要 X在局部化 [中是余纤维化的，且 Y是纤维化的，这两种结构就会计算出相同的$\mathbf{R}\mathrm{Map}(X,Y)$3]Hir03，定义 16.1.2 和 17.1.1 以及命题 17.1.3]。

1.2. **有限带基点集合与惰性映射**。 我们对有限带基点集合采用协变约定，并将 Fin_* 记作有限带基点集合 $k_+ = \{*, 1, \dots, k\}$（$k \geq 0$）及保基点映射所构成的骨架范畴。非负整数 k 是 k 的元数 。Fin_* 中的态射 $f\colon k_+ \to l_+$，若对每个 $1 \leq j \leq l$，其纤维 $f^{-1}(j)$恰有一个元素，则称为惰性映射；若 $f^{-1}(*) = \{*\}$，则称为活跃映射；参见 [Lur17，定义 2.1.1.8 和 2.1.2.1]。我们将使用以下两族映射。

记号 1.1. 对于 $k \geq 0$，令 $\mu_k\colon k_+ \to 1_+$ 为将每个非基点都映到 1 的活跃映射；对于 $k = 0$，它是唯一的有基点映射 $0_+ \to 1_+$。对于 $k \geq 1$ 和 $1 \leq i \leq k$，令 $\rho_i\colon k_+ \to 1_+$ 为由下式定义的惰性映射

$$\rho_i(j) = \begin{cases} 1, & j = i, \\ *, & j \neq i. \end{cases}$$

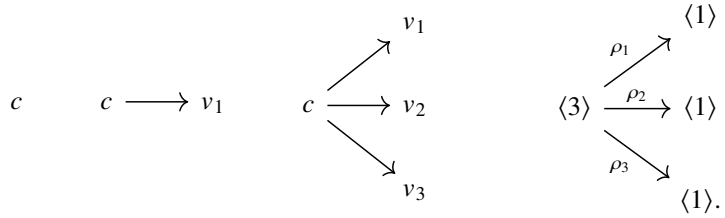
我们用 $\mathrm{F\,in}_* = N(\mathrm{Fin}_*)$ 表示 Fin_* 的神经，因此 $\mathrm{F\,in}_*$ 的一个 m-单纯形是 Fin_* 中一串 m 个可复合映射。为编码共同源为 k 的 k 惰性映射 ρ_i，我们引入如下位于 $\mathrm{F\,in}_*$ 上方的单纯集合。

定义 1.2. 对于 $k \geq 1$，惰性扇 J_k 是通过识别 k 个 $\Delta[1]$ 副本的初始顶点而得到的单纯集合。将共同顶点记为 c，将终端顶点记为 $v_1, \dots, v_k$，并记

$$\mathcal{V}_k = \coprod_{i=1}^{k} \Delta\{v_i\} \subseteq \mathcal{J}_k$$

对于它们张成的子复形。映射 $\beta_k\colon \mathrm{J}_k \to \mathrm{F\,in}_*$ 将 c 映到 k_+，将每个 v_i 映到 1_+，并将边 $c \to v_i$ 映到 ρ_i。对于$k = 0$，令 $\mathrm{J}_0 = \Delta[0]$，$\mathrm{V}_0 = \varnothing$，并令 $\beta_0(c) = 0_+$。

注意，V_k 的顶点彼此不同，尽管 β_k 将它们全部映到 1_+。惰性扇 $\mathrm{J}_0, \mathrm{J}_1$, 和 J_3, , 以及 J_3 在 $\mathrm{F\,in}_*$中的像，可如下图示。



我们将考虑沿着 $\mathrm{F\,in}_*$上的单纯集合包含映射所作的限制

$$\Delta\{c\} \hookrightarrow \mathcal{J}_k \hookleftarrow \mathcal{V}_k,$$

其中，当 $k = 0$时，左侧的包含映射是恒等态射。

1.3. **水平形状与 Reedy 纤维性**。 本节中，我们研究单纯对象在单纯集合上的求值，以及它与 Reedy 模型结构的相容性。全文中，$\mathbf{M}$ 表示一个模型范畴。$\mathbf{M}$ 中的单纯对象 $\mathbb{X}$ 是一个函子 $\Delta^{\mathrm{op}} \to \mathbf{M}$，其面映射和退化映射分别记作 d_i^h，s_i^h。给定一个单纯集合 K，将其视为一个水平形状，我们将 $\mathbb{X}$ 中形状为 K 的图的对象定义为

$$\mathbb{X}(\mathcal{K}) \coloneqq \lim_{(\Delta[m] \to \mathcal{K}) \in (\Delta/\mathcal{K})^{\mathrm{op}}} \mathbb{X}_m, \tag{1.3}$$

其中 Δ/K 表示 K 的单形范畴，而从 $\sigma\colon \Delta[m] \to \mathrm{K}$ 到 $\tau\colon \Delta[l] \to \mathrm{K}$ 的态射，即具有 $\tau\alpha = \sigma$ 的映射 $\alpha\colon [m] \to [l]$，作用为 $\alpha_h^*\colon \mathbb{X}_\ell \to \mathbb{X}_m$。给定 $\mathbf{M}$ 的一个对象 A，我们将由下式给出的 $\mathbf{M}$ 中的单纯对象记为 $\mathrm{K} \boxtimes A$

$$(\mathcal{K} \boxtimes A)_m = \coprod_{\mathcal{K}_m} A,$$

其结构映射由 K 的结构映射诱导。余积和极限的泛性质给出一个自然同构

$$\mathbf{M}(A, \mathbb{X}(\mathcal{K})) \cong \mathbf{M}^{\Delta^{\mathrm{op}}}(\mathcal{K} \boxtimes A, \mathbb{X}).$$

特别地，函子 $\mathbb{X}(-)$ 将单纯集合的余极限映射为$\mathbf{M}$中的极限，并且我们有 $\mathbb{X}(\varnothing) \cong [0]$ 和$\mathbb{X}(\Delta[m]) \cong \mathbb{X}_m$。

对于 $m \geq 1$，我们记

$$I[m] \coloneqq \bigcup_{j=1}^{m} \Delta\{j-1, j\} \subseteq \Delta[m]$$

$\Delta[m]$的脊，其中 $\Delta\{j-1,\ j\}$ 是由所示顶点张成的面，并且我们令 $I[0] \coloneqq \Delta[0]$。沿包含 $I[m] \hookrightarrow \Delta[m]$ 的限制给出*Segal* 映射

$$\varphi_m : \mathbb{X}_m \longrightarrow \mathbb{X}(I[m]) \cong \underbrace{\mathbb{X}_1 \times_{\mathbb{X}_0} \cdots \times_{\mathbb{X}_0} \mathbb{X}_1}_{m \text{ factors}}, \tag{1.4}$$

其中，在每个拉回中，一条边的目标 d_0^h 与下一条边的源 d_1^h 相匹配。

我们总是赋予$\mathbf{M}^{\Delta^{\mathrm{op}}}$ 以 Δ^{op} 上通常的 Reedy 结构所对应的 Reedy 模型结构，其弱等价是逐次数的弱等价 [Hir03，定理 15.3.4(1) 和例 15.3.5]。对于$\mathbf{M}$中的单纯对象 $\mathbb{X}$，匹配对象由下式给出

$$M_m\mathbb{X} \cong \mathbb{X}(\partial\Delta[m]), \qquad M_0\mathbb{X} \cong [0],$$

并且我们用 $L_m\mathbb{X}$ 表示闩对象，因此 $L_0\mathbb{X} = \varnothing$。映射 $P\colon \mathbb{E} \to \mathbb{B}$ 是 Reedy 纤维化，当且仅当每个相对匹配映射

$$\mathbb{E}_m \longrightarrow M_m\mathbb{E} \times_{M_m\mathbb{B}} \mathbb{B}_m$$

是纤维化，而映射 $\mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ 是 Reedy 余纤维化，当且仅当每个相对闩映射 $\mathbb{X}_m \amalg_{L_m\mathbb{X}} L_m\mathbb{Y} \to \mathbb{Y}_m$ 是余纤维化。下一个引理将相对匹配映射的纤维性推广到单纯集合的每个包含。

引理 1.5（参见 [RV22，引理 C.5.9 和 C.2。3]）。设 $P\colon \mathbb{E} \to \mathbb{Y}$ 是$\mathbf{M}^{\Delta^{\mathrm{op}}}$中的 *Reedy* 纤维化。对于单纯集合的每个单态射 $i\colon \mathcal{K} \hookrightarrow \mathcal{L}$，相对限制映射

$$R_i : \mathbb{E}(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathbb{E}(\mathcal{K}) \times_{\mathbb{Y}(\mathcal{K})} \mathbb{Y}(\mathcal{L})$$

是$\mathbf{M}$中的纤维化。特别地，如果 $\mathbb{X}$ 是 *Reedy* 纤维的，那么对于每个单纯集合$\mathcal{K}$，$\mathbb{X}$（K）都是纤维化的，并且每个包含 $\mathcal{K} \hookrightarrow \mathcal{L}$ 都诱导出一个纤维化 $\mathbb{X}$（L）$\to \mathbb{X}$（K）。

证明。求值 $\mathbb{X}$(K) 是由 K 加权的 $\mathbb{X}$ 的极限，而 R_i 是相应的相对极限，或 Leibniz 极限映射。根据 [RV14，例 6.9]，单纯集合的单态射具有单态的相对闩映射。因此，将 R_i 应用于 Reedy 范畴 Δ^{op}，由 [RV14，命题 9.1] 的对偶可知，该映射是一个纤维化。最后的断言分别通过将第一条应用于映射 $\mathbb{X} \to [0]$，以及将其应用于包含 $\varnothing \hookrightarrow$ K 来得到 $\mathbb{X}$(K) 的纤维性。□

我们以一个关于具有共同源的跨度的引理结束本节，该引理将应用于定理 2.15 和 3.23 中由惰性映射诱导的跨度。

引理 1.6。设 $k \geq 0$，令 A 为 $\mathbf{M}$ 中的一个纤维对象，并令 D_1、.....、D_k 为 $\mathbf{M}$ 中的对象。假设对于每个 $1 \leq i \leq k$，存在一个跨度

$$A \xleftarrow{s_i} H_i \xrightarrow{t_i} D_i$$

使得 s_i 是一个平凡纤维化，并且

$$(s_i, t_i) : H_i \twoheadrightarrow A \times D_i$$

是一个纤维化。定义

$$R = H_1 \times_A \cdots \times_A H_k, \qquad \pi : R \longrightarrow A, \qquad t = (t_i \,\mathrm{pr}_i)_{i=1}^{k} : R \longrightarrow \prod_{i=1}^{k} D_i.$$

则 π 是一个平凡纤维化，R 是纤维的，并且 t 是一个纤维化。对于 $k = 0$，该陈述应理解为 $R = A$、$\pi = \mathrm{id}_A$，以及 $t = !_A\colon A \to [0]$。

证明。对于 $k \geq 1$，令 $R^{(0)} = A$ 和 $R^{(i)} = R^{(i-1)} \times_A H_i$，使得每个方形

$$\begin{array}{ccc} R^{(i)} & \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} & H_i \\ {\scriptstyle \mathrm{pr}_1}\big\downarrow{\scriptstyle \sim} & \lrcorner & \big\downarrow{\scriptstyle \sim}{\scriptstyle s_i} \\ R^{(i-1)} & \longrightarrow & A \end{array}$$

都是一个拉回。由于 s_i 是平凡纤维化，映射 $R^{(i)} \to R^{(i-1)}$也是如此。这些映射的复合为 $\pi\colon R \to A$，因此 π 是平凡纤维化，且 R 是纤维化的。接下来，令

$$\delta : A \times \prod_{i=1}^{k} D_i \longrightarrow \prod_{i=1}^{k} (A \times D_i)$$

是其第 i 个分量为 pr_A，pr_{D_i} 的映射。存在一个拉回方块

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{(\mathrm{pr}_i)_i} & \prod_{i=1}^{k} H_i \\ {\scriptstyle (\pi,t)}\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle \prod_{i=1}^{k}(s_i,t_i)} \\ A \times \prod_{i=1}^{k} D_i & \xrightarrow[\delta]{} & \prod_{i=1}^{k}(A \times D_i), \end{array}$$

因此，映射 $(\pi,\ t)$ 是一个纤维化，因为纤维化在乘积和拉回下稳定。此外，投影$A \times \prod_{i=1}^{k} D_i \to \prod_{i=1}^{k} D_i$是一个纤维化，因为它是纤维化 $!_A\colon A \to [0]$ 的拉回。因此，映射 t 是 $(\pi,\ t)$ 与该投影的复合，故为一个纤维化。对于 $k = 0$，这些断言归结为 A 的纤维性。□

1.4. **离散有限基点集基底**。本节中，我们引入单纯对象 $\mathbb{F}$，它属于 $_*$，是第 2 节中定义的纤维化所基于的 $\mathbf{M}$。我们记

$$(-)^{\mathrm{disc}} : \mathbf{Set} \longrightarrow \mathbf{M}, \qquad S \longmapsto S^{\mathrm{disc}} := \coprod_{s \in S} [0],$$

离散实现函子，它将集合函数 $S \to T$ 送到映射 $S^{\mathrm{disc}} \to T^{\mathrm{disc}}$，该映射将由 s 索引的直和项恒等地映到由 s 的像索引的直和项。给定单纯集合 K，我们记 $\mathrm{K}^h := \mathrm{K} \boxtimes [0]$，并定义 $\mathbb{F}$ 属于 $_* := (\mathrm{F}$ 属于 $_*)^h$，使得

$$(\mathbb{F}\mathrm{in}_*)_m = ((\mathcal{F}\mathrm{in}_*)_m)^{\mathrm{disc}},$$

其结构映射由 $_*$ 中 F 的结构映射诱导。

回顾一下，$\mathbf{M}$ 中的小余积若每个余积注入都是单态射，且任意两个不同余积注入的拉回都是始对象，则称为不相交的；若它们在沿任意映射进行拉回时都保持不变，则称为泛的。每个预层范畴中这两种性质都成立。

命题 1.7。 设$\mathbf{M}$ 中的小余积不相交且泛，并且每个由集合函数 $S^{\mathrm{disc}} \to T^{\mathrm{disc}}$ 诱导的映射都是纤维化。则离散实现函子保持有限极限，单纯对象 $\mathbb{F}$在$_*$ 中是 *Reedy* 纤维的，且其来自(1.4) 的 *Segal* 映射 φ_m 都是同构。

证明。 给定集合函数 $S \to U \leftarrow T$，泛性将拉回 $S^{\mathrm{disc}} \times_{U^{\mathrm{disc}}} T^{\mathrm{disc}}$ 分解为由各对 $(s,t) \in S \times T$ 索引的相应直和项拉回的余积。由不相交性，按 (s,t) 索引的拉回在 s 和 t 在 U中具有相同像时为 $[0]$，否则为始对象。因此

$$S^{\mathrm{disc}} \times_{U^{\mathrm{disc}}} T^{\mathrm{disc}} \cong \coprod_{(s,t) \in S \times_U T} [0] = (S \times_U T)^{\mathrm{disc}},$$

因此，离散实现保有限极限，因为它也保终对象。由于Δ^{op} 在每个次数中的匹配范畴都是有限的，我们得到一个同构

$$M_m \mathbb{F}\mathrm{in}_* \cong (M_m \mathcal{F}\mathrm{in}_*)^{\mathrm{disc}},$$

在此同构下，$\mathbb{F}$在$_*$ 中的匹配映射由集合函数诱导。因此，根据假设，匹配映射是一个纤维化，而 $\mathbb{F}$在$_*$ 中是 Reedy 纤维。最后，$_*$ 中的神经 F 具有 Segal双射

$$(\mathcal{F}\mathrm{in}_*)_m \cong (\mathcal{F}\mathrm{in}_*)_1 \times_{(\mathcal{F}\mathrm{in}_*)_0} \cdots \times_{(\mathcal{F}\mathrm{in}_*)_0} (\mathcal{F}\mathrm{in}_*)_1,$$

离散实现将其映为 $\mathbb{F}$在$_*$中的 Segal同构。 □

注记1.8。 定理 1.7 中的纤维化假设并不能由模型范畴公理推出。例如，在 **单纯集合范畴**$_{(\infty,0)}$ 沿折叠映射 $\partial\Delta[1] \to \Delta[0]$进行左 Bousfield 局部化后，Kan复形 Z 是局部的，当且仅当其对角线 Z $\to$ Z $\times$Z 是弱等价；也就是说，当且仅当 Z 为空或弱可缩。因此，对象 $\coprod_{\mathbb{N}} \Delta[0] = (\mathbb{F}$在$_*)_0$ 在该局部化中不是纤维化的。然而，本文所考虑的模型中都满足这一假设；参见定理 2.30 以及定理 2.2 后的例子。

1.5. **固定形状纤维、导出映射空间与局部化**。 本节中，我们固定一个 **M** 的单纯对象 $\mathbb{B}$，从第 2 节起它将是 $\mathbb{F}$ 在 $_*$。我们介绍单纯对象 $\mathbb{E}$ 在 $\mathbb{B}$ 上的求值 $\mathbb{E}(\mathrm{K}) \to \mathbb{B}(\mathrm{K})$ 的纤维，并回顾构造第 2 节中的模型结构所需的有关导出映射空间和左 Bousfield 局部化的事实。回顾一下，切片模型结构 $\mathbf{M}^{\Delta^{\mathrm{op}}}{}_{/\mathbb{B}}$ 的弱等价、余纤维化和纤维化，均由 Reedy 模型结构 [Hir03, Theorem 7.6.5(2)]中相应的结构诱导。特别地，$\mathbf{M}^{\Delta^{\mathrm{op}}}{}_{/\mathbb{B}}$ 中的对象 $P\colon \mathbb{E} \to \mathbb{B}$ 是纤维化的，当且仅当 P 是 Reedy 纤维化。

定义 1.9. 设 $P\colon \mathbb{E} \to \mathbb{B}$ 是**M**中单纯对象的一个映射，设 K 是一个单纯集合，且 $\beta\colon [0] \to \mathbb{B}(\mathrm{K})$ 是 $\mathbb{B}(\mathrm{K})$中的一个点。$\mathbb{E}$ 在 β 处的定形纤维 $\mathbb{E}(\mathrm{K})_\beta$ 是如下拉回

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E}(\mathcal{K})_\beta & \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} & \mathbb{E}(\mathcal{K}) \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle P(\mathcal{K})} \\ [0] & \xrightarrow[\beta]{} & \mathbb{B}(\mathcal{K}). \end{array}$$

引理 1.10. 设 $P\colon \mathbb{E} \to \mathbb{B}$ 是一个 *Reedy* 纤维化。那么，$\mathbb{E}$ 的每个定形纤维都是纤维化的。此外，给定单纯集合的一个单态射 $i : \mathcal{K} \hookrightarrow \mathcal{L}$ 以及一个点 $\gamma\colon [0] \to \mathbb{B}(\mathcal{L})$，满足 $\beta = \mathbb{B}(i)\gamma$，限制映射$i^*\colon \mathbb{E}(\mathcal{L})_\gamma \to \mathbb{E}(\mathcal{K})_\beta$ 是一个纤维化。

证明. 将定理 1.5 应用于包含 $\varnothing \hookrightarrow \mathrm{K}$ 可知，映射 $P(\mathrm{K})$ 是一个纤维化，因此其纤维 $\mathbb{E}(\mathrm{K})_\beta$ 是纤维化的。对于第二个断言，映射 i^* 是定理 1.5 中纤维化 R_i 的一个拉回，如下图所示。

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E}(\mathcal{L})_\gamma & \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} & \mathbb{E}(\mathcal{L}) \\ {\scriptstyle i^*}\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle R_i} \\ \mathbb{E}(\mathrm{K})_\beta & \xrightarrow[(\mathrm{pr}1,\ \gamma!)]{} & \mathbb{E}(\mathrm{K}) \times_{\mathbb{B}(\mathcal{K})} \mathbb{B}(\mathrm{L})。 \end{array}$$

□

记号 1.11。 单纯集合的一个映射 $\beta : \mathrm{K} \to \mathrm{F\,in}_*$ 确定了 $_*(\mathrm{K})$ 中的一点 $[0] \to \mathbb{F}\mathrm{in}$，其在单纯形 $\tau\colon \Delta[m] \to \mathrm{K}$ 处的分量是 $(\mathbb{F}\mathrm{in}_*)_m$ 中由 $\beta\tau$ 索引的直和项的包含。给定一个映射 $P\colon \mathbb{E} \to \mathbb{F}\mathrm{in}_*$，我们将 $\mathbb{E}$ 在该点处的固定形状纤维记为 $\mathbb{E}(\mathrm{K})_\beta$。特别地，对于 $\mathrm{F\,in}_*$ 的一个 m-单纯形 σ，我们记

$$\mathbb{E}_m(\sigma) \coloneqq \mathbb{E}(\Delta[m])_\sigma = \mathbb{E}_m \times_{(\mathbb{F}\mathrm{in}_*)_m} [0].$$

固定形状纤维函子有一个左伴随，后文将用它来构造我们进行局部化所依据的映射。

引理 1.12。 给定一个单纯集合$\mathcal{K}$和一点 $\beta\colon [0] \to \mathbb{B}$（K），存在一个 *Quillen* 伴随

$$\mathbf{M} \underset{\mathbb{E}\mapsto\mathbb{E}(\mathcal{K})_\beta}{\overset{(\mathcal{K}\boxtimes -)_\beta}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\bot}}}} \mathbf{M}^{\Delta^{\mathrm{op}}}_{/\mathbb{B}}$$

其中，对于 **M** 的对象 A，$(\mathcal{K} \boxtimes A)_\beta$ 的结构映射在由 $\sigma \in \mathcal{K}_m$ 索引的直和项上由复合 $A \overset{!_A}{\longrightarrow} [0] \xrightarrow{\beta_\sigma} \mathbb{B}_m$ 给出。特别地，若 A 是余纤维化的，则 $(\mathcal{K} \boxtimes A)_\beta$ 在 $\mathbf{M}^{\Delta^{\mathrm{op}}}{}_{/\mathbb{B}}$ 中是余纤维化的。

证明。 在第 1.3 节的自然同构 $\mathbf{M}(A, \mathbb{E}(\mathrm{K})) \cong \mathbf{M}^{\Delta^{\mathrm{op}}}(\mathrm{K} \boxtimes A, \mathbb{E})$ 下，映射 $a\colon A \to \mathbb{E}(\mathrm{K})$ 经由 $\mathbb{E}(\mathrm{K})_\beta$ 分解，当且仅当 $P(\mathrm{K})a = \beta!_A$，也就是说，当且仅当 a 的伴随映射是一个关于 $\mathbb{B}$ 的映射。因此我们得到一个自然同构

$$\mathbf{M}^{\Delta^{\mathrm{op}}}_{/\mathbb{B}}((\mathcal{K} \boxtimes A)_\beta, \mathbb{E}) \cong \mathbf{M}(A, \mathbb{E}(\mathcal{K})_\beta).$$

为证明左伴随是左 Quillen，令 $\mathrm{D}_m\mathrm{K}$ 和 $\mathrm{N}_m\mathrm{K}$ 分别表示 K 的退化和非退化m-单形的集合。由于每个单形都唯一地是某个非退化单形的退化映射，我们有$L_m(\mathrm{K} \boxtimes A) \cong \coprod_{\mathrm{D}_m\mathcal{K}} A$；参见 [Hir03，引理 15.84]。因此，给定一个映射 $i\colon A \to A'$ in **M**，$\mathrm{K} \boxtimes i$ in m 次的相对闩映射的源为

$$(\mathcal{K} \boxtimes A)_m \amalg_{L_m(\mathcal{K}\boxtimes A)} L_m(\mathcal{K} \boxtimes A') \cong \left(\coprod_{\mathrm{D}_m\mathcal{K}} A'\right) \amalg \left(\coprod_{\mathrm{N}_m\mathcal{K}} A\right),$$

而到 $(\mathrm{K} \boxtimes A')_m$ 的相对闩映射，在由 $\mathrm{D}_m\mathrm{K}$ 索引的直和项上是恒等态射，在由 $\mathrm{N}_m\mathrm{K}$ 索引的直和项上则是映射 i。由于余纤维化和平凡余纤维化在余积下保持不变，若 i 是余纤维化，则 $\mathrm{K} \boxtimes i$ 是 Reedy 余纤维化；若 i 还同时是弱等价，则 $\mathrm{K} \boxtimes i$的每一级 $\coprod_{\mathcal{K}_m} i$ 也都是如此。由于 $\mathbf{M}^{\Delta^{\mathrm{op}}}{}_{/\mathbb{B}}$ 的余纤维化和弱等价由 Reedy 模型结构诱导，左伴随保持余纤维化和平凡余纤维化，因而也保持余纤维对象。□

引理1.13。令 $i\colon \mathcal{K} \hookrightarrow \mathcal{L}$ 为单纯集合的一个单态射，并令 A 为 $\mathbf{M}$中的一个余纤维对象。则映射$i \boxtimes A$ 是余纤维对象之间的 *Reedy* 余纤维化。此外，给定一点 $\gamma\colon [0] \to \mathbb{B}(\mathcal{L})$ 满足 $\beta = \mathbb{B}(i)\gamma$，由 i 诱导的映射 $(\mathcal{K} \boxtimes A)_\beta \to (\mathcal{L} \boxtimes A)_\gamma$ 是 $\mathbf{M}^{\Delta^{\mathrm{op}}}{}_{/\mathbb{B}}$ 中余纤维对象之间的余纤维化。

证明。我们将 K 与其在 L 中的像视为相同。K 的一个单纯形在 L 中退化，当且仅当它在 K 中退化，因为 L 的一个单纯形 x（其中 $s_j x \in \mathrm{K}$）是 K 的某个单纯形的面 $d_j s_j x$。因此 $\mathrm{K}_m \cap \mathrm{D}_m\mathrm{L} = \mathrm{D}_m\mathrm{K}$，并且根据定理 1.12 证明中对闩对象的计算，$i \boxtimes A$ 在度数 m 中的相对闩映射就是映射

$$\coprod_{\mathcal{K}_m \cup \mathrm{D}_m\mathcal{L}} A \longrightarrow \coprod_{\mathcal{L}_m} A,$$

它是恒等映射与余纤维化 $\varnothing \to A$ 的余积。因此，$i \boxtimes A$ 是 Reedy 余纤维化。对包含映射 $\varnothing \hookrightarrow \mathrm{K}$ 和 $\varnothing \hookrightarrow \mathrm{L}$ 应用同样的论证，可得 $\mathrm{K} \boxtimes A$ 和 $\mathrm{L} \boxtimes A$ 是 Reedy 余纤维的。最后一个断言由以下事实得出：$\mathbf{M}^{\Delta^{\mathrm{op}}}{}_{/\mathbb{B}}$ 的余纤维化是在 Reedy 模型结构中生成的。□

我们使用余单纯分解计算导出映射空间 [Hir03，定义 17.1.1 和定理 17.4.14]。回顾一下，给定模型范畴 $\mathbf{N}$ 中的余纤维对象 X 和纤维对象 Y，导出映射空间 $\mathbf{R}\mathrm{Map}(X, Y)$ 可由 Kan 复形 $\mathbf{N}(X^\bullet, Y)$ 建模，其中 $X^\bullet \to \mathrm{const}(X)$ 是 X 的余单纯分解，即一个 Reedy 余纤维的余单纯对象 $X^\bullet$，并带有一个到以 X 为值的常值余单纯对象的逐层弱等价 [Hir03，定义 16.1.2(1) 和命题 17.1.3]。定理 1.12 的伴随与导出映射空间相容，具体如下。

引理 1.14。设 A 是$\mathbf{M}$ 中的一个余纤维对象，并设 $P\colon \mathbb{E} \to \mathbb{B}$ 是一个 *Reedy* 纤维化。

(1) 给定一个单纯集合$\mathcal{K}$ 以及一个点 $\beta\colon [0] \to \mathbb{B}(\mathcal{K})$，则在**单纯集合范畴**$_{(\infty,0)}$中存在一个弱等价

$$\mathbf{R}\mathrm{Map}((\mathcal{K} \boxtimes A)_\beta, \mathbb{E}) \simeq \mathbf{R}\mathrm{Map}(A, \mathbb{E}(\mathcal{K})_\beta).$$

(2) 给定单纯集合的一个映射 $i\colon \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ 以及一个点 $\gamma\colon [0] \to \mathbb{B}(\mathcal{L})$，满足 $\beta = \mathbb{B}(i)\gamma$，*(1)* 中的弱等价将与 $i \boxtimes A$ 的前复合对应于与 $i^*\colon \mathbb{E}(\mathcal{L})_\gamma \to \mathbb{E}(\mathcal{K})_\beta$的后复合。

证明。设 $A^\bullet \to \mathrm{const}(A)$ 是 A的一个余单纯分解。定理 1.12 的左 Quillen 函子 $(\mathrm{K} \boxtimes -)_\beta$ 将$A^\bullet$ 送到 $(\mathrm{K} \boxtimes A)_\beta$的一个余单纯分解，而伴随给出 Kan 复形之间的一个同构

$$\mathbf{M}^{\Delta^{\mathrm{op}}}_{/\mathbb{B}}((\mathcal{K} \boxtimes A^\bullet)_\beta, \mathbb{E}) \cong \mathbf{M}(A^\bullet, \mathbb{E}(\mathcal{K})_\beta);$$

参见 [Hir03，命题 17.4.16(1)]。这个同构证明了 (1)。对于 (2)，由伴随在每个余单纯次数上的自然性，方形

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}\mathrm{Map}((\mathcal{L} \boxtimes A)_\gamma, \mathbb{E}) & \xrightarrow{\cong} & \mathbf{R}\mathrm{Map}(A, \mathbb{E}(\mathcal{L})_\gamma) \\ \downarrow{\scriptstyle (i \boxtimes A)^*} & & \downarrow{\scriptstyle \mathbf{R}\mathrm{Map}(A, i^*)} \\ \mathbf{R}\mathrm{Map}((\mathcal{K} \boxtimes A)_\beta, \mathbb{E}) & \xrightarrow[\cong]{} & \mathbf{R}\mathrm{Map}(A, \mathbb{E}(\mathcal{K})_\beta) \end{array}$$

在使用分解 $A^\bullet$ 同时计算 K 和 L 的导出映射空间时可交换。由于导出映射空间与所选分解无关，这就证明了 (2)。□

接下来我们确定 当 $\mathbf{M}$ 是一个预层范畴，且其余纤维化为单态射时的 Reedy 余纤维化 s.

引理 1.15。设$\mathbf{M}$ 的底层范畴是预层范畴 **集合范畴**$^{\mathrm{C^{op}}}$，其中C 是小范畴，并且$\mathbf{M}$ 中的余纤维化恰好是单态射。那么$\mathbf{M}^{\Delta^{\mathrm{op}}}$ 中的 *Reedy* 余纤维化恰好是逐层单态射。特别地，$\mathbf{M}^{\Delta^{\mathrm{op}}}$ 中的每个对象以及$\mathbf{M}^{\Delta^{\mathrm{op}}}{}_{/\mathbb{B}}$ 中的每个对象都是余纤维化的。

证明。 由于预层的极限和余极限是逐对象计算的，对于 C 的每个对象 c ，闩映射 $(L_m\mathbb{X})(c) \to \mathbb{X}_m(c)$ 是退化单形集合的包含；参见 [Hir03，引理 15.8.4 和命题 15.8.6]。设 $\mathbb{X} \hookrightarrow \mathbb{Y}$ 是一个逐层单态射。正如定理 1.13 的证明中那样， $\mathbb{X}$ 中的一个单形若在 $\mathbb{Y}$中退化，则它在 $\mathbb{X}$中也退化，因此

$$\mathbb{X}_m(c) \cap (L_m\mathbb{Y})(c) = (L_m\mathbb{X})(c).$$

因此，在 c 处，相对闩映射的源是 $\mathbb{Y}_m(c)$ 内的并集 $\mathbb{X}_m(c) \cup (L_m\mathbb{Y})(c)$，所以相对闩映射是单态射。反过来，根据 [Hir03, Proposition 15.3.11(1)]， Reedy 余纤维化逐级都是余纤维化。最后一个断言可将这一刻画应用于从始对象出发的映射得到，因为$\mathbf{M}^{\Delta^{\mathrm{op}}/\mathbb{B}}$ 的余纤维化是在 Reedy 模型结构中构造的。□

现在我们回顾模型范畴**N** 关于**N**中一个小映射集合 S 的左 Bousfield 局部化。若**N** 中的纤维对象 Z 满足：对 S 中的每个映射 $s\colon A \to D$，所诱导的映射

$$s^*\colon \mathbf{R}\mathrm{Map}(D, Z) \longrightarrow \mathbf{R}\mathrm{Map}(A, Z)$$

是**sSet**$_{(\infty,0)}$中的弱等价；而**N** 中的映射 $f\colon X \to Y$ 若对每个 S-局部对象 Z，所诱导的映射$f^*\colon \mathbf{R}\mathrm{Map}(Y,Z) \to \mathbf{R}\mathrm{Map}(X, Z)$ 都是 **sSet**$_{(\infty,0)}$ 中的弱等价，则称其为 S- 局部等价；参见 [Hir03, Definition 3.1.4(1)]。

定理 1.16 ([Bar10, 定理 4.7])**.** 设 **N** 是一个左适当的组合模型范畴，且 S 是 **N** 中的一组小映射。那么，**N** 在 **N** 处关于 S的左 *Bousfield* 局部化 L_S 存在，并且它是左适当且组合的。其余纤维化与 **N**中的余纤维化相同，其弱等价是S-局部等价，其纤维对象是S-局部对象。

命题 1.17. 如果**M** 是左适当且组合的，那么$\mathbf{M}^{\Delta^{\mathrm{op}}/\mathbb{B}}$ 也如此。特别地，$\mathbf{M}^{\Delta^{\mathrm{op}}/\mathbb{B}}$ 在任意小映射集处的左 *Bousfield* 局部化都存在。

证明. $\mathbf{M}^{\Delta^{\mathrm{op}}}$ 上的 Reedy 模型结构由 [Hir03, 定理 15.3.4(2)] 可知是左适当的，并由 [Bar10, 引理 3.33] 可知是组合的。根据 [AR94, 命题 1.57], , $\mathbf{M}^{\Delta^{\mathrm{op}}/\mathbb{B}}$ 的底层范畴是局部可呈现的；根据 [Hir15, 定理 1.7(1), (3)]，切片模型结构是余纤维生成的且左适当。最后一个断言由定理 1.16 得出。□

我们在此汇总下文证明中所使用的关于模型范畴和左 Bousfield 局部化的标准事实。

Pro位置 1.18 （标准事实）。 设 **M** 为一个模型范畴。则以下陈述成立 *d.*

（1）纤维化和平凡纤维化在拉回、复合和缩 *retract* 下封闭。一个映射是纤维化，当且仅当它相对于每个平凡余纤维化都具有右提升性质；它是平凡纤维化，当且仅当它相对于每个余纤维化都具有右提升性质 *[Hov99，引理 1.1.10 及推论 1.1.11]*。（2）右 *Quillen* 函子保持纤维对象之间的弱等价，而左 *Quillen* 函子保持余纤维对象之间的弱等价 *[Hov99，引理 1.1.12]*。（3）一个态射在 Ho（**M**） 中成为同构，当且仅当它是弱等价；从余纤维对象到纤维对象的态射由模同伦的映射表示 *[Hov99，定理 1.2.10]*；另见*[Hir03，定理 8.3.10]*。（4）导出映射空间在任一变量中的弱等价下保持不变 *[Hir03，定理 17.6.3]*，并且与所选的分解无关 *[Hir03，定理 17.4.14]*。（5）有限乘积保持纤维对象之间的弱等价，而有限个纤维对象的通常乘积表示它们在 Ho（**M**） 中的乘积。事实上，对有限族的逐对象模型结构而言，对角线 $\mathbf{M} \to \mathbf{M}^{\mathrm{I}}$ 保持余纤维化和平凡余纤维化，因此乘积函子是右 *Quillen* 函子，并且适用（2）。（6）对于映射 $b\colon B' \to B$，切片模型范畴之间的拉回是右 *Quillen* 函子：其左伴随是与 b进行复合，而切片的余纤维化和平凡余纤维化可在**M**中判定。因此，根据（2）， b^* 保持切片中纤维对象之间的弱等价。

命题 1.19 ([Hir03, 定理 3.2.13 及命题 3.3.4、3.3.16、3.3.18])。 假设 $L_S\mathbf{N}$ 存在。

(1) 恒等函子$\mathbf{N} \to L_S\mathbf{N}$ 是左 *Quillen*。局部化中的纤维化局部对象之间的映射，在局部化中是弱等价（分别是纤维化），当且仅当它在**N**中也是如此。

(2) 设 $F:\mathbf{N}\to\mathbf{M}$ 是一个左 *Quillen* 函子，其导出函子将S的每个元素都变为等价。那么 $F:\ L_S\mathbf{N}\to\mathbf{M}$ 是左 *Quillen*。当S 中元素的定义域和值域都是余纤维化对象时，只需 F 将S的每个元素映射为弱等价。

回顾一下，笛卡尔模型范畴 是满足推出积公理和单位公理的笛卡尔闭模型范畴 [Hov99, §4.2], 其中，映射 $i:\ A\to B$ 和 $j:\ C\to D$ 的推出积是映射

$$i\,\square\, j:(B\times C)\amalg_{A\times C}(A\times D)\longrightarrow B\times D.$$

在笛卡尔模型范畴中，与余纤维对象 A 作乘积是一个左 Quillen 函子，因为它是与余纤维化 $\varnothing\to A$的推出积。因此，其右伴随 $(-)^A$ 保持纤维化、平凡纤维化以及纤维对象之间的弱等价。

记号 1.20 ([Bar10, Corollary 4.33])。 模型范畴**N** 的一组同伦生成元是**N** 中的一个小对象集合 H，使得**N** 中的每个对象都与 H 中对象的一个小同伦余极限弱等价。根据 Dugger 表示定理 [Dug01]，每个组合模型范畴都有一组余纤维同伦生成元。特别地，其切片模型范畴也如此，因为它们仍是组合模型范畴。

引理 1.21。 设 H 是模型范畴 **N**中的一组余纤维同伦生成元。两个纤维对象之间的映射 $v:\ U\to V$ 是弱等价，当且仅当

$$\mathbf{R}\mathrm{Map}(A,v):\mathbf{R}\mathrm{Map}(A,U)\longrightarrow\mathbf{R}\mathrm{Map}(A,V)$$

对每个 $A\in\mathrm{H}$，它在**单纯集合范畴**$_{(\infty,0)}$ 中是弱等价。

证明。 若 v是弱等价，则由定理 1.18(4)，对每个 $A\in\mathrm{H}$，$\mathbf{R}\mathrm{Map}(A,v)$ 也是弱等价。反之，假设对每个 $A\in\mathrm{H}$，$\mathbf{R}\mathrm{Map}(A,v)$ 都是弱等价，并设 X是 **N**中的一个对象。给定一个表示$X\simeq\mathrm{hocolim}_{d\in\mathrm{D}}A_d$，其中有 $A_d\in\mathrm{H}$，则映射 $\mathbf{R}\mathrm{Map}(X,v)$ 可由 [Hir03, 定理 19.4.4(1)], 识别为图 $\mathbf{R}\mathrm{Map}(A_d,U)$ 与 $\mathbf{R}\mathrm{Map}(A_d,V)$ 的同伦极限之间诱导的映射；因此由[Hir03, 定理 19.4.2(2)]可知，它是弱等价。取连通分支后，得到自然双射

$$\mathrm{Ho}(\mathbf{N})(X,U)\longrightarrow\mathrm{Ho}(\mathbf{N})(X,V),$$

因此，根据 Yoneda 引理， v 是 Ho(**N**) 中的同构。因此，根据定理 1.18(3)， v 是弱等价。 □

引理 1.22. 设H 是**M**的一组余纤维同伦生成元，设 $i:\mathcal{K}\to\mathcal{L}$ 是单纯集合的一个映射，并设$\gamma:\ [0]\to\mathbb{B}(\mathcal{L})$ 是一个点，其中 $\beta=\mathbb{B}(i)\gamma$。*Reedy* 纤维化 $P:\ \mathbb{E}\to\mathbb{B}$ 相对于下列映射是局部的

$$(i\boxtimes A):(\mathcal{K}\boxtimes A)_\beta\longrightarrow(\mathcal{L}\boxtimes A)_\gamma,\qquad A\in\mathrm{H},$$

当且仅当限制映射

$$i^*:\mathbb{E}(\mathcal{L})_\gamma\longrightarrow\mathbb{E}(\mathcal{K})_\beta$$

是**M**中的弱等价。对于$\mathbf{M}^{\Delta^{\mathrm{op}}/\mathbb{B}}$ 的任意左 *Bousfield* 局部化中的纤维对象，同样的判据也成立。

证明。 根据定理 1.14，由 $i\boxtimes A$ 诱导的、取值于 $\mathbb{E}$ 的导出映射空间之间的映射，可识别为映射$\mathbf{R}\mathrm{Map}(A,i^*)$。根据定理 1.10，固定形状纤维 $\mathbb{E}(\mathrm{L})_\gamma$和 $\mathbb{E}(\mathrm{K})_\beta$都是纤维化的，因此第一个断言由定理 1.21 得出。最后一个断言成立，是因为取值于$\mathbf{M}^{\Delta^{\mathrm{op}}/\mathbb{B}}$ 的左 Bousfield 局部化中的纤维对象的导出映射空间，可以在$\mathbf{M}^{\Delta^{\mathrm{op}}/\mathbb{B}}$ 中计算，正如第 1.1 节所述。□

1.6. **拟范畴特化**。 本节回顾关于单纯集合范畴上的 Kan–Quillen 和 Joyal 模型结构的主要事实，并将前几节的构造特化到**M** $=$ **单纯集合范畴**$_{(\infty,1)}$的情形。

Kan–Quillen 模型结构**单纯集合范畴**$_{(\infty,0)}$ 以单态射作为余纤维化，以对每个角包含都具有右提升性质的映射作为纤维化，并以 Kan复形作为纤维对象 [Hir03, 定理 7.10.12]。单纯集合的映射若对每个内角包含都具有右提升性质$\Lambda^a[r]\hookrightarrow\Delta[r]$，则称为<style id='6'>内纤维化；其中 $r\geq 2$ 和 $0<a<r$，而<style id='11'>拟范畴 是一个到 $\Delta[0]$ 的映射为内纤维化的单纯集合 [Lur09a, 定义 1.1.2.4 和 2.0.0.3]。Joyal 模型结构**单纯集合范畴**$_{(\infty,1)}$ 以单态射作为余纤维化，并以拟范畴作为纤维对象；它还是左适当且组合的 [Lur09a, 定理 2.2.5.1 和 2.4.6.1]。在拟范畴之间，其弱等价是完全忠实且本质满射映射[Lur26, 标签 01JX, 定理 4.8.4.1], , 其纤维化是能够提升具有指定源的等价的内纤维化 [Lur09a, 推论 2.4.6.5]。这两个模型结构具有相同的平凡纤维化，即对每个边界包含都具有

右提升性质的映射 $\partial\Delta[r] \hookrightarrow \Delta[r]$，我们称之为<style id='2'>单纯集合的平凡纤维化。在这两个模型结构中，每个对象都是余纤维化的，且终对象是 $\Delta[0]$。

此外，模型范畴 $\mathbf{sSet}_{(\infty,1)}$ 是笛卡尔的，因为对于每个单纯集合 A [，函子 $A \times (-)$ 在 $\mathbf{sSet}_{(\infty,1)}$ 中保持单态射和弱等价 Lur09a, 推论 2.2.5.4]。因此，函子 $(-)^{\mathcal{A}}$ 保持纤维化、平凡纤维化以及纤维对象之间的弱等价；另见 [Hir03, 命题 8.5.7(2)]。

对于 $\mathbf{M} = \mathbf{sSet}_{(\infty,1)}$，集合 S 的离散实现 S^{disc} 是取 S处的常值单纯集合，而 $\mathbf{M}$ 的一个单纯对象 $\mathbb{E}$是一个双单纯集合，其中 $\mathbb{E}_{m,r} = (\mathbb{E}_m)_r$。我们将水平次数写在前面，并将垂直面映射和退化映射记为 d_i^v, s_i^v。给定单纯集合 K 和 A，我们有

$$(\mathcal{K} \boxtimes \mathcal{A})_{m,r} = \mathcal{K}_m \times \mathcal{A}_r, \qquad \mathcal{K}^h = \mathcal{K} \boxtimes \Delta[0], \qquad \mathbb{E}(\mathcal{K})_r = \mathbf{sSet}(\mathcal{K}, \mathbb{E}_{\bullet,r}).$$

设 B 为一个单纯集合，并设 $\mathbb{B} = \mathrm{B}^h$。离散单纯集合之间的每个映射都是 $\mathbf{sSet}_{(\infty,1)}$中的纤维化：它是一个内纤维化，因为内角是连通的；它还可以提升带有指定源的等价，因为离散单纯集合中的每个等价都是恒等态射。由于离散实现保持极限，$\mathbb{B}$ 的匹配映射是离散单纯集合之间的映射，因此 $\mathbb{B}$是 Reedy 纤维。除此之外，我们有

$$\mathbb{B}(\mathcal{K}) \cong \mathbf{sSet}(\mathcal{K}, \mathcal{B})^{\mathrm{disc}},$$

so t帽子 a 点 $\mathbb{B}$(K) 是一个映射 $\beta : \mathrm{K} \to \mathrm{B}$，而 $(\mathrm{K} \boxtimes \mathrm{A})^{\beta}$ 的结构映射是以下复合

$$\mathcal{K} \boxtimes \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{K}^h \xrightarrow{\beta^h} \mathcal{B}^h.$$

给定一个映射 $\mathbb{E} \to \mathbb{B}$，我们得到一个分解

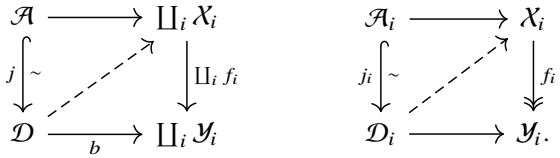
$$\mathbb{E}(\mathcal{K}) \cong \coprod_{\beta : \mathcal{K} \to \mathcal{B}} \mathbb{E}(\mathcal{K})_{\beta}.$$

引理1.23. 设 I 为一个小集合，并设 $f_i : \mathcal{X}_i \to \mathcal{Y}_i$（对 $i \in \mathrm{I}$而言）为单纯集合之间的映射。映射

$$\coprod_{i \in \mathrm{I}} f_i : \coprod_{i \in \mathrm{I}} \mathcal{X}_i \longrightarrow \coprod_{i \in \mathrm{I}} \mathcal{Y}_i$$

是 **单纯集合范畴**$_{(\infty,1)}$ 中的弱等价，当且仅当每个 f_i 都是弱等价。此外，若每个 f_i 都是 **单纯集合范畴**$_{(\infty,1)}$中的纤维化，分别为单纯集合的平凡纤维化，则 $\coprod_{i \in \mathrm{I}} f_i$ 也是如此。

证明。 第一个断言由 [Lur26、标签 06SZ 和 06T1、注释 4.8.8.7 和 4.8.8.9] 得出：一个映射在**单纯集合范畴**$_{(\infty,1)}$ 中是弱等价，当且仅当它对每个 n 都是范畴意义下的 n-连通映射；而一族映射的余积是范畴意义下的 n-连通映射，当且仅当其中每个直和项都是。现在假设每个 f_i 都是**单纯集合范畴**$_{(\infty,1)}$中的纤维化，并考虑如下左侧的提升问题，其中 j 是**单纯集合范畴**$_{(\infty,1)}$中的平凡余纤维化。



复合 $\mathrm{D} \to \coprod_i \mathrm{Y}_i \to \mathrm{I}^{\mathrm{disc}}$ 将左侧方形分解为右上方所示方形的余积，其中 $\mathrm{D} = \coprod_i \mathrm{D}_i$、$\mathrm{A} = \coprod_i \mathrm{A}_i$，且 $j = \coprod_i j_i$。根据第一条断言，每个单态射 j_i 都是**单纯集合范畴**$_{(\infty,1)}$中的弱等价，因此右侧方形都存在提升，并组合成左侧方形中的一个提升。因此，$\coprod_i f_i$ 是**单纯集合范畴**$_{(\infty,1)}$中的纤维化。平凡纤维化的结论可由纤维化的结论与第一条断言合并得出。□

命题 1.24。 对于$\mathbf{M}$ = **单纯集合范畴**$_{(\infty,1)}$，模型范畴$\mathbf{M}^{\Delta^{\mathrm{op}}}{}_{/\mathbb{B}}$ 是左适当且组合的。其余纤维化是逐层单态射，弱等价是**单纯集合范畴**$_{(\infty,1)}$中的逐层弱等价，而纤维化是 $\mathbb{B}$ 上的 *Reedy* 纤维化。特别地，每个对象都是余纤维化的。

证明。 这直接由应用于$\mathbf{M}$ = **单纯集合范畴**$_{(\infty,1)}$的定理 1.15 和 1.17，以及切片模型结构的定义得到。

□

记号 1.25。 如定理 1.20 所述，我们固定单纯集合范畴**sSet**$_{(\infty,1)}$的一个同伦生成元集合 G。集合 G 将用于定义比较两侧的局部化映射。

2. 对称幺半（∞, n）-范畴作为左双纤维化

本节中，我们将对称幺半群 (∞, n)-范畴定义为模型$\mathbf{M}_{(\infty,n)}$ 中 (∞, n)-范畴上的特殊左双 (∞, n)-纤维化，且其底对象为 $\mathbb{F}\mathrm{in}_*$。我们在第 2.1 节引入左双 (∞, n)-纤维化，并在第 2.2 节介绍特殊左双纤维化。在第 2.3 节和第 2.4 节中，我们给出这两个概念的等价表述，并证明特殊性条件在弱等价下保持不变。假设$\mathbf{M}_{(\infty,n)}$ 是左适当且组合的，我们随后在第 2.5 节和第 2.6 节构造模型结构，其纤维对象分别是左双 (∞, n)-纤维化和特殊左双 (∞, n)-纤维化。最后，我们在第 2.7 节讨论拟范畴这一情形。

假设2.1。本节　　中，我们使用一个满足以下假设的模型范畴$\mathbf{M}_{(\infty,n)}$.

(A1) 模型范畴$\mathbf{M}_{(\infty,n)}$ 是（∞, n）-范畴同伦论的一个模型。(A2) 第 1.4 节中的单纯对象 $\mathbb{F}$在$_*$ 中取值于$\mathbf{M}_{(\infty,n)}$，且是 Reedy 纤维化的，其 Segal 映射均为同构。

假设 (A1) 仅用于确定术语，而第 2.1 至 2.4 节中的证明只用到 (A2)。特别地，我们不假设$\mathbf{M}_{(\infty,n)}$ 是笛卡尔的或单纯的，也不假设其对象是余纤维化的；并且仅在第 2.5 节和第 2.6 节中，才假设$\mathbf{M}_{(\infty,n)}$ 是左适当且组合的。 $\mathbb{F}$在$_*$ 上的固定形状纤维总是按照定理 1.11 的意义来取。

在定理 1.7 的假设下，假设 (A2) 成立；根据定理 1.8，它是关于模型结构的一个条件。对于单纯预层上的单射模型结构的左 Bousfield 局部化，该条件化归为常值预层的纤维性。

命题 2.2. 设C 是一个小范畴，且$\mathbf{M}$ 是单纯预层$\mathbf{sSet}^{\mathrm{C^{op}}}$上的内射模型结构在一小集合L 个映射处的左 *Bousfield* 局部化。如果对每个集合范畴 S，常值预层 S^{disc} 在$\mathbf{M}$ 中都是纤维化的，那么$\mathbf{M}$ 满足定理 *2.1*(A2)。

证明。 离散实现函子有一个左伴随 $\pi_0 : \mathbf{sSet}^{\mathrm{C^{op}}} \to \mathbf{集合范畴}$，其定义为

$$\pi_0\mathcal{X} = \operatorname*{colim}_{c\in \mathrm{C^{op}}} \pi_0(\mathcal{X}(c)), \qquad \mathbf{sSet}^{\mathrm{C^{op}}}(\mathcal{X}, S^{\mathrm{disc}}) \cong \mathbf{Set}(\pi_0\mathcal{X}, S).$$

设 A $\hookrightarrow$B 是内射模型结构中的一个平凡余纤维化。由于映射 A (c) $\to$B(c) 对 C 的每个对象 c 都诱导出连通分支间的双射，因此集合函数 π_0A $\to \pi_0$B 是双射。根据伴随关系，A $\hookrightarrow$ B 与由集合函数 $S \to T$ 诱导的映射 $S^{\mathrm{disc}} \to T^{\mathrm{disc}}$ 之间的提升问题，对应于双射 π_0A $\to \pi_0$B 与函数 $S \to T$之间的提升问题；后者存在解。因此，每个由集合函数诱导的映射 $S^{\mathrm{disc}} \to T^{\mathrm{disc}}$都是单射纤维化。根据假设， S^{disc} 和 T^{disc} 在$\mathbf{M}$ 中是纤维化的；由定理 1.19(1)，这样的映射在$\mathbf{M}$ 中也是纤维化。由于预层范畴中的余积是不交且具有泛性的，结论由定理 1.7 得出。□

注记 2.3. 定理 2.2 的假设可以通过考察连通分支来验证。事实上，由于 π_0(X $\times \Delta[r]$) $\cong \pi_0$X，从单纯预层 X 到 S^{disc} 的单纯映射空间是离散单纯集合 $\mathbf{Set}(\pi_0\mathrm{X}, S)^{\mathrm{disc}}$。由于根据定理 2.2 的证明， S^{disc} 是单射纤维，因此对每个集合 S，常值预层 S^{disc} 在 $\mathbf{M}$ 中是纤维化的，当且仅当函子 π_0 将 L 中的每个映射送到一个双射。

定理 2.1 对以下 (∞, n)-范畴的模型成立，其中 (2) 和 (3) 中的预层范畴赋予内射模型结构的局部化。

(1) Joyal 模型结构 $\mathbf{sSet}_{(\infty,1)}$，其中 $n = 1$；参见定理 2.30。(2) $\mathbf{sSet}^{\Theta_n^{\mathrm{op}}}$ [Rez10] 上完备 Segal Θ_n-空间的 Rezk 模型结构。给定一个集合 S，常值预层S^{disc} 是集合 S 上离散严格 n-范畴的 Θ_n-神经；该范畴是刚性的，因为它的所有等价都是恒等式。因此，根据 Rez10，命题 11.24]，， S^{disc} 是纤维化的，定理 2.2 适用。(3) $\mathbf{sSet}^{(\Delta^{\mathrm{op}})^n}$ 上完备 n-重 Segal 空间的模型结构，它是通过对 CS19 第 2.3.1] 节所述的 Segal 映射、本质常值映射和完备性映射进行局部化而得到的。给定一个集合 S，根据定理 2.2 的证明，常值预层 S^{disc} 是单射纤维；它的 Segal 映射和本质常值映射都是恒等式，并且它是完备的，因为它在每个方向上的态射都是恒等式。因此， S^{disc} 在该局部化中是纤维化的，定理 2.2 适用。

此外，这三个模型范畴都是左适当且组合的：对于$\mathbf{单纯集合范畴}_{(\infty,1)}$，这一事实在第 1.6 节中回顾；而 (2) 和 (3) 中的模型结构是内射模型结构的左 Bousfield 局部化。内射模型结构是左适当且组合的，因此定理 1.16 适用。

2.1. **双重范畴与左双纤维化**。本节中，我们在$\mathbf{M}^{(\infty,n)}$中引入双重 (∞,n)-范畴和左双重 (∞,n)-纤维化。给定$\mathbf{M}^{(\infty,n)}$中的一个单纯对象 $\mathbb{X}$，我们将 $\mathbb{X}_0$称为对象与垂直态射的 (∞,n)-范畴，并将 $\mathbb{X}_1$ 称为水平态射与方形的 (∞,n)-范畴，其源映射与目标映射为 $d_1^h, d_0^h\colon \mathbb{X}_1 \to \mathbb{X}_0$。

定义 2.4 （参见 [MRR26，定义 1.1.3]）。一个双 (∞, n)-范畴，在 $\mathbf{M}^{(\infty,n)}$ 中，是 $\mathbf{M}^{(\infty,n)}$ 的一个 Reedy 纤维化单纯对象 $\mathbb{X}$，满足对于每个$m \geq 2$，Segal 映射 $\varphi_m\colon \mathbb{X}_m \to \mathbb{X}(I[m])$（来自（1.4））是 $\mathbf{M}^{(\infty,n)}$ 中的弱等价。双 (∞, n)-范畴的一个态射是 $\mathbf{M}^{(\infty,n)}$ 中单纯对象的一个映射。

上述定义来自 [MRR26，定义 1.1.3]，其中以 $n+1$替换了 n。注意，对于一个 Reedy 纤维化单纯对象 $\mathbb{X}$，根据定理 1.5，Segal 映射 φ_m 是一个纤维化，其目标是一个同伦极限，因为它是纤维对象之间纤维化的迭代拉回 [Hir03，定理 15.10.8(1) 和 19.9.1(2)]。

注 2.5 （参见 [MRR26，定义 1.1.3 和 1.1.5]）。我们不对水平方向施加任何完备性条件，而模型$\mathbf{M}^{(\infty,n)}$ 的完备性条件属于$\mathbf{M}^{(\infty,n)}$中的纤维性。特别是，此处不施加所引定义中针对（$\infty, n+1$）-范畴所用的水平完备性条件和对象空间条件。

给定$\mathbf{M}^{(\infty,n)}$ 中单纯对象的一个映射 $P\colon \mathbb{E} \to \mathbb{F}\mathrm{in}_*$ 以及 $m \geq 0$，我们将其记为

$$\lambda_m = (u_m^*, P_m) : \mathbb{E}_m \longrightarrow \mathbb{E}_0 \times_{(\mathbb{F}\mathrm{in}_*)_0} (\mathbb{F}\mathrm{in}_*)_m$$

这是由初始顶点的包含 $u_m\colon \Delta[0] \hookrightarrow \Delta[m]$ 诱导的映射，其中拉回是沿映射$u_m^*\colon (\mathbb{F}\mathrm{in}_*)_m \to (\mathbb{F}\mathrm{in}_*)_0$取的。注意，$u_1^* = d_1^h$。

以下定义是$\mathbf{M}^{(\infty,n)}$ 中单纯预层左纤维化的类比；相关单纯预层左纤维化见 [Ras21b，定义 2.1 和引理 2.6]。对于 Θ-空间，相应条件见 [MRR24，§2.2 和注 2.2.5]。

定义 2.6。双（∞, n）范畴之间的态射 $Q\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ 是一个左双 （∞, n）-纤维化，如果它是 Reedy 纤维化，且映射

$$(d_1^h, Q_1) : \mathbb{X}_1 \longrightarrow \mathbb{X}_0 \times_{\mathbb{Y}_0} \mathbb{Y}_1$$

是 $\mathbf{M}^{(\infty,n)}$ 中的弱等价，其中拉回沿源映射 $d_1^h\colon \mathbb{Y}_1 \to \mathbb{Y}_0$取得。特别地，根据定理 2.1，映射 $P\colon \mathbb{E} \to \mathbb{F}$在$_*$ 中是左双（∞, n）-纤维化，当且仅当 $\mathbb{E}$ 是双（∞, n）范畴， P 是 Reedy 纤维化，且映射 λ_1 是 $\mathbf{M}^{(\infty,n)}$ 中的弱等价。

按照这一约定，左双（∞, n）-纤维化在初始顶点处进行检验；关于 Segal 空间情形的讨论，参见 [Ras23]。注意，给定 Reedy 纤维化 $P\colon \mathbb{E} \to \mathbb{F}\mathrm{in}_*$，单纯对象 $\mathbb{E}$ 是 Reedy 纤维的，因为$\mathbb{F}\mathrm{in}_*$ 也是如此，并且映射 λ_1 由定理 1.5 可知是纤维化。因此，定理 2.6 的最后一个条件表明， λ_1 是平凡纤维化。非正式地说， $\mathbb{E}$ 中位于 a 上方的每个对象 x，以及 Fin_* 中的每个态射 $f\colon a \to b$，都可提升为 $\mathbb{E}$ 中的一个水平态射，其源为 x；并且这种提升在可缩空间的选择范围内唯一。

2.2. **惰性跨度与对称幺半性**。本节中，我们定义 over $\mathbb{F}\mathrm{in}_*$ 的特殊左双重 (∞,n)-纤维化。设 $P\colon \mathbb{E} \to \mathbb{F}\mathrm{in}_*$ 是一个左双重 (∞,n)-纤维化。 $\mathbb{E}$ 上位于惰性映射 $\rho_1, \ldots, \rho_k$ 之上的水平态射具有共同源，它们构成从纤维 $\mathbb{E}_0(k)$ 到乘积 $\mathbb{E}_0(1)^k$ 的跨度，而特殊性条件要求该跨度的右腿是弱等价。

给定态射 $f\colon a \to b$ in Fin_*，面映射 d_1^h 和 d_0^h 限制为固定形状纤维之间的映射

$$s_f^P : \mathbb{E}_1(f) \longrightarrow \mathbb{E}_0(a), \qquad t_f^P : \mathbb{E}_1(f) \longrightarrow \mathbb{E}_0(b),$$

它们在 $\mathbf{M}^{(\infty,n)}$ 中构成一个从 $\mathbb{E}_0(a)$ 到 $\mathbb{E}_0(b)$ 的跨度。对于 $k \geq 1$，我们考虑惰性跨度

$$\mathbb{E}_0(\langle k\rangle) \xleftarrow{\pi_k^P} \mathbb{E}_1(\rho_1) \times_{\mathbb{E}_0(\langle k\rangle)} \cdots \times_{\mathbb{E}_0(\langle k\rangle)} \mathbb{E}_1(\rho_k) \xrightarrow{t_k^P} \mathbb{E}_0(\langle 1\rangle)^k, \tag{2.7}$$

其中，拉回沿映射 $s_{\rho_i}^P$ 进行，映射 π_k^P 是典范投影，并且 $t_k^P = (t_{\rho_i}^P \mathrm{pr}_i)_{i=1}^k$。对于$k = 0$，我们设

$$\pi_0^P = \mathrm{id}_{\mathbb{E}_0(\langle 0\rangle)}, \qquad t_0^P : \mathbb{E}_0(\langle 0\rangle) \longrightarrow [0]. \tag{2.8}$$

定义 2.9 （参见 [Seg74]； [Lur17，定义 2.0.0.7 和 §2.4.2]）。若映射

$$t_k^P = (t_{\rho_i}^P \mathrm{pr}_i)_{i=1}^k : \mathbb{E}_1(\rho_1) \times_{\mathbb{E}_0(\langle k\rangle)} \cdots \times_{\mathbb{E}_0(\langle k\rangle)} \mathbb{E}_1(\rho_k) \longrightarrow \mathbb{E}_0(\langle 1\rangle)^k$$

对每个 $k \geq 1$，都是$\mathbf{M}^{(\infty,n)}$ 中的弱等价，(2.8) 中的映射 t_0^P也同样如此。

这一术语源自 [Seg74] 的特殊 Γ-空间。映射 t_k^P 的作用相当于 [Lur17，定义 2.0.0.7] 中由惰性映射诱导的映射；另可参见 [Lur17，§2.4.2] 中的幺半群对象。t_k^P 的源和目标可以根据定理 1.2 的惰性扇表述如下。

引理 2　.10. 设 $P:\mathbb{E}\to\mathbb{F}$属于$_*$ 是一个左双(∞,n)-纤维化，并设 $k\geq 1$。存在同构

$$\mathbb{E}(\mathcal{J}_k)_{\beta_k}\cong\mathbb{E}_1(\rho_1)\times_{\mathbb{E}_0(\langle k\rangle)}\cdots\times_{\mathbb{E}_0(\langle k\rangle)}\mathbb{E}_1(\rho_k),\qquad \mathbb{E}(\mathcal{V}_k)_{\beta_k|\mathcal{V}_k}\cong\mathbb{E}_0(\langle 1\rangle)^k,$$

它们关于 P 自然，并且在这些同构下，沿包含映射 $\Delta\{c\}\hookrightarrow\mathcal{J}_k$ 和 $\mathcal{V}_k\hookrightarrow\mathcal{J}_k$ 的限制映射分别对应于映射π_k^P 和 t_k^P。对于 $k=0$，$\mathcal{J}_0$ 和 $\mathcal{V}_0$ 处的固定形状纤维分别为 $\mathbb{E}_0(\langle 0\rangle)$ 和 $[0],$，限制映射则是(2.8)中的映射。

证明。 惰性扇 $\mathbb{J}_k$ 是由 k 个 $\Delta[1]$ 沿其初始顶点推出得到的，而函子 $\mathbb{E}(-)$将此推出映为一个拉回。在 β_k 处取纤维后，得到第一个同构；在此同构下，沿$\Delta\{c\}\hookrightarrow\mathbb{J}_k$的限制就是投影 π_k^P。类似地，单纯集合 V_k 是顶点 $v_1,\ldots,v_k$ 的余积，由此得到第二个同构；于是沿 $\mathrm{V}_k\hookrightarrow\mathbb{J}_k$ 的限制就是映射 t_k^P。根据构造，这两个同构都关于 P 自然。对于 $k=0$，有 $\mathbb{E}(\Delta[0])_{\langle 0\rangle}=\mathbb{E}_0(0)$ 和 $\mathbb{E}(\varnothing)\cong[0]$。□

定义 2.11。 对称幺半(∞,n)-范畴$\mathbf{M}^{(\infty,n)}$是 $\mathbb{E}\to\mathbb{F}$在$_*$中的一个特殊左双(∞,n)-纤维化。其底层(∞,n)-范畴是 $\mathbf{M}^{(\infty,n)}$中的纤维对象 $\mathbb{E}_0(1)$。对称幺半(∞,n)-范畴之间的函子是$_*$中在 $\mathbb{F}$上单纯对象的一个映射。

注记 2.12。 对于$_*$中 F 上的余笛卡尔纤维化，对称幺半函子必须保持余笛卡尔边；参见 [Lur17，定义 2.1.3。7]定理 2.11 中无需此类条件，因为左双(∞,n)-纤维化中的每个水平态射都扮演余笛卡尔边的角色。请注意，如果$\mathbf{M}^{(\infty,n)}$ 中的对象并非个个都是余纤维化的，那么两个对称幺半(∞,n)-范畴之间同伦范畴中的态射，可由定理 2.28 的模型结构中的余纤维化替换出发的映射表示。在定理 2.2 之后列出的模型中，每个对象都是余纤维化的。对于 $n=1$，与 Lurie 定义的比较见定理 4.38 和 4.53。

注记 2.13。 对于 $n=1$，我们将在第 4 节证明，定理 2.11 等价于 Lurie 的定义。对于 $n>1$，本文并未证明比较结果，但我们预计如下。以在（∞,n）方向上离散的对象为底的左纤维化，应当可以展直为（∞,n）-范畴的图；对于以（$n+1$）-范畴为底的 Segal 余预层， [Nui24 的推论 4.33], 以及 [Ras21b] 和 [MRR23] 各自在其模型中的 Grothendieck 构造，均是如此。在这种等价下，以 $\mathbb{F}\mathrm{in}_*$ 为底的左双（∞,n）-纤维化，应对应于由 Fin_* 索引的（∞,n）-范畴图；跨距（π_k^P，t_k^P）应对应于由惰性映射诱导的、映入 k-重乘积的映射；而特殊性条件应对应于 Γ-对象条件，即 [CS19 的定义 3.3] 中的条件。我们尚未验证，所引等价是否适用于第 2.5 节和第 2.6 节的模型结构。

例 2.14。 设 $n=1$ 和 $\mathbf{M}^{(\infty,n)}=$ **单纯集合范畴**$^{(\infty,1)}$，并设 $F:\mathrm{Fin}_*\to$ **集合范畴** 是一个函子，其元素范畴为 $\int F$。投影 $\int F\to\mathrm{Fin}_*$ 诱导出一个映射

$$P:\mathbb{E}=N(\textstyle\int F)^h\longrightarrow\mathbb{F}\mathrm{in}_*.$$

由于 $\mathbb{E}$ 和 $\mathbb{F}$在$_*$ 中的各层及匹配对象都是离散单纯集合，映射 P 是一个 Reedy 纤维化，而 $\mathbb{E}$ 的 Segal 映射都是同构，因为 $N(\int F)$ 是一个神经。此外，Fin_* 中的一串可复合映射连同其源处的一个 F 元素，唯一地提升为 $\int F$中的一串可复合态射，因此每个 λ_m 都是同构，且 P 是一个左双（∞，1）-纤维化。对于 $k\geq 0$，我们有

$$\mathbb{E}_0(\langle k\rangle)=F\langle k\rangle,\qquad \mathbb{E}(\mathcal{J}_k)_{\beta_k}\cong F\langle k\rangle,\qquad t_k^P=(F(\rho_1),\ldots,F(\rho_k)),$$

其中，集合被视为离散单纯集合。因此， P 是特殊的，当且仅当映射

$$\theta_k=(F(\rho_i))_{i=1}^k:F\langle k\rangle\longrightarrow F\langle 1\rangle^k$$

对每个 $k\geq 0$ 都是双射；换言之，当且仅当 F 是 [Seg74] 意义下的特殊 Γ-集合。在这种情况下，集合范畴$M=F1$ 是一个交换幺半群，其单位是 $F0$ 中唯一元素在 $F(\mu_0)$ 下的像，其乘法定义为

$$x\cdot y=F(\mu_2)\theta_2^{-1}(x,y).$$

更一般地，对于 Fin_* 中的映射 $f\colon k\to l$，我们有

$$\big(\theta_\ell F(f)\theta_k^{-1}(x_1,\ldots,x_k)\big)_j=\prod_{i\in f^{-1}(j)}x_i,\qquad 1\leq j\leq\ell,$$

反过来，对每个交换幺半群 [Seg74]，这个公式都定义了一个特殊函子。另一方面，取值于至少含有两个元素的集合范畴的常值函子，给出了一个不是特殊的左双（∞,1）-纤维化。

现在我们证明，跨度 (2.7) 的左腿是平凡纤维化，而右腿是纤维化。

命题 2.15. 设 $P\colon \mathbb{E} \to \mathbb{F}\mathrm{in}_*$ 是一个左双(∞,n)-纤维化。对于每个态射 $f\colon a \to b$，其中 $a \to b$ 属于 Fin_*，映射s_f^P是平凡纤维化，而映射

$$(s_f^P, t_f^P) : \mathbb{E}_1(f) \longrightarrow \mathbb{E}_0(a) \times \mathbb{E}_0(b)$$

是纤维化。此外，对于每个 $k \geq 0$，跨度中的三个对象

$$\mathbb{E}_0(\langle k\rangle) \xleftarrow{\pi_k^P} \mathbb{E}(\mathcal{J}_k)_{\beta_k} \xrightarrow{t_k^P} \mathbb{E}_0(\langle 1\rangle)^k$$

在$\mathbf{M}^{(\infty,n)}$ 中都是纤维化的，映射 π_k^P 是平凡纤维化，而映射 t_k^P 是纤维化。

证明。 由于 P 是 Reedy 纤维化，映射 $P_0\colon \mathbb{E}_0 \to (\mathbb{F}\mathrm{in}_*)_0$ 是纤维化，因此对于 Fin_* 中的每个对象 a，其纤维 $\mathbb{E}_0(a)$ 都是纤维化的。设 $f\colon a \to b$ 是 Fin_* 中的一个态射，并令

$$A_{\mathrm{src}} = \mathbb{E}_0 \times_{(\mathbb{F}\mathrm{in}_*)_0} (\mathbb{F}\mathrm{in}_*)_1, \qquad A_{\mathrm{end}} = (\mathbb{E}_0 \times \mathbb{E}_0) \times_{(\mathbb{F}\mathrm{in}_*)_0 \times (\mathbb{F}\mathrm{in}_*)_0} (\mathbb{F}\mathrm{in}_*)_1,$$

其中，拉回分别沿源映射 d_1^h和映射 $(d_1^h,\ d_0^h)$ 取。相对匹配映射 $r_1\colon \mathbb{E}_1 \to A_{\mathrm{end}}$ 是一个纤维化，而映射 $\lambda_1\colon \mathbb{E}_1 \to A_{\mathrm{src}}$ 是一个平凡纤维化，正如定理 2.6 后所观察到的那样。将纤维 $\mathbb{E}_0(a)$ 、 $\mathbb{E}_0(b)$ 、 $\mathbb{E}_1(f)$ 分别包含到 $\mathbb{E}_0$、$\mathbb{E}_0$、$\mathbb{E}_1$中的包含映射记为 j_a、j_b、j_f，我们在$\mathbf{M}^{(\infty,n)}$中得到以下拉回方块。

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E}_1(f) & \xrightarrow{j_f} & \mathbb{E}_1 \\ {\scriptstyle s_f^P}\downarrow{\scriptstyle \sim} & \lrcorner & {\scriptstyle \sim}\downarrow{\scriptstyle \lambda_1} \\ \mathbb{E}_0(a) & \xrightarrow[(j_a, f!)]{} & A_{\mathrm{src}} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{E}_1(f) & \xrightarrow{j_f} & \mathbb{E}_1 \\ {\scriptstyle (s_f^P, t_f^P)}\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle r_1} \\ \mathbb{E}_0(a) \times \mathbb{E}_0(b) & \xrightarrow[(j_a \times j_b, f!)]{} & A_{\mathrm{end}} \end{array}$$

确实，从 $\mathbf{M}^{(\infty,n)}$ 中的对象 C 到左侧余跨度的拉回的一个映射，由映射 $x\colon C \to \mathbb{E}_1$ 和$a'\colon C \to \mathbb{E}_0(a)$ 组成，且满足 $P_1 x = f!_C$ 以及 $j_a a' = d_1^h x$。由于 f的源是 a，等式 $P_1 x = f!_C$ 意味着 $d_1^h x$唯一地经由 $\mathbb{E}_0(a)$ 分解，因此这样的映射对 (x, a') 等价于一个映射 $C \to \mathbb{E}_1(f)$。同样的论证适用于右侧方形。因此， s_f^P是一个平凡纤维化，而 $(s_f^P,\ t_f^P)$ 是一个纤维化。对于 $k \geq 1$，由定理 1.6 应用于$A = \mathbb{E}_0(k)$、 $H_i = \mathbb{E}_1(\rho_i)$ 和 $D_i = \mathbb{E}_0(1)$，再由定理 2.10 可知，映射 π_k^P是一个平凡纤维化，映射 t_k^P是一个纤维化，而对象 $\mathbb{E}(\mathcal{J}_k)_{\beta_k}$ 是纤维对象。此外，对象 $\mathbb{E}_0(1)^k$ 作为纤维对象的乘积也是纤维对象。最后，情形 $k = 0$ 由定理 1.6 的情形 $k = 0$ 及 (2.8) 得出。□

因此，左双重（∞， n）-纤维化 P是特殊的，当且仅当对于每个$k \geq 0$，映射 t_k^P都是平凡纤维化。

注释 2.16。 对于 $k = 0$，特殊性条件要求映射 $\mathbb{E}_0(0) \to [0]$ 是弱等价，但不一定是同构。对于 $k = 1$，特殊性条件自动满足。事实上，我们有 $\rho_1 = \mathrm{id}_{\langle 1\rangle}$，且退化映射限制为映射 $s_0^h\colon \mathbb{E}_0(1) \to \mathbb{E}_1(\mathrm{id}_{\langle 1\rangle})$，它是映射 $s_{\rho_1}^P$ 和 $t_{\rho_1}^P$ 的公共截面。由于 $s_{\rho_1}^P$ 根据定理 2.15 是平凡纤维化，映射 s_0^h 是弱等价，因此根据三取二性质，映射 $t_1^P = t_{\rho_1}^P$也是弱等价。

例 2.17. $k = 0$ 的特殊性条件并不能由 $k \geq 1$的条件推出。事实上，对于$\mathbf{M}^{(\infty,n)} = \mathbf{单纯集合范畴}^{(\infty,1)}$，从空单纯对象出发的唯一映射 $P\colon \varnothing \to \mathbb{F}\mathrm{in}_*$是一个左双（∞, 1）-纤维化：它是 Reedy 纤维化，因为其相对匹配映射是离散单纯集合之间的映射，而其 Segal 映射以及映射 λ_1 都是空单纯集合之间的同构。对于每个 $k \geq 1$，映射 t_k^P是空单纯集合之间的同构，但映射 t_0^P是映射 $\varnothing \to \Delta[0]$，它在**单纯集合范畴**$^{(\infty,1)}$中不是弱等价。

2.3. **源条件与诱导运算**。 本节将证明，Reedy 纤维化 $P\colon \mathbb{E} \to \mathbb{F}\mathrm{in}_*$ 是左双（∞, n）-纤维化，当且仅当所有映射 λ_m 都是弱等价；并说明左双（∞, n）-纤维化在其纤维上诱导的运算。对于 Segal 空间，第一项结果见 [Ras23，引理 3.29]。

命题 2.18。 设 P： $\mathbb{E} \to \mathbb{F}$在$_*$ 中是一个 *Reedy* 纤维化。则 $\mathbb{E}$ 是 *Reedy* 纤维的，每个 $\mathbb{E}_m$ 在 $\mathbf{M}^{(\infty,n)}$中都是纤维化的，并且每个映射 λ_m 都是纤维化。此外，以下条件等价。

（i） $\mathbb{E}$ 的 *Segal* 映射 φ_m 对每个 $m \geq 2$ 都是弱等价，并且 λ_1 是弱等价，即，映射 P 是一个左双（∞、n）-纤维化。（ii） 映射 λ_m 对每个 $m \geq 0$都是弱等价。（iii） 映射 λ_m 对每个 $m \geq 0$都是平凡纤维化。

若这些条件成立，则 $\mathbb{E}$ 的 *Segal* 映射是平凡纤维化。

证明。 由于 $\mathbb{F}\mathrm{in}_*$ 是 Reedy 纤维的，因此 $\mathbb{E}$也是如此。将定理 1.5 应用于包含映射 $\varnothing \hookrightarrow \Delta[m]$ 和 $I[m] \hookrightarrow \Delta[m]$，可知对象 $\mathbb{E}_m$ 是纤维化的，且 $\mathbb{E}$ 的 Segal 映射 φ_m 是纤维化；将同一引理应用于 P 和包含映射 $\Delta\{0\} \hookrightarrow \Delta[m]$，可知映射 λ_m 是纤维化。特别地，条件 (ii) 和 (iii) 等价。为了比较 (i) 和 (ii)，假设 λ_1 是平凡纤维化（在任一条件下此假设都成立），并令 $m \geq 1$。对于 $0 \leq j \leq m$，令 $I[j] \subseteq \Delta[m]$表示面 $\Delta\{0, \ldots, j\}$的脊，并设

$$C_j = \mathbb{E}(I[j]) \times_{\mathbb{F}\mathrm{in}_*(I[j])} (\mathbb{F}\mathrm{in}_*)_m,$$

使得 $C_0 = \mathbb{E}_0 \times_{(\mathbb{F}\mathrm{in}_*)_0} (\mathbb{F}\mathrm{in}_*)_m$。对于 $1 \leq j \leq m$，令边$j : (\mathbb{F}\mathrm{in}_*)_m \to (\mathbb{F}\mathrm{in}_*)_1$ 表示到边$\Delta\{j-1, j\}$的限制，并令 a_{j-1}: $C_{j-1} \to \mathbb{E}_0$表示在顶点 $j-1$处的求值。将函子 $\mathbb{E}(-)$ 和$\mathbb{F}\mathrm{in}_*(-)$应用于单纯集合的推出 $I[j] = I[j-1] \amalg_{\Delta\{j-1\}} \Delta\{j-1, j\}$，可得 $\mathbf{M}^{(\infty,n)}$中的一个拉回方块

$$\begin{array}{ccc} C_j & \longrightarrow & \mathbb{E}_1 \\ \downarrow{\scriptstyle \sim} & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle \sim\, \lambda_1} \\ C_{j-1} & \xrightarrow[(a_{j-1}, \mathrm{edge}_j \mathrm{pr}_2)]{} & \mathbb{E}_0 \times_{(\mathbb{F}\mathrm{in}_*)_0} (\mathbb{F}\mathrm{in}_*)_1, \end{array}$$

因此，投影 $C_j \to C_{j-1}$是平凡纤维化。由于 Segal 映射 $(\mathbb{F}\mathrm{in}_*)_m \to \mathbb{F}\mathrm{in}_*(I[m])$ 是同构，我们有 $C_m \cong \mathbb{E}(I[m])$，而复合 $C_m \to C_{m-1} \to \cdots \to C_0$ 给出一个平凡纤维化

$$\gamma_m : \mathbb{E}(I[m]) \longrightarrow \mathbb{E}_0 \times_{(\mathbb{F}\mathrm{in}_*)_0} (\mathbb{F}\mathrm{in}_*)_m$$

使得 $\lambda_m = \gamma_m \varphi_m$。根据三取二性质，映射 λ_m 是弱等价，当且仅当 Segal 映射φ_m 是弱等价。由于 λ_0 是同构，这表明 (i) 和 (ii) 等价。最后，若这些条件成立，则 $\mathbb{E}$ 的 Segal 映射都是平凡纤维化，因为它们是纤维化。□

推论 2.19。 设 $P\colon \mathbb{E} \to \mathbb{F}\mathrm{in}_*$ 是一个左双(∞, n)-纤维化。对于每个 $m \geq 0$ 以及 $\mathcal{F}\mathrm{in}_*$的每个 m-单纯形 σ，沿着初始顶点的包含的限制映射

$$\lambda_m^\sigma = u_m^* : \mathbb{E}_m(\sigma) \longrightarrow \mathbb{E}_0(\sigma(0))$$

是$\mathbf{M}^{(\infty,n)}$中纤维对象之间的平凡纤维化。

证明。 $\mathbb{E}_m(\sigma)$ 和 $\mathbb{E}_0(\sigma(0))$ 的纤维由定理 1.10 可知是纤维化的。此外，根据定理 2.18，映射 λ_m 是一个平凡纤维化，因此，下图所示的拉回 λ_m^σ 也如此。

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E}_m(\sigma) & \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} & \mathbb{E}_m \\ \downarrow{\scriptstyle \lambda_m^\sigma\, \sim} & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle \sim\, \lambda_m} \\ \mathbb{E}_0(\sigma(0)) & \xrightarrow[(\mathrm{pr}_1, \sigma!)]{} & \mathbb{E}_0 \times_{(\mathbb{F}\mathrm{in}_*)_0} (\mathbb{F}\mathrm{in}_*)_m. \end{array}$$

□

注 2.20 （诱导运算）。 在$_*$ 中的左双（∞, n）纤维化 $P\colon \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ 诱导出一个函子

$$\mathrm{Fin}_* \longrightarrow \mathrm{Ho}(\mathbf{M}_{(\infty,n)}), \qquad a \longmapsto \mathbb{E}_0(a), \qquad f \longmapsto T_f = [t_f^P][s_f^P]^{-1},$$

其中 $[-]$ 表示其在同伦范畴中的像，而根据定理 2.15，$[s_f^P]$ 可逆。事实上，赋值$f \mapsto T_f$保持恒等式，因为退化映射 s_0^h是 $s_{\mathrm{id}_a}^P$ 和 $t_{\mathrm{id}_a}^P$ 的公共截面。给定 Fin_* 中可复合的映射$a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$ 以及 F 在$_*$中的相应 2-单形 $\sigma = (f, g)$，到初始顶点的限制 $v\colon \mathbb{E}_2(\sigma) \to \mathbb{E}_0(a)$ 根据定理 2.19 是一个平凡纤维化，并且面映射 $d_2^h\colon \mathbb{E}_2(\sigma) \to \mathbb{E}_1(f)$、$d_1^h\colon \mathbb{E}_2(\sigma) \to \mathbb{E}_1(gf)$ 以及 $d_0^h\colon \mathbb{E}_2(\sigma) \to \mathbb{E}_1(g)$ 满足

$$s_f^P d_2^h = v = s_{gf}^P d_1^h, \qquad t_f^P d_2^h = s_g^P d_0^h, \qquad t_g^P d_0^h = t_{gf}^P d_1^h.$$

因此

$$T_g T_f[v] = [t_g^P][s_g^P]^{-1}[t_f^P d_2^h] = [t_g^P d_0^h] = [t_{gf}^P d_1^h] = T_{gf}[v],$$

因此 $T_g T_f = T_{gf}$，因为 $[v]$ 是一个同构。此外，由定理 1.18(5) 可知，纤维对象的有限乘积是 $\mathrm{Ho}(\mathbf{M}^{(\infty,n)})$ 中的乘积，并且 $s_{\rho_i}^P \mathrm{pr}_i = \pi_k^P$，故映射

$$S_k = [t_k^P][\pi_k^P]^{-1} : \mathbb{E}_0(\langle k\rangle) \longrightarrow \mathbb{E}_0(\langle 1\rangle)^k$$

对于每个 $k \geq 1$，都是映射 $(T_{\rho i})_{i=1}^k$。因此， P 是特殊的，当且仅当对于每个 $k \geq 0$， S_k 是一个同构，其中 S_0表示到终对象的映射。在这种情况下，活跃映射 μ_k 诱导出 k 元运算

$$T_{\mu_k} S_k^{-1} : \mathbb{E}_0(\langle 1\rangle)^k \longrightarrow \mathbb{E}_0(\langle 1\rangle)$$

在 $\mathrm{Ho}(\mathbf{M}^{(\infty,n)})$ 中，其中 th 单位由情形 $k = 0$ 给出。这些运算的高阶相干性由 th 编码

单纯对象 $\mathbb{E}$。

2.4. **纤维的同伦不变性与特殊性**。本节证明，在左双（∞, n）纤维化之间，特殊性条件在弱等价下保持不变。为此，我们首先证明，这些弱等价可由零次检测；关于单纯预层的局部化左纤维化的类似结果，参见 [Ras21b，定理 4.62] 。

引理 2.21. 设 $F : \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ 是左双(∞, n)-纤维化之间的一个覆盖 $\mathbb{F}\mathrm{in}_*$ 的映射。那么， F 是逐层弱等价，当且仅当 F_0 是 $\mathbf{M}^{(\infty,n)}$中的弱等价。

证明. 假设 F_0 是弱等价，并令 $P : \mathbb{E} \to \mathbb{F}\mathrm{in}_*$ 和 $P' : \mathbb{E}' \to \mathbb{F}\mathrm{in}_*$ 表示结构映射。我们将 $b_m : (\mathbb{F}\mathrm{in}_*)_m \to (\mathbb{F}\mathrm{in}_*)_0$ 记为对初始顶点的限制。由于 P_0 和 P'_0 是纤维化，映射 F_0 是切片 $\mathbf{M}^{(\infty,n)}/(\mathbb{F}\mathrm{in}_*)_0$, 中纤维对象之间的弱等价，因此根据定理 1.18(6)，它沿 b_m 的拉回 $b_m^* F_0$ 是弱等价。在交换方块中

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E}_m & \xrightarrow{F_m} & \mathbb{E}'_m \\ {\scriptstyle\lambda_m}\downarrow{\scriptstyle\sim} & & {\scriptstyle\sim}\downarrow{\scriptstyle\lambda'_m} \\ \mathbb{E}_0 \times_{(\mathbb{F}\mathrm{in}_*)_0} (\mathbb{F}\text{中}_*)_m & \xrightarrow[b_m^* F_0]{\sim} & \mathbb{E}'_0 \times_{(\mathbb{F}\mathrm{in}_*)_0} (\mathbb{F}\text{中}_*)_m \end{array}$$

根据定理 2.18，垂直映射是平凡纤维化。因此，根据三取二性质，对于每个 $m \geq 0$， F_m 都是弱等价。□

因此 ，这样的映射 F 在第 2.2 节中考虑的纤维之间诱导出弱等价 .

引理 2.22。 设 $P : \mathbb{E} \to \mathbb{F}\mathrm{in}_*$ 和 $P' : \mathbb{E}' \to \mathbb{F}\mathrm{in}_*$ 是左双(∞, n)-纤维化，并设 $F : \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ 是一个位于 $\mathbb{F}\mathrm{in}_*$ 上的映射，满足 F_0 是弱等价。那么，对于每个 $m \geq 0$ 以及 $\mathcal{F}\mathrm{in}_*$ 的每个 m-单纯形 σ ，所诱导的映射

$$F_m(\sigma) : \mathbb{E}_m(\sigma) \longrightarrow \mathbb{E}'_m(\sigma)$$

是 $\mathbf{M}^{(\infty,n)}$ 中的弱等价，因此，对每个 $k \geq 0$，所诱导的映射 $\mathbb{E}(\mathcal{J}_k)_{\beta_k} \to \mathbb{E}'(\mathcal{J}_k)_{\beta_k}$ 也是弱等价。特别地，左双(∞, n)-纤维化 P 是特殊的，当且仅当 P' 是特殊的。

证明。 根据定理 2.21，对于每个 $m \geq 0$，映射 F_m 都是弱等价。由定理 1.5 应用于包含 $\varnothing \hookrightarrow \Delta[m]$，可知 P_m 和 P'_m 是纤维化，因此映射 F_m 是切片 $\mathbf{M}^{(\infty,n)}/(\mathbb{F}\mathrm{in}_*)_m$ 中纤维对象之间的弱等价。因此，根据定理 1.18(6)，沿点 $\sigma : [0] \to (\mathbb{F}\mathrm{in}_*)_m$ 的拉回 $F_m(\sigma)$是弱等价。接下来，对于 $k \geq 0$，令 $r_k : \mathbb{E}(\mathbb{J}_k)_{\beta_k} \to \mathbb{E}'(\mathbb{J}_k)_{\beta_k}$ 表示由 F诱导的映射。在交换方块中

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E}(\mathcal{J}_k)_{\beta_k} & \xrightarrow{r_k} & \mathbb{E}'(\mathcal{J}_k)_{\beta_k} \\ {\scriptstyle\pi_k^P}\downarrow{\scriptstyle\sim} & & {\scriptstyle\sim}\downarrow{\scriptstyle\pi_k^{P'}} \\ \mathbb{E}_0(\langle k\rangle) & \xrightarrow[F_0(\langle k\rangle)]{\sim} & \mathbb{E}'_0(\langle k\rangle) \end{array}$$

根据定理 2.15，竖直映射是平凡纤维化，而映射 $F_0(k)$ 根据证明的第一部分是弱等价。因此，根据三取二性质，r_k 是弱等价。此外，在交换方块中

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E}(\mathcal{J}_k)_{\beta_k} & \xrightarrow[\sim]{r_k} & \mathbb{E}'(\mathcal{J}_k)_{\beta_k} \\ {\scriptstyle t_k^P}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle t_k^{P'}} \\ \mathbb{E}_0(\langle 1\rangle)^k & \xrightarrow[F_0(\langle 1\rangle)^k]{\sim} & \mathbb{E}'_0(\langle 1\rangle)^k \end{array}$$

映射 $F_0(1)^k$ 是弱等价，这是因为根据定理 1.18(5)，它是纤维对象之间弱等价的有限乘积。因此，根据三取二性质，映射 t_k^P是弱等价，当且仅当 $t_k^{P'}$是弱等价；所以， P是特殊的，当且仅当 P' 是特殊的。□

2.5. **左双纤维化的一般模型结构**。本节将在$\mathbf{M}^{(\infty,n)}$ 上的单纯对象范畴中构造一个模型结构，其中 $\mathbb{F}$在$_*$ 之上，其纤维对象恰为左双（∞, n）-纤维化。我们通过对切片 Reedy 模型结构在一组映射处作左 Bousfield 局部化，得到这一模型结构；这组映射用于检测映射 λ_m 何时为弱等价。

假设2.23。本节及第 2.6 节中，除定理 2.1 的假设外，我们还假设$\mathbf{M}^{(\infty,n)}$ 是左适当且组合的。

由定理 1.17，切片 Reedy 模型结构 $\left((\mathbf{M}^{(\infty,n)})^{\Delta^{\mathrm{op}}}{}_{/\mathbb{F}\text{在}_*}\right)$是左适当且组合的。Ras21b 的定理 4.17 和 5.15] 为单纯预层构造了同类模型结构，而 MR24 §2.2 和注 2.2.5]回顾了 Θ-空间的双左纤维化模型结构；我们不将这些模型结构与下文构造的模型结构进行比较。

与前面一样，我们用 $b_m : (\mathbb{F}\text{在}_*)_m \to (\mathbb{F}\text{在}_*)_0$ 表示到初始顶点的限制。为了定义局部化映射，我们使用次数 m 上求值函子的左伴随。

引理 2.24. 设 $m \geq 0$。则以下陈述成立。

(1) 存在一个 *Quillen* 伴随

$$\mathbf{M}_{(\infty,n)}/(\mathbb{F}\mathrm{in}_*)_m \underset{\mathrm{ev}_m}{\overset{\mathbb{F}_m}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\bot}}}} \left((\mathbf{M}_{(\infty,n)})^{\Delta^{\mathrm{op}}}_{/\mathbb{F}\mathrm{in}_*}\right)$$

其中，对于一个对象 a： $A \to$ （$\mathbb{F}$在$_*$）$_m$，单纯对象 $\mathbb{F}_m A$ 由下式给出

$$(\mathbb{F}_m A)_\ell = \coprod_{\alpha:[\ell]\to[m]} A,$$

其中， α所索引的直和项上的结构映射为 $\alpha_h^* a$ 。

（2）函子 （b_m）$_!$： $\mathbf{M}^{(\infty,n)}$/（$\mathbb{F}$在$_*$）$_m \to \mathbf{M}^{(\infty,n)}$/（$\mathbb{F}$在$_*$）$_0$由与 b_m的后复合给出，是左 *Quillen* 的，并且初始顶点的包含诱导出一个自然映射

$$j^{\mathrm{glob}}_{m,A} : \mathbb{F}_0((b_m)_! A) \longrightarrow \mathbb{F}_m A,$$

当 A 在 $\mathbf{M}^{(\infty,n)}$/（$\mathbb{F}$在$_*$）$_m$中是余纤维对象时，该映射是余纤维对象之间的余纤维化。

（3）给定 $\mathbf{M}^{(\infty,n)}$/（$\mathbb{F}$在$_*$）$_m$ 中的一个余纤维对象 A 以及一个 *Reedy* 纤维化 P： $\mathbb{E} \to \mathbb{F}$在$_*$，由 $j^{\mathrm{glob}}_{m\,A}$，诱导的、到 $\mathbb{E}$ 的导出映射空间之间的映射可识别为映射

$$\mathbf{R}\mathrm{Map}(A, \mathbb{E}_m) \xrightarrow{\mathbf{R}\mathrm{Map}(A,\lambda_m)} \mathbf{R}\mathrm{Map}\big(A, b_m^* \mathbb{E}_0\big),$$

w这里的导出映射空间取自 $\mathbf{M}^{(\infty,n)}$/（$\mathbb{F}$在$_*$）$_m$ 以及 $b_m^*\mathbb{E}_0 = \mathbb{E}_0 \times_{(\mathbb{F}\mathrm{in}_*)_0}$ （$\mathbb{F}$在$_*$）$_m$.

证明。 *</style}*在上的映射在中由其在以恒等态射为指标的直和项上的分量决定；该分量是一个在（在中）上的映射，由此得到（*1*）中的伴随。的底层单纯对象是，因此，根据定理 *1.12* 的证明中对闩对象的计算，由映射在$M^{(\infty,n)}$/(𝔽在$_*$中)$_m$ 诱导的映射 $\mathbb{F}_m A \to \mathbb{F}_m A'$ 在度l 的相对闩映射是

$$\left(\coprod_{\mathrm{D}_\ell\Delta[m]} A'\right) \amalg \left(\coprod_{\mathrm{N}_\ell\Delta[m]} A\right) \longrightarrow \left(\coprod_{\mathrm{D}_\ell\Delta[m]} A'\right) \amalg \left(\coprod_{\mathrm{N}_\ell\Delta[m]} A'\right),$$

它在以退化单形为指标的直和项上是恒等态射，在以非退化单形为指标的直和项上则是映射 $A \to A'$。如定理 1.12 的证明所示，由于两个切片中的余纤维化和弱等价都是由底层模型范畴决定的，因此 $\mathbb{F}_m$ 保余纤维化和平凡余纤维化。出于同样的原因，函子 $(b_m)_!$ 是左 Quillen。 $j^{\mathrm{glob}}_{m\,A}$ 的底层映射是

$u_m \boxtimes A$，余纤维对象 A of $\mathbf{M}^{(\infty,n)}/(\mathbb{F}\mathrm{in}_*)_m$ 的底层对象在 $\mathbf{M}^{(\infty,n)}$ 中是余纤维的。因此，根据定理 1.13， $j^{\mathrm{glob}}_{m\,A}$ 是余纤维对象之间的余纤维化，因为切片中的余纤维化由 Reedy 模型结构生成，这就证明了(2)。对于(3)，令 $A^\bullet \to \mathrm{const}(A)$ 为 A in $\mathbf{M}^{(\infty,n)}/(\mathbb{F}\mathrm{in}_*)_m$ 的一个余单纯分解。由于 A 是余纤维的，左 Quillen 函子 $\mathbb{F}_m$ 和 $\mathbb{F}_0(b_m)_!$ 将 $A^\bullet$ 分别映射为 $\mathbb{F}_m A$ 和 $\mathbb{F}_0((b_m)_! A)$ 的余单纯分解。在每个余单纯次数中，伴随将从这些分解到 $\mathbb{E}$ 的映射分别对应为从 $A^\bullet$ 到 $\mathbb{E}_m$ 和 $b_m^*\mathbb{E}_0$ 的映射，并且初始顶点映射的前复合对应于与 λ_m 的后复合。最后，由于根据定理 1.5， P_m 是一个纤维化，而 $b_m^*\mathbb{E}_0$ 的结构映射是 P_0 的一个拉回，故对象 $\mathbb{E}_m$ 和 $b_m^*\mathbb{E}_0$ 在 $\mathbf{M}^{(\infty,n)}/(\mathbb{F}\mathrm{in}_*)_m$ 中是纤维对象。因此，这些对应关系计算出了(3)中的导出映射空间及其之间的映射。□

对于每个 $m \geq 1$，我们选取组合模型范畴 $\mathbf{M}^{(\infty,n)}/(\mathbb{F}在_*)_m$ 的一组余纤维同伦生成元 H_m，该集合由定理 1.20 保证存在，并定义

$$\mathrm{J}_{\mathrm{glob}} = \left\{ j^{\mathrm{glob}}_{m,A} \;\middle|\; m \geq 1,\ A \in \mathrm{H}_m \right\}, \qquad \left((\mathbf{M}_{(\infty,n)})^{\Delta^{\mathrm{op}}}_{/\mathbb{F}\mathrm{in}_*}\right)_{\mathrm{LDbl}} = L_{\mathrm{J}_{\mathrm{glob}}}\left((\mathbf{M}_{(\infty,n)})^{\Delta^{\mathrm{op}}}_{/\mathbb{F}\mathrm{in}_*}\right). \tag{2.25}$$

注意，根据定理 2.24，$\mathrm{J}^{\mathrm{glob}}$ 中的映射是余纤维对象之间的余纤维化；此外，不需要考虑 $m = 0$ 的情形，因为 λ_0 是同构。

定理 2.26。 在定理 *2.23* 的条件下，模型结构 $\left((\mathbf{M}^{(\infty,n)})^{\Delta^{\mathrm{op}}}{}_{/\mathbb{F}在_*}\right)_{\mathrm{LDbl}}$ 存在，并且它是左适当且组合的。其余纤维化是 *Reedy* 余纤维化，其纤维对象是左双(∞,n)-纤维化P： $\mathbb{E} \to \mathbb{F}在_*$。此外，纤维对象之间的映射是弱等价，当且仅当它是逐层弱等价；当且仅当它在零次是弱等价；并且它是纤维化，当且仅当它是 *Reedy* 纤维化。

证明。由定理 1.16 和 1.17 可得 $\left((\mathbf{M}^{(\infty,n)})^{\Delta^{\mathrm{op}}}/\mathbb{F}\mathrm{in}_*\right)\mathrm{LDbl}$ 的存在性、其左适定性和组合性，以及其余纤维化的描述。设 $P: \mathbb{E} \to \mathbb{F}\mathrm{in}_*$ 是一个 Reedy 纤维化，并令 $m \geq 1$。根据定理 2.24，当且仅当对于每个 $A \in \mathrm{H}_m$，映射 P 相对于映射 $j^{\mathrm{glob}}_{m\,A}$,, 是局部的，当且仅当 $\mathbf{M}^{(\infty,n)}/(\mathbb{F}\mathrm{in}_*)_m$ 中导出映射空间的映射 $\mathrm{RMap}(A, \lambda_m)$ 是弱等价。由于 λ_m 的源和目标在 $\mathbf{M}^{(\infty,n)}/(\mathbb{F}\mathrm{in}_*)_m$ 中是纤维对象，根据定理 1.21，当且仅当 λ_m 是弱等价时，上述条件成立。因此，由定理 2.18， $\left((\mathbf{M}^{(\infty,n)})^{\Delta^{\mathrm{op}}}/\mathbb{F}\mathrm{in}_*\right)\mathrm{LDbl}$ 的纤维对象正是左双重 (∞,n)-纤维化。根据定理 1.19(1) 和定理 2.21，可得弱等价的描述以及纤维对象之间纤维化的描述。□

2.6. **特殊左双重纤维化的一般模型结构**。在本节中，我们将模型结构 $\left((\mathbf{M}^{(\infty,n)})^{\Delta^{\mathrm{op}}}{}_{/\mathbb{F}\mathrm{in}_*}\right)_{\mathrm{LDbl}}$ 局部化，从而得到一种模型结构，其纤维对象是特殊左双重（∞, n）-纤维化。我们假设定理 2.23，并选取一个由余纤维同伦生成元组成的集合 H，生成 $\mathbf{M}^{(\infty,n)}$。回忆定理 2.10， t^P_k 是沿包含 $\mathrm{V}_k \hookrightarrow \mathrm{J}_k$ 的限制。我们定义

$$\mathrm{S}^{\mathbf{M}^{(\infty,n)}}_{\mathrm{sp}} = \left\{ s^{\mathbf{M}^{(\infty,n)}}_{k,A} : (\mathcal{V}_k \boxtimes A)_{\beta_k | \mathcal{V}_k} \longrightarrow (\mathcal{J}_k \boxtimes A)_{\beta_k} \;\middle|\; k \geq 0,\ A \in \mathrm{H} \right\}, \tag{2.27}$$

其中映射 $s^{\mathbf{M}^{(\infty,n)}}_{k\,A}$,由包含 $\mathrm{V}_k \hookrightarrow \mathrm{J}_k$ 诱导，并且

$$\left((\mathbf{M}_{(\infty,n)})^{\Delta^{\mathrm{op}}}_{/\mathbb{F}\mathrm{in}_*}\right)^{\mathrm{sp}}_{\mathrm{LDbl}} = L_{\mathrm{S}^{\mathbf{M}^{(\infty,n)}}_{\mathrm{sp}}}\left((\mathbf{M}_{(\infty,n)})^{\Delta^{\mathrm{op}}}_{/\mathbb{F}\mathrm{in}_*}\right)_{\mathrm{LDbl}}.$$

注意，根据定理 1.13， $\mathrm{S}^{\mathbf{M}^{(\infty,n)}}_{\mathrm{sp}}$ 中的映射是余纤维对象之间的余纤维化，并且，对于 $k = 0$，它们是映射 $\varnothing \to (\Delta[0] \boxtimes A)\langle 0 \rangle$。

定理 2.28. 在定理 *2.23* 的条件下，模型结构 $\left((\mathbf{M}^{(\infty,n)})^{\Delta^{\mathrm{op}}}{}_{/\mathbb{F}\mathrm{in}_*}\right)^{\mathrm{sp}}{}_{\mathrm{LDbl}}$ 存在，并且它是左适当且组合的。其余纤维化是 *Reedy* 余纤维化，其纤维对象是位于 $\mathbb{F}\mathrm{in}_*$ 上的特殊左双 (∞, n)- 纤维化。此外，纤维对象之间的映射是弱等价，当且仅当它是逐层弱等价；这又当且仅当它在零次是弱等价。并且，它是纤维化，当且仅当它是 *Reedy* 纤维化。

证明。 $\left((\mathbf{M}^{(\infty,n)})^{\Delta^{\mathrm{op}}}{}_{/\mathbb{F}在_*}\right)^{\mathrm{sp}}{}_{\mathrm{LDbl}}$ 的存在性、其左适定性和组合性，以及其余纤维化的描述，均由定理 2.26 的模型结构应用定理 1.16 得出。令 $P: \mathbb{E} \to \mathbb{F}\mathrm{in}_*$ 为一个左双重 (∞, n)-纤维化，并令 $k \geq 0$。根据定理 1.22 和定理 2.10，映射 P 相对于映射 $s^{\mathbf{M}^{(\infty,n)}}_{k\,A}$,, 是局部的，

对 $A \in \mathrm{H}$，当且仅当映射 t_k^P 是弱等价。因此，$\big((\mathbf{M}_{(\infty,n)})^{\Delta^{\mathrm{op}}/\mathbb{F}\text{在}_*}\big)^{\mathrm{sp}}_{\mathrm{LDbl}}$ 的纤维对象是特殊左双重 (∞,n)-纤维化。弱等价的描述以及纤维对象之间纤维化的描述，分别由定理 1.19(1) 和定理 2.26 得出。□

注 2.29. 模型结构 $\big((\mathbf{M}_{(\infty,n)})^{\Delta^{\mathrm{op}}/\mathbb{F}\text{中}_*}\big)_{\mathrm{LDbl}}$ 和 $\big((\mathbf{M}_{(\infty,n)})^{\Delta^{\mathrm{op}}/\mathbb{F}\text{中}_*}\big)^{\mathrm{sp}}_{\mathrm{LDbl}}$ 不依赖于同伦生成元集合的选取。事实上，左 Bousfield 局部化由其余纤维化和纤维对象决定，而定理 2.26 和 2.28 对纤维对象的描述并未涉及这些集合。出于同样的原因，模型结构 $\big((\mathbf{M}_{(\infty,n)})^{\Delta^{\mathrm{op}}/\mathbb{F}\text{中}_*}\big)^{\mathrm{sp}}_{\mathrm{LDbl}}$ 是切片 Reedy 模型结构在集合 $\mathrm{J}_{\mathrm{glob}} \cup \mathrm{S}^{\mathbf{M}_{(\infty,n)}}_{\mathrm{sp}}$ 处的左 Bousfield 局部化。

2.7. **拟范畴表示。** 在本节中，我们将讨论范围限定为情形 $\mathbf{M}_{(\infty,n)} = \textbf{单纯集合范畴}_{(\infty,1)}$，采用第 1.6 节的约定，并给出定理 2.26 和 2.28 中模型结构的表示，以便用于第 4 节的比较。

命题 2.30. 模型范畴 $\textbf{单纯集合范畴}_{(\infty,1)}$ 满足定理 *2.1* 和 *2.23*。

证明. 模型范畴 $\textbf{单纯集合范畴}_{(\infty,1)}$ 是 $(\infty,1)$-范畴的一个模型，并且它是左适当且组合的，如第 1.6 节中所回顾的。此外，单纯集合的余积彼此不交且具有泛性质，并且离散单纯集合之间的每个映射都是 $\textbf{单纯集合范畴}_{(\infty,1)}$ 中的纤维化。因此，假设 (A2) 由定理 1.7 得出。□

我们将

$$\big((\mathbf{sSet}_{(\infty,1)})^{\Delta^{\mathrm{op}}}_{/\mathbb{F}\mathrm{in}_*}\big)_{\mathrm{LDbl}} \qquad \text{and} \qquad \big((\mathbf{sSet}_{(\infty,1)})^{\Delta^{\mathrm{op}}}_{/\mathbb{F}\mathrm{in}_*}\big)^{\mathrm{sp}}_{\mathrm{LDbl}}$$

定理 2.26 和 2.28 中针对 $\mathbf{M}_{(\infty,n)} = \textbf{单纯集合范畴}_{(\infty,1)}$ 给出的模型结构记为此。现在我们证明，这些模型结构可以通过对定义在 F 的单形以及惰性扇上的映射进行局部化而得到。

2.7.1. 逐个单形上的源局部化。 回顾定理 1.25 中的 $\textbf{单纯集合范畴}_{(\infty,1)}$ 的同伦生成元集合 G。对于 $m \geq 1$、$\mathrm{F\,in}_*$ 中的一个 m-单形 σ 以及 $\mathrm{A} \in \mathrm{G}$，我们将

$$j_{m,\sigma,\mathcal{A}} : (\Delta[0] \boxtimes \mathcal{A})_{\sigma(0)} \longrightarrow (\Delta[m] \boxtimes \mathcal{A})_{\sigma}$$

由初始顶点的包含 u_m 诱导的映射 $\Delta[0] \hookrightarrow \Delta[m]$，我们将所有此类映射组成的集合记为 J。

定理 2.31。 模型结构 $\big(\textbf{单纯集合范畴}_{(\infty,1)})^{\Delta^{\mathrm{op}}/\mathbb{F}\mathrm{in}_*}\big)_{\mathrm{LDbl}}$ 是左 *Bousfield* 局部化

$$\big((\mathbf{sSet}_{(\infty,1)})^{\Delta^{\mathrm{op}}}_{/\mathbb{F}\mathrm{in}_*}\big)_{\mathrm{LDbl}} = L_{\mathrm{J}}\big((\mathbf{sSet}_{(\infty,1)})^{\Delta^{\mathrm{op}}}_{/\mathbb{F}\mathrm{in}_*}\big).$$

它是左适当且组合的，其余纤维化是逐层单态射，其纤维对象是左双 $(\infty,1)$-纤维化 $P : \mathbb{E} \to \mathbb{F}\mathrm{in}_*$。特别地，每个对象都是余纤维化的。此外，对于纤维对象之间的映射 F，以下条件等价。

(i) 映射 F 是 $\big(\textbf{单纯集合范畴}_{(\infty,1)})^{\Delta^{\mathrm{op}}/\mathbb{F}\mathrm{in}_*}\big)_{\mathrm{LDbl}}$ 中的弱等价。
(ii) 映射 F 是 $\textbf{单纯集合范畴}_{(\infty,1)}$ 中的逐层弱等价。(iii) 映射 F_0 是 $\textbf{单纯集合范畴}_{(\infty,1)}$ 中的弱等价。

最后，纤维对象之间的映射是 $\big(\textbf{单纯集合范畴}_{(\infty,1)})^{\Delta^{\mathrm{op}}/\mathbb{F}\mathrm{in}_*}\big)_{\mathrm{LDbl}}$ 中的纤维化，当且仅当它是 *Reedy* 纤维化。

证明。 左 Bousfield 局部化 $L_{\mathrm{J}}\big((\textbf{单纯集合范畴}_{(\infty,1)})^{\Delta^{\mathrm{op}}/\mathbb{F}\mathrm{in}_*}\big)$ 由定理 1.16 和定理 1.24 保证存在。设 $P : \mathbb{E} \to \mathbb{F}\mathrm{in}_*$ 为 Reedy 纤维化。根据定理 1.22，映射 P 相对于映射 $j_{m,\sigma,\mathcal{A}}$（其中 $\mathrm{A} \in \mathrm{G}$）是局部的，当且仅当映射

$$\lambda_m^{\sigma} : \mathbb{E}_m(\sigma) \longrightarrow \mathbb{E}_0(\sigma(0))$$

是 $\textbf{单纯集合范畴}_{(\infty,1)}$ 中的弱等价。由于 $\lambda_m = \coprod_{\sigma \in (\mathcal{F}\mathrm{in}_*)_m} \lambda_m^{\sigma}$，根据定理 1.23，对于所有 $\sigma \in (\mathrm{F\,in}_*)_m$，映射 λ_m^{σ} 是弱等价，当且仅当 λ_m 是弱等价。因此，根据定理 2.26，模型结构 $L_{\mathrm{J}}\big((\textbf{单纯集合范畴}_{(\infty,1)})^{\Delta^{\mathrm{op}}/\mathbb{F}\mathrm{in}_*}\big)$ 和 $\big((\textbf{单纯集合范畴}_{(\infty,1)})^{\Delta^{\mathrm{op}}/\mathbb{F}\mathrm{in}_*}\big)_{\mathrm{LDbl}}$ 具有相同的纤维对象。由于二者都是 $\big((\textbf{单纯集合范畴}_{(\infty,1)})^{\Delta^{\mathrm{op}}/\mathbb{F}\mathrm{in}_*}\big)$ 的左 Bousfield 局部化，因此二者相同。其余断言由定理 1.24 和定理 2.26 得出。□

2.7.2. 惯性扇上的特殊局部化。我们记为

$$S_{sp} = \left\{ s_{k,\mathcal{A}} : (\mathcal{V}_k \boxtimes \mathcal{A})_{\beta_k | \mathcal{V}_k} \longrightarrow (\mathcal{J}_k \boxtimes \mathcal{A})_{\beta_k} \;\middle|\; k \geq 0,\ \mathcal{A} \in G \right\} \tag{2.32}$$

集合范畴 (2.27) for $\mathbf{M}_{(\infty,n)}$ = **单纯集合范畴**$_{(\infty,1)}$ and H = G。对于以有限带基点集合为指标的拟范畴图， [Sha21, §5] 中进行了同类的局部化。

定理 2.33。 模型结构 $\left((\textbf{单纯集合范畴}_{(\infty,1)})^{\Delta^{op}/\mathbb{F}in_*}\right)^{sp}_{LDbl}$ 是左 *Bousfield* 局部化

$$\left((\mathbf{sSet}_{(\infty,1)})^{\Delta^{op}}_{/\mathbb{F}in_*}\right)^{sp}_{LDbl} = L_{S_{sp}}\left((\mathbf{sSet}_{(\infty,1)})^{\Delta^{op}}_{/\mathbb{F}in_*}\right)_{LDbl}.$$

它是左适当且组合的，其余纤维化是逐层单态射，其纤维对象是特殊的左双*{style id='1'>(*∞,1)-纤维化。特别地，每个对象都是余纤维化的。此外，纤维对象之间的映射是弱等价，当且仅当它在**单纯集合范畴**$_{(\infty,1)}$中是逐层弱等价；当且仅当它在**单纯集合范畴**$_{(\infty,1)}$ 的零次上是弱等价；并且它是纤维化，当且仅当它是 *Reedy* 纤维化。

证明。 所示等式根据定义成立，其中 $\left((\mathbf{M}_{(\infty,n)})^{\Delta^{op}/\mathbb{F}in_*}\right)^{sp}_{LDbl}$ 取 H = G；而根据定理 2.29，模型结构 $\left((\mathbf{M}_{(\infty,n)})^{\Delta^{op}/\mathbb{F}in_*}\right)^{sp}_{LDbl}$ 不依赖于这一选择。其余断言由定理 1.24 和 2.28 得出。□

3. 对称幺半（∞,1）-范畴作为余笛卡尔纤维化

本节回顾 Lurie 将对称幺半（∞,1）-范畴定义为 F 在$_*$上的余笛卡尔纤维化的方法，其形式与第 2 节平行。我们将在第 3.1 和 3.2 节回顾余笛卡尔纤维化及余笛卡尔模型结构，并在第 3.3 和 3.4 节研究标记映射对象之间的限制映射。在第 3.5 节，我们将余笛卡尔纤维化上的 Segal 条件用与第 2.2 节中类似的跨度来表达，并在第 3.6 节构造一种模型结构，其纤维对象是满足此条件的余笛卡尔纤维化。最后，在第 3.7 节，我们通过提升性质刻画这些余笛卡尔纤维化。

本节中，单纯集合均赋予第 1.6 节回顾的模型结构**单纯集合范畴**$_{(\infty,1)}$；另见 [Joy08]。

3.1. **标记单纯集与余笛卡尔纤维化**。 本节回顾标记单纯集与余笛卡尔纤维化的主要定义，参见 [Lur09a, §2.4 和 §3.1], ，即将笛卡尔纤维化对偶化为余笛卡尔纤维化。标记单纯集合 是一个二元组 (K，E)，其中 K 是单纯集合，E 是 K ⊆ 中的$_1$ 一组包含所有退化边的标记 边；标记单纯集映射是保留标记边的单纯集合映射[（Lur09a，定义 3.1.0）1]。我们用**标记单纯集范畴**$^+$ 表示标记单纯集范畴，其中乘积的边当且仅当其两个分量均为标记边时才是标记边。给定单纯集合 K，我们将仅标记退化边的标记单纯集合记作 $K^\flat$，将所有边均为标记边的标记单纯集合记作 $K^\sharp$。

设 p： E → K 是一个内纤维化。E 的一条边 e： $x \to y$ 若满足映射是 p-余笛卡尔的:

$$\mathcal{E}_{e/} \longrightarrow \mathcal{E}_{x/} \times_{\mathcal{K}_{p(x)/}} \mathcal{K}_{p(e)/}$$

是单纯集合的平凡纤维化，其中切片取自 [Lur09a，注记 1.2.9.5]; 等价地，若 e^{op} 按照 [Lur09a，定义 2.4.1.1] 的意义是p^{op}-笛卡尔的。若对 E 的每个顶点 x 以及 K 中的每条边 f： $p(x) \to b$，都存在 E 中的一条 p-余笛卡尔边 e： $x \to y$，使得 $p(e) = f$[Lur09a，定义 2.4.2.1], 则内纤维化 p 是一个余笛卡尔纤维化。我们将使用以下判据来识别余笛卡尔边。

引理 3.1（ [Lur09a，注记 2.4.1。4]的对偶）。设 p： $\mathcal{E} \to \mathcal{K}$ 是一个内纤维化。E 的一条边 e 是$\mathcal{E}$ p-余笛卡尔的，当且仅当对于每个 $q \geq 2$，每个单纯集合的交换方块

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^0[q] & \xrightarrow{\eta} & \mathcal{E} \\ \downarrow & \overset{\tilde{\eta}}{\nearrow} & \downarrow p \\ \Delta[q] & \xrightarrow[\sigma]{} & \mathcal{K} \end{array}$$

其中 $\eta|_{\Delta\{0,1\}} = e$ 如图所示，存在一个提升 $\tilde{\eta}$。

给定 K 的一个顶点 a，内纤维化 p : E → K 的纤维 E_a := E $\times_{\mathcal{K}}$ Δ[0] 是一个拟范畴。若 K 是拟范畴，则 E 也是拟范畴，并且根据 [Lur09a，推论 2.4.1.6] 的对偶，E 的退化边是 p-余笛卡尔的。

记号 3.2 （[Lur09a，定义 3.1.1.8] 的对偶）。设 $p : \mathrm{E} \to \mathrm{K}$ 是一个到拟范畴 K 上的余笛卡尔纤维化。我们用 $\mathrm{E}^{\natural}$ 表示通过标记 p-余笛卡尔边从 E 得到的标记单纯集合，并将此标记称为自然标记。给定单纯集合的映射 $\beta : \mathrm{A} \to \mathrm{K}$，我们用 $\mathrm{A}^{\sharp}_{\beta}$ 和 $\mathrm{A}^{\flat}_{\beta}$ 表示带有结构映射 β、位于 $\mathrm{K}^{\sharp}$ 上的标记单纯集合 $\mathrm{A}^{\sharp}$ 和 $\mathrm{A}^{\flat}$。

在第 3 节的其余部分中，我们取 $\mathrm{K} = \mathrm{Fin}_*$，并且 $p : \mathrm{E} \to \mathrm{Fin}_*$ 表示一个余笛卡尔纤维化，其在 Fin_* 中的对象 a 上的纤维为 E_a。

3.2. **标记映射对象与余笛卡尔模型结构**。在本节中，我们回顾标记单纯集合在 $\mathrm{Fin}_*^{\sharp}$ 上的映射对象，以及来自 [Lur09a, §3.1.3] 的余笛卡尔模型结构。给定 $\mathrm{Fin}_*^{\sharp}$ 上的标记单纯集合 A 和 X，我们将由 $\mathrm{Map}^{\flat}(\mathrm{A},\mathrm{X})$ 和 $\mathrm{Map}^{\sharp}(\mathrm{A},\mathrm{X})$ 所给出的单纯集合记为

$$\begin{aligned} \mathrm{Map}^{\flat}(\mathcal{A},\mathcal{X})_r &= (\mathbf{sSet}^{+})_{/\mathcal{F}\mathrm{in}_*^{\sharp}}(\Delta[r]^{\flat}\times\mathcal{A},\mathcal{X}), \\ \mathrm{Map}^{\sharp}(\mathcal{A},\mathcal{X})_r &= (\mathbf{sSet}^{+})_{/\mathcal{F}\mathrm{in}_*^{\sharp}}(\Delta[r]^{\sharp}\times\mathcal{A},\mathcal{X}), \end{aligned} \tag{3.3}$$

其中，乘积 $\Delta[r]^{\flat}\times\mathrm{A}$ 和 $\Delta[r]^{\sharp}\times\mathrm{A}$ 通过投影到 A 被视为 $\mathrm{Fin}_*^{\sharp}$ 上的对象。

类似地，给定单纯集合的映射 $\beta : \mathrm{A} \to \mathrm{Fin}_*$ 和 $g : \mathrm{Y} \to \mathrm{Fin}_*$，我们将由下式给出的 Fin_* 上的映射所成的单纯集合记为 $\mathrm{Map}(\mathrm{A},\mathrm{Y})$:

$$\begin{aligned} \mathrm{Map}(\mathcal{A},\mathcal{Y})_r &= \mathbf{sSet}_{/\mathcal{F}\mathrm{in}_*}(\Delta[r]\times\mathcal{A},\mathcal{Y}), \\ \mathrm{Map}(\mathcal{A},\mathcal{Y}) &= \mathcal{Y}^{\mathcal{A}}\times_{(\mathcal{F}\mathrm{in}_*)^{\mathcal{A}}}\Delta[0], \end{aligned} \tag{3.4}$$

其中，$\mathrm{Y}^{\mathcal{A}}$ 表示单纯集合的内部 Hom，而映射 $\Delta[0] \to (\mathrm{Fin}_*)^{\mathcal{A}}$ 是顶点 β。例如，$\mathrm{Map}^{\flat}(\mathrm{K}^{\sharp}_{\beta}, \mathrm{E}^{\natural})$ 的一个 r-单纯形是一个映射 $F : \Delta[r]\times\mathrm{K} \to \mathrm{E}$，满足 $pF = \beta\,\mathrm{pr}_2$，并且对于每个顶点 i of $\Delta[r]$，将 F 限制到 $\{i\}\times\mathrm{K}$ 后，会把每条边映射为一条 p-余笛卡尔边。我们称 $\{i\}\times\mathrm{K}$ 的边为 $\Delta[r]\times\mathrm{K}$ 的水平边。

定理 3.5 （[Lur09a，命题 3.1.3.7、注 3.1.3.9 和命题 3.1.4 的对偶。1]）。范畴（**单纯集合范畴**$^{+}$）$_{/\mathcal{F}\mathrm{in}_*^{\sharp}}$具有一个左适定组合模型结构，记为 （**单纯集合范畴**$^{+}{}_{/(\mathcal{F}\mathrm{in}_*)^{\sharp}}$）$_{\text{余笛卡尔}}$，其余纤维化是单态射，纤维对象是 F 上自然带标记的余笛卡尔纤维化 $\mathcal{F}\mathrm{in}_*$。特别地，每个对象都是余纤维化的。

命题 3.6 (对偶于 [Lur09a，命题 3.1.3.3 及其后的定义，以及命题 3.3.1。5])。标记单纯集合之间的映射 $g : \mathcal{A} \to \mathcal{D}$ 在 $\mathcal{F}\mathrm{in}_*^{\sharp}$ 上，当且仅当对于每个余笛卡尔纤维化 $\mathcal{Z} \to \mathcal{F}\mathrm{in}_*$，其诱导映射在 （**单纯集合范畴**$^{+}{}_{/(\mathcal{F}\mathrm{in}_*)^{\sharp}}$）$_{\text{余笛卡尔}}$ 中是弱等价时，它才是在 $\mathcal{F}\mathrm{in}_*^{\sharp}$ 上的弱等价，

$$g^{*} : \mathrm{Map}^{\flat}(\mathcal{D},\mathcal{Z}^{\natural}) \longrightarrow \mathrm{Map}^{\flat}(\mathcal{A},\mathcal{Z}^{\natural})$$

在 **单纯集合范畴**$_{(\infty,1)}$ 中是弱等价。此外，在 $\mathcal{F}\mathrm{in}_*$ 上的自然带标记的余笛卡尔纤维化之间的映射，当且仅当其底层单纯集合映射在 **单纯集合范畴**$_{(\infty,1)}$ 中是弱等价，当且仅当它在每个纤维上都诱导出 **单纯集合范畴**$_{(\infty,1)}$ 中的弱等价时，它才是在 （**单纯集合范畴**$^{+}{}_{/(\mathcal{F}\mathrm{in}_*)^{\sharp}}$）$_{\text{余笛卡尔}}$ 中的弱等价。

模型范畴 （**单纯集合范畴**$^{+}{}_{/(\mathcal{F}\mathrm{in}_*)^{\sharp}}$）$_{\text{余笛卡尔}}$ 在 **单纯集合范畴**$_{(\infty,1)}$ 上具有丰结构，其张量为 $\mathrm{U}^{\flat}\times\mathrm{X}$，映射对象为 $\mathrm{Map}^{\flat}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$，根据 [Lur09a，备注 3.1.4.5], 的对偶结论；并且在 **单纯集合范畴**$_{(\infty,0)}$ 上具有丰结构，其张量为 $\mathrm{U}^{\sharp}\times\mathrm{X}$，映射对象为 $\mathrm{Map}^{\sharp}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$，根据 [Lur09a，推论 3.1.4.4] 的对偶结论。特别地，当 Y 为纤维对象时，单纯集合 $\mathrm{Map}^{\flat}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ 是一个拟范畴。回忆一下，拟范畴 U 的 核 $\mathrm{U}^{\simeq}$ 是其最大 Kan 子复形，由 U 中所有边均为等价的单形组成。给定 （**单纯集合范畴**$^{+}{}_{/(\mathcal{F}\mathrm{in}_*)^{\sharp}}$）$_{\text{余笛卡尔}}$中的一个对象 A 和一个纤维对象 X，我们有

$$\mathrm{Map}^{\sharp}(\mathcal{A},\mathcal{X}) = \big(\mathrm{Map}^{\flat}(\mathcal{A},\mathcal{X})\big)^{\simeq} \simeq \mathbf{R}\mathrm{Map}(\mathcal{A},\mathcal{X}), \tag{3.7}$$

其中等式是 [Lur09a，第 3.1.3 条注记的对偶形式。1], 弱等价源于关于 **单纯集合范畴**$_{(\infty,0)}$的富化，因为 A 是余纤维化的，而 X 是纤维化的。

3.3. **限制映射与弱等价**。本节中，我们证明沿单态射的映射对象 $\mathrm{Map}^{\flat}$ 之间的限制映射是 **单纯集合范畴**$_{(\infty,1)}$ 中的纤维化，并据此得出 **单纯集合范畴**$^{+}{}_{/(\mathcal{F}\mathrm{in}_*)^{\sharp}}$）$_{\text{余笛卡尔}}$中局部性的一个判据，与定理 1.22 类似。

引理 3.8 ([Lur09a, 推论 3.1.4 的对偶。3])。 设 $i:\mathcal{A}\hookrightarrow\mathcal{D}$ 是 $\left(\textbf{单纯集合范畴}^{+}{}_{/(\mathcal{F}\mathrm{in}_{*})^{\sharp}}\right)_{\text{余笛卡尔}}$ 中的一个余纤维化，并设 $j:\mathcal{K}\hookrightarrow\mathcal{L}$ 是**单纯集合范畴**$_{(\infty,1)}$中的一个余纤维化。那么推出积

$$j^{\flat}\square i:(\mathcal{K}^{\flat}\times\mathcal{D})\amalg_{\mathcal{K}^{\flat}\times\mathcal{A}}(\mathcal{L}^{\flat}\times\mathcal{A})\longrightarrow\mathcal{L}^{\flat}\times\mathcal{D}$$

是 $\left(\textbf{单纯集合范畴}^{+}{}_{/(\mathcal{F}\mathrm{in}_{*})^{\sharp}}\right)_{\text{余笛卡尔}}$ 中的余纤维化；当 i 是 $\left(\textbf{单纯集合范畴}^{+}{}_{/(\mathcal{F}\mathrm{in}_{*})^{\sharp}}\right)_{\text{余笛卡尔}}$ 中的弱等价，或 j 是**单纯集合范畴**$_{(\infty,1)}$ 中的弱等价时，它是平凡的。

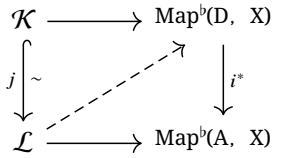
证明。 由于取对偶保持积、推出和单态射不变，[Lur09a，推论 3.1.4.3] 的对偶表明：余笛卡尔模型结构中一个余纤维化与 $\Delta[0]^{\sharp}$ 上的一个余纤维化进行推出积所得的是 $\left(\textbf{单纯集合范畴}^{+}{}_{/(\mathcal{F}\mathrm{in}_{*})^{\sharp}}\right)_{\text{余笛卡尔}}$ 中的余笛卡尔模型结构在 $\Delta[0]^{\sharp}\times\mathrm{F}\,\mathrm{in}^{\sharp}_{*}\cong\mathrm{F}\,\mathrm{in}^{\sharp}_{*}$ 上的一个余纤维化；当这两个余纤维化中的任一个是平凡的时，它是平凡的。映射 $j^{\flat}$ 是 $\Delta[0]^{\sharp}$ 上标记单纯集合之间的一个单态射。此外，如果 j 是 **单纯集合范畴**$_{(\infty,1)}$ 中的弱等价，那么根据 [Lur09a，命题 3.1.5.3],， $j^{\flat}$ 是 $\Delta[0]^{\sharp}$ 上笛卡尔模型结构中的弱等价，因而根据 [Lur09a，备注 3.1.4.6]，也是 $\Delta[0]^{\sharp}$ 上余笛卡尔模型结构中的弱等价。将上述陈述应用于 $j^{\flat}$ 和 i 即得结果。□

命题 3.9。 设 $\mathcal{X}$ 是 $\left(\textbf{单纯集合范畴}^{+}{}_{/(\mathcal{F}\mathrm{in}_{*})^{\sharp}}\right)_{\text{余笛卡尔}}$ 中的一个纤维对象，并设 $i:\mathcal{A}\hookrightarrow\mathcal{D}$ 是标记单纯集合在 $\mathcal{F}\mathrm{in}^{\sharp}_{*}$ 上的一个单态射。那么限制映射

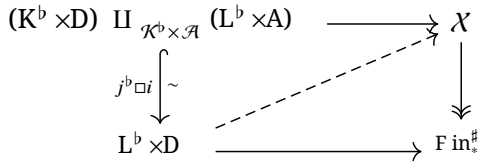
$$i^{*}:\mathrm{Map}^{\flat}(\mathcal{D},\mathcal{X})\longrightarrow\mathrm{Map}^{\flat}(\mathcal{A},\mathcal{X})$$

是**单纯集合范畴**$_{(\infty,1)}$中的一个纤维化；当 i 是 $\left(\textbf{单纯集合范畴}^{+}{}_{/(\mathcal{F}\mathrm{in}_{*})^{\sharp}}\right)_{\text{余笛卡尔}}$中的弱等价时，该纤维化是平凡的。特别地，单纯集合 $\mathrm{Map}^{\flat}(\mathcal{A},\ \mathcal{X})$ 是一个拟范畴。

证明。 设 $j:\mathrm{K}\hookrightarrow\mathrm{L}$ 是**单纯集合**$_{(\infty,1)}$中的一个平凡余纤维化。根据伴随，单纯集合中的一个提升问题



对应于标记单纯集合中的一个提升问题



它允许一个提升，因为映射 $j^{\flat}\square i$ 在 $\left(\textbf{单纯集合范畴}^{+}{}_{/(\mathcal{F}\mathrm{in}_{*})^{\sharp}}\right)_{\text{余笛卡尔}}$ 中是一个平凡余纤维化（由定理 3.8，且 X 是纤维对象）。因此， i^{*}是 **单纯集合范畴**$_{(\infty,1)}$中的纤维化。若 i是 $\left(\textbf{单纯集合范畴}^{+}{}_{/(\mathcal{F}\mathrm{in}_{*})^{\sharp}}\right)_{\text{余笛卡尔}}$中的弱等价，则对于每个单态射 j，映射 $j^{\flat}\square i$都是平凡余纤维化，因此根据同样的论证， i^{*} 是平凡纤维化。最后一个断言可通过令 i 为包含 $\varnothing\hookrightarrow\mathrm{A}$ 来得到。□

引理 3.10。 设 $i:\ \mathcal{A}\hookrightarrow\mathcal{D}$ 是标记单纯集合在 $\mathcal{F}\mathrm{in}^{\sharp}_{*}$ 上的一个单态射，并令 $\mathcal{X}$ 为$\left(\textbf{单纯集合范畴}^{+}{}_{/(\mathcal{F}\mathrm{in}_{*})^{\sharp}}\right)_{\text{余笛卡尔}}$中的纤维对象。对于每个单纯集合 $\mathcal{U}$，在 **单纯集合范畴**$_{(\infty,0)}$中存在一个弱等价

$$\mathbf{R}\mathrm{Map}(\mathcal{D}\times\mathcal{U}^{\flat},\mathcal{X})\simeq\mathbf{R}\mathrm{Map}\big(\mathcal{U},\mathrm{Map}^{\flat}(\mathcal{D},\mathcal{X})\big),$$

关于$\mathcal{D}$是自然的。特别地，对这组映射而言，对象$\mathcal{X}$ 是局部的

$$\left\{i\times\mathcal{U}^{\flat}\ \middle|\ \mathcal{U}\in\mathrm{G}\right\}$$

当且仅当限制映射 i^{*}：映射$^{\flat}$($\mathcal{D}$、$\mathcal{X}$) →映射$^{\flat}$($\mathcal{A}$、$\mathcal{X}$)是**单纯集合范畴**$_{(\infty,1)}$中的弱等价，其中G是定理 *1.25* 中的同伦生成元集合。

证明。 由定理 3.8 应用于包含 $\varnothing \hookrightarrow \mathrm{D}$，可得一个 Quillen 伴随

$$\mathbf{sSet}_{(\infty,1)} \underset{\mathrm{Map}^\flat(\mathcal{D},-)}{\overset{\mathcal{D}\times(-)^\flat}{\rightleftarrows}} \left(\mathbf{sSet}^+_{/(\mathcal{F}\mathrm{in}_*)^\sharp}\right)_{\mathrm{coCart}}$$

A 也同理。令 $\mathrm{U}^\bullet \to \mathrm{const}(\mathrm{U})$ 为 $\mathbf{sSet}^{(\infty,1)}$ 中 U 的一个余单纯分解。正如定理 1.14 的证明中所述，左伴随将 $\mathrm{U}^\bullet$ 送到 $\mathrm{D} \times \mathrm{U}^\flat$ 的一个余单纯分解，而每个余单纯次数中的伴随给出了所需的弱等价；另见 [Hir03，命题 17.4.16(1)]。对 A 和 D 使用同一个分解，我们得到一个交换方块

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}\mathrm{Map}(\mathcal{D}\times\mathcal{U}^\flat,\mathcal{X}) & \xrightarrow{\simeq} & \mathbf{R}\mathrm{Map}\big(\mathcal{U},\mathrm{Map}^\flat(\mathcal{D},\mathcal{X})\big) \\ \downarrow{\scriptstyle (i\times\mathcal{U}^\flat)^*} & & \downarrow{\scriptstyle \mathbf{R}\mathrm{Map}(\mathcal{U},i^*)} \\ \mathbf{R}\mathrm{Map}(\mathcal{A}\times\mathcal{U}^\flat,\mathcal{X}) & \xrightarrow[\simeq]{} & \mathbf{R}\mathrm{Map}\big(\mathcal{U},\mathrm{Map}^\flat(\mathcal{A},\mathcal{X})\big). \end{array}$$

由于根据定理 3.9，$\mathrm{Map}^\flat(\mathrm{D},\ \mathrm{X})$ 和 $\mathrm{Map}^\flat(\mathrm{A},\ \mathrm{X})$ 都是拟范畴，因此根据定理 1.21，右侧的垂直映射对于每个 $\mathrm{U} \in \mathrm{G}$ 都是弱等价，当且仅当 i^* 是 $\mathbf{sSet}^{(\infty,1)}$ 中的弱等价。这证明了最后一个断言，因为左侧的垂直映射正是关于映射 $i \times \mathrm{U}^\flat$ 定义局部性的映射。□

3.4. **初始顶点限制**。 在本节中，我们证明，标记边在 F 上的初始顶点的包含映射 $j_*^\sharp$ 是 $\left(\mathbf{sSet}^+_{/(\mathcal{F}\mathrm{in}_*)^\sharp}\right)_{\mathrm{coCart}}$ 中的平凡余纤维化。

约定 3.11 （ [Lur09a，定义 3.1.1.1]的对偶）。 若一个标记单纯集合映射的对偶是标记无害映射，则称其为余笛卡尔标记无害映射。根据 [Lur09a，注记 3.1.3.4], 的对偶，F 上的每个余笛卡尔标记无害映射 $j_*^\sharp$ 都是 $\left(\mathbf{sSet}^+_{/(\mathcal{F}\mathrm{in}_*)^\sharp}\right)_{\mathrm{coCart}}$ 中的平凡余纤维化。

给定 F 中的一条边 f_*，我们将其记为

$$j_f : (\Delta\{0\})^\sharp_{f(0)} \hookrightarrow \Delta[1]^\sharp_f \tag{3.12}$$

初始顶点的包含映射。

引理 3.13 （ [Lur09a，定义 3.1.1.1(2)], 在一维情形下的对偶。）映射 j_f 是余笛卡尔标记无害映射。特别地，它是 $\left(\mathbf{sSet}^+_{/(\mathcal{F}\mathrm{in}_*)^\sharp}\right)_{\mathrm{coCart}}$ 中的平凡余纤维化。

证明。 映射 j_f 的对偶是包含

$$(\Delta\{1\})^\flat = (\Delta\{1\})^\sharp \hookrightarrow \Delta[1]^\sharp$$

在 $((\mathrm{Fin}_*)^{\mathrm{op}})^\sharp$ 上，这是 [Lur09a，定义 3.1.1.1(2)] 中的一维生成标记无害映射，因为 $\Lambda^1[1] = \Delta\{1\}$，且边 $\Delta\{0,1\}$ 是 $\Delta[1]$ 的唯一非退化边。最后一个断言由定理 3.11 得出。□

3.5. **惰性跨度与特殊余笛卡尔纤维化**。 本节中，我们用类似于第 2.2 节中的跨度来定义 $\mathrm{F}\,\mathrm{in}_*$ 上的特殊余笛卡尔纤维化，并证明它们与 [Lur17，定义 2.0.0.7] 中的对称幺半群∞-范畴一致。给定余笛卡尔纤维化 $p : \mathrm{E} \to \mathrm{F}\,\mathrm{in}_*$ 以及 $\mathrm{F}\,\mathrm{in}_*$ 的一条边 $f\colon a \to b$，我们定义

$$\mathrm{Cocart}_p(f) = \mathrm{Map}^\flat\big(\Delta[1]^\sharp_f, \mathcal{E}^\natural\big),$$

其顶点是 p-余笛卡尔边，位于 f 之上。将其限制到 $\Delta[1]$ 的顶点，得到一个单纯集合的跨度 s

$$\mathcal{E}_a \xleftarrow{s_f^p} \mathrm{Cocart}_p(f) \xrightarrow{t_f^p} \mathcal{E}_b. \tag{3.14}$$

对于 $k \geq 1$，我们将从迭代拉回到 $\mathrm{E}^{\langle k\rangle}$ 的典范投影记为 π_k^p

$$\mathrm{Cocart}_p(\rho_1) \times_{\mathcal{E}_{\langle k\rangle}} \cdots \times_{\mathcal{E}_{\langle k\rangle}} \mathrm{Cocart}_p(\rho_k),$$

映射 $s^p_{\rho_i}$，我们考虑映射

$$t_k^p = (t^p_{\rho_i}\ \mathrm{pr}_i)_{i=1}^k : \mathrm{Cocart}_p(\rho_1) \times_{\mathcal{E}_{\langle k\rangle}} \cdots \times_{\mathcal{E}_{\langle k\rangle}} \mathrm{Cocart}_p(\rho_k) \longrightarrow \mathcal{E}^k_{\langle 1\rangle}. \tag{3.15}$$

对于 $k=0$，我们考虑跨度

$$\mathcal{E}_{\langle 0\rangle} \xleftarrow{\pi_0^p=\mathrm{id}} \mathcal{E}_{\langle 0\rangle} \xrightarrow{t_0^p} \Delta[0]. \tag{3.16}$$

定义 3.17（参见 [Seg74] 和 [Lur17，定义 2.0.0.7]）。余笛卡尔纤维化 $p:\mathrm{E}\to \mathrm{F}\,\mathrm{in}_*$ 是特殊的，如果对于每个 $k\geq 0$，来自 (3.15) 和 (3.16) 的映射 t_k^p 都是**单纯集合范畴**$_{(\infty,1)}$ 中的弱等价。

如定　　理 2.10 中所述，t_k^p 的源和目标可以用定理 1 的惰性扇来表示。　　2.

引理 3.18。设 $p:\mathcal{E}\to\mathcal{F}\mathrm{in}_*$ 是一个余笛卡尔纤维化。存在同构

$$\mathrm{Map}^\flat\big((\mathcal{J}_k)^\sharp_{\beta_k},\mathcal{E}^\natural\big)\cong \mathrm{Cocart}_p(\rho_1)\times_{\mathcal{E}_{\langle k\rangle}}\cdots\times_{\mathcal{E}_{\langle k\rangle}}\mathrm{Cocart}_p(\rho_k)\qquad (k\geq 1)$$

and

$$\mathrm{Map}^\flat\big((\mathcal{V}_k)^\sharp_{\beta_k|\mathcal{V}_k},\mathcal{E}^\natural\big)\cong \mathcal{E}^k_{\langle 1\rangle}\qquad (k\geq 0),$$

在这些同构下，沿包含映射 $\Delta\{c\}\hookrightarrow\mathcal{J}_k$ 和 $\mathcal{V}_k\hookrightarrow\mathcal{J}_k$ 的限制映射分别对应于映射 π_k^p 和 t_k^p。对于 $k=0$，我们有 映射$^\flat\big((\mathcal{J}_0)^\sharp_{\beta_0}、\ \mathcal{E}^\natural\big)=\mathcal{E}^{\langle 0\rangle}$，且限制映射就是(3.16)中的映射。

证明。令 $k\geq 1$。$\mathrm{Map}^\flat\big((\mathrm{J}_k)^\sharp_{\beta_k},\ \mathrm{E}^\natural\big)$ 的 r-单纯形是标记单纯集合映射

$$\Delta[r]^\flat\times\mathcal{J}_k^\sharp\longrightarrow\mathcal{E}^\natural$$

在 $\beta_k\mathrm{pr}_2$ 上。由于 J_k 是沿顶点 c 拼接的 k 个 $\Delta[1]$ 的并集，这样的映射等价于一族映射F_i：对于 $1\leq i\leq k$，$\Delta[r]\times\Delta[1]\to\mathrm{E}$ 在 $\rho_i\,\mathrm{pr}_2$，上，且它们在 $\Delta[r]\times\{0\}$ 上具有相同的限制，并将水平边发送到 p-余笛卡尔边，即得到一族 r-单纯形 F_i，其属于 $\mathrm{Cocart}_p(\rho_i)$，并且在映射$s_{\rho_i}^p$下具有相同的像。该对应与 r 中的单纯结构相容，从而给出第一个同构；沿 $\Delta\{c\}\hookrightarrow\mathrm{J}_k$ 的限制随后对应于 π_k^p。由于 $\mathrm{V}_k=\coprod_{i=1}^k\Delta[0]$ 和 β_k 将 V_k 的每个顶点都发送到 1，我们得到第二个同构；在此同构下，沿 $\mathrm{V}_k\hookrightarrow\mathrm{J}_k$ 的限制将族 $(F_i)_i$ 发送到族 $(F_i|_{\Delta[r]\times\{1\}})_i$，因此对应于 t_k^p。对于 $k=0$，我们有在 0 和 $\mathrm{V}_0=\varnothing$ 上的 $\mathrm{J}_0=\Delta[0]$，因此这两个映射对象分别是 $\mathrm{E}^{\langle 0\rangle}$ 和 $\Delta[0]$。□

在下文中，我们使用定理 3.18 的第一个同构，将由映射 π_k^p和 t_k^p形成的惰性跨度 写作

$$\mathcal{E}_{\langle k\rangle}\xleftarrow{\pi_k^p}\mathrm{Map}^\flat\big((\mathcal{J}_k)^\sharp_{\beta_k},\mathcal{E}^\natural\big)\xrightarrow{t_k^p}\mathcal{E}^k_{\langle 1\rangle}. \tag{3.19}$$

例3.20. 设 $F\colon \mathrm{Fin}_*\to$ **集合范畴** 是一个函子，其元素范畴为 $\int F$。映射 $p\colon N(\int F)\to\mathrm{F}\,\mathrm{in}_*$是一个左纤维化，因此 $N(\int F)$ 的每条边都是 p-余笛卡尔的 [Lur09a, §2.1.1]。其纤维是离散单纯集合 Fk，而映射 t_k^p可识别为映射 $(F(\rho_1)、\ \ldots\ldots、\ F(\rho_k))$。因此，如同定理 2.14，余笛卡尔纤维化 p 是特殊的，当且仅当 F 是一个特殊的 Γ-集合。

例3.21. 设 C 是一个小的对称幺半范畴，并令 $\mathrm{C}^\otimes\to\mathrm{Fin}_*$ 为 [Lur17, Construction 2.0.0.1], 的上纤维化，其对象是 C 中对象的有限序列 $(x_1、\ \ldots\ldots、\ x_k)$，而其态射 $(x_1、\ \ldots\ldots、\ x_k)\to(y_1、\ \ldots\ldots、\ y_{k'})$ 在 Fin_* 中位于映射 $f\colon k\to k'$ 之上时，是由以下态射组成的族

$$\bigotimes_{i\in f^{-1}(j)} x_i\longrightarrow y_j\qquad (1\leq j\leq k')$$

在 C 中。其神经是一个余笛卡尔纤维化 $p:\mathrm{E}=N(\mathrm{C}^\otimes)\to\mathrm{F}\,\mathrm{in}_*$，其纤维为 $\mathrm{E}_{\langle k\rangle}\cong N(\mathrm{C})^k$；当且仅当 E 的一条边的所有分量都是同构时，该边才是p-余笛卡尔的。因此，映射对象 $\mathrm{Map}^\flat\big((\mathrm{J}_k)^\sharp_{\beta_k},\ \mathrm{E}^\natural\big)$是 C 中同构的族范畴 $(\alpha_i\colon x_i\xrightarrow{\cong}y_i)_{i=1}^k$的神经，而映射 t_k^p 是函子 T的神经，该函子将这样的族发送到 $(y_i)_{i=1}^k$。函子 T 是范畴等价，其逆由 $(y_i)_i\mapsto(\mathrm{id}_{y_i})_i$给出，因此对于每个 $k\geq 1$，t_k^p 都是 **单纯集合范畴**$_{(\infty,1)}$ 中的弱等价。由于 $\mathrm{E}^{\langle 0\rangle}=\Delta[0]$，余笛卡尔纤维化 p 是特殊的。

引理3.22。设 $p\colon\ \mathcal{E}\to\mathcal{F}$中$_*$是一个余笛卡尔纤维化，并设 $f\colon\ a\to b$是$\mathcal{F}$中的$_*$一条边。那么，单纯集合 $\mathrm{Cocart}_p(f)$是一个拟范畴，映射 s_f^p是单纯集合的平凡纤维化，而映射

$$(s_f^p,t_f^p):\mathrm{Cocart}_p(f)\longrightarrow\mathcal{E}_a\times\mathcal{E}_b$$

是单纯集合范畴中的纤维化$_{(\infty,1)}$。

证明。 根据定理 3.9，单纯集合 $\mathrm{Cocart}_p(f)$ 是一个拟范畴。由 (3.3)，我们有 $\mathrm{Map}^\flat((\Delta\{0\})^\sharp_a,\ \mathrm{E}^\natural) = \mathrm{E}_a$以及 $\mathrm{Map}^\flat((\partial\Delta[1])^\sharp_{f|\partial\Delta[1]},\ \mathrm{E}^\natural) = \mathrm{E}_a \times \mathrm{E}_b$，因此映射 s^p_f和 $(s^p_f,\ t^p_f)$ 分别是沿包含映射j_f和 $(\partial\Delta[1])^\sharp \hookrightarrow \Delta[1]^\sharp_f$的限制映射。因此，根据定理 3.9，$(s^p_f,\ t^p_f)$ 是单纯集合范畴中的纤维化$^{(\infty,1)}$；根据同一命题， s^p_f是一个平凡纤维化，因为 j_f是 $\left(\textbf{单纯集合范畴}^+_{/(\mathcal{F}\text{in}_*)^\sharp}\right)_{\text{余笛卡尔}}$ 中的平凡余纤维化，这由定理 3.13 得出。□

命题 3.23。 设 $p\colon\ \mathcal{E} \to \mathcal{F}\text{in}_*$ 是一个余笛卡尔纤维化，并设 $k \geq 0$。则跨度 （3.19）中的三个对象都是拟范畴，映射 π^p_k是一个平凡纤维化，且映射 t^p_k是 **单纯集合范畴**$^{(\infty,1)}$中的一个纤维化。特别地，余笛卡尔纤维化 p 是特殊的，当且仅当对于每个 $k \geq 0$，映射 t^p_k 都是一个平凡纤维化。

证明。 对于 $k \geq 1$，根据定理 3.22，跨度

$$\mathcal{E}_{\langle k\rangle} \xleftarrow{s^p_{\rho_i}} \mathrm{Cocart}_p(\rho_i) \xrightarrow{t^p_{\rho_i}} \mathcal{E}_{\langle 1\rangle},$$

对于 $1 \leq i \leq k$，满足定理 1.6 的假设。因此，映射 π^p_k 是一个平凡纤维化，其源是一个拟范畴，且映射 t^p_k 是 **单纯集合范畴**$^{(\infty,1)}$中的一个纤维化。 $k = 0$的情形由将定理 1.6 的 $k = 0$情形应用于（3.16）得到。最后一个断言成立，因为映射 t^p_k 是纤维化。 □

注 3.24. 与定理 2.16 中一样，对于 $k = 1$，特殊性条件自动成立。事实上，投影 $\mathrm{E}_{\langle 1\rangle} \times \Delta[1] \to \mathrm{E}^{\langle 1\rangle}$ 将水平边映为退化边，而这些边是 p-余笛卡尔的，因此它定义了映射 $s^p_{\rho_1}$和 $t^p_{\rho_1}$的公共截面 s。由于 $s^p_{\rho_1}$是定理 3.22 中的平凡纤维化，根据三取二性质，映射 s和 $t^p_1 = t^p_{\rho_1}$是弱等价。

命题 3.25. 余笛卡尔纤维化 $p : \mathcal{E} \to \mathcal{F}\text{in}_*$ 是特殊的，当且仅当它是 *[Lur17, Definition 2.0.0.7]* 意义下的对称幺半 ∞-范畴。

证明. 回忆一下，给定 $\mathrm{F\,in}_*$中的一条边 $f\colon\ a \to b$，由 f诱导的函子 $f_!\colon \mathrm{E}_a \to \mathrm{E}_b$ 可通过限制 $f_! = h|_{\mathcal{E}_a \times \{1\}}$ 得到，其中映射 $h : \mathrm{E}_a \times \Delta[1] \to \mathrm{E}$ over $f\,\mathrm{pr}_2$ 限制到 $\mathrm{E}_a \times \{0\}$上时为包含，并将每条边 $\{x\} \times \Delta[1]$ 映为余笛卡尔边；并且 $f_!$ 在等价意义下良定义 [Lur09a, §5.2.1]。根据 $\mathrm{Cocart}_p(f)$ 的定义，这样的映射 h 相当于定理 3.22 中平凡纤维化 s^p_f的一个截面 ς，其中 $f_! = t^p_f\varsigma$。因此，在 $\mathrm{Ho}(\textbf{单纯集合范畴}^{(\infty,1)})$ 中，我们有

$$[f_!] = [t^p_f][\varsigma] = [t^p_f][s^p_f]^{-1}.$$

由于 $s^p_{\rho_i}\mathrm{pr}_i = \pi^p_k$，映射 $[t^p_k][\pi^p_k]^{-1}$ 的第 i 个分量为

$$[t^p_{\rho_i}][\mathrm{pr}_i][\pi^p_k]^{-1} = [t^p_{\rho_i}][s^p_{\rho_i}]^{-1} = [(\rho_i)_!],$$

因此，由于根据定理 1.18(5)，拟范畴的积是同伦范畴中的积，映射 $[t^p_k][\pi^p_k]^{-1}$ 就是映射 $\mathrm{E}_{\langle k\rangle} \to \mathrm{E}^{k\,\langle 1\rangle}$，其分量为 $(\rho_i)_!$; 根据 Lur17，定义 2.0.0.7], 该映射必须是等价。由于 π^p_k 是弱等价，根据定理 1.18(3)，该映射在 $\mathrm{Ho}(\textbf{sSet}^{(\infty,1)})$ 中是同构，当且仅当 t^p_k 是$\textbf{sSet}^{(\infty,1)}$中的弱等价。对于 $k = 0$，两个定义都要求映射 $\mathrm{E}_{\langle 0\rangle} \to \Delta[0]$ 是弱等价。□

3.6. **特殊余笛卡尔模型结构**。在本节中，我们将模型结构 $\left(\textbf{单纯集合范畴}^+_{/(\mathcal{F}\text{in}_*)^\sharp}\right)_{\text{余笛卡尔}}$局部化，从而得到一个模型结构，其纤维对象是自然带标记的特殊余笛卡尔纤维化；标记单纯集范畴在有限带基点集合上的一个相关局部化见 [Sha21, §8]。我们考虑定义在 $\mathrm{F\,in}^\sharp_*$ 上的映射集合

$$\mathrm{S}^+_{\mathrm{sp}} = \left\{ \mathcal{V}^\sharp_k \times \mathcal{U}^\flat \longrightarrow \mathcal{J}^\sharp_k \times \mathcal{U}^\flat \;\middle|\; k \geq 0,\ \mathcal{U} \in \mathrm{G} \right\}, \tag{3.26}$$

其中结构映射由 β_k 诱导，并记

$$\left(\textbf{sSet}^+_{/(\mathcal{F}\text{in}_*)^\sharp}\right)^{\mathrm{sp}}_{\mathrm{coCart}} = L_{\mathrm{S}^+_{\mathrm{sp}}}\left(\textbf{sSet}^+_{/(\mathcal{F}\text{in}_*)^\sharp}\right)_{\mathrm{coCart}}.$$

定理 3.27。 模型结构 $\left(\textbf{单纯集合范畴}^+_{/(\mathcal{F}\text{in}_*)^\sharp}\right)^{\mathrm{sp}}_{\text{余笛卡尔}}$ 存在，并且它是左适当且组合的。其余纤维化是单态射，其纤维对象是 $\mathcal{F}\text{in}_*$ 上自然带标记的特殊余笛卡尔纤维化。特别地，每个对象都是余纤维化的。此外，纤维对象之间的映射在 $\left(\textbf{单纯集合范畴}^+_{/(\mathcal{F}\text{in}_*)^\sharp}\right)^{\mathrm{sp}}_{\text{余笛卡尔}}$中是弱等价，当且仅当它在 $\left(\textbf{单纯集合范畴}^+_{/(\mathcal{F}\text{in}_*)^\sharp}\right)_{\text{余笛卡尔}}$中是弱等价，当且仅当它在 $\textbf{单纯集合范畴}^{(\infty,1)}$ 的每个纤维上诱导弱等价。

证明。 $(\mathbf{单纯集合范畴}^{+}{}_{/(\mathcal{F}\mathrm{in}_*)^\sharp})^{\mathrm{sp}}{}_{\text{余笛卡尔}}$的存在性、其左适定性与组合性，以及其余纤维化的描述，都可由定理 1.16 应用于定理 3.5 的模型结构得到。设 $p:\mathrm{E}\to\mathrm{F}\,\mathrm{in}_*$ 是一个余笛卡尔纤维化，并设 $k\geq 0$。由定理 3.10 应用于包含 $(\mathrm{V}_k)^\sharp_{\beta_k|\mathcal{V}_k}\hookrightarrow(\mathrm{J}_k)^\sharp_{\beta_k}$ 以及定理 3.18 可知，对 $\mathrm{U}\in\mathrm{G}$，若且唯若映射 t_k^p 在**单纯集合范畴**$_{(\infty,1)}$中是弱等价，对任意 U，$\mathrm{E}^\natural$ 都关于映射 $\mathrm{V}_k^\sharp\times\mathrm{U}^\flat\to\mathrm{J}_k^\sharp\times\mathrm{U}^\flat$是局部的。因此，$(\mathbf{单纯集合范畴}^{+}{}_{/(\mathcal{F}\mathrm{in}_*)^\sharp})^{\mathrm{sp}}{}_{\text{余笛卡尔}}$ 的纤维对象正是自然带标记的特殊余笛卡尔纤维化。纤维对象之间的弱等价的描述由定理 1.19(1) 和定理 3.6 得出。□

注 3.28。 在 (3.26) 中，与对象 $\mathrm{U}^\flat$ 的乘积是必要的。事实上，根据 (3.7)，一个自然标记的余笛卡尔纤维化 $\mathrm{E}^\natural$ 相对于包含映射 $\mathrm{V}_k^\sharp\hookrightarrow\mathrm{J}_k^\sharp$ over β_k 局部，当且仅当 t_k^p 在核上诱导的映射是 $\mathbf{sSet}^{(\infty,0)}$ 中的弱等价，而这一条件并不意味着 t_k^p 是 $\mathbf{sSet}^{(\infty,1)}$ 中的弱等价。例如，令 C 为幺半群 $(\mathbb{Z}_{\geq 0},+)$ 的神经，将其视为一个只有一个对象的范畴，并考虑由投影给出的余笛卡尔纤维化$p:\ \mathrm{C}\times\mathrm{F}\,\mathrm{in}_*\to\mathrm{F}\,\mathrm{in}_*$。由于 0 是该幺半群中唯一的可逆元素，$p$-余笛卡尔边的 C 分量是一个恒等态射，因此

$$\mathrm{Map}^\flat\big((\mathcal{J}_k)^\sharp_{\beta_k},(C\times\mathcal{F}\mathrm{in}_*)^\natural\big)\cong C,$$

其中 t_k^p 由对角线 $\mathrm{C}\to\mathrm{C}^k$ 给出。该对角线在核上诱导同构，因为 C 的核是 $\Delta[0]$，但它不是 $\mathbf{sSet}^{(\infty,1)}$ 中关于 $k=0$ 和 $k\geq 2$ 的弱等价，因为诱导的自同态幺半群映射不是同构。因此，$(\mathrm{C}\times\mathrm{F}\,\mathrm{in}_*)^\natural$ 相对于包含映射 $\mathrm{V}_k^\sharp\hookrightarrow\mathrm{J}_k^\sharp$ 是局部的，但 p 不是特殊的。

3.7. **特殊性的边界提升检验**。 本节通过相对于边界包含与包含映射 $\mathrm{V}_k\hookrightarrow\mathrm{J}_k$ 的推出积的右提升性质，刻画特殊余笛卡尔纤维化；并证明，$(\mathbf{单纯集合范畴}^{+}{}_{/(\mathcal{F}\mathrm{in}_*)^\sharp})^{\mathrm{sp}}{}_{\text{余笛卡尔}}$ 也是在这些推出积处对 $(\mathbf{单纯集合范畴}^{+}{}_{/(\mathcal{F}\mathrm{in}_*)^\sharp})_{\text{余笛卡尔}}$ 作左 Bousfield 局部化所得的范畴；参见 [Bar10，定理 4.46 及其证明]。

命题 3.29。 设 $k,r\geq 0$，用 $w_{k,r}$ 表示标记单纯集合在 $\mathcal{F}$ 上的单态射 $\mathrm{in}_*^\sharp$

$$w_{k,r}:\big(\mathcal{J}_k^\sharp\times(\partial\Delta[r])^\flat\big)\amalg_{\mathcal{V}_k^\sharp\times(\partial\Delta[r])^\flat}\big(\mathcal{V}_k^\sharp\times\Delta[r]^\flat\big)\longrightarrow\mathcal{J}_k^\sharp\times\Delta[r]^\flat,\tag{3.30}$$

其结构映射由 β_k 诱导，并令 $\mathrm{W}=\{w_{k,r}\mid k,r\geq 0\}$。对于余笛卡尔纤维化 $p:\mathcal{E}\to\mathcal{F}\mathrm{in}_*$，以下条件等价。

（i）对象 $\mathcal{E}^\natural$ 在 $(\mathbf{sSet}^{+}{}_{/(\mathcal{F}\mathrm{in}_*)^\sharp})^{\mathrm{sp}}{}_{\mathrm{coCart}}$中是纤维化的。（ii）对于每个 $k\geq 0$，映射 t_k^p 是 $\mathbf{sSet}^{(\infty,1)}$ 中的弱等价。（iii）对于每个 $k\geq 0$，映射 t_k^p 是单纯集合的平凡纤维化。（iv）映射 $\mathcal{E}^\natural\to\mathcal{F}\mathrm{in}_*^\sharp$ 对映射 $w_{k,\,r}$ 具有右提升性质，其中任意 k、$r\geq 0$均成立。

此外，我们有

$$L_{\mathrm{W}}\big(\mathbf{sSet}^{+}_{/(\mathcal{F}\mathrm{in}_*)^\sharp}\big)_{\mathrm{coCart}}=\big(\mathbf{sSet}^{+}_{/(\mathcal{F}\mathrm{in}_*)^\sharp}\big)^{\mathrm{sp}}_{\mathrm{coCart}}.$$

证明。 根据定理 3.27，条件（i）和（ii）等价；根据定理 3.23，条件（ii）和（iii）等价。为证明（iii）和（iv）等价，回顾一下，单纯集合的平凡纤维化是对边界包含具有右提升性质的映射，并考虑单纯集合中的一个提升问题

$$\begin{array}{ccc}\partial\Delta[r] & \xrightarrow{\ a\ } & \text{映射}^\flat\big((\mathrm{J}_k)^\sharp_{\beta_k},\ \mathcal{E}^\natural\big)\\ \big\downarrow & \nearrow & \big\downarrow{\scriptstyle t_k^p}\\ \Delta[r] & \xrightarrow[\ b\ ]{} & \mathcal{E}^k_{\langle 1\rangle}.\end{array}$$

根据定理 3.18 和伴随，a 与 b 对应于 F 上的标记单纯集合之间的映射 $\sharp$

$$\mathcal{J}_k^\sharp\times(\partial\Delta[r])^\flat\longrightarrow\mathcal{E}^\natural,\qquad\mathcal{V}_k^\sharp\times\Delta[r]^\flat\longrightarrow\mathcal{E}^\natural,$$

它们在 $\mathrm{V}_k^\sharp\times(\partial\Delta[r])^\flat$ 上一致，也就是说，得到一个从 $w_{k,r}$ 的源到 $\mathrm{E}^\natural$ 上方 F 的 $\sharp$ 中的映射；上述方形中的提升对应于沿 $w_{k,r}$ 对该映射的延拓。因此，(iii) 与 (iv) 等价。剩下需要证明，由定理 1.16 得到的模型结构 $L_{\mathrm{W}}(\mathbf{单纯集合范畴}^{+}{}_{/(\mathcal{F}\mathrm{in}_*)^\sharp})_{\text{余笛卡尔}}$ 与 $(\mathbf{单纯集合范畴}^{+}{}_{/(\mathcal{F}\mathrm{in}_*)^\sharp})^{\mathrm{sp}}{}_{\text{余笛卡尔}}$ 一致。由于二者都是 $(\mathbf{单纯集合范畴}^{+}{}_{/(\mathcal{F}\mathrm{in}_*)^\sharp})_{\text{余笛卡尔}}$ 的左 Bousfield 局部化，只需证明它们具有相同的纤维对象。令

$\mathrm{X} = \mathrm{E}^\natural$ 是 $\left(\textbf{单纯集合范畴}^{+}{}_{/(\mathcal{F}\mathrm{in}_*)^\sharp}\right)_{\text{余笛卡尔}}$ 的一个纤维对象。由 $\left(\textbf{单纯集合范畴}^{+}{}_{/(\mathcal{F}\mathrm{in}_*)^\sharp}\right)_{\text{余笛卡尔}}$ 在 $\textbf{单纯集合范畴}_{(\infty,0)}$ 上的富化，限制映射

$$\mathrm{Map}^\sharp(\mathrm{cod}(w_{k,r}), \mathcal{X}) \longrightarrow \mathrm{Map}^\sharp(\mathrm{dom}(w_{k,r}), \mathcal{X})$$

是 $\textbf{单纯集合范畴}_{(\infty,0)}$ 中导出映射空间的模型之间的纤维化，由（3.7）可知。因此，如果 X 相对于 W 中的映射是局部的，那么这些限制映射就是平凡纤维化，特别地，它们在顶点上是满射的，从而 (iv) 成立，并且 p 是特殊的。反之，假设对于每个 $k \geq 0$，t_k^p 都是平凡纤维化。根据定理 3.18 和伴随，沿着 $w_{k,r}$ 的限制映射在映射对象 $\mathrm{Map}^\flat$ 进入 X 之间可识别为映射

$$\mathrm{Map}^\flat\left((\mathcal{J}_k)^\sharp_{\beta_k}, \mathcal{E}^\natural\right)^{\Delta[r]} \longrightarrow \mathrm{Map}^\flat\left((\mathcal{J}_k)^\sharp_{\beta_k}, \mathcal{E}^\natural\right)^{\partial\Delta[r]} \underset{(\mathcal{E}^k_{\langle 1\rangle})^{\partial\Delta[r]}}{\times} (\mathcal{E}^k_{\langle 1\rangle})^{\Delta[r]},$$

这是拟范畴之间的平凡纤维化，因为 $\textbf{单纯集合范畴}_{(\infty,1)}$ 是笛卡尔的，并且由定理 3.9 可知。因此，根据 [Lur09a，引理 3.1.3，核上的诱导映射是 $\textbf{单纯集合范畴}_{(\infty,0)}$ 中的弱等价。2], 并且，根据（3.7），核上的这个映射就是上述映射对象 $\mathrm{Map}^\sharp$之间的限制映射。这表明 X 相对于 $w_{k,r}$是局部的。□

4. 两种描述的比较

本节中，我们取 $n = 1$ and $\mathbf{M}_{(\infty,n)} = \textbf{单纯集合范畴}_{(\infty,1)}$，并比较第 2 节$\mathbb{F}\mathrm{in}_*$ 中的左双（∞，1）-纤维化与第 3 节$_*$ 中的 F 上的余笛卡尔纤维化。在第 4.1 节中，我们构造左双（∞，1）-纤维化 $P\colon \mathbb{E} \to \mathbb{F}\mathrm{in}_*$ 的阶梯 $\mathrm{Stair}(P)\colon \mathrm{Stair}(\mathbb{E}) \to \mathrm{F\,in}_*$，并证明它是余笛卡尔纤维化；当且仅当 P 是特殊的时，它也是特殊的。在第 4.2 节中，对于余笛卡尔纤维化 $p\colon \mathrm{E} \to \mathrm{F\,in}_*$ 的余笛卡尔串，我们构造左双（∞，1）-纤维化 $\mathbb{I}\mathrm{nt}(\mathrm{E}^\natural) \to \mathbb{F}\mathrm{in}_*$，并证明相应的结论。随后，我们在第 4.3 节中证明函子 $\mathbb{I}\mathrm{nt}$ 有左伴随 Diag，即标记对角线；并在第 4.4 节中证明伴随 Diag $\dashv \mathbb{I}\mathrm{nt}$ 诱导出下图中的水平 Quillen 等价，其中竖直恒等函子均为左 Quillen；参见定理 4.71 和 4.76。

$$\begin{array}{ccc}
\left((\mathbf{sSet}_{(\infty,1)})^{\Delta^{\mathrm{op}}}_{/\mathbb{F}\mathrm{in}_*}\right)_{\mathrm{LDbl}} & \underset{\mathbb{I}\mathrm{nt}}{\overset{\mathcal{D}\mathrm{iag}}{\rightleftarrows}} & \left(\mathbf{sSet}^{+}_{/(\mathcal{F}\mathrm{in}_*)^\sharp}\right)_{\mathrm{coCart}} \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} \\
\left((\mathbf{sSet}_{(\infty,1)})^{\Delta^{\mathrm{op}}}_{/\mathbb{F}\mathrm{in}_*}\right)^{\mathrm{sp}}_{\mathrm{LDbl}} & \underset{\mathbb{I}\mathrm{nt}}{\overset{\mathcal{D}\mathrm{iag}}{\rightleftarrows}} & \left(\mathbf{sSet}^{+}_{/(\mathcal{F}\mathrm{in}_*)^\sharp}\right)^{\mathrm{sp}}_{\mathrm{coCart}}.
\end{array}$$

阶梯与此伴随的关系如下。对于左双（∞,1）-纤维化 $P\colon \mathbb{E} \to \mathbb{F}\mathrm{in}_*$，我们在定理 4.65 中构造一个映射 $\psi_{\mathbb{E}}\colon \mathrm{Diag}(\mathbb{E}) \to \mathrm{Stair}(\mathbb{E})^\natural$，它在 $\left(\textbf{单纯集合范畴}^{+}{}_{/(\mathcal{F}\mathrm{in}_*)^\sharp}\right)_{\text{余笛卡尔}}$ 中是一个弱等价，并且根据定理 4.69，其目标是纤维化的。由于 $\left((\textbf{单纯集合范畴}_{(\infty,1)})^{\Delta^{\mathrm{op}}}{}_{/\mathbb{F}\mathrm{in}_*}\right)_{\mathrm{LDbl}}$中的每个对象都是余纤维化的，因此阶梯是 Diag 的左导出函子在 $\mathbb{E}$ 处取值的一个纤维模型。按照 [JT07], 的思路，Ras21a 第 4 节1], 给出了以右纤维化中的完备 Segal 对象为模型，对标记单纯集合与双单纯集合进行比较的方法。

注 4.1. 定理 4.71 背后的同伦论等价也可以从 Nuiten 关于 Segal 空间直线化的工作中得到 [Nui24], ，我们并不声称这是新的结果。Nuiten 考察双 ∞范畴的两类纤维化：一类在水平方向是左纤维化、在垂直方向是笛卡尔纤维化；另一类在水平方向是余笛卡尔纤维化、在垂直方向是右纤维化。他在 [Nui24，定理 3.1] 中证明，这两类纤维化通过一种反射彼此等价；在该反射中，水平箭头对应于先沿水平箭头、再沿纤维中的垂直箭头。定理 4.2 中阶梯的边具有这种形式，而在我们的设定中，阶梯起到了反射的作用。对于以范畴 C 为底的情形，[Nui24，推论 4.35] 将 C 上的 (∞,1)-范畴的 Segal 余预层与 C 上的余笛卡尔纤维化对应起来；当 C 为 $= \mathrm{Fin}_*$ 时，这对应于定理 4.71；另见定理 4.72。Nuiten 还指出，反射函子是带标记的双半单纯空间上的右 Quillen 函子，并且相关的同伦论是内射模型结构的左 Bousfield 局部化 [Nui24，注 3.2 和 3.9]。我们改为通过伴随 Diag $\dashv \mathbb{I}\mathrm{nt}$，比较双单纯集合上的 Reedy 模型结构的一种局部化与 Lurie 的余笛卡尔模型结构。 [Nui24] 并未讨论对称幺半结构的局部化（包括 $k = 0$ 的条件），也未讨论第 2.2 节和第 3.5 节中的跨度之间的比较。

4.1. 从左双纤维化到余笛卡尔纤维化。

4.1.1. 阶梯构造。 本节将以 [Ste25, Definition 3.1] 的形式回顾 Artin 和 Mazur [AM66], 的双单纯集合的全单纯集合，其中交换两个变量；我们将其称为阶梯。为其单形编索引的形状是 Waldhausen 的 $S_\bullet$-构造 [Wal85, BOO+21]。由于下一节的角填充论证是逐分量进行的，我们将按分量描述阶梯的单纯结构。

设 $\mathbb{X}$ 是一个双单纯集合，并采用第 1.6 节中的约定。给定 Δ 中的映射 α，我们分别将其在水平方向和垂直方向上诱导的映射记为 α_h^* 和 α_v^*，并将省略 i 的单射记为 $\delta_i\colon [r-1] \hookrightarrow [r]$。

构造 4.2 （[Ste25，定义 3.1], , 交换变量）。 对于 $q \geq 0$，我们将 $\mathrm{Stair}(\mathbb{X})_q$ 定义为由满足 $\xi_j \in \mathbb{X}_{q-j,j}$ 的元组 $\xi = (\xi_0, \ldots, \xi_q)$ 构成的集合，其中对 $1 \leq j \leq q$,

$$d_0^h \xi_{j-1} = d_j^v \xi_j. \tag{4.3}$$

给定 Δ 和 $0 \leq i \leq m$中的映射 $\alpha\colon [m] \to [q]$，令 $\alpha_i^-\colon [i] \to [\alpha(i)]$ 和 $\alpha_i^+\colon [m-i] \to [q-\alpha(i)]$ 为如下定义的映射

$$\alpha_i^-(t) = \alpha(t) \qquad \text{and} \qquad \alpha_i^+(t) = \alpha(i+t) - \alpha(i).$$

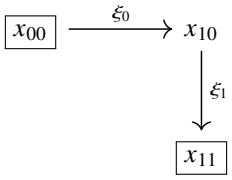
我们定义映射

$$\mathcal{S}\mathrm{tair}(\mathbb{X})(\alpha) : \mathcal{S}\mathrm{tair}(\mathbb{X})_q \longrightarrow \mathcal{S}\mathrm{tair}(\mathbb{X})_m$$

by

$$\big(\mathcal{S}\mathrm{tair}(\mathbb{X})(\alpha)(\xi)\big)_i = (\alpha_i^+)_h^* (\alpha_i^-)_v^* \xi_{\alpha(i)}. \tag{4.4}$$

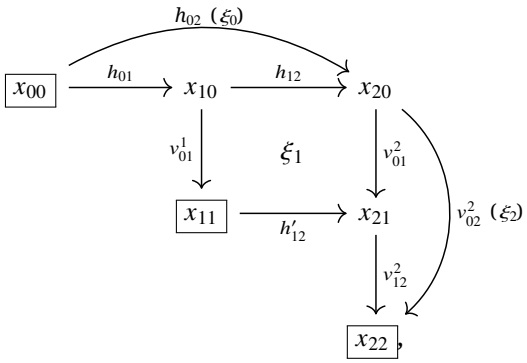
例 4.5. 我们将水平方向画为从左向右，将垂直方向画为向下。$\mathrm{Stair}(\mathbb{X})$ 的边$\xi = (\xi_0, \xi_1)$ 表示为



其中 $\xi_0 \in \mathbb{X}_{1,0}$ 是水平 1-单纯形，$\xi_1 \in \mathbb{X}_{0,1}$ 是垂直 1-单纯形，而方框标出的顶点是 ξ 的顶点。关系式 (4.3) 写作

$$d_0^h \xi_0 = d_1^v \xi_1 = x_{10}.$$

$\mathrm{Stair}(\mathbb{X})$ 的 2-单形 $\xi = (\xi_0, \xi_1, \xi_2)$ 表示为



其中 $\xi_0 \in \mathbb{X}_{2,\,0}$ 是长边为 h_{02} 的水平2-单纯形， $\xi_1 \in \mathbb{X}_{1,\,1}$ 是方形，而 $\xi_2 \in \mathbb{X}_{0,\,2}$ 是长边为 v_{02}^2 的垂直2-单纯形。关系式 (4.3) 写作

$$d_0^h \xi_0 = d_1^v \xi_1 = h_{12}, \qquad d_0^h \xi_1 = d_2^v \xi_2 = v_{01}^2.$$

一般而言， q-单形的分量 ξ_j 占据网格 $[q] \times [q]$ 中的方框 $[j,q] \times [0,j]$，这些方框的并集为三角区域 $\{(h,\ v) \mid 0 \leq v \leq h \leq q\}$。

Pro位置 4.6。 定理 *4.2* 定义了一个单纯集合 $\mathcal{S}\mathrm{tair}(\mathbb{X})$，它关于双单纯集合 $\mathbb{X}$ 是自然的 .

证明。这是经典结果，我们仅简述论证。设 $\xi \in \mathrm{Stair}(\mathbb{X})_q$。对于 $0 \le a \le b \le q$，记 $\mathrm{init}_{a,b}\colon [a] \hookrightarrow [b]$ 表示初始段的包含映射，记 $\mathrm{term}_{a,b}\colon [q-b] \hookrightarrow [q-a]$, $t \mapsto b-a+t$ 表示末尾段的包含映射。对关系 (4.3) 迭代可得

$$(\mathrm{term}_{a,b})_h^* \xi_a = (\mathrm{init}_{a,b})_v^* \xi_b \qquad \text{in } \mathbb{X}_{q-b,a}.$$

给定 $\alpha\colon [m] \to [q]$ 在 Δ 和 $1 \le i \le m$中，置 $a = \alpha(i-1)$ 和 $b = \alpha(i)$。于是 $\alpha_{i-1}^{+}\delta_0 =$ 项$_{a,\ b}\alpha_i^{+}$以及$\alpha_i^{-}\delta_i =$ 初始$_{a,\ b}\alpha_{i-1}^{-}$，因此根据所显示的恒等式，元组 (4.4) 满足关系式 (4.3)。函子性来自恒等式 $(\alpha\beta)_i^{-} = \alpha_{\beta(i)}^{-}\beta_i^{-}$和 $(\alpha\beta)_i^{+} = \alpha_{\beta(i)}^{+}\beta_i^{+}$，以及水平结构映射和垂直结构映射相交换这一事实。最后，双单纯集合的映射逐分量作用，从而得到自然性。□

我们将使用以下对 Stair(𝕏) 的面映射和退化映射的描述。

注 4.7。我们将 $D_r : \mathrm{Stair}(\mathbb{X})_q \to \mathrm{Stair}(\mathbb{X})_{q-1}$ 和 $S_r : \mathrm{Stair}(\mathbb{X})_q \to \mathrm{Stair}(\mathbb{X})_{q+1}$ 分别记作 Stair(𝕏) 的面映射和退化映射，其中 $0 \le r \le q$。由 (4.4)，我们有

$$\big(D_r\xi\big)_i = \begin{cases} d_{r-i}^{h}\xi_i, & 0 \le i < r, \\ d_r^{v}\xi_{i+1}, & r \le i \le q-1, \end{cases} \tag{4.8}$$

and

$$\big(S_r\xi\big)_i = \begin{cases} s_{r-i}^{h}\xi_i, & 0 \le i \le r, \\ s_r^{v}\xi_{i-1}, & r+1 \le i \le q+1. \end{cases} \tag{4.9}$$

将由 $(\mathbb{X}^{\mathrm{tr}})_{i,\ j} = \mathbb{X}_{j,\ i}$ 给出的双单纯集合记作 $\mathbb{X}^{\mathrm{tr}}$，上述描述表明

$$\mathcal{S}\mathrm{tair}(\mathbb{X}) = T(\mathbb{X}^{\mathrm{tr}}), \tag{4.10}$$

其中 T 表示 [Ste25，定义 3.1] 中的全单纯集合函子。现在我们计算外积的阶梯。

引理 4.11（[Ste25，引理 3.8], 交换变量后的版本）。给定单纯集合 $\mathcal{K}$ 和 $\mathcal{A}$，存在一个单纯集合的同构

$$\mathcal{S}\mathrm{tair}(\mathcal{K} \boxtimes \mathcal{A}) \cong \mathcal{K} \times \mathcal{A}, \tag{4.12}$$

关于$\mathcal{K}$和$\mathcal{A}$自然，它将 $\mathcal{S}tair(\mathcal{K} \boxtimes \mathcal{A})$ 中的一个 q-单纯形 $(z_j, x_j)_{j=0}^{q}$ 送到一对 (z_0, x_q)。

证明。这是 [Ste25，引理 3.8] 在识别 (4.10) 下的结果；我们回顾一下论证，因为下文会用到这些显式公式。将 Stair(K ⊠A) 的一个 q-单纯形的第 j 个分量写作 $(z_j,\ x_j) \in \mathrm{K}_{q-j} \times \mathrm{A}_j$。关系 (4.3) 表示为 $z_j = d_0 z_{j-1}$ 和 $x_{j-1} = d_j x_j$，因此 $z_j = z_0|_{[j,q]}$ 和 $x_j = x_q|_{[0,j]}$，其中区间 $[j,q]$ 和 $[0,j]$与 $\Delta[q]$ 的相应面相识别。因此，赋值 $(z_j,\ x_j)_{j=0}^{q} \mapsto (z_0,\ x_q)$ 给出了一个双射 $\mathrm{Stair}(\mathrm{K} \boxtimes \mathrm{A})_q \cong \mathrm{K}_q \times \mathrm{A}q$，其逆为

$$(z, x) \longmapsto \big(z|_{[j,q]},\, x|_{[0,j]}\big)_{j=0}^{q}.$$

根据 (4.4)，这些双射与单纯结构相容，并且按构造，它们在 K 和 A 中是自然的。□

例4.13。对于 $\mathrm{K} = \mathrm{A} = \Delta[1]$，我们得到 $\mathrm{Stair}(\Delta[1] \boxtimes \Delta[1]) \cong \Delta[1] \times \Delta[1]$，其中$\Delta[1] \times \Delta[1]$的对角边对应于阶梯上的一条边，该边由水平边 $(0,\ 0) \to (1,\ 0)$ 和垂直边 $(1,\ 0) \to (1,\ 1)$ 构成。对于定理 2.14 中$_*$的左双 $(\infty,\ 1)$-纤维化 $N(\int F)^h \to \mathbb{F}$，我们得到

$$\mathcal{S}\mathrm{tair}\big(N(\textstyle\int F)^h\big) \cong N(\textstyle\int F),$$

而阶梯是定理3.20 中$_*$的余笛卡尔纤维化 $N(\int F) \to \mathrm{F}$。

固定底上的情形。阶梯我们现在将阶梯构造应用于 $\mathbb{F}$上的双单纯集合$_*$.

引理4.14。存在一个单纯集合之间的同构

$$\mathcal{S}\mathrm{tair}(\mathbb{F}\mathrm{in}_*) \cong \mathcal{F}\mathrm{in}_*,$$

在该同构下，$\mathcal{F}\mathrm{in}_*$的一个 q-单纯形 σ对应于元组 $(\sigma, \sigma_{\ge 1}, \ldots, \sigma_{\ge q})$，其中 $\sigma_{\ge j} := (d_0)^j\sigma$。

证明。这直接由定理 4.11 应用于 $\mathbb{F}\mathrm{in}_* = \mathrm{F}\,\mathrm{in}_* \boxtimes \Delta[0]$ 得出，因为 $\sigma|_{[j,q]} = (d_0)^j\sigma$。 □

给定一个双单纯集合的映射 $P\colon \mathbb{E} \to \mathbb{F}\mathrm{in}_*$，我们通过定理 4.14 中的同构将 $\mathbf{Stair}(\mathbb{F}\mathrm{in}_*)$ 与 Fin_* 识别，并记作

$$\mathcal{S}\mathrm{tair}(P) : \mathcal{S}\mathrm{tair}(\mathbb{E}) \longrightarrow \mathcal{F}\mathrm{in}_*$$

对于所诱导的映射。在态射 $f\colon a \to b$ of Fin_* 之上的 $\mathbf{Stair}(\mathbb{E})$ 的一条边，是一对（h，v）其中包含一条水平边$h \in \mathbb{E}_{1,0}$满足 $P_1(h) = f$，以及单纯集合 $\mathbb{E}_0$ 的一条边 $v \in \mathbb{E}_{0,1}$，使得 $d_0^h h = d_1^v v$；其源为 $d_1^h h$，目标为 $d_0^v v$。注意，$P_0(v) = s_0 b$，因为 $(\mathbb{F}\mathrm{in}_*)_0$ 是离散的。

4.1.3. 水平延拓与等价的检测。在第 4.1 节的其余部分中，我们固定一个左双（∞，1）-纤维化$P\colon \mathbb{E} \to \mathbb{F}\mathrm{in}_*$。给定单态射 $i : \mathrm{K} \hookrightarrow \mathrm{L}$（其中 K、L 为单纯集合），由定理 1.5 回顾，相对限制映射

$$R_i : \mathbb{E}(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathbb{E}(\mathcal{K}) \times_{\mathbb{F}\mathrm{in}_*(\mathcal{K})} \mathbb{F}\mathrm{in}_*(\mathcal{L})$$

是 **单纯集合范畴**$_{(\infty,1)}$ 中的一个纤维化。在本节中，我们研究使 R_i 成为平凡纤维化的单态射 i。对于 $q \geq 1$ 和 $0 \leq s \leq q$，我们将 $d_s\Delta[q-1] \subseteq \Delta[q]$ 记作映射 $\delta_s\colon \Delta[q-1] \hookrightarrow \Delta[q]$ 的像，即与顶点 s 对偶的面。

定义 4.15. 我们将 T 定义为满足映射 R_i 是单纯集合的平凡纤维化的单纯集合单态射类：$\mathrm{K} \hookrightarrow \mathrm{L}$ i。

我们首先研究类 T 的闭包性质。

引理 4.16. 类 T 满足以下性质。

(1) 它在沿单纯集合映射的推出下封闭。*(2)* 它在复合下封闭。*(3)* 给定单纯集合的单态射 $\mathcal{K} \xrightarrow{i} \mathcal{L} \xrightarrow{j} \mathcal{M}$，使得 i 和 ji 属于 T，则单态射 j属于 T。

证明. 单纯集合的一个推出方块

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{K} & \xrightarrow{f} & \mathcal{K}' \\ {\scriptstyle i}\downarrow & \ulcorner & \downarrow{\scriptstyle i'} \\ \mathcal{L} & \xrightarrow[g]{} & \mathcal{L}' \end{array}$$

其中 i 为单态射，会诱导出一个拉回方块

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E}(\mathcal{L}') & \xrightarrow{\qquad g^* \qquad} & \mathbb{E}(\mathcal{L}) \\ {\scriptstyle R_{i'}}\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle R_i} \\ \mathbb{E}(\mathcal{K}') \times_{\mathbb{F}\mathrm{in}_*(\mathcal{K}')} \mathbb{F}\mathrm{in}_*(\mathcal{L}') & \xrightarrow[(f^*,g^*)]{} & \mathbb{E}(\mathcal{K}) \times_{\mathbb{F}\mathrm{in}_*(\mathcal{K})} \mathbb{F}\mathrm{in}_*(\mathcal{L}), \end{array}$$

使得 $R_{i'}$ 是 R_i的拉回，从而证明了 (1)。接下来，给定单纯集合的单态射 $\mathrm{K} \xrightarrow{i} \mathrm{L} \xrightarrow{j} \mathrm{M}$，映射$R_{ji}$ 可分解为

$$\mathbb{E}(\mathcal{M}) \xrightarrow{R_j} \mathbb{E}(\mathcal{L}) \times_{\mathbb{F}\mathrm{in}_*(\mathcal{L})} \mathbb{F}\mathrm{in}_*(\mathcal{M}) \xrightarrow{Q_i} \mathbb{E}(\mathcal{K}) \times_{\mathbb{F}\mathrm{in}_*(\mathcal{K})} \mathbb{F}\mathrm{in}_*(\mathcal{M}),$$

其中 Q_i 是沿映射 R_i 的拉回

$$(\mathrm{pr}_1, j^*\,\mathrm{pr}_2) : \mathbb{E}(\mathcal{K}) \times_{\mathbb{F}\mathrm{in}_*(\mathcal{K})} \mathbb{F}\mathrm{in}_*(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathbb{E}(\mathcal{K}) \times_{\mathbb{F}\mathrm{in}_*(\mathcal{K})} \mathbb{F}\mathrm{in}_*(\mathcal{L}).$$

因此，若 i和 j属于 T，则 ji也属于 T，从而证明了 (2)。最后，若 i和 ji属于 T，则 Q_i和 $R_{ji} = Q_i R_j$是 **单纯集合范畴**$_{(\infty,1)}$中的弱等价，因此由三取二性质，R_j也是弱等价。根据定理 1.5，R_j是 **单纯集合范畴**$_{(\infty,1)}$中的纤维化，因此它是平凡纤维化，从而证明了 (3)。□

我们将包含左角包含称为

$$\Lambda^i[m] = \bigcup_{s \neq i} d_s\Delta[m-1] \hookrightarrow \Delta[m], \qquad m \geq 1, \quad 0 \leq i < m,$$

使得该内　ner 角包含是左角包含。我们将使用以下左角过滤　　s.

引理 4.17 ([Lur26, Tag 05HW, Proposition 4.2.4.10])。 对于每个 $m \geq 1$ 和 $0 \leq i < m$, 包含映射 $\Delta\{0\} \hookrightarrow \Lambda^i[m]$是由左角包含 $\Lambda^a[q] \hookrightarrow \Delta[q]$ （其中 $0 \leq a < q < m$）的推出构成的有限复合。

由此，我们可以证明左角包含属于 T。

命题 4.1 **8.** 对于任意 $m \geq 1$ 和任意 $0 \leq i < m$, 左角包含 $\Lambda^i[m] \hookrightarrow \Delta[m]$ 属于 T。

证明。 我们对 m进行归纳。对于 $m = 1$，包含映射 $\Lambda^0[1] = \Delta\{0\} \hookrightarrow \Delta[1]$ 属于 T，因为其相对限制映射为 λ_1，由定理 2.18 可知这是一个平凡纤维化。现在假设该命题在所有小于 m的维数下均成立。于是，根据定理 4.17 以及定理 4.16(1) 和 (2)，包含映射 $\Delta\{0\} \hookrightarrow \Lambda^i[m]$ 属于 T。此外，复合映射 $\Delta\{0\} \hookrightarrow \Lambda^i[m] \hookrightarrow \Delta[m]$ 属于 T，因为其相对限制映射为 λ_m，由定理 2.18 可知这是一个平凡纤维化。因此，根据定理 4.16(3)，包含映射 $\Lambda^i[m] \hookrightarrow \Delta[m]$ 属于 T。□

我们还需要以下变体，其中从单纯形中去掉两个面；参见 [Joy08, 命题 2.12(ii)]。

引理 4.19. 令 $1 \leq l < m$, 并令

$$\mathcal{K}_{m,\ell} = \bigcup_{\substack{1 \leq s \leq m \\ s \neq \ell}} d_s \Delta[m-1].$$

则包含$\mathcal{K}_{m,\ell} \hookrightarrow \Delta[m]$ 属于 T。

证明。 $\Delta[m]$ 中不包含在 $\mathrm{K}_{m,\ell}$ 内的余维一面为 $d_0\Delta[m-1]$ 和 $d_\ell\Delta[m-1]$。对于$s \geq 1$，交集 $d_0\Delta[m-1] \cap d_s\Delta[m-1]$ 是 $d_0\Delta[m-1] \cong \Delta[m-1]$ 中与顶点 s对偶的面，即 $\Delta[m-1]$的面 $d_{s-1}\Delta[m-2]$。因此

$$\mathcal{K}_{m,\ell} \cap d_0\Delta[m-1] = \Lambda^{\ell-1}[m-1],$$

并且我们有一个推出方形

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^{\ell-1}[m-1] & \hookrightarrow & \mathcal{K}_{m,\ell} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta[m-1] & \xrightarrow[\delta_0]{} & \mathcal{K}_{m,\ell} \cup d_0\Delta[m-1]. \end{array}$$

由于$l-1 < m-1$，根据定理 4.18 和定理 4.16(1)，包含 $\mathrm{K}_{m,\ell} \hookrightarrow \mathrm{K}_{m,\ell} \cup d_0\Delta[m-1] = \Lambda^\ell[m]$属于 T。因此，根据定理 4.18 和定理 4.16(2)，复合 $\mathrm{K}_{m,\ell} \hookrightarrow \Lambda^\ell[m] \hookrightarrow \Delta[m]$ 属于 T。□

最后，我们证明 $\mathbb{E}_m$ 的等价可在初始顶点处检测。

引理 4.20。 设 $m \geq 0$，且 $\mathbb{E}_m$为拟范畴， e 是其中的一条边。如果边 $u_m^* e$ 在 $\mathbb{E}_0$中是等价，则 e在 $\mathbb{E}_m$中是等价。

证明。对于 $m = 0$，映射 u_0^* 是恒等态射，因此不妨设 $m \geq 1$。由于 $(\mathbb{F}$在$_*$中$)_m$ 是离散的，我们有 $P_m(e) = s_0^v\beta$，其中 β是 F 在$_*$中的唯一 m-单形，因此 $\lambda_m(e) = (u_m^* e, s_0^v\beta)$。边 $\lambda_m(e)$ 在 $\mathbb{E}_0 \times_{(\mathbb{F}\mathrm{in}_*)_0} (\mathbb{F}$在$_*$中$)_m$中是等价。事实上，$u_m^* e$ 在 $\mathbb{E}_0$ 中的一个逆以及表明其为逆的 2-单形被映射到离散单纯集合 $(\mathbb{F}$在$_*$中$)_0$, 的顶点 $u_m^*\beta$ ，因此与 β处的退化单形配对后，它们给出 $\lambda_m(e)$的一个逆。根据定理 2.18，映射 λ_m 是 $\mathbf{sSet}^{(\infty,1)}$ 中拟范畴之间的弱等价，因此根据 [Joy08, 命题 1.23], 它诱导出同伦范畴之间的等价。由于拟范畴的等价正是那些在其同伦范畴中变为同构的边, 映射 λ_m 反映等价性，因而 e 在 $\mathbb{E}_m$中是等价。□

4.1.4. 角填充。 本节中，我们证明阶梯 $\mathbf{Stair}(\mathbb{E})$ 中的角 $\Lambda^a[q]$（带有 $0 \leq a < q$）可以按分量填充，从而将关于映射 $\mathbf{Stair}(P)$ 的提升问题化归为 $\mathbb{E}_0$ 中的提升问题。给定 F 在 $_*$ 中的一个 q-单纯形β，我们用 $c_\beta^{(j)}$ 表示离散单纯集合（$\mathbb{F}$ 在 $_*$ 中）$_q$ 在 β 处的退化 j-单纯形。

定义 4.21. 设 $q \geq 2$，设 $0 \leq a < q$，并设 σ 是 Fin_* 的一个 q-单纯形。一个在 σ 上的相对 (q,a)-角是一个映射$\eta\colon \Lambda^a[q] \to \mathbf{Stair}(\mathbb{E})$，满足 $\mathbf{Stair}(P)\eta = \sigma|_{\Lambda^a[q]}$。这样的映射 η相当于 $\mathbf{Stair}(\mathbb{E})$ 的一族 $(q-1)$-单纯形

$$\eta^r = (\eta_0^r, \ldots, \eta_{q-1}^r), \qquad \eta_i^r \in \mathbb{E}_{q-1-i,i}, \qquad 0 \leq r \leq q,\ r \neq a,$$

使得 $P_{q-1-i}(\eta_i^r) = c^{(i)}(d_0)^i d_r\sigma$，并且对所有满足 $r, s \neq a$ 的 $0 \le r < s \le q$ 都有 $D_r\eta^s = D_{s-1}\eta^r$。根据定理 4.7，后一个条件等价于恒等式

$$\begin{cases} d^h_{r-i}\eta^s_i = d^h_{s-1-i}\eta^r_i, & i < r, \\ d^v_r\eta^s_{i+1} = d^h_{s-1-i}\eta^r_i, & r \le i < s-1, \\ d^v_r\eta^s_{i+1} = d^v_{s-1}\eta^r_{i+1}, & s-1 \le i \le q-2. \end{cases} \tag{4.22}$$

The 下面的引理构造了相对角填充的所有分量，唯独最后一个除外 .

引理 4.23。设 $q \ge 2$ 和 $0 \le a < q$，并设 η 是 q单纯形 σ 上的相对(q,a)-角，且该单纯形属于$\mathcal{F}$中的$_*$。存在单形 $\xi_j \in \mathbb{E}_{q-j,j}$，其中 $0 \le j < q$，使得 $P_{q-j}(\xi_j) = c^{(j}\sigma_{\ge j}$并且

$$\begin{cases} d^h_s\xi_j = \eta^{j+s}_j & (1 \le s \le q-j,\ j+s \neq a), \qquad (4.24) \\ d^v_r\xi_j = \eta^r_{j-1} & (0 \le r < j,\ r \neq a), \qquad (4.25) \\ d^v_j\xi_j = d^h_0\xi_{j-1} & (1 \le j < q). \qquad (4.26) \end{cases}$$

此外，对于任意这样的单形，赋值

$$\Phi_q|_{d_r\Delta[q-1]} = \begin{cases} \eta^r_{q-1}, & 0 \le r < q,\ r \neq a, \\ d^h_0\xi_{q-1}, & r = q \end{cases}$$

定义了一个以退化单纯形 $\sigma_{\ge q}$ 为底的角 Φ_q： $\Lambda^a[q] \to \mathbb{E}_0$；对于 Φ_q的每个延拓 ξ_q： $\Delta[q] \to \mathbb{E}_0$，元组 $(\xi_0, \ldots, \xi_q)$ 都是 $\mathcal{S}$tair$(\mathbb{E})$ 上的一个 q- 单形，它位于 σ 上并延拓 η。

定理 4.23 的证明见附录 A。证明过程如下，对 j 使用归纳法。对于 $j < q$，由 (4.24) 指定的面组合成一个从单纯集合出发的映射

$$\mathcal{K}_j = \begin{cases} \mathcal{K}_{q-j,a-j}, & j < a, \\ \Lambda^0[q-j], & j \ge a, \end{cases}$$

其中 $\mathrm{K}_{m,\ell}$ 如定理 4.19 所述，而由 (4.25) 和 (4.26) 规定的面 $d^v_r\xi_j$ 组合成一个从该单纯集合出发的映射

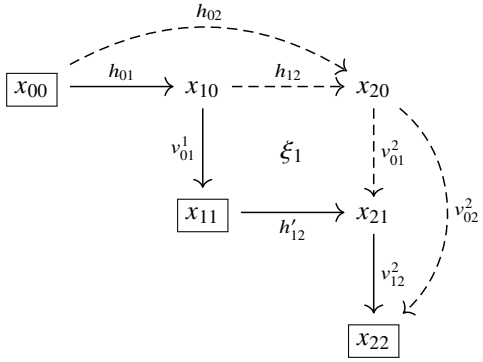
$$\mathcal{L}_j = \begin{cases} \varnothing, & j = 0, \\ \partial\Delta[j], & 0 < j \le a, \\ \Lambda^a[j], & j > a. \end{cases}$$

因此，单纯形 ξ_j 可作为交换方形中的一个提升得到

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}_j & \longrightarrow & \mathbb{E}_{q-j} \\ \downarrow & \overset{\xi_j}{\nearrow} & \downarrow \sim \\ \Delta[j] & \longrightarrow & \mathbb{E}(\mathrm{K}j) \times_{\mathbb{F}\mathrm{in}_*}(\mathrm{K}_j)\ (\mathbb{F}\text{中}_*)_{q-j} \end{array}$$

其右侧的垂直映射是沿包含 $\mathrm{K}_j \hookrightarrow \Delta[q-j]$ 的相对限制映射，根据定理 4.18 和 4.19，它是平凡纤维化。由恒等式 (4.22) 以及前几个阶段所施加的关系，可知指定面的相容性和方形的交换性成立。

例 4.27. 采用定理 4.5 中的记号，一个相对 (2,1)-角由边 $\eta^2 = (h_{01}, v^1_{01})$ 和$\eta^0 = (h'_{12}, v^2_{12})$ 组成，而定理 4.23 给出了下图中的虚线部分。



对于 $j = 0$，我们有 $\mathrm{K}_0 = \mathrm{K}_{2,\,1} = \Delta\{0,\ 1\}$ 和 $\mathrm{L}_0 = \varnothing$，而提升 ξ_0 给出边 h_{12} 和 h_{02}。对于 $j = 1$，我们有 $\mathrm{K}_1 = \Lambda^0[1]$和 $\mathrm{L}_1 = \partial\Delta[1]$，而提升 ξ_1是一个右边为 v^2_{01}的方形。最后，角 $\Phi_2\colon \Lambda^1[2] \to \mathbb{E}_0$由边 v^2_{01} 和 v^2_{12}组成，而 Φ_2 的填充 ξ_2 给出边 v^2_{02}。

作为定理 4.23 的第一个推论，我们得到如下结果。

定理 4.28. 映射 $\mathcal{S}\mathrm{tair}(P) : \mathcal{S}\mathrm{tair}(\mathbb{E}) \to \mathcal{F}\mathrm{in}_*$ 是一个内纤维化。

证明。 令 $q \geq 2$ 和 $0 < a < q$，并令 η 是 $\mathrm{F\,in}_*$中一个 q-单纯形 σ 上的相对 $(q,\ a)$-角。根据定理 4.23，只需证明内角 $\Phi_q\colon \Lambda^a[q] \to \mathbb{E}_0$ 存在填充；由定理 2.18，$\mathbb{E}_0$ 是一个拟范畴，因此这一点成立。□

4.1.5. 余笛卡尔阶梯边。 在本节中，我们证明，如果 Stair(𝔼) 的一条边 (h, v) 的竖直分量 v 是 $\mathbb{E}_0$ 中的等价，那么它就是 Stair(P)-余笛卡尔边；由此可推得 Stair(P) 是余笛卡尔纤维化。

命题 4.29。 设 $e = (h, v)$ 是 $\mathcal{S}\mathrm{tair}(\mathbb{E})$ 的一条边。若 v 是拟范畴 $\mathbb{E}_0$ 中的等价，则 e 是$\mathcal{S}\mathrm{tair}(P)$-余笛卡尔边。

证明。 由于 Stair(P) 根据定理 4.28 是内纤维化，根据定理 3.1，只需证明每个交换方块

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^0[q] & \xrightarrow{\eta} & \mathcal{S}\mathrm{tair}(\mathbb{E}) \\ \big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathcal{S}\mathrm{tair}(P)} \\ \Delta[q] & \xrightarrow[\sigma]{} & \mathcal{F}\mathrm{in}_* \end{array} \tag{4.30}$$

对于 $q \geq 2$ 和 $\eta|_{\Delta\{0,1\}} = e$ 都存在提升。根据关于 $a = 0$ 的定理 4.23，我们得到单形 $\xi_j \in \mathbb{E}_{q-j,j}$，其对应于 $0 \leq j < q$，满足 (4.24)、(4.25) 和 (4.26)，以及一个角

$$\Phi_q : \Lambda^0[q] \longrightarrow \mathbb{E}_0,$$

接下来只需证明 Φ_q 存在一个填充。为此，我们证明边 $\Phi_q|_{\Delta\{0,1\}}$ 在 $\mathbb{E}_0$中是一个等价。根据 $j = 1$ 和 $s = q - 1$的 (4.24)，拟范畴 $\mathbb{E}_{q-1}$ 中的边 ξ_1 满足

$$u^*_{q-1}\xi_1 = u^*_{q-2}d^h_{q-1}\xi_1 = u^*_{q-2}\eta^q_1 = v,$$

最后一个等式成立，因为面 η^q 包含边 e，而根据 (4.4)，该边的竖直分量是 $u^*_{q-2}\eta^q_1$。因此，根据定理 4.20，ξ_1在 $\mathbb{E}_{q-1}$ 中是一个等价。此外，由于边 $\Delta\{0,\ 1\}$包含在 $\Delta[j]$ 关于$2 \leq j \leq q$的最后一个面中，关系 (4.26) 以及 Φ_q 的定义给出

$$\Phi_q|_{\Delta\{0,1\}} = d^h_0\big(\xi_{q-1}|_{\Delta\{0,1\}}\big) = (d^h_0)^{q-1}\xi_1. \tag{4.31}$$

由于映射 $(d^h_0)^{q-1}\colon\ \mathbb{E}_{q-1} \to \mathbb{E}_0$ 诱导了同伦范畴 [Lur09a, §1.2.3], 之间的函子，它保持等价，因此边 $\Phi_q|_{\Delta\{0,1\}}$ 在 $\mathbb{E}_0$ 中是一个等价。于是，根据 [Lur09a, 命题 1.2.4.3], , 角 Φ_q admits a filler ξ_q ，而元组 $(\xi_0, \ldots, \xi_q)$ 根据定理 4.23 是 (4.30) 中所需的提升。□

我们将 Stair(𝔼) 中形如 $(h, s^v_0 d^h_0 h)$ 的边称为纯水平阶梯边。根据定理 4.29，每条纯水平阶梯边都是 Stair(P)-余笛卡尔的。

推论 4.32。 映射 $\mathcal{S}\mathrm{tair}(P) : \mathcal{S}\mathrm{tair}(\mathbb{E}) \to \mathcal{F}\mathrm{in}_*$ 是余笛卡尔纤维化。特别地，单纯集合$\mathcal{S}$tair(𝔼) 是拟范畴。

证明。 由定理 4.28，映射 Stair(P) 是内纤维化。设 x 是 Stair(𝔼) 的一个顶点，即 $\mathbb{E}_{0,0}$ 的一个元素，并设 $f\colon P_0(x) \to b$ 是 Fin$_*$ 中的一条边。由于 λ_1 由定理 2.18 可知是平凡纤维化，因此存在一个元素 $h \in \mathbb{E}_{1,0}$，使得 $d^h_1 h = x$ 且 $P_1(h) = f$。那么，纯水平阶梯边 $(h, s^v_0 d^h_0 h)$ 的源是 x，位于 f 之上，并且由定理 4.29 可知它是 Stair(P)-余笛卡尔的。最后一个断言成立，因为 Fin$_*$ 是拟范畴。□

4.1.6. 纤维与惰性跨度。 本节比较余笛卡尔纤维化 Stair(P) 的纤维与跨度 (3.19)，以及左双重 (∞,1)-纤维化 P 的纤维与跨度 (2.7)，并由此推出 Stair(P) 是特殊的，当且仅当 P 是特殊的。在下文中，我们记 $\mathrm{X} = \mathrm{Stair}(\mathbb{E})$，并用 $\mathrm{X}_a = \mathrm{X} \times_{\mathcal{F}\mathrm{in}_*} \Delta[0]$ 表示 Stair(P) 在 Fin$_*$ 的对象 a 处的纤维。回忆一下，单纯集合 $\mathbb{E}_m(\sigma)$ 和 X_a 是拟范畴，这由定理 1.10 以及 Stair(P) 是内纤维化可知。

引理 4.33。 对于Fin$_*$中的每个对象 a，存在一个映射

$$\iota_a : \mathbb{E}_0(a) \longrightarrow \mathcal{X}_a,$$

自然于左双$(\infty, 1)$-纤维化 P，它是**sSet**$^{(\infty,1)}$中的单态射和弱等价。该映射在 $\mathbb{E}_0(a)$ 的一个 q-单纯形 x 上由下式给出

$$\big(\iota_a(x)\big)_j = (c_{q-j})^*_h\big(x|_{[0,j]}\big), \qquad 0 \le j \le q, \tag{4.34}$$

其中 $c_m\colon\ [m] \to [0]$ 表示 Δ中的唯一映射。

证明。 令 id^m_a表示F在$_*$ 中于 a处的退化 m-单纯形，并考虑双单纯集合$\mathbb{E} \times_{\mathbb{F}\mathrm{in}_*} (\Delta[0])^h$，其中$_*$ 中的映射$(\Delta[0])^h \to \mathbb{F}$ 由 a诱导，其 m层为 $\mathbb{E}_m(\mathrm{id}^m_a)$。这些映射

$$(c_m)^*_h : \mathbb{E}_0(a) \longrightarrow \mathbb{E}_m(\mathrm{id}^m_a)$$

与水平结构映射相容，因为对于 Δ中的每个映射 $\alpha\colon\ [l] \to [m]$，都有 $c_m\alpha = c_\ell$，因此它们组装成一个双单纯集合映射

$$\upsilon_a : \Delta[0] \boxtimes \mathbb{E}_0(a) \longrightarrow \mathbb{E} \times_{\mathbb{F}\mathrm{in}_*} (\Delta[0])^h.$$

由于 $\lambda^{\mathrm{id}^m_a}_m(c_m)^*_h = \mathrm{id}_{\mathbb{E}_0(a)}$，且根据定理 2.19，映射 $\lambda^{\mathrm{id}^m_a}_m$是平凡纤维化，所以对于每个 $m \ge 0$，映射$(c_m)^*_h$ 是 **sSet**$^{(\infty,1)}$ 中的弱等价，即映射 υ_a 是逐层弱等价。我们断言，映射 $\mathrm{Stair}(\upsilon_a) = T(\upsilon^{\mathrm{tr}}_a)$于是是**sSet**$^{(\infty,1)}$中的弱等价。事实上，从双单纯集合到单纯集合的对角函子 $\mathbb{X} \mapsto (\mathbb{X}_{q,\,q})_{q\ge 0}$，从 Reedy 模型结构到**sSet**$^{(\infty,1)}$是左Quillen函子，因为其右伴随 $\mathrm{Y} \mapsto (\mathrm{Y}^{\Delta[m]})_{m\ge 0}$ 的相对匹配映射是与包含映射 $\partial\Delta[m] \hookrightarrow \Delta[m]$ 的拉回指数对象，而**sSet**$^{(\infty,1)}$ 是笛卡尔的。根据定理 1.15，每个双单纯集合都是 Reedy余纤维的，因此对角函子在任一变量中都保持逐层弱等价（由对称性可知），而该断言由**sSet**$^{(\infty,1)}$ 中从对角线到 [的全单纯集合的自然弱等价推出，该结果见Ste25，定理 1.2]；另见Ste25，命题 7.1]。最后，我们有单纯集合的同构

$$\mathcal{S}\mathrm{tair}\big(\Delta[0] \boxtimes \mathbb{E}_0(a)\big) \cong \mathbb{E}_0(a),$$
$$\mathcal{S}\mathrm{tair}\big(\mathbb{E} \times_{\mathbb{F}\mathrm{in}_*} (\Delta[0])^h\big) \cong \mathcal{X}_a,$$

其中第一个由定理 4.11 给出；第二个成立，因为当且仅当对每个 $0 \le j \le q$，其 j 个分量位于 id^{q-j}_a 上方时，X 的一个 q-单纯形才位于 id^q_a 上方。我们将 ι_a 定义为这些同构下的映射 Stair(υ_a)。根据构造，映射 ι_a 由 (4.34) 给出，且关于 P 自然；它还是一个单态射，因为$\iota_a(x)$ 的最后一个分量是 x。□

命题 4.35。 对于 $\mathcal{F}\mathrm{in}_*$ 的每条边 $f\colon\ a \to b$，在 **sSet**$^{(\infty,1)}$ 中存在一个弱等价

$$\chi_f : \mathbb{E}_1(f) \longrightarrow \mathrm{Cocart}_{\mathcal{S}\mathrm{tair}(P)}(f)$$

使下方的单纯集合图交换。

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{E}_0(a) & \xleftarrow[\sim]{s_f^P} & \mathbb{E}_1(f) & \xrightarrow{t_f^P} & \mathbb{E}_0(b) \\
{\scriptstyle \iota_a}\downarrow{\scriptstyle \sim} & & {\scriptstyle \sim}\downarrow{\scriptstyle \chi_f} & & {\scriptstyle \sim}\downarrow{\scriptstyle \iota_b} \\
\mathcal{X}_a & \xleftarrow[s_f^{\mathcal{S}\mathrm{tair}(P)}]{\sim} & \mathrm{Cocart}_{\mathcal{S}\mathrm{tair}(P)}(f) & \xrightarrow[t_f^{\mathcal{S}\mathrm{tair}(P)}]{} & \mathcal{X}_b.
\end{array} \tag{4.36}$$

证明。 一个 r-单纯形 h of $\mathbb{E}_!(f)$ 是双单纯集合的一个映射 $h\colon \Delta[1]\boxtimes\Delta[r]\to\mathbb{E}$ over f。我们将复合映射记为

$$\Delta[r]\times\Delta[1]\xrightarrow{\mathrm{tw}}\Delta[1]\times\Delta[r]\xrightarrow{\cong}\mathcal{S}\mathrm{tair}(\Delta[1]\boxtimes\Delta[r])\xrightarrow{\mathcal{S}\mathrm{tair}(h)}\mathcal{X},$$

其中 tw 交换两个因子，而该同构就是定理 4.11 中的同构。由（4.12）的自然性可得 $\mathrm{Stair}(P)F_h = f\,\mathrm{pr}_2$。此外，对于 $\Delta[r]$ 的每个顶点 z，将 F_h 限制到 $\Delta\{z\}\times\Delta[1]$ 所得的是纯水平阶梯边（$h_z, s_0^v d_0^h h_z$），其中 h_z 表示将 h 限制到 $\Delta[1]\boxtimes\Delta\{z\}$，并且根据定理 4.29，该边是 $\mathrm{Stair}(P)$-余笛卡尔的。因此，根据（3.3），F_h 是 $\mathrm{Cocart}_{\mathcal{S}\mathrm{tair}(P)}(f)$ 的一个 r-单纯形；由于该构造关于 $\Delta[r]$ 是自然的，我们得到一个单纯集合的映射 χ_f，将 h 发送到 F_h。根据（4.34），F_h 限制到 $\Delta[r]\times\{0\}$ 和 $\Delta[r]\times\{1\}$ 后分别是 $\iota_a(s_f^P h)$ 和 $\iota_b(t_f^P h)$，因此

$$s_f^{\mathcal{S}\mathrm{tair}(P)}\chi_f = \iota_a s_f^P, \qquad t_f^{\mathcal{S}\mathrm{tair}(P)}\chi_f = \iota_b t_f^P. \tag{4.37}$$

也就是说，图表 (4.36) 可交换。最后，由于根据定理 2.15 和 3.22，映射 s_f^P 和 $s_f^{\mathcal{S}\mathrm{tair}(P)}$ 是平凡纤维化，而根据定理 4.33，ι_a 是弱等价，因此根据三取二性质，映射 χ_f 是弱等价。□

定理 4.38. 设 $P\colon\mathbb{E}\to\mathbb{F}\mathrm{in}_*$ 是左双重$(\infty,1)$-纤维化，并记作$\mathcal{X} = \mathcal{S}\mathrm{tair}(\mathbb{E})$。对于每个 $k\geq 0$，存在一个映射

$$\Xi_k : \mathbb{E}(\mathcal{J}_k)_{\beta_k}\longrightarrow \mathrm{Map}^\flat((\mathcal{J}_k)^\sharp_{\beta_k}, \mathcal{X}^\natural)$$

使下列图　　单纯集合图可交换，其中竖直映射在**单纯集合范畴**$(\infty,1)$中是弱等价　　).

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{E}(\mathcal{J}_k)_{\beta_k} & \xrightarrow[\sim]{\pi_k^P}\!\!\!\rightarrow & \mathbb{E}_0(\langle k\rangle) \\
{\scriptstyle \Xi_k}\downarrow{\scriptstyle \sim} & & {\scriptstyle \sim}\downarrow{\scriptstyle \iota_{\langle k\rangle}} \\
\mathrm{Map}^\flat((\mathcal{J}_k)^\sharp_{\beta_k}, \mathcal{X}^\natural) & \xrightarrow[\pi_k^{\mathcal{S}\mathrm{tair}(P)}]{\sim}\!\!\!\rightarrow & \mathcal{X}_{\langle k\rangle},
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
\mathbb{E}(\mathcal{J}_k)_{\beta_k} & \xrightarrow{t_k^P}\!\!\!\rightarrow & \mathbb{E}_0(\langle 1\rangle)^k \\
{\scriptstyle \Xi_k}\downarrow{\scriptstyle \sim} & & {\scriptstyle \sim}\downarrow{\scriptstyle (\iota_{\langle 1\rangle})^{\times k}} \\
\mathrm{Map}^\flat((\mathcal{J}_k)^\sharp_{\beta_k}, \mathcal{X}^\natural) & \xrightarrow[t_k^{\mathcal{S}\mathrm{tair}(P)}]{}\!\!\!\rightarrow & \mathcal{X}^k_{\langle 1\rangle}.
\end{array} \tag{4.39}$$

特别是，左　　侧双重$(\infty,1)$-纤维化 P 是特殊的，当且仅当余笛卡尔纤维化$\mathcal{S}\mathrm{tair}(P)$ 是特殊的　　*ial.*

证明。 对于 $k\geq 1$，由定理 2.10 和 3.18，映射 π_k^P 和 $\pi_k^{\mathcal{S}\mathrm{tair}(P)}$ 的源分别是映射 $s_{\rho_i}^P$ 和 $s_{\rho_i}^{\mathcal{S}\mathrm{tair}(P)}$的迭代拉回。由 (4.37)，我们有

$$s_{\rho_i}^{\mathcal{S}\mathrm{tair}(P)}\chi_{\rho_i}\,\mathrm{pr}_i = \iota_{\langle k\rangle}s_{\rho_i}^P\,\mathrm{pr}_i = \iota_{\langle k\rangle}\pi_k^P$$

对每个 $1\leq i\leq k$ 都成立，因此映射 $\chi_{\rho_i}\,\mathrm{pr}_i$ 诱导出一个映射 Ξ_k，使得

$$\pi_k^{\mathcal{S}\mathrm{tair}(P)}\Xi_k = \iota_{\langle k\rangle}\pi_k^P, \tag{4.40}$$

$$t_k^{\mathcal{S}\mathrm{tair}(P)}\Xi_k = (\iota_{\langle 1\rangle})^{\times k}t_k^P. \tag{4.41}$$

也就是说，(4.39) 中的两个方形都交换。由于映射 π_k^P 和 $\pi_k^{\mathcal{S}\mathrm{tair}(P)}$ 由定理 2.15 和 3.23 可知是平凡纤维化，而 $\iota_{\langle k\rangle}$ 由定理 4.33 可知是弱等价，因此由 (4.40) 和三取二性质，映射 Ξ_k 是弱等价。此外，由定理 1.18(5)，映射 $(\iota_{\langle 1\rangle})^{\times k}$ 是弱等价，因为它是拟范畴之间弱等价的有限乘积。因此，由 (4.41) 和三取二性质，映射 t_k^P 是弱等价，当且仅当 $t_{\mathcal{S}\text{阶梯}(P)k}$ 是弱等价。对于 $k=0$，我们令 $\Xi_0 = \iota_{\langle 0\rangle}$，并且同样的论证适用，因为 $t_0^P = t_0^{\mathcal{S}\mathrm{tair}(P)}\iota_{\langle 0\rangle}$。□

4.2. **从余笛卡尔纤维化到左双纤维化**。

4.2.1. 余笛卡尔串。 在本节中，我们将一个位于 F 上的标记单纯集合 X 与一个位于 $\mathbb{F}$ 上的双单纯集合 $\mathbb{I}$nt(X) 对应起来，其中 m级是 X 的标记 m-单纯形构成的单纯集合。函子 $\mathbb{I}$nt 将是定理 4.71 中的右伴随。我们首先证明，脊到极大标记单纯形的包含是标记无害映射，由此可推出 $\mathbb{I}$nt(X) 满足 Segal 条件。

引理 4.42。 对于每个 $m \geq 0$，包含 $I[m]^\sharp \hookrightarrow \Delta[m]^\sharp$ 既是标记无害映射，也是余笛卡尔标记无害映射。

证明。 对于 $m \leq 1$，该包含是一个恒等态射，因此不妨设 $m \geq 2$。对于 $1 \leq l \leq m$，令 $\mathrm{D}^{(\ell)}$ 表示这样一个标记单纯集合：其底层单纯集合为 $\Delta[m]$，其中标记边是退化边以及满足 $j - i \leq l$的边 $[i, j]$，从而 $\mathrm{D}^{(m)} = \Delta[m]^\sharp$。由于包含 $I[m] \hookrightarrow \Delta[m]$根据 [Joy08，命题 2.13], 是内无退化的，包含 $I[m]^\flat \hookrightarrow \Delta[m]^\flat$ 根据 [Lur09a，备注 3.1.1.4], 是标记无害映射，因此其在下方方形中沿 $\mathrm{D}^{(1)}$的推出 $I[m]^\sharp \hookrightarrow$也是标记无害映射。

$$\begin{array}{ccc} I[m]^\flat & \hookrightarrow & \Delta[m]^\flat \\ \downarrow & \ulcorner & \downarrow \\ I[m]^\sharp & \hookrightarrow & \mathrm{D}^{(1)}。 \end{array}$$

接下来，令 $\mathrm{M} = (\Lambda^1[2])^\sharp \amalg_{(\Lambda^1[2])^\flat} \Delta[2]^\flat$，使得包含 $g : \mathrm{M} \hookrightarrow \Delta[2]^\sharp$ 是 [Lur09a，定义 3.1.1.1(3)] 中的生成标记无害映射。对于 $2 \leq l \leq m$ 和 $0 \leq i < j \leq m$，其中 $j - i = l$，具有顶点 i、$j-1$、j 的 $\Delta[m]$ 2-单形定义了一个标记单纯集映射 $\theta_{i,j} : \mathrm{M} \to \mathrm{D}^{(l-1)}$，因为其边 $[i, j-1]$ 和 $[j-1, j]$ 在 $\mathrm{D}^{(l-1)}$ 中均有标记，并且我们有一个推出方块

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{j-i=\ell} \mathcal{M} & \xrightarrow{\coprod \theta_{i,j}} & \mathcal{D}^{(\ell-1)} \\ \coprod g \downarrow & \ulcorner & \downarrow \\ \coprod_{j-i=\ell} \Delta[2]^\sharp & \longrightarrow & \mathcal{D}^{(\ell)}. \end{array}$$

因此，包含 $\mathrm{D}^{(l-1)} \hookrightarrow \mathrm{D}^{(\ell)}$ 是标记无害映射，复合映射也是如此

$$I[m]^\sharp \hookrightarrow \mathcal{D}^{(1)} \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow \mathcal{D}^{(m)} = \Delta[m]^\sharp.$$

最后，反转顶点的顺序会将包含 $I[m]^\sharp \hookrightarrow \Delta[m]^\sharp$ 的对偶映为其自身，因此这个包含也是余笛卡尔标记无害映射。□

现在我们定义函子 $\mathbb{I}$nt。

构造 4.43。 给定 $\sharp$ 中 F 上的一个标记单纯集合 X，我们定义双单纯集合 $\mathbb{I}$nt(X)，它在 $\mathbb{F}$in$_*$ b 上 y

$$\mathbb{I}\mathrm{nt}(\mathcal{X})_m = \coprod_{\sigma \in (\mathcal{F}\mathrm{in}_*)_m} \mathrm{Map}^\flat(\Delta[m]^\sharp_\sigma, \mathcal{X}),$$

其中映射 $\mathbb{I}$nt(X)$_m \to (\mathbb{F}$in$_*)_m$ 将由 σ 索引的直和项映至点 σ，该点属于 $(\mathbb{F}\mathrm{in}_*)_m$。映射 $\alpha : [l] \to [m]$in Δ 诱导标记单纯集合之间的映射 $\alpha^\sharp_\sigma : \Delta[l]^\sharp_{\sigma\alpha} \to \Delta[m]^\sharp_\sigma$，而映射 $\alpha^*_h : \mathbb{I}\mathrm{nt}(\mathrm{X})_m \to \mathbb{I}\mathrm{nt}(\mathrm{X})_\ell$ 在由 σ 索引的直和项上定义为与 $\alpha^\sharp_\sigma$ 作预复合。该构造通过后复合关于 X 具有函子性，因此它定义了一个函子

$$\mathbb{I}\mathrm{nt} : (\mathbf{sSet}^+)_{/\mathcal{F}\mathrm{in}^\sharp_*} \longrightarrow (\mathbf{sSet}^{\Delta^{\mathrm{op}}})_{/\mathbb{F}\mathrm{in}_*}.$$

对于余笛卡尔纤维化 $p : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ in$_*$，我们将映射 $\mathbb{I}\mathrm{nt}(\mathrm{E}^\natural) \to \mathbb{F}\mathrm{in}_*$ 记作 $\mathbb{I}\mathrm{nt}(p)$，并将 $\mathbb{I}\mathrm{nt}(\mathrm{E}^\natural)$ 称为 p 的余笛卡尔串双单纯集合。

注意，属于由 σ 标记的直和项中的 $\mathbb{I}\mathrm{nt}(\mathrm{E}^\natural)_m$ 的一个 r-单纯形，是一个映射 $F : \Delta[r] \times \Delta[m] \to \mathrm{E}$ over $\sigma\mathrm{pr}_2$，其在 $\{a\} \times \Delta[m]$ 上的限制对于 $\Delta[r]$ 的每个顶点 a，都是一串可复合的 m p-余笛卡尔边及其复合；根据 [Lur09a, Proposition 2.4.1.7] 的对偶，这些复合也是 p-余笛卡尔边。

例4.44。 设 C 是一个小的对称幺半范畴，并设 $p\colon \mathrm{E} = N(\mathrm{C}^{\otimes}) \to \mathrm{F\,in}_*$ 是定理3.21中的余笛卡尔纤维化。那么 $\mathbb{I}\mathrm{nt}(\mathrm{E}^{\natural})_0(k) = N(\mathrm{C}^k)$；对于 Fin_* 中的映射 $f\colon k \to l$，单纯集合$\mathbb{I}\mathrm{nt}(\mathrm{E}^{\natural})_1(f)$ 是如下范畴的神经：其对象是由 C 中对象的元组 $x = (x_i)_{i=1}^{k}$ 和 $y = (y_j)_{j=1}^{\ell}$ 以及同构组成的三元组 (x, y, θ)

$$\theta_j : \bigotimes_{i \in f^{-1}(j)} x_i \xrightarrow{\cong} y_j \qquad (1 \le j \le \ell),$$

其态射（x、 y、 θ） $\to$（x'、 y'、 θ'）是态射的元组 $b_i\colon\ x_i \to x_i'$以及$c_j\colon\ y_j \to y_j'$，其中二者均在 C 中，并且对于每个 $1 \le j \le l$，满足$c_j\theta_j = \theta_j'\big(\bigotimes_{i \in f^{-1}(j)} b_i\big)$。

4.2.2. 形状公式。现在我们计算双单纯集合 $\mathbb{I}\mathrm{nt}$ 在单纯集合 K 上的求值。

命题4.45。设$\mathcal{K}$ 为单纯集合，设$\mathcal{X}$ 为$\mathcal{F}\mathrm{in}_*^{\sharp}$上的标记单纯集合。存在一个同构

$$\mathbb{I}\mathrm{nt}(\mathcal{X})(\mathcal{K}) \cong \coprod_{\beta : \mathcal{K} \to \mathcal{F}\mathrm{in}_*} \mathrm{Map}^{\flat}(\mathcal{K}_{\beta}^{\sharp}, \mathcal{X}), \tag{4.46}$$

其自然于$\mathcal{K}$和$\mathcal{X}$，在此同构下，映射到 $\mathbb{F}\mathrm{in}_*$（K） $= \mathbf{sSet}\,(\mathrm{K},\ \mathcal{F}\mathrm{in}_*)^{\mathrm{disc}}$ 的映射是到索引集合上的投影。特别地，对于每个单态射 $i\colon\ \mathcal{K} \hookrightarrow \Delta[m]$，我们有

$$\mathbb{I}\mathrm{nt}(\mathcal{X})(\mathcal{K}) \times_{\mathbb{F}\mathrm{in}_*(\mathcal{K})} (\mathbb{F}\mathrm{in}_*)_m \cong \coprod_{\sigma \in (\mathcal{F}\mathrm{in}_*)_m} \mathrm{Map}^{\flat}(\mathcal{K}_{\sigma i}^{\sharp}, \mathcal{X}), \tag{4.47}$$

并且， R_i *of* $\mathbb{I}\mathrm{nt}(\mathcal{X})$ 的相对限制映射是沿包含映射$\mathcal{K}_{\sigma i}^{\sharp} \hookrightarrow \Delta[m]_{\sigma}^{\sharp}$的限制映射关于 $\sigma \in (\mathcal{F}\mathrm{in}_*)_m$ 的余积。

证明。 单纯的　　集合范畴 K 是其单纯形的余极限，并且我们有标记单纯集合的一个同构　　s

$$\mathcal{K}^{\sharp} \cong \operatorname*{colim}_{(z : \Delta[\ell] \to \mathcal{K}) \in \Delta/\mathcal{K}} \Delta[\ell]^{\sharp},$$

因为 K 的每条边都是某个单纯形的一条边的像。根据 (1.3)， $\mathbb{I}\mathrm{nt}$(X)(K) 的一个 r-单纯形是由有序对 (σ_z, F_z) 组成的族，其指标为 K 的单纯形 $z\colon\ \Delta[l] \to \mathrm{K}$；其中每个有序对由一个单纯形 $\sigma_z\colon\ \Delta[l] \to \mathrm{F\,in}_*$ 以及一个标记单纯集映射组成

$$F_z : \Delta[r]^{\flat} \times \Delta[\ell]_{\sigma_z}^{\sharp} \longrightarrow \mathcal{X}$$

over $\mathrm{F\,in}_*^{\sharp}$，满足当 $z = w\theta$ 时 $\sigma_z = \sigma_w\theta$ and $F_z = F_w(\mathrm{id} \times \theta)$。这些单纯形 σ_z对应于一个映射 $\beta\colon \mathrm{K} \to \mathrm{F\,in}_*$，并且对每个 z都有 $\beta z = \sigma_z$。此外，由于标记单纯集范畴是笛卡尔闭的 [Lur09a, §3.1.3]，与 $\Delta[r]^{\flat}$ 的乘积保持余极限，因此我们有一个同构

$$\operatorname*{colim}_{z \in \Delta/\mathcal{K}} \big(\Delta[r]^{\flat} \times \Delta[\ell]_{\beta z}^{\sharp}\big) \cong \Delta[r]^{\flat} \times \mathcal{K}_{\beta}^{\sharp}$$

在$\mathrm{in}_*^{\sharp}$中位于 F 上。因此，映射 F_z构成一个标记单纯集映射 $F\colon\ \Delta[r]^{\flat} \times \mathrm{K}_{\beta}^{\sharp} \to \mathrm{X}$，它在$\mathrm{in}_*^{\sharp}$中位于 F 上；也就是说，它对应于 $\mathrm{Map}^{\flat}(\mathrm{K}_{\beta}^{\sharp}, \mathrm{X})$ 的一个 r-单纯形。这个对应与 r 中的单纯结构相容，并且对 K 和 X 自然，由此得到同构 (4.46)；到 $\mathbb{F}\mathrm{in}_*$(K) 的映射将一对 (β, F) 送至 β。同构 (4.47) 可通过沿映射 $(\mathbb{F}\mathrm{in}_*)_m \to \mathbb{F}\mathrm{in}_*(\mathrm{K})$ 进行拉回得到，该映射将 σ 送至 σi；而 R_i 的描述则由对 K 的自然性得出。□

4.2.3. *Reedy* 纤维性与水平 *Segal* 条件。在第 4.2 节余下部分中，我们固定一个余笛卡尔纤维化$p\colon \mathrm{E} \to \mathrm{F}$，它在$_*$中。我们首先证明映射 $\mathbb{I}\mathrm{nt}(p)$ 是 Reedy 纤维化，并且双单纯集合 $\mathbb{I}\mathrm{nt}(\mathrm{E}^{\natural})$ 满足 Segal 条件。

引理 4.48. 映射 $\mathbb{I}\mathrm{nt}(p)\colon \mathbb{I}\mathrm{nt}(\mathcal{E}^{\natural}) \to \mathbb{F}\mathrm{in}_*$是(**单纯集合范畴**$^{(\infty,1)})^{\Delta^{\mathrm{op}}}$中的 *Reedy* 纤维化。

证明. 由定理 4.45 应用于包含映射 $\partial\Delta[m] \hookrightarrow \Delta[m]$可知， $\mathbb{I}\mathrm{nt}(p)$ 在次数 m 的相对匹配映射，是沿包含映射的限制映射关于 $\sigma \in (\mathrm{F\,in}_*)_m$ 的余积

$$(\partial\Delta[m])_{\partial\sigma}^{\sharp} \hookrightarrow \Delta[m]_{\sigma}^{\sharp}.$$

根据定理 3.9，这些限制映射是**单纯集合范畴**$^{(\infty,1)}$ 中的纤维化，因为 $\mathrm{E}^{\natural}$ 在 $(\mathbf{单纯集合范畴}^{+}{}_{/(\mathcal{F}\mathrm{in}_*)^{\sharp}})$余笛卡尔中是纤维化的，因此根据定理 1.23，它们的余积也是如此。□

接下来，由于沿包含 $I[m] \hookrightarrow \Delta[m]$ 的限制给出的映射 $(\mathrm{F\ in}_*)_m \to$ **单纯集合范畴**$(I[m],\ \mathrm{F\ in}_*)$ 是一个双射，定理 4.45 给出一个同构

$$\mathbb{I}\mathrm{nt}(\mathcal{E}^\natural)(I[m]) \cong \coprod_{\sigma \in (\mathcal{F}\mathrm{in}_*)_m} \mathrm{Map}^\flat\big(I[m]^\sharp_{\sigma|I[m]}, \mathcal{E}^\natural\big), \tag{4.49}$$

und其中 Segal 映射 φ_m of $\mathbb{I}\mathrm{nt}(\mathrm{E}^\natural)$ 是对 $\sigma \in (\mathrm{F\ in}_*)_m$ 上限制映射的余积 ps

$$R_{I[m],\sigma} : \mathrm{Map}^\flat\big(\Delta[m]^\sharp_\sigma, \mathcal{E}^\natural\big) \longrightarrow \mathrm{Map}^\flat\big(I[m]^\sharp_{\sigma|I[m]}, \mathcal{E}^\natural\big).$$

命题 4.50。 对于每个 $m \geq 2$， $\mathbb{I}\mathrm{nt}(\mathcal{E}^\natural)$ 的 *Segal* 映射 φ_m 是单纯集合范畴中的平凡纤维化。

证明。 由定理 3.11 和 4.42 可知，对于每个 $\sigma \in (\mathrm{F\ in}_*)_m$，包含 $I[m]^\sharp_{\sigma|I[m]} \hookrightarrow \Delta[m]^\sharp_\sigma$ 是 $\big($**单纯集合范畴**$^+/_{(\mathcal{F}\mathrm{in}_*)^\sharp}\big)_{\text{余笛卡尔}}$ 中的平凡余纤维化，因此根据定理 3.9，映射 $R_{I[m],\sigma}$ 是平凡纤维化。因此，由 (4.49) 和定理 1.23 可知，Segal 映射 φ_m 是平凡纤维化。□

4.2.4. 初始顶点求值与左双纤维性。 还需证明映射 λ_1 of $\mathbb{I}\mathrm{nt}(p)$ 是弱等价。注意，由定理 4.43 可知，我们有

$$\mathbb{I}\mathrm{nt}(\mathcal{E}^\natural)_1(f) = \mathrm{Cocart}_p(f) \qquad \text{and} \qquad \mathbb{I}\mathrm{nt}(\mathcal{E}^\natural)_0(a) = \mathcal{E}_a$$

对于 $_*$ 中 F 的每条边 $f\colon\ a \to b$，并且映射 $s^{\mathbb{I}\mathrm{nt}(p)}\ f$ 是 (3.14) 中的映射 s^p_f。

引理 4.51. 该映射

$$\lambda_1 : \mathbb{I}\mathrm{nt}(\mathcal{E}^\natural)_1 \longrightarrow \mathbb{I}\mathrm{nt}(\mathcal{E}^\natural)_0 \times_{(\mathbb{F}\mathrm{in}_*)_0} (\mathbb{F}\mathrm{in}_*)_1$$

是单纯集合之间的平凡纤维化。

证明。由定理 4.45 应用于包含 $\Delta\{0\} \hookrightarrow \Delta[1]$，映射 λ_1 是 Δ 中 F 的各条边 f 对应的映射 s^p_f 的余积；根据定理 3.22，这些映射都是平凡纤维化。因此，根据定理 1.23， λ_1 是平凡纤维化。□

综合以上结果，我们得到:

推论 4.52。对于每个余笛卡尔纤维化 $p\colon\ \mathcal{E} \to \mathcal{F}\mathrm{in}_*$，映射

$$\mathbb{I}\mathrm{nt}(p) : \mathbb{I}\mathrm{nt}(\mathcal{E}^\natural) \longrightarrow \mathbb{F}\mathrm{in}_*$$

是一个左双$(\infty, 1)$-纤维化。特别地，对于每个$m \geq 0$， $\mathbb{I}\mathrm{nt}(p)$ 的映射 λ_m 都是单纯集合的平凡纤维化。

证明。 第一个断言 直接由定理 4.48、4.50 和 4.51 得出，第二个断言则由定理 2.18 得出。 □

4.2.5. 与特殊性的相容性。 最后，我们证明，左双 $(\infty, 1)$-纤维化 $\mathbb{I}\mathrm{nt}(p)$ 的跨度 (2.7) 与 p 的跨度 (3.19) 同构。

推论 4.53。 设 $p : \mathcal{E} \to \mathcal{F}\mathrm{in}_*$ 是一个余笛卡尔纤维化。对于每个 $k \geq 0$，存在同构

$$\mathbb{I}\mathrm{nt}(\mathcal{E}^\natural)(\mathcal{J}_k)_{\beta_k} \cong \mathrm{Map}^\flat((\mathcal{J}_k)^\sharp_{\beta_k}, \mathcal{E}^\natural), \qquad \mathbb{I}\mathrm{nt}(\mathcal{E}^\natural)(\mathcal{V}_k)_{\beta_k|\mathcal{V}_k} \cong \mathcal{E}^k_{\langle 1\rangle},$$

这些同构关于 p 自然；在这些同构下，映射 $\pi^{\mathbb{I}\mathrm{nt}(p)k}$ 和 $t^{\mathbb{I}\mathrm{nt}(p)k}$ 分别对应于映射 π^p_k 和 t^p_k。特别地，余笛卡尔纤维化 p 是特殊的，当且仅当左双$(\infty, 1)$-纤维化 $\mathbb{I}\mathrm{nt}(p)$ 是特殊的。

证明。 这些同构由将 (4.46) 应用于单纯集合 J_k 和 V_k 得到，并由定理 3.18 给出。由于同构 (4.46) 关于 K 自然，第二个断言由定理 2.10 和 3.18 得出，因为映射 π_k and t_k 在两种情况下都是沿包含映射 $\Delta\{c\} \hookrightarrow \mathrm{J}_k$ and $\mathrm{V}_k \hookrightarrow \mathrm{J}_k$ 的限制映射。□

特别地，由定理 3.25 和 4.38 可知，特殊左双（∞，1）-纤维化的阶梯是 Lur17 定义 2.0.0.7] 意义下的对称幺半 ∞-范畴。

4.3. **标记对角线与 Quillen 伴随**。本节中，我们构造定理 4.43 中函子$\mathbb{I}$nt 的左伴随 Diag，并证明伴随 Diag $\dashv \mathbb{I}$nt 是模型结构$\left((\mathbf{单纯集合范畴}^{(\infty,1)})^{\Delta^{\mathrm{op}}}{}_{/\mathbb{F}\mathrm{in}_*}\right)_{\mathrm{LDbl}}$与 $\left(\mathbf{单纯集合范畴}^{+}{}_{/(\mathcal{F}\mathrm{in}_*)^\sharp}\right)_{余笛卡尔}$之间的 Quillen 伴随。

构造 4.54。给定一个在 $\mathbb{F}\mathrm{in}_*$ 上的双单纯集合 $P\colon \mathbb{E} \to \mathbb{F}\mathrm{in}_*$，我们将 $\mathbb{E}$ 的标记对角线定义为标记单纯集合

$$\mathcal{D}\mathrm{iag}(\mathbb{E}) = \int^{[m]\in\Delta} \mathbb{E}_m^\flat \times \Delta[m]^\sharp,$$

其结构映射指向 $\mathrm{F\,in}_*^\sharp$，由直和项 $\mathbb{E}_m(\sigma)^\flat \times \Delta[m]^\sharp$ 上的映射 $\sigma\,\mathrm{pr}_2$ 诱导，其中 $\sigma \in (\mathrm{F\,in}_*)_m$。这些映射与余端的识别相容，因为对于每个映射 $\theta\colon [l] \to [m]$ in Δ，$\mathbb{E}_m(\sigma)^\flat \times \Delta[l]^\sharp_{\sigma\theta}$ 在映射 $(\theta_{\mathbb{E}}^*)^\flat \times \mathrm{id}$ 和 $\mathrm{id} \times \theta^\sharp$ 下的像都位于 $\sigma\theta\,\mathrm{pr}_2$ 之上。

我们首先明确描述标记单纯集合 Diag($\mathbb{E}$)。

命题 *4.55*。设 $P\colon \mathbb{E} \to \mathbb{F}in_*$ 是 $\mathbb{F}in_*$ 上的双单纯集合。*Diag($\mathbb{E}$)* 的底层单纯集合是 $\mathbb{E}$ 的对角线 *diag*$\mathbb{E}$，由 $(diag\mathbb{E})_q = \mathbb{E}_{q,q}$ 给出，其标记边为边 $s_0^v h$，其中 $h \in \mathbb{E}_{1,0}$。特别地，我们有 $Diag(\mathbb{F}in_*) \cong F\,in_*^\sharp$。此外，给定一个单纯集合 A 以及单纯集合的映射 $\beta\colon K \to F\,in_*$，存在一个位于 $F\,in_*^\sharp$ 之上的同构

$$\mathcal{D}\mathrm{iag}((\mathcal{K} \boxtimes \mathcal{A})_\beta) \cong \mathcal{K}_\beta^\sharp \times \mathcal{A}^\flat, \tag{4.56}$$

关于 β 和 $\mathcal{A}$ 自然。

证明。 由于标记单纯集合余极限的底层单纯集合是其底层单纯集合的余极限，Diag($\mathbb{E}$) 的 q-单形集合为

$$\int^{[m]\in\Delta} \mathbb{E}_{m,q} \times \mathrm{Hom}_\Delta([q],[m]) \cong \mathbb{E}_{q,q},$$

由余 Yoneda 引理 [Kel05, §3.10, Equation (3.71), p. 53], 可知，其中该同构将一对 (x,α) 的等价类映至 $\alpha_h^* x$，其逆映射则将 $x \in \mathbb{E}_{q,q}$ 映至 $(x, \mathrm{id}_{[q]})$ 的等价类。这些同构与单纯结构相容，而到 $\mathrm{F\,in}_*$ 的结构映射将 $x \in \mathbb{E}_{q,q}$ 映至 $P_{q,q}(x) \in (\mathrm{F\,in}_*)_q$。此外，标记单纯集合余极限的标记边是标记边的像，并且 $\mathbb{E}_m^\flat \times \Delta[m]^\sharp$ 中的一条边是标记边，当且仅当其第一分量是退化的。因此，Diag($\mathbb{E}$) 的标记边是这些对 $(s_0^v x, \alpha)$ 的像 $s_0^v \alpha_h^* x$，其中 $x \in \mathbb{E}_{m,0}$ 且 $\alpha\colon [1] \to [m]$，也就是说，是边 $s_0^v \mathrm{h}$，其中 $\mathrm{h} \in \mathbb{E}_{1,0}$。特别地，Diag($\mathbb{F}\mathrm{in}_*$) 的每条边都是标记边，因为单纯集合 $(\mathbb{F}\mathrm{in}_*)_m$ 是离散的。最后，$\mathrm{K} \boxtimes \mathrm{A}$ 的对角线是 $\mathrm{K} \times \mathrm{A}$；根据上述描述，Diag($(\mathrm{K} \boxtimes \mathrm{A})_\beta$) 中的一条边是标记边，当且仅当其 A 分量是退化的，也就是说，当且仅当它在 $\mathrm{K}^\sharp \times \mathrm{A}^\flat$ 中是标记边。由于到 $\mathrm{F\,in}_*$ 的两个结构映射都由 $\beta\,\mathrm{pr}_\mathcal{K}$ 给出，我们得到同构 (4.56)。该同构在底层单纯集合上是恒等映射，因此关于 β 和 A 自然。□

标记对角线是函子 $\mathbb{I}$nt 的左伴随。

命题 4.57。 存在一个伴随

$$\mathcal{D}\mathrm{iag} : (\mathbf{sSet}^{\Delta^{\mathrm{op}}})_{/\mathbb{F}\mathrm{in}_*} \rightleftarrows (\mathbf{sSet}^{+})_{/\mathcal{F}\mathrm{in}_*^\sharp} : \mathbb{I}\mathrm{nt}.$$

证明。 根据余端的泛性质，标记单纯集合 Diag($\mathbb{E}$) $\to \mathrm{X}$ 在 $\mathrm{Fin}_*^\sharp$ 上的一个标记单纯集映射，相当于一族在 $\mathrm{F\,in}_*^\sharp$ 上的标记单纯集映射

$$\Phi_{m,\sigma} : \mathbb{E}_m(\sigma)^\flat \times \Delta[m]^\sharp_\sigma \longrightarrow \mathcal{X},$$

对于 $m \geq 0$ 和 $\sigma \in (\mathrm{F\,in}_*)_m$，使得

$$\Phi_{\ell,\sigma\theta} \circ ((\theta_{\mathbb{E}}^*)^\flat \times \mathrm{id}) = \Phi_{m,\sigma} \circ (\mathrm{id} \times \theta^\sharp)$$

对于每个映射 $\theta\colon [l] \to [m]$ in Δ。根据 $\mathrm{Map}^\flat$ 的定义，映射 $\Phi_{m,\sigma}$ 对应于单纯集合映射

$$g_{m,\sigma} : \mathbb{E}_m(\sigma) \longrightarrow \mathrm{Map}^\flat(\Delta[m]^\sharp_\sigma, \mathcal{X}) = \mathbb{I}\mathrm{nt}(\mathcal{X})_m(\sigma),$$

其中，$g_{m,\sigma}$ 将一个 r-单纯形 $a\colon \Delta[r] \to \mathbb{E}_m(\sigma)$ 映射为复合 $\Phi_{m,\sigma}(a^\flat \times \mathrm{id})$，而上述相容性条件对应于以下条件

$$g_{\ell,\sigma\theta}\theta_{\mathbb{E}}^* = \theta_{\mathbb{I}\mathrm{nt}(\mathcal{X})}^* g_{m,\sigma},$$

也就是说，映射 $g_{m,\ \sigma}$ 组装成一个双单纯集合的映射 $\mathbb{E} \to \mathbb{I}\mathrm{nt}(X)$ over $\mathbb{F}\mathrm{in}_*$这一条件。所得的双射关于 $\mathbb{E}$ 和 X 是自然的。□

接下来，我们证明伴随 Diag $\dashv \mathbb{I}\mathrm{nt}$ 与这些模型结构相容。

命题 4.58。 定理 *4.57* 中的伴随 $\mathcal{D}\mathrm{iag} \dashv \mathbb{I}\mathrm{nt}$ 诱导出 *Quillen* 伴随

$$\mathcal{D}\mathrm{iag} : \left((\mathbf{sSet}_{(\infty,1)})^{\Delta^{\mathrm{op}}}_{/\mathbb{F}\mathrm{in}_*}\right) \rightleftarrows \left(\mathbf{sSet}^{+}_{/(\mathcal{F}\mathrm{in}_*)^\sharp}\right)_{\mathrm{coCart}} : \mathbb{I}\mathrm{nt},$$

$$\mathcal{D}\mathrm{iag} : \left((\mathbf{sSet}_{(\infty,1)})^{\Delta^{\mathrm{op}}}_{/\mathbb{F}\mathrm{in}_*}\right)_{\mathrm{LDbl}} \rightleftarrows \left(\mathbf{sSet}^{+}_{/(\mathcal{F}\mathrm{in}_*)^\sharp}\right)_{\mathrm{coCart}} : \mathbb{I}\mathrm{nt}.$$

证明。我们首先证明，函子 $\mathbb{I}\mathrm{nt}$ 将 $(\mathrm{sSet}^+/(\mathrm{Fin}_*)_\sharp)$余笛卡尔 到 $((\mathrm{sSet}_{(\infty,1)})^{\Delta^{\mathrm{op}}}/\mathbb{F}\mathrm{in}_*)$ 中的纤维化和平凡纤维化保持为纤维化和平凡纤维化。设 $g : X \to Y$ 是 $(\mathrm{sSet}^+/(\mathrm{Fin}_*)_\sharp)$余笛卡尔 中的一个纤维化。对于 $\sigma \in (\mathrm{F\,in}_*)_m$，记 $\partial\sigma = \sigma|_{\partial\Delta[m]}$和 $i : (\partial\Delta[m])^\sharp_{\partial\sigma} \hookrightarrow \Delta[m]^\sharp_\sigma$ 为包含。根据定理 4.45， $\mathbb{I}\mathrm{nt}(g)$ 在次数 m 上的相对匹配映射，是对 $\sigma \in (\mathrm{F\,in}_*)_m$ 的映射的余积

$$R_{i,g} : \mathrm{Map}^\flat(\Delta[m]^\sharp_\sigma, \mathcal{X}) \longrightarrow \mathrm{Map}^\flat((\partial\Delta[m])^\sharp_{\partial\sigma}, \mathcal{X}) \underset{\mathrm{Map}^\flat((\partial\Delta[m])^\sharp_{\partial\sigma}, \mathcal{Y})}{\times} \mathrm{Map}^\flat(\Delta[m]^\sharp_\sigma, \mathcal{Y})$$

由 i 和 g诱导。给定单纯集合范畴$_{(\infty,1)}$中的一个余纤维化 $j : K \hookrightarrow L$， j 与 $R_{i,g}$ 之间的提升问题，根据伴随关系，对应于推出积 $j^\flat \square\, i$ 与 g之间的提升问题。根据定理 3.8，映射 $j^\flat \square\, i$ 是 (单纯集合范畴$^+$/$(\mathrm{Fin}_*)_\sharp$)余笛卡尔中的一个余纤维化；若 j是单纯集合范畴$_{(\infty,1)}$中的弱等价，则该映射是平凡的。因此，映射 $R_{i,g}$ 是单纯集合范畴$_{(\infty,1)}$中的纤维化，且若 g 是平凡纤维化，则它也是平凡纤维化。根据定理 1.23， $\mathbb{I}\mathrm{nt}(g)$的相对匹配映射也具有相同性质，这表明第一个伴随是 Quillen 伴随。对于第二个伴随，回顾定理 2.31， $((\mathrm{sSet}_{(\infty,1)})^{\Delta^{\mathrm{op}}}/\mathbb{F}\mathrm{in}_*)\mathrm{LDbl} = L_J((\mathrm{sSet}_{(\infty,1)})^{\Delta^{\mathrm{op}}}/\mathbb{F}\mathrm{in}_*)$。由于 $((\mathrm{sSet}_{(\infty,1)})^{\Delta^{\mathrm{op}}}/\mathbb{F}\mathrm{in}_*)$的每个对象都是余纤维化的，根据定理 1.19(2)，只需证明函子 Diag 将 J 中的映射 $j_{m,\sigma,\mathcal{A}}$ 映为(单纯集合范畴$^+$/$(\mathrm{Fin}_*)_\sharp$)余笛卡尔中的弱等价。根据 (4.56)，映射 Diag($j_{m,\sigma,\mathcal{A}}$) 就是映射

$$\Delta[0]^\sharp_{\sigma(0)} \times \mathcal{A}^\flat \longrightarrow \Delta[m]^\sharp_\sigma \times \mathcal{A}^\flat.$$

给定 (**单纯集合范畴**$^+$ $_{/(\mathcal{F}\mathrm{in}_*)_\sharp}$)$_{\text{余笛卡尔}}$中的一个纤维对象 X，沿此映射的映射对象 $\mathrm{Map}^\flat$into X 之间的限制映射，通过伴随识别为映射

$$(\lambda^\sigma_m)^{\mathcal{A}} : \left(\mathbb{I}\mathrm{nt}(\mathcal{X})_m(\sigma)\right)^{\mathcal{A}} \longrightarrow \left(\mathbb{I}\mathrm{nt}(\mathcal{X})_0(\sigma(0))\right)^{\mathcal{A}}.$$

由于 $\mathbb{I}\mathrm{nt}(X) \to \mathbb{F}\mathrm{in}_*$ 是一个左双（∞，1）-纤维化，由定理 4.52 可知，映射 λ^σ_m 是平凡纤维化，由定理 2.19 可知，因此映射 $(\lambda^\sigma_m)^{\mathcal{A}}$ 也是如此，因为 **单纯集合范畴**$_{(\infty,1)}$ 是笛卡尔的。因此， Diag($j_{m,\ \sigma,\ \mathcal{A}}$) 是 (**单纯集合范畴**$^+$ $_{/(\mathcal{F}\mathrm{in}_*)_\sharp}$)$_{\text{余笛卡尔}}$ 中的弱等价，由定理 3.6 可知。□

4.4. **Quillen 等价**。在本节中，我们证明伴随 Diag $\dashv \mathbb{I}\mathrm{nt}$ 是模型结构 $((\mathbf{单纯集合范畴}_{(\infty,1)})^{\Delta^{\mathrm{op}}}{}_{/\mathbb{F}\mathrm{in}_*})_{\mathrm{LDbl}}$与 (**单纯集合范畴**$^+$ $_{/(\mathcal{F}\mathrm{in}_*)_\sharp}$)$_{\text{余笛卡尔}}$之间的 Quillen 等价，并且也是模型结构$((\mathbf{单纯集合范畴}_{(\infty,1)})^{\Delta^{\mathrm{op}}}{}_{/\mathbb{F}\mathrm{in}_*})^{\mathrm{sp}}{}_{\mathrm{LDbl}}$与 (**单纯集合范畴**$^+$ $_{/(\mathcal{F}\mathrm{in}_*)_\sharp}$)$^{\mathrm{sp}}{}_{\text{余笛卡尔}}$之间的 Quillen 等价。

4.4.1. 第一次往返比较。 我们首先为每个左双 ∞,1-纤维化 $P : \mathbb{E} \to \mathbb{F}\mathrm{in}_*$ 构造一个自然弱等价 $\chi_{\mathbb{E}} : \mathbb{E} \to \mathbb{I}\mathrm{nt}(\mathrm{Stair}(\mathbb{E})^\natural)$ in $((\mathbf{sSet}_{(\infty,1)})^{\Delta^{\mathrm{op}}}{}_{/\mathbb{F}\mathrm{in}_*})_{\mathrm{LDbl}}$。为了证明赋值 $\mathbb{E} \mapsto \mathrm{Stair}(\mathbb{E})^\natural$ 具有函子性，我们需要余笛卡尔边的以下稳定性性质。回忆一下，由一组顶点张成的拟范畴 C 的全拟范畴由 C 中所有顶点都属于该集合的单形组成；如果它包含 C 中与其中某个顶点等价的每个顶点，则称其为重*plete*。

引理 4.59。 设 $p : \mathcal{Y} \to \mathcal{F}\mathrm{in}_*$ 是一个余笛卡尔纤维化，并设 $\mathcal{A}^+$ 是一个位于 $\mathcal{F}\mathrm{in}^\sharp_*$ 上、底层单纯集合为 $\mathcal{A}$ 的标记单纯集合。则单纯集合 $\mathrm{Map}(\mathcal{A},\mathcal{Y})$ 是一个拟范畴，且包含映射

$$\mathrm{Map}^\flat(\mathcal{A}^+, \mathcal{Y}^\natural) \hookrightarrow \mathrm{Map}(\mathcal{A}, \mathcal{Y})$$

将 $\mathrm{Map}^\flat(\mathcal{A}^+, \mathcal{Y}^\natural)$ 与由映射$\mathcal{A} \to \mathcal{Y}$ 所张成的饱满的全子拟范畴等同起来，这些映射位于$\mathcal{F}\mathrm{in}_*$ 之上，并将$\mathcal{A}^+$ 的标记边映射为 p-余笛卡尔边。特别地，对于$\mathcal{F}\mathrm{in}_*$中的边 f，拟范畴$\mathrm{Cocart}_p(f)$ 是$\mathrm{Map}(\Delta[1]_f, \mathcal{Y})$ 的饱满的全子拟范畴，由位于 f 之上的 p-余笛卡尔边所张成。

证明。根据 [Lur09a, 命题 3.3.1.7], 的对偶，映射 p 是单纯集合范畴 $\mathrm{sSet}^{(\infty,1)}$中的一个纤维化，因此映射 $p^{\mathcal{A}}\colon \mathrm{Y}^{\mathcal{A}} \to \mathrm{F\,in}_*^{\mathcal{A}}$也如此，因为 $\mathrm{sSet}^{(\infty,1)}$ 是笛卡尔的。因此，其纤维 Map(A, Y) 是一个拟范畴。Map(A, Y) 的一个 r-单纯形属于 $\mathrm{Map}^{\flat}(\mathrm{A}^+, \mathrm{Y}^{\natural})$，当且仅当相应的映射 $\Delta[r]\times \mathrm{A} \to \mathrm{Y}$ 将 $\Delta[r]^{\flat}\times \mathrm{A}^+$ 的标记边映射为 p- 余笛卡尔边。由于这些标记边是具有退化的 $\Delta[r]$- 分量和标记的 A^+- 分量的边，对一个 r- 单纯形而言，该条件成立当且仅当对其每个顶点都成立；由此可知，$\mathrm{Map}^{\flat}(\mathrm{A}^+, \mathrm{Y}^{\natural})$ 是一个全子拟范畴。尚需证明它是重 plete。我们先考虑 $\mathrm{A}^+ = \Delta[1]_f^{\sharp}$ 的情形。$\mathrm{Map}(\Delta[1]_f, \mathrm{Y})$ 中边 $g\colon y_0 \to y_1$ 与 $g'\colon y_0' \to y_1'$ 之间、位于 f 之上的一个等价，由映射 $\Delta[1]\times\Delta[1] \to \mathrm{Y}$（位于 $f\,\mathrm{pr}_2$，之上）表示，如图所示

$$\begin{array}{ccc} y_0 & \xrightarrow{\;g\;} & y_1 \\ {\scriptstyle b_0}\downarrow{\scriptstyle \simeq} & \searrow^{d} & {\scriptstyle \simeq}\downarrow{\scriptstyle b_1} \\ y_0' & \xrightarrow[\;g'\;]{} & y_1', \end{array}$$

其中，边 b_0 和 b_1 是 Y 中位于$_*$里 F 的退化边之上的等价，因此根据 Lur09a 命题 2.4.1.5] 的对偶，它们是 p-余笛卡尔的。若 g 是 p-余笛卡尔的，那么对角线 d也是如此，因为它是 g 与b_1的复合；因此 g'也是如此，因为根据 Lur09a 命题 2.4.1.7] 的对偶， d 是 b_0 与 g'的复合。反向结论可通过对逆等价应用相同论证得到。在一般情形下，若 F 和 F' 是 Map(A, Y) 中等价的对象，那么沿着 A^+ 中位于$_*$ 里 F 的边 f之上的一条标记边进行限制后，它们在 $\mathrm{Map}(\Delta[1]_f$,Y) 中仍然等价，因此 F 将这条标记边映为 p-余笛卡尔边，当且仅当 F' 如此。□

现在，我们将定理 4.33 中的映射 ι_a 和定理 4.35 中的映射 χ_f 扩展为双单纯集合之间的映射。

构造 4.60. 设 $P\colon \mathbb{E} \to \mathbb{F}\mathrm{in}_*$是一个左双（$\infty$，1）-纤维化。给定 $x \in \mathbb{E}_{m,\ r}$ 上方的一个元素 $\sigma \in (\mathrm{F\,in}_*)_m$，由双单纯集合的一个映射 $x\colon \Delta[m]\boxtimes\Delta[r] \to \mathbb{E}$ 表示，我们将 $\chi_m(x)$ 定义为以下复合映射

$$\Delta[r]\times\Delta[m] \xrightarrow{\mathrm{tw}} \Delta[m]\times\Delta[r] \cong \mathcal{S}\mathrm{tair}(\Delta[m]\boxtimes\Delta[r]) \xrightarrow{\mathcal{S}\mathrm{tair}(x)} \mathcal{S}\mathrm{tair}(\mathbb{E}), \tag{4.61}$$

其中该同构即为 (4.12) 中的同构。与定理 4.35 的证明一样，我们有 $\mathrm{Stair}(P)\chi_m(x) = \sigma\,\mathrm{pr}_2$，，且映射 $\chi_m(x)$ 将边 $\{a\}\times\alpha$ （其中 a 是 $\Delta[r]$ 的一个顶点， α 是 $\Delta[m]$的一条边）映至纯水平阶梯边（ h，$s_0^v d_0^h h$ ），其中 $h \in \mathbb{E}_{1,\ 0}$是 x 沿 $\alpha\boxtimes a$ 的限制，根据定理 4.29，它是 Stair(P)-余笛卡尔的。因此，$\chi_m(x)$ 是

$$\mathbb{I}\mathrm{nt}(\mathcal{S}\mathrm{tair}(\mathbb{E})^{\natural})_m(\sigma) = \mathrm{Map}^{\flat}(\Delta[m]_{\sigma}^{\sharp}, \mathcal{S}\mathrm{tair}(\mathbb{E})^{\natural}),$$

并记为

$$\chi_{\mathbb{E}} : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{I}\mathrm{nt}(\mathcal{S}\mathrm{tair}(\mathbb{E})^{\natural})$$

在 $\mathbb{F}\mathrm{in}_*$ 上得到的映射族。注意，将 χ_1 限制到 F 在 $_*$ 中的边 f 上方的纤维，所得映射就是定理 4.35 中的映射 χ_f。

现在证明 $\chi_{\mathbb{E}}$ 是双单纯集映射的自然映射。

命题 4.62。 赋值 $\mathbb{E} \mapsto \mathcal{S}\mathrm{tair}(\mathbb{E})^{\natural}$ 定义了一个函子，其定义域为 $\mathbb{F}\mathrm{in}_*$ 上左双 $(\infty,1)$-纤维化所构成的全子范畴，陪域为 $\mathcal{F}\mathrm{in}_*^{\sharp}$ 上的标记单纯集范畴；映射 $\chi_{\mathbb{E}}\colon \mathbb{E} \to \mathbb{I}\mathrm{nt}(\mathcal{S}\mathrm{tair}(\mathbb{E})^{\natural})$ 是 $\mathbb{F}\mathrm{in}_*$ 上双单纯集的映射，并且关于 $\mathbb{E}$ 自然。

证明。 给定映射 $\alpha\colon [l] \to [m]$ 和 $\beta\colon [r'] \to [r]$ in Δ，元素 $\alpha_h^* x$ 和 $\beta_v^* x$ 分别由映射 $x(\alpha\boxtimes\mathrm{id})$ 和 $x(\mathrm{id}\boxtimes\beta)$ 表示。因此，由于 Stair 的函子性以及同构 (4.12) 的自然性，我们有

$$\chi_{\ell}(\alpha_h^* x) = (\mathrm{id}\times\alpha)^*\chi_m(x), \qquad \chi_m(\beta_v^* x) = (\beta\times\mathrm{id})^*\chi_m(x),$$

这表明 $\chi_{\mathbb{E}}$ 是$_*$中位于 $\mathbb{F}$之上的双单纯集合映射。接下来，设 $F\colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ 是$_*$ 中位于 $\mathbb{F}$之上的映射，它连接两个左双（∞, 1）-纤维化 P 和 P'。我们证明，映射 Stair(F) 将 Stair(P)-余笛卡尔边映为 Stair(P')-余笛卡尔边。由于 F 与面映射和退化映射相容，映射 Stair(F) 将纯水平阶梯边 (h, $s_0^v d_0^h$h) 映为纯水平阶梯边 (Fh, $s_0^v d_0^h F$h)。设 e 是一个 Stair(P)-余笛卡尔边，它位于$_*$中 F 的一条边 f之上。由定理 4.35，映射 χ_f是拟范畴之间的弱等价，因此存在 $\mathbb{E}_1(f)$ 的一个顶点 h，使得 e 等价于 $\mathrm{Map}(\Delta[1]_f, \mathrm{Stair}(\mathbb{E}))$ 中的纯水平阶梯边 χ_f(h)。由于与 Stair(F) 作后复合保持等价，边 Stair(F)(e) 等价于一个纯水平阶梯边，因此根据定理 4.29 和 4.59，它是 Stair(P')-余笛卡尔边。因此，Stair(F) 诱导出映射 $\mathrm{Stair}(F)^{\natural}\colon \mathrm{Stair}(\mathbb{E})^{\natural} \to \mathrm{Stair}(\mathbb{E}')^{\natural}$

它是$\sharp_*$中位于 F 之上的标记单纯集合映射，并且这一赋值是函子性的，正如 Stair 一样。最后，将 Stair 应用于 (4.61) 中的映射 Fx，得到

$$\mathbb{I}\mathrm{nt}(\mathcal{S}\mathrm{tair}(F)^\natural)\chi_{\mathbb{E}} = \chi_{\mathbb{E}'}F,$$

也就是说，映射 $\chi_{\mathbb{E}}$ 在 $\mathbb{E}$ 中是自然的。 □

现在可以证明第一个比较结果：

定理 4.63。 对于每个左双(∞,1)-纤维化 $P:\ \mathbb{E}\to\mathbb{F}$在$_*$中，映射

$$\chi_{\mathbb{E}} : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{I}\mathrm{nt}(\mathcal{S}\mathrm{tair}(\mathbb{E})^\natural)$$

是逐层的 在 **单纯集合范畴**$_{(\infty,1)}$中是弱等价。特别地，它在 $\left((\textbf{单纯集合范畴}_{(\infty,1)})^{\Delta^{\mathrm{op}}}{}_{/\mathbb{F}\text{在}_*}\right)_{\mathrm{LDb}\text{ 中是弱等价}}$ 中。

证明。 由 (4.61) 和 (4.34)，在识别 $\mathbb{I}\mathrm{nt}(\mathrm{Stair}(\mathbb{E})^\natural)_0(a) = \mathrm{Stair}(\mathbb{E})_a$ 后，χ_0 在 Fin_* 中对象 a 上方纤维间的限制是映射 ι_a；由定理 4.33，该映射在**单纯集合范畴**$_{(\infty,1)}$ 中是弱等价。因此，由定理 1.23，映射 $\chi_0 = \coprod_{a\in(\mathcal{F}\mathrm{in}_*)_0}\iota_a$ 在**单纯集合范畴**$_{(\infty,1)}$ 中是弱等价。由于 P 和 $\mathbb{I}\mathrm{nt}(\mathrm{Stair}(P))$ 是左双 (∞,1)-纤维化，由定理 4.32 和 4.52，结论由定理 2.31 得出。 □

因此，我们得到以下结论：

推论 4.64. 左双(∞,1)-纤维化 $P:\ \mathbb{E}\to\mathbb{F}$中的$_*$ 是特殊的，当且仅当左双(∞,1)-纤维化$\mathbb{I}\mathrm{nt}(\mathcal{S}\mathrm{tair}(P))$ 是特殊的。

证明。 这直接由定理 4.38 和 4.53 得出。 □

4.4.2. 从标记对角线到阶梯。 现在，我们利用从对角线到双单纯集合 [CR05, Ste25] 的全单纯集合的比较映射，将左双(∞,1)-纤维化 $P:\ \mathbb{E}\to\mathbb{F}\mathrm{in}_*$ 的标记对角线 $\mathrm{Diag}(\mathbb{E})$ 与其阶梯 $\mathrm{Stair}(\mathbb{E})^\natural$进行比较。

构造 4.65 ([Ste25，定义 3.6],，变量互换)。 给定一个双单纯集合 $\mathbb{X}$，我们记

$$\psi_{\mathbb{X}} : \mathrm{diag}\mathbb{X} \longrightarrow \mathcal{S}\mathrm{tair}(\mathbb{X}), \qquad (\psi_{\mathbb{X}}(z))_j = z|_{[j,q]\times[0,j]} \in \mathbb{X}_{q-j,j} \quad (z\in\mathbb{X}_{q,q}),$$

在识别 (4.10) 下，这是单纯集合之间的自然映射，也是 [Ste25，定义 3.6]中的比较映射。这里，区间 $[j,q]$ 和 $[0,j]$ 分别与 $\Delta[q]$ 在水平方向和垂直方向上的对应面相识别，并且关系 (4.3) 成立，因为 $d_0^h(\psi_{\mathbb{X}}(z))_{j-1}$ 和 $d_j^v(\psi_{\mathbb{X}}(z))_j$ 都是 z 到 $[j,q]\times[0,j-1]$的限制。在同构 $\mathrm{diag}\mathbb{F}\mathrm{in}_*\cong\mathrm{F\,in}_*$和 $\mathrm{Stair}(\mathbb{F}\mathrm{in}_*)\cong\mathrm{F\,in}_*$下，映射 $\psi_{\mathbb{F}\mathrm{in}_*}$是恒等映射。因此，对于双单纯集合 $P:\ \mathbb{E}\to\mathbb{F}\mathrm{in}_*$ 上方的 $\mathbb{F}\mathrm{in}_*$，映射 $\psi_{\mathbb{E}}$ 是一个在 $\mathrm{F\,in}_*$上方的映射。在边上，映射 $\psi_{\mathbb{E}}$ 由下式给出

$$\psi_{\mathbb{E}}(z) = (d_1^v z, d_0^h z), \qquad \text{so that} \qquad \psi_{\mathbb{E}}(s_0^v h) = (h, s_0^v d_0^h h).$$

因此，如果 P 是一个左双 ∞，1-纤维化，那么根据定理 4.55，映射 $\psi_{\mathbb{E}}$ 将 $\mathrm{Diag}(\mathbb{E})$ 的标记边发送到纯水平阶梯边；这些边是 $\mathrm{Stair}(P)$-余笛卡尔的，因此它定义了一个在 F 上的标记单纯集映射$\sharp_*$

$$\psi_{\mathbb{E}} : \mathcal{D}\mathrm{iag}(\mathbb{E}) \longrightarrow \mathcal{S}\mathrm{tair}(\mathbb{E})^\natural.$$

为了证明 $\psi_{\mathbb{E}}$ 是 $\left(\textbf{单纯集合范畴}^+_{/\,(\mathrm{F}\text{上}_*)}{}^\sharp\right)_{\text{余笛卡尔}}$ 中的弱等价，我们使用以下判据。

引理 *4.66*。设 $p: Y\to F_*$ 是一个余笛卡尔纤维化，并设 $a: A^+\to Y^\natural$ 是 F 上的标记单纯集映射$\sharp_*$。假设 a 的底层映射是 $sSet_{(\infty,1)}$ 中的弱等价，并且对于 F_*的每条边 f，每条位于 f 之上的 p-余笛卡尔边，在 $Map(\Delta[1]_f, Y)$ 中都等价于 a 对 A^+ 位于 f 之上的某条标记边所取的像。那么，a 是 $\left(\text{单纯集合范畴}^+/\ (F_*)^\sharp\right)_{\text{余笛卡尔}}$ 中的弱等价。

证明。 设 $p': \mathrm{Z}\to\mathrm{F\,in}_*$ 是一个余笛卡尔纤维化。根据定理 3.6，只需证明映射

$$\mathrm{Map}^\flat(\mathcal{Y}^\natural, \mathcal{Z}^\natural) \longrightarrow \mathrm{Map}^\flat(\mathcal{A}^+, \mathcal{Z}^\natural) \tag{4.67}$$

由 a 诱导的映射是 **单纯集合范畴**$_{(\infty,1)}$ 中的弱等价。根据 [Lur09a, Proposition 3.3.1.7], 的对偶，映射 p' 是 **单纯集合范畴**$_{(\infty,1)}$ 中的纤维化；也就是说，Z 是切片 $(\textbf{单纯集合范畴}_{(\infty,1)})_{/\mathcal{F}\mathrm{in}_*}$ 的一个纤维对象，该切片富含 **单纯集合范畴**$_{(\infty,1)}$，其映射对象由 (3.4) 给出。由于此切片中的每个对象都是余纤维化的，弱等价 a 诱导出拟范畴之间的弱等价

$$a^* : \mathrm{Map}(\mathcal{Y}, \mathcal{Z}) \longrightarrow \mathrm{Map}(\mathcal{A}, \mathcal{Z}); \tag{4.68}$$

参见 [Hir03, 推论 7.7.2(2)]。根据定理 4.59，(4.67) 的源和目标分别是 (4.68) 的源和目标中由将标记边映至 p'-余笛卡尔边的映射所张成的饱满全拟范畴。我们断言，Map(Y, Z) 的一个顶点 F 将 p-余笛卡尔边映至 p'-余笛卡尔边，当且仅当映射 Fa 将 A^+ 的标记边映至 p'-余笛卡尔边。正向蕴含成立，因为 a 是标记单纯集映射。反过来，设 e 是 F 中某条边 f 上方的一个 p-余笛卡尔边。根据假设，存在 A^+ 中位于 f 上方的标记边 g，使得 e 在 $\mathrm{Map}(\Delta[1]_f, \mathrm{Y})$ 中等价于 $a(g)$。于是 $F(e)$ 在 $\mathrm{Map}(\Delta[1]_f, \mathrm{Z})$ 中等价于 $Fa(g)$，因此根据定理 4.59，$F(e)$ 是 p'-余笛卡尔边，这就证明了该断言。因此，映射 (4.67) 是映射 a^* 在全子拟范畴 $\mathrm{Map}^\flat(\mathrm{Y}^\natural, \mathrm{Z}^\natural)$ 上的限制；该全子拟范畴是 $\mathrm{Map}^\flat(\mathrm{A}^+, \mathrm{Z}^\natural)$ 在 a^* 下的原像。特别地，映射 (4.67) 是全忠实的，因为 a^* 是全忠实的。此外，给定 $\mathrm{Map}^\flat(\mathrm{A}^+, \mathrm{Z}^\natural)$ 的一个顶点 H，由于 a^* 是本质满的，存在 Map(Y, Z) 的一个顶点 F，使得 Fa 在 Map(A, Z) 中等价于 H。由于 $\mathrm{Map}^\flat(\mathrm{A}^+, \mathrm{Z}^\natural)$ 是一个饱满的全子拟范畴，顶点 Fa 以及 Fa 与 H 之间的等价都属于其中，因此根据上述断言，F 是 $\mathrm{Map}^\flat(\mathrm{Y}^\natural, \mathrm{Z}^\natural)$ 的一个顶点。因此，映射 (4.67) 也是本质满的，故它是 $\mathrm{sSet}^{(\infty,1)}$ 中的弱等价；参见 [Lur09a, §1.2.10]。□

Wit借助这一判据，我们可以证明阶梯是标记对角线的纤维化替换：

命题 4.69。设 $P\colon \mathbb{E} \to \mathbb{F}$属于$_*$ 一个左双重 $(\infty,1)$-纤维化。那么映射

$$\psi_{\mathbb{E}} : \mathcal{D}\mathrm{iag}(\mathbb{E}) \longrightarrow \mathcal{S}\mathrm{tair}(\mathbb{E})^\natural$$

在以纤维目标为对象的 $\left(\textbf{单纯集合范畴}^+{}_{/(\mathcal{F}\text{属于}_*)^\sharp}\right)_{\text{余笛卡尔}}$ 中是弱等价，并且关于 P自然。此外，在伴随 $\mathrm{Diag} \dashv \mathbb{I}\mathrm{nt}$下，映射 $\psi_{\mathbb{E}}$ 对应于定理 *4.60* 中的映射 $\chi_{\mathbb{E}}$，也就是说，我们有 $\chi_{\mathbb{E}} = \mathbb{I}\mathrm{nt}(\psi_{\mathbb{E}})\eta_{\mathbb{E}}$，其中 η 表示该伴随的单位。

证明。对象 $\mathrm{Stair}(\mathbb{E})^\natural$ 在 $\left(\text{单纯集合范畴}^+{}_{/(\mathrm{Fin}_*)^\sharp}\right)_{\text{余笛卡尔}}$ 中是纤维化的，这是定理 4.32 的结论；由定理 4.62 和 4.65，映射 $\psi_{\mathbb{E}}$ 关于 P 自然。根据 [Ste25，定理 1.2],，从双单纯集合的对角线到其全单纯集合的比较映射在单纯集合范畴中是弱等价。将此结果应用于双单纯集合 $\mathbb{E}^{\mathrm{tr}}$，可知 $\psi_{\mathbb{E}}$ 的底层映射 $\mathrm{diag}\mathbb{E} \to \mathrm{Stair}(\mathbb{E})$ 在单纯集合范畴 $(\infty,1)$ 中是弱等价。此外，设 e 是一个 $\mathrm{Stair}(P)$-余笛卡尔边，其在 $_*$ 中位于 F 的一条边 f 之上。与定理 4.62 的证明一样，存在 $\mathbb{E}_!(f)$ 的一个顶点 h，使得 e 在 $\mathrm{Map}(\Delta[1]_f, \mathrm{Stair}(\mathbb{E}))$ 中等价于边 $\chi_f(\mathrm{h}) = (\mathrm{h}, s_0^v d_0^h \mathrm{h}) = \psi_{\mathbb{E}}(s_0^v \mathrm{h})$；该边是 $\mathrm{Diag}(\mathbb{E})$ 中标记边 $s_0^v \mathrm{h}$ 在 f 之上的像。因此，根据定理 4.66，$\psi_{\mathbb{E}}$ 在 $\left(\text{单纯集合范畴}^+/(\mathrm{Fin}_*)^\sharp\right)_{\text{余笛卡尔}}$ 中是弱等价。接下来只需证明 $\chi_{\mathbb{E}}$ 在该伴随下对应于 $\psi_{\mathbb{E}}$。根据定理 4.55 和 4.57 的证明，$\psi_{\mathbb{E}}$ 的伴随映射将由映射 $x\colon \Delta[m] \boxtimes \Delta[r] \to \mathbb{E}$ 表示的元素$x \in \mathbb{E}_{m,r}$，映为如下复合映射

$$\Delta[r] \times \Delta[m] \xrightarrow{\mathrm{tw}} \mathrm{diag}(\Delta[m] \boxtimes \Delta[r]) \xrightarrow{\mathrm{diag}(x)} \mathrm{diag}\mathbb{E} \xrightarrow{\psi_{\mathbb{E}}} \mathcal{S}\mathrm{tair}(\mathbb{E}),$$

并且，由于 ψ 的自然性，我们有 $\psi_{\mathbb{E}}\mathrm{diag}(x) = \mathrm{Stair}(x)\psi_{\Delta[m]\boxtimes\Delta[r]}$。此外，对于外积 $\mathrm{K} \boxtimes \mathrm{A}$，映射$\psi_{\mathcal{K}\boxtimes\mathcal{A}}$ 由下式给出

$$(x, y) \longmapsto \left(x|_{[j,q]}, y|_{[0,j]}\right)_{j=0}^{q} \qquad (x \in \mathcal{K}_q,\ y \in \mathcal{A}_q),$$

因此它是 同构 (4.12) 的逆映射。因此，上述复合映射就是 (4.61) 中的映射 $\chi_m(x)$，正如所要证明的。□

4.4.3. *Quillen* 等价与第二次往返。现在我们证明，伴随 $\mathrm{Diag} \dashv \mathbb{I}\mathrm{nt}$ 是 $\left(\left(\textbf{单纯集合范畴}^{(\infty,1)}\right)^{\Delta^{\mathrm{op}}}{}_{/\mathbb{F}\mathrm{in}_*}\right)_{\mathrm{LDbl}}$ 与 $\left(\textbf{单纯集合范畴}^+{}_{/(\mathcal{F}\mathrm{in}_*)^\sharp}\right)_{\text{余笛卡尔}}$ 之间的 Quillen 等价。为此，我们首先证明函子 $\mathbb{I}\mathrm{nt}$ 在纤维对象之间反映弱等价。

引理 4.70。*右 Quillen* 函子 $\mathbb{I}\mathrm{nt}\colon \left(\textbf{单纯集合范畴}^+{}_{/(\mathcal{F}\mathrm{in}_*)^\sharp}\right)_{\text{余笛卡尔}} \to \left(\left(\textbf{单纯集合范畴}^{(\infty,1)}\right)^{\Delta^{\mathrm{op}}}{}_{/\mathbb{F}\mathrm{in}_*}\right)_{\mathrm{LDbl}}$ 在纤维对象之间反映弱等价。

证明。设 $g\colon \mathrm{E}^\natural \to \mathrm{F}^\natural$ 是 $\left(\textbf{单纯集合范畴}^+{}_{/(\mathcal{F}\mathrm{in}_*)^\sharp}\right)_{\text{余笛卡尔}}$ 中纤维对象之间的映射，且 $\mathbb{I}\mathrm{nt}(g)$ 在 $\left(\left(\textbf{单纯集合范畴}^{(\infty,1)}\right)^{\Delta^{\mathrm{op}}}{}_{/\mathbb{F}\mathrm{in}_*}\right)_{\mathrm{LDbl}}$ 中是弱等价。由于 $\mathbb{I}\mathrm{nt}(\mathrm{E}^\natural)$ 和 $\mathbb{I}\mathrm{nt}(\mathrm{F}^\natural)$ 是 $\left(\left(\textbf{单纯集合范畴}^{(\infty,1)}\right)^{\Delta^{\mathrm{op}}}{}_{/\mathbb{F}\mathrm{in}_*}\right)_{\mathrm{LDbl}}$ 中的纤维对象，该映射

$$\mathbb{I}\mathrm{nt}(g)_0 = \coprod_{a \in (\mathcal{F}\mathrm{in}_*)_0} g_a : \coprod_{a \in (\mathcal{F}\mathrm{in}_*)_0} \mathcal{E}_a \longrightarrow \coprod_{a \in (\mathcal{F}\mathrm{in}_*)_0} \mathcal{F}_a$$

根据定理 2.31，它是**单纯集合范畴**$^{(\infty,1)}$ 中的弱等价，因此，根据定理 1.23，对 Fin_* 的每个对象 a，映射 $g_a\colon \mathrm{E}_a \to \mathrm{F}_a$ 都是**单纯集合范畴**$^{(\infty,1)}$中的弱等价。因此，根据定理 3.6，g 是 $\left(\textbf{单纯集合范畴}^+{}_{/(\mathcal{F}\mathrm{in}_*)^\sharp}\right)_{\text{余笛卡尔}}$ 中的弱等价。□

现在我们可以证明本节的第一个主要结果：

定理 4.71。 伴随$\mathcal{D}\mathrm{iag} \dashv \mathbb{I}\mathrm{nt}$ 是 *Quillen* 等价

$$\big((\mathbf{sSet}_{(\infty,1)})^{\Delta^{\mathrm{op}}}_{/\mathbb{F}\mathrm{in}_*}\big)_{\mathrm{LDbl}} \underset{\mathbb{I}\mathrm{nt}}{\overset{\mathcal{D}\mathrm{iag}}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\bot}}}} \big(\mathbf{sSet}^{+}_{/(\mathcal{F}\mathrm{in}_*)^\sharp}\big)_{\mathrm{coCart}}$$

证明。 由定理 4.70 和 [Hov99，推论 1.3.16(c)], 可知，只需证明定理 4.58 中 Quillen 伴随 $\mathrm{Diag} \dashv \mathbb{I}\mathrm{nt}$ 的导出单位在每个对象处都是 $\big((\mathbf{单纯集合范畴}_{(\infty,1)})^{\Delta^{\mathrm{op}}}{}_{/\mathbb{F}\mathrm{in}_*}\big)_{\mathrm{LDbl}}$中的弱等价。令 $i_{\mathcal{Z}}\colon \mathrm{Z} \hookrightarrow R\mathrm{Z}$ 表示 $\big(\mathbf{单纯集合范畴}^{+}{}_{/(\mathcal{F}\mathrm{in}_*)^\sharp}\big)_{\text{余笛卡尔}}$中的函子性纤维化替换，其中 $i_{\mathcal{Z}}$ 是平凡余纤维化。由于$\big((\mathbf{单纯集合范畴}_{(\infty,1)})^{\Delta^{\mathrm{op}}}{}_{/\mathbb{F}\mathrm{in}_*}\big)_{\mathrm{LDbl}}$中的每个对象都是余纤维化的，因此对象 $\mathbb{A}$处的导出单位由以下复合映射表示

$$\eta^R_{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \xrightarrow{\eta_{\mathbb{A}}} \mathbb{I}\mathrm{nt}\mathcal{D}\mathrm{iag}(\mathbb{A}) \xrightarrow{\mathbb{I}\mathrm{nt}(i_{\mathcal{D}\mathrm{iag}(\mathbb{A})})} \mathbb{I}\mathrm{nt}R\mathcal{D}\mathrm{iag}(\mathbb{A}),$$

其中 η表示伴随的单位。首先假设 $\mathbb{A} = \mathbb{E}$在 $\big((\mathbf{单纯集合范畴}_{(\infty,1)})^{\Delta^{\mathrm{op}}}{}_{/\mathbb{F}\mathrm{in}_*}\big)_{\mathrm{LDbl}}$中是纤维化的，其结构映射为 $P\colon \mathbb{E} \to \mathbb{F}\mathrm{in}_{*}$。由定理 4.69，映射 $\psi_{\mathbb{E}} : \mathrm{Diag}(\mathbb{E}) \to \mathrm{Stair}(\mathbb{E})^\natural$ 在 $\big(\mathbf{单纯集合范畴}^{+}{}_{/(\mathcal{F}\mathrm{in}_*)^\sharp}\big)_{\text{余笛卡尔}}$中是一个目标纤维化的弱等价，因此以下交换方块中存在一个提升 $\overline{\psi}_{\mathbb{E}}$，其中 $b_{\mathbb{E}}$ 表示$R\mathrm{Diag}(\mathbb{E})$的结构映射。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}\mathrm{iag}(\mathbb{E}) & \xrightarrow{\psi_{\mathbb{E}}} & \mathcal{S}\mathrm{tair}(\mathbb{E})^\natural \\ {\scriptstyle i_{\mathcal{D}\mathrm{iag}(\mathbb{E})}}\downarrow & \overset{\overline{\psi}_{\mathbb{E}}}{\nearrow} & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{S}\mathrm{tair}(P)} \\ R\mathcal{D}\mathrm{iag}(\mathbb{E}) & \xrightarrow[b_{\mathbb{E}}]{} & \mathcal{F}\mathrm{in}^\sharp_*. \end{array}$$

根据三取二性质，映射 $\psi_{\mathbb{E}}$ 是 $\big(\mathbf{单纯集合范畴}^{+}{}_{/(\mathcal{F}\mathrm{in}_*)^\sharp}\big)_{\text{余笛卡尔}}$ 中纤维对象之间的弱等价，因此根据定理 1.18(2)，映射 $\mathbb{I}\underline{\mathrm{nt}}(\psi_{\mathbb{E}})$ 是 $\big((\mathbf{单纯集合范畴}_{(\infty,1)})^{\Delta^{\mathrm{op}}}{}_{/\mathbb{F}\mathrm{in}_*}\big)_{\mathrm{LDbl}}$ 中的弱等价。此外，根据定理 4.69，我们有

$$\chi_{\mathbb{E}} = \mathbb{I}\mathrm{nt}(\psi_{\mathbb{E}})\eta_{\mathbb{E}} = \mathbb{I}\mathrm{nt}(\overline{\psi}_{\mathbb{E}})\eta^R_{\mathbb{E}}.$$

由于根据定理 4.63， $\chi_{\mathbb{E}}$ 是弱等价，因此根据三取二性质，映射 $\eta^R_{\mathbb{E}}$也是弱等价。对于任意对象 $\mathbb{A}$，令 $r\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}^{\mathrm{f}}$是 $\big((\mathbf{单纯集合范畴}_{(\infty,1)})^{\Delta^{\mathrm{op}}}{}_{/\mathbb{F}\mathrm{in}_*}\big)_{\mathrm{LDbl}}$ 中的一个纤维化替换。根据 η和 i的自然性，我们有一个由双单纯集合构成的交换方块

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A} & \xrightarrow{\eta^R_{\mathbb{A}}} & \mathbb{I}\mathrm{nt}R\mathcal{D}\mathrm{iag}(\mathbb{A}) \\ {\scriptstyle r}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathbb{I}\mathrm{nt}R\mathcal{D}\mathrm{iag}(r)} \\ \mathbb{A}^{\mathrm{f}} & \xrightarrow[\eta^R_{\mathbb{A}^{\mathrm{f}}}]{} & \mathbb{I}\mathrm{nt}R\mathcal{D}\mathrm{iag}(\mathbb{A}^{\mathrm{f}}). \end{array}$$

映射 $\mathrm{Diag}(r)$ 是 $\big(\mathbf{单纯集合范畴}^{+}{}_{/(\mathcal{F}\mathrm{in}_*)^\sharp}\big)_{\text{余笛卡尔}}$中的弱等价，因为函子 Diag 是左 Quillen 函子，且$\big((\mathbf{单纯集合范畴}_{(\infty,1)})^{\Delta^{\mathrm{op}}}{}_{/\mathbb{F}\mathrm{in}_*}\big)_{\mathrm{LDbl}}$中的每个对象都是余纤维化的，因此根据三取二性质，映射 $R\mathrm{Diag}(r)$ 也是如此。由于 $R\mathrm{Diag}(r)$ 是纤维对象之间的映射，映射 $\mathbb{I}\mathrm{nt}R\mathrm{Diag}(r)$ 是弱等价。由于 r 和 $\eta^R_{\mathbb{A}^{\mathrm{f}}}$ 也是弱等价，根据三取二性质，我们得出 $\eta^R_{\mathbb{A}}$ 是弱等价。□

注 4.72 （其他基底）。 范畴 Fin_* 在定理 4.71 中并未起特殊作用。给定一个小范畴 C，令 $\mathrm{B} = N(\mathrm{C})$ 和 $\mathbb{B} = \mathrm{B}^h$，如第 1.6 节所述。则单纯对象 $\mathbb{B}$ 是 Reedy 纤维的，且其 Segal 映射是同构；左双重（∞，1）-纤维化的阶梯是 $\mathbb{B}$ 上的余笛卡尔纤维化，而函子 $\mathbb{I}\mathrm{nt}$ 将 ∞，1）-纤维化的余笛卡尔纤维化映至 $\mathbb{B}$。因此，定理 4.71 的证明给出了一个 Quillen 等价：在 $\mathbb{B}$上的左双重（∞，1）-纤维化的模型结构（按定理 2.31 的方式定义）与 $\mathrm{B}^\sharp$上的标记单纯集合的余笛卡尔模型结构之间；参见 [Nui24，推论 4.35]。只有第 2.2 节和第 3.5 节的跨度及相应的局部化是 Fin_*所特有的。

最后，我们比较 Fin_* 上的余笛卡尔纤维化与其余笛卡尔串双单纯集合的阶梯。我们将伴随 $\mathrm{Diag} \dashv \mathbb{I}\mathrm{nt}$ 的余单位记为 ε。

定理 4.73。对于每个 纤维对象 $\mathcal{X}$ 的 $\big(\mathbf{单纯集合范畴}^{+}{}_{/(\mathcal{F}\text{中}_*)^\sharp}\big)_{\text{余笛卡尔}}$中，存在一条弱等价之锯齿链，位于 $\big(\mathbf{单纯集合范畴}^{+}{}_{/(\mathcal{F}\text{中}_*)^\sharp}\big)_{\text{余笛卡尔}}$

$$\mathcal{X} \xleftarrow{\varepsilon_{\mathcal{X}}} \mathcal{D}\mathrm{iag}\mathbb{I}\mathrm{nt}(\mathcal{X}) \xrightarrow{\psi_{\mathbb{I}\mathrm{nt}(\mathcal{X})}} \mathcal{S}\mathrm{tair}(\mathbb{I}\mathrm{nt}(\mathcal{X}))^\natural, \tag{4.74}$$

它关于$\mathcal{X}$是自然的。

证明。由于 $\mathbb{I}$nt(X) $\to \mathbb{F}$in$_*$ 是一个左双（∞，1）-纤维化，根据定理 4.52，映射 $\psi_{\mathbb{I}\mathrm{nt}(\mathcal{X})}$ 在 $\big($单纯集合范畴$^+/(\mathbb{F}\mathrm{in}_*)_\sharp\big)$余笛卡尔 中是一个弱等价，根据定理 4.69。此外，由于 $\mathbb{I}$nt(X) 在 $\big((\mathrm{sSet}^{(\infty,1)})^{\Delta^{\mathrm{op}}}/_{\mathbb{F}\mathrm{in}_*}\big)$LDbl 中是余纤维化的，而 X 在$\big($单纯集合范畴$^+/(\mathbb{F}\mathrm{in}_*)_\sharp\big)$余笛卡尔 中是纤维化的，余单位 $\varepsilon_{\mathcal{X}}$ 的伴随映射是 $\mathbb{I}$nt(X) 的恒等态射，根据定理 4.71，它在 $\big($单纯集合范畴$^+/(\mathbb{F}\mathrm{in}_*)_\sharp\big)$余笛卡尔 中是一个弱等价。该锯齿的自然性由 ε 和 ψ 的自然性，并结合定理 4.62 得到。□

注 4.75。由于对象 X 和 Stair($\mathbb{I}$nt(X))$^\natural$ 在 $\big($**单纯集合范畴**$^+{}_{/(\mathcal{F}\mathrm{in}_*)_\sharp}\big)$余笛卡尔 中既是余纤维化的又是纤维化的，因此在 $\big($**单纯集合范畴**$^+{}_{/(\mathcal{F}\mathrm{in}_*)_\sharp}\big)$余笛卡尔 的同伦范畴中的同构$[\psi_{\mathbb{I}\mathrm{nt}(\mathcal{X})}][\varepsilon_{\mathcal{X}}]^{-1}$可由一个单纯集合范畴中的映射 X $\to$Stair($\mathbb{I}$nt(X))$^\natural$表示，该映射位于 F in$^\sharp_*$之上，并且是 $\big($**单纯集合范畴**$^+{}_{/(\mathcal{F}\mathrm{in}_*)_\sharp}\big)$余笛卡尔[Hov99，定理 1.2.10(ii), (iv)]中的弱等价。由定理 3.6，此类代表的底层映射是**单纯集合范畴**$_{(\infty,1)}$ 中的弱等价，并且在纤维上诱导弱等价。

4.4.4. 对称幺半对象的 *Quillen* 等价。 最后，我们证明定理 4.71 中的 Quillen 等价在特殊左双（∞，1）-纤维化与特殊余笛卡尔纤维化的模型结构之间诱导出一个 Quillen 等价。回顾定理 2.33 和 3.27，我们有

$$\big((\mathbf{sSet}_{(\infty,1)})^{\Delta^{\mathrm{op}}}_{/\mathbb{F}\mathrm{in}_*}\big)^{\mathrm{sp}}_{\mathrm{LDbl}} = L_{\mathrm{S}_{\mathrm{sp}}}\big((\mathbf{sSet}_{(\infty,1)})^{\Delta^{\mathrm{op}}}_{/\mathbb{F}\mathrm{in}_*}\big)_{\mathrm{LDbl}}, \qquad \big(\mathbf{sSet}^+_{/(\mathcal{F}\mathrm{in}_*)_\sharp}\big)^{\mathrm{sp}}_{\mathrm{coCart}} = L_{\mathrm{S}^+_{\mathrm{sp}}}\big(\mathbf{sSet}^+_{/(\mathcal{F}\mathrm{in}_*)_\sharp}\big)_{\mathrm{coCart}},$$

其中，集合 S_{sp} 和 $\mathrm{S}^+_{\mathrm{sp}}$ 定义于 (2.32) 和 (3.26) 中。下面的结果是引言中所述定理的精确表述。

定理 4.76。 伴随$\mathcal{D}$iag $\dashv \mathbb{I}$nt 是一个 *Quillen* 等价

$$\big((\mathbf{sSet}_{(\infty,1)})^{\Delta^{\mathrm{op}}}_{/\mathbb{F}\mathrm{in}_*}\big)^{\mathrm{sp}}_{\mathrm{LDbl}} \underset{\mathbb{I}\mathrm{nt}}{\overset{\mathcal{D}\mathrm{iag}}{\rightleftarrows}} \big(\mathbf{sSet}^+_{/(\mathcal{F}\mathrm{in}_*)_\sharp}\big)^{\mathrm{sp}}_{\mathrm{coCart}}$$

此外，对于每个特殊左双（∞, *1*）-纤维化 $P:\ \mathbb{E} \to \mathbb{F}in_*$，定理 *4.63* 的映射 $\chi_{\mathbb{E}}$ 是 $\big((sSet^{(\infty,1)})^{\Delta^{\mathrm{op}}}/_{\mathbb{F}}in_*\big)^{\mathrm{sp}}$ *LDbl* 中纤维对象之间的弱等价；并且对于 $\big(sSet^+/(Fin_*)_\sharp\big)^{\mathrm{sp}}$ *coCart* 中的每个纤维对象 *X*，定理 *4.73* 的锯齿链 *(4.74)* 是 $\big(sSet^+/(Fin_*)_\sharp\big)^{\mathrm{sp}}$ *coCart* 中纤维对象之间的弱等价之锯齿链。

证明。 由同构 (4.56) 的自然性，对于每个 $k \geq 0$以及 A $\in$ G，函子 Diag 将 (2.32) 中的映射 $s_{k,\mathcal{A}}$发送为一个映射；作为 F 上的映射，该映射在$\sharp_*$中同构于映射

$$\mathcal{V}^\sharp_k \times \mathcal{A}^\flat \longrightarrow \mathcal{J}^\sharp_k \times \mathcal{A}^\flat$$

(3.26) 中的映射。由定理 4.71 和 [Hir03, 定理 3.3.20(1)], , 伴随 Diag $\dashv \mathbb{I}$nt 是 $\big((\mathrm{sSet}^{(\infty,1)})^{\Delta^{\mathrm{op}}}/_{\mathbb{F}}\mathrm{in}_*\big)$LDbl 在 S_{sp} 处的左 Bousfield 局部化与 $\big(\mathrm{sSet}^+/(\mathrm{Fin}_*)_\sharp\big)$coCart 在 Diag 的左导出函子作用于 S_{sp} 所得像处的左 Bousfield 局部化之间的 Quillen 等价。由于 $\big((\mathrm{sSet}^{(\infty,1)})^{\Delta^{\mathrm{op}}}/_{\mathbb{F}}\mathrm{in}_*\big)$LDbl 中的每个对象都是余纤维化的，该像就是集合 Diag(S_{sp})，因此后一个局部化就是 $\big(\mathrm{sSet}^+/(\mathrm{Fin}_*)_\sharp\big)^{\mathrm{sp}}$ coCart，这证明了第一个断言。对于第二个断言，回顾 $\big((\mathrm{sSet}^{(\infty,1)})^{\Delta^{\mathrm{op}}}/_{\mathbb{F}}\mathrm{in}_*\big)$LDbl 和 $\big(\mathrm{sSet}^+/(\mathrm{Fin}_*)_\sharp\big)$coCart 中的弱等价，分别是 $\big((\mathrm{sSet}^{(\infty,1)})^{\Delta^{\mathrm{op}}}/_{\mathbb{F}}\mathrm{in}_*\big)^{\mathrm{sp}}$ LDbl 和 $\big(\mathrm{sSet}^+/(\mathrm{Fin}_*)_\sharp\big)^{\mathrm{sp}}$ coCart 中的弱等价。若 P 是一个特殊的左双 (∞, 1)-纤维化，则由定理 4.38，余笛卡尔纤维化 Stair(P) 是特殊的，因此由定理 4.53，左双 (∞, 1)-纤维化 $\mathbb{I}$nt(Stair(P)) 是特殊的。类似地，若 X 是 $\big(\mathrm{sSet}^+/(\mathrm{Fin}_*)_\sharp\big)^{\mathrm{sp}}$ coCart 中的纤维对象，则由定理 4.53，$\mathbb{I}$nt(X) $\to \mathbb{F}$in$_*$ 是一个特殊的左双 (∞, 1)-纤维化，因此由定理 4.38，Stair($\mathbb{I}$nt(X))$^\natural$ 在 $\big(\mathrm{sSet}^+/(\mathrm{Fin}_*)_\sharp\big)^{\mathrm{sp}}$ coCart 中是纤维化的。□

附录 A. 阶梯延拓引理的证明

在本附录中，我们证明定理 4.23。我们采用定理 4.21 中的记号，并用 $P:\ \mathbb{E} \to \mathbb{F}$在$_*$ 中表示一个左双（∞, 1）-纤维化。

定理 *4.23* 的证明。 回想一下，相对角 η 相当于 Stair($\mathbb{E}$) 的 $(q-1)$-单纯形 $\eta^r = (\eta^r_0, \ldots\ldots, \eta^r_{q-1})$，其中 $0 \leq r \leq q$ 满足 $r \neq a$，并且满足恒等式 (4.22)。我们对 $0 \leq j < q$ 进行归纳法来构造单形 $\xi_j \in \mathbb{E}_{q-j,\ j}$。假设对于每个 $i < j$，我们都构造出了一个单纯形 $\xi_i \in \mathbb{E}_{q-i,\ i}$，使得 $P_{q-i}(\xi_i) = c^{(i)}_{\sigma_{\geq i}}$，并且

满足将 j 替换为 i 后的 (4.24)、(4.25) 和 (4.26)。我们将单纯形 ξ_j 视为单纯集合的一个交换方块中的提升而得到

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}_j & \xrightarrow{\Phi_j} & \mathbb{E}_{q-j} \\ \downarrow & \overset{\xi_j}{\nearrow} & \downarrow{\scriptstyle \sim}\, R_j \\ \Delta[j] & \xrightarrow[H_j]{} & \mathbb{E}(\mathcal{K}_j) \times_{\mathbb{F}\mathrm{in}_*(\mathcal{K}_j)} (\mathbb{F}\mathrm{in}_*)_{q-j} \end{array} \tag{A.1}$$

我们现在对其进行描述。

我们先定义单纯集合 $\mathrm{K}_j \subseteq \Delta[q-j]$和映射 H_j。令

$$\mathcal{K}_j \coloneqq \bigcup_{\substack{1\le s\le q-j \\ j+s\neq a}} d_s\Delta[q-j-1] = \begin{cases} \mathcal{K}_{q-j,a-j}, & j<a, \\ \Lambda^0[q-j], & j\ge a, \end{cases} \tag{A.2}$$

其中 $\mathrm{K}_{m,\ \ell}$ 如定理 4.19 中所述；注意，当 $j<a$时，$1\le a-j<q-j$。映射 R_j 是沿包含 $\mathrm{K}_j \hookrightarrow \Delta[q-j]$的相对限制映射，根据定理 4.18 和定理 4.19，它是一个平凡纤维化。H_j在 $(\mathbb{F}\mathrm{in}_*)_{q-j}$中的分量是退化的 j-单形 $c^{(j)}\sigma_{\ge j}$，而其分量 $\Delta[j]\to\mathbb{E}(\mathrm{K}j)$ 在 $\mathrm{K}j$的面 $d_s\Delta[q-j-1]$上由以下j-单形给出

$$H_j|_{d_s\Delta[q-j-1]} \coloneqq \eta_j^{j+s} \in \mathbb{E}_{q-j-1,j}, \qquad 1\le s\le q-j,\ j+s\neq a. \tag{A.3}$$

这些单形在各面的交集上相容。事实上，给定满足 $j+s\neq a$ 和$j+t\neq a$的 $1\le s<t\le q-j$，恒等态射 $D_{j+s}\eta^{j+t} = D_{j+t-1}\eta^{j+s}$ 的第 j 个分量就是恒等态射

$$d_s^h\eta_j^{j+t} = d_{t-1}^h\eta_j^{j+s},$$

由 (4.8), a s $j<j+s$和 $j<j+t-1$。此外，单形 η_j^{j+s} 位于退化的 j-单纯形 a t

$$(d_0)^j d_{j+s}\sigma = d_s(d_0)^j\sigma = d_s\sigma_{\ge j},$$

它是 $\sigma_{\ge j}$在面 $d_s\Delta[q-j-1]$上的限制，因此 H_j的两个分量定义了一个到拉回中的映射。

接下来，我们定义单纯集合 $\mathrm{L}_j \subseteq \Delta[j]$以及映射 Φ_j。令 $\mathrm{L}_0\coloneqq\varnothing$，并且对于 $j>0$，令 L_j为面 $d_r\Delta[j-1]$与 $0\le r<j$和 $r\neq a$的并集，以及面 $d_j\Delta[j-1]$，从而

$$\mathcal{L}_j = \begin{cases} \partial\Delta[j], & 0<j\le a, \\ \Lambda^a[j], & j>a. \end{cases} \tag{A.4}$$

对于 $j>0$，映射 Φ_j由下式给出

$$\Phi_j|_{d_r\Delta[j-1]} \coloneqq \begin{cases} \eta_{j-1}^r, & 0\le r<j,\ r\neq a, \\ d_0^h\xi_{j-1}, & r=j. \end{cases} \tag{A.5}$$

我们检查这些单形在各面的交集上是否相容。给定 $0\le r<s<j$，其中 $r,\ s\neq a$，恒等态射 $D_r\eta^s = D_{s-1}\eta^r$ 的第 $(j-2)$ 个分量是恒等态射

$$d_r^v\eta_{j-1}^s = d_{s-1}^v\eta_{j-1}^r,$$

由 (4.8)，有 $r<s<j$。给定 $0\le r<j$ with $r\neq a$，我们需要证明，对于 $j\ge 2$，

$$d_r^v(d_0^h\xi_{j-1}) = d_{j-1}^v\eta_{j-1}^r. \tag{A.6}$$

若 $r<j-1$，则由 (4.25) 对于 ξ_{j-1}，以及由 (4.3) 对于 η^r，可得

$$d_r^v d_0^h\xi_{j-1} = d_0^h d_r^v\xi_{j-1} = d_0^h\eta_{j-2}^r = d_{j-1}^v\eta_{j-1}^r.$$

若 $r=j-1\neq a$，则由 (4.26) 对于 ξ_{j-1}，由 (4.24) 对于 ξ_{j-2}和 $s=1$，以及由 (4.3) 对于 η^{j-1}，可得

$$d_{j-1}^v d_0^h\xi_{j-1} = d_0^h d_{j-1}^v\xi_{j-1} = d_0^h d_0^h\xi_{j-2} = d_0^h d_1^h\xi_{j-2} = d_0^h\eta_{j-2}^{j-1} = d_{j-1}^v\eta_{j-1}^{j-1}.$$

因此，映射 Φ_j定义良好。此外，它位于 $\sigma_{\ge j}$ 处的退化单纯形之上，因为对于 $0\le r<j$，有 $(d_0)^{j-1}d_r\sigma = (d_0)^j\sigma = \sigma_{\ge j}$，并且 $d_0\sigma_{\ge j-1} = \sigma_{\ge j}$。

现在我们证明方形 (A.1) 可交换，即证明 $R_j\Phi_j = H_j|_{\mathcal{L}_j}$。$(\mathbb{F}\mathrm{in}_*)_{q-j}$ 中的分量相同，因为这两个映射都位于 $\sigma_{\geq j}$ 处的退化单纯形之上。对于 $\mathbb{E}(\mathrm{K}i)$ 中的分量，令 $1 \leq s \leq q-j$，其中 $j+s \neq a$。给定满足 $r \neq a$ 的 $0 \leq r < j$，我们需要证明

$$d_s^h \eta_{j-1}^r = d_r^v \eta_j^{j+s},$$

根据 (4.8)，这是恒等态射 $D_r\eta^{j+s} = D_{j+s-1}\eta^r$ 的第 $(j-1)$ 个分量，因为 $r \leq j-1 < j+s-1$。对于面 $d_j\Delta[j-1]$，当 $j>0$ 时，我们有

$$d_s^h d_0^h \xi_{j-1} = d_0^h d_{s+1}^h \xi_{j-1} = d_0^h \eta_{j-1}^{j+s} = d_j^v \eta_j^{j+s},$$

对于 ξ_{j-1}和 $s+1$，由 (4.24) 得；对于 η^{j+s}，由 (4.3) 得。因此，方形 (A.1) 可交换，并且由于 R_j是平凡纤维化，它存在一个提升 ξ_j。恒等态射 $R_j\xi_j = H_j$给出 $P_{q-j}(\xi_j) = c^{(j)}\sigma_{\geq j}$以及 (4.24)，而恒等态射 $\xi_j|_{\mathcal{L}_j} = \Phi_j$给出 (4.25) 和 (4.26)。归纳法至此完成。

对于最后一个断言，设 $\xi_0, \ldots, \xi_{q-1}$是陈述中的单形。上面对 (A.5) 所作的验证，对于 $j=q$ 而言只涉及单形 ξ_{q-1}和 ξ_{q-2}以及陈述中的关系，这表明赋值 Φ_q定义了一个以 $\sigma_{\geq q}$ 处的退化单纯形为底的角 $\Lambda^a[q] \to \mathbb{E}_0$。令 $\xi_q\colon \Delta[q] \to \mathbb{E}_0$ 为 Φ_q的一个延拓。由于 $(\mathbb{F}$在$_*$中$)_0$ 是离散的，单形 ξ_q 位于 $\sigma_{\geq q}$ 处的退化单纯形之上。此外，我们有 $d_q^v\xi_q = d_0^h\xi_{q-1}$，因此由 (4.26)，元组 $\xi = (\xi_0, \ldots, \xi_q)$ 是 $\mathrm{Stair}(\mathbb{E})$ 中位于 σ 之上的一个 q-单形。最后，对于 $r \neq a$和 $0 \leq i \leq q-1$，我们有

$$(D_r\xi)_i = \begin{cases} d_{r-i}^h \xi_i = \eta_i^r, & i < r, \\ d_r^v \xi_{i+1} = \eta_i^r, & i \geq r, \end{cases} \tag{A.7}$$

根据 (4.8)，第一种情况由 (4.24) 得出；第二种情况在 $i+1<q$ 时由 (4.25) 得出，在 $i+1=q$ 时则由 Φ_q 的定义得出。因此，对每个 $r \neq a$，都有 $D_r\xi = \eta^r$，也就是说，单纯形 ξ 延伸了 η。□

参考文献

[AM66] Michael Artin 和 Barry Mazur，《范坎彭定理》，Topology 5 (1966)，179–189。MR 192495[AR94] Jiří Adámek 和 Jiří Rosický，《局部可呈示范畴与可达范畴》，伦敦数学会讲义系列，第 189 卷，剑桥大学出版社，剑桥，1994。MR 1294136[Ati88] Michael Atiyah，《拓扑量子场论》，高等科学研究所出版物《数学》(1988)，第 68 期，175–186 (1989)。MR 1001453[Bar10] Clark Barwick，《关于左、右模型范畴及左、右 Bousfield 局部化》，《同调、同伦与应用》12 (2010)，第 2 期，245–320。MR 2771591[BD95] John C. Baez 和 James Dolan，《高维代数与拓扑量子场论》，J. Math. Phys. 36 (1995)，第 11 期，6073–6105。MR 1355899[BdB18] Pedro Boavida de Brito，《Segal 对象与 Grothendieck 构造》，《代数拓扑高山花束》，Contemp. Math.，第 708 卷，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2018，第 19–44 页。MR 3807750[BF78] Aldridge K. Bousfield 和 Eric M. Friedlander，《Γ-空间、谱与双单纯集合的同伦论》，《同伦论的几何应用》（会议录，伊利诺伊州埃文斯顿，1977），II，Lecture Notes in Math.，第 658 卷，Springer，柏林，1978，第 80–130 页。[BOO+21] Julia E. Bergner、Angélica M. Osorno、Viktoriya Ozornova、Martina Rovelli 和 Claudia I. Scheimbauer，《2-Segal 对象与 Waldhausen 构造》，Algebr. Geom. Topol. 21 (2021)，第 3 期，1267–1326。[BSP21] Clark Barwick 和 Christopher Schommer-Pries，《高阶范畴理论的唯一性》，J. Amer. Math. Soc. 34 (2021)，第 4 期，1011–1058。MR 4301559[CH21] Hongyi Chu 和 Rune Haugseng，《通过 Segal 条件构造同伦相干代数》，Adv. Math. 385 (2021)，论文编号 107733。[CR05] Antonio M. Cegarra 和 Josué Remedios，《双单纯集合上的对角线构造与条构造之间的关系》，Topology Appl. 153 (2005)，第 1 期，21–51。[CS19] Damien Calaque 和 Claudia Scheimbauer，《关于配边的 (∞, n)-范畴的注记》，Algebr. Geom. Topol. 19 (2019)，第 2 期，533–655。[DLRS25] Arghan Dutta、Stefano Luneia、Martina Rovelli 和 Sam Silver，《幺半范畴的 Morita $(\infty, 2)$-范畴作为 2-复杂单纯集》，arXiv:2509.21472v1，2025。[Dug01] Daniel Dugger，《组合模型范畴具有表示》，Adv. Math. 164 (2001)，第 1 期，177–201。MR 1870516[GH15] David Gepner 和 Rune Haugseng，《通过非对称 ∞-运算子的富集 ∞-范畴》，Adv. Math. 279 (2015)，575–716。MR 3345192

[GHL24] Andrea Gagna、Yonatan Harpaz 和 Edoardo Lanari，《$(\infty, 2)$-范畴的笛卡尔纤维化》，Algebr. Geom. Topol. 24 (2024)，第 9 期，4731–4778。[GO13] Nick Gurski 和 Angélica M. Osorno，《无限环空间与对称幺半双范畴的相干性》，Adv. Math. 246 (2013)，1–32。[GP23]Daniel Grady 和 Dmitri Pavlov，《扩展场论是局部的，并具有分类空间》，arXiv:2011.01208v4，2023。[GP26] ，《具有几何结构的配边高阶范畴》，arXiv:2605.03453v1，2026。[Hau17] Rune Haugseng，《$\mathbb{E}_n$-代数的高阶 Morita 范畴》，《几何与拓扑》21 (2017)，第 3 期，1631–1730。MR 3650080[Hau18] ，《迭代跨度与经典拓扑场论》，《数学杂志》289 (2018)，第 3–4 期，1427–1488。MR 3830256[Hir03] Philip S. Hirschhorn，《模型范畴及其局部化》，数学调查与专著，第 99 卷，美国数学学会，罗得岛州普罗维登斯，2003。MR 1944041[Hir15] ，《模型范畴的上范畴与下范畴》，arXiv:1507.01624v1，2015。[Hov99] Mark Hovey，《模型范畴》，数学调查与专著，第 63 卷，美国数学学会，罗得岛州普罗维登斯，1999。MR 1650134[JFS17] Theo Johnson-Freyd 和 Claudia Scheimbauer，《（反）松自然变换、扭曲量子场论与“更高阶”的 Morita 范畴》，Adv. Math. 307 (2017)，147–223。[Joy08] André Joyal，《拟范畴理论及其应用》，可在线获取，https://mat.uab.cat/~kock/crm/hocat/advanced-course/Quadern45-2.pdf，2008。[JT07] André Joyal 和 Myles Tierney，《拟范畴与 Segal 空间》，《代数、几何与数学物理中的范畴》，Contemp. Math.，第 431 卷，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2007，第 277–326 页。MR 2342834[Kel05] G. M. Kelly，《富集范畴论的基本概念》，《表示论与范畴应用》(2005)，第 10 期，vi+137，重印自 1982 年原版，[剑桥大学出版社，剑桥]。MR 2177301[KS15] Dimitar Kodjabachev 和 Steffen Sagave，《拟范畴的严格交换模型》，《同调、同伦与应用》17 (2015)，第 1 期，121–128。[Lur09a] Jacob Lurie，《高阶拓扑斯理论》，《数学年刊研究》，第 170 卷，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，2009。MR 2522659[Lur09b] ，《拓扑场论的分类》，《数学当前发展》，2008，国际出版社，马萨诸塞州萨默维尔，2009，第 129–280 页。MR 2555928[Lur17] ，《高阶代数》，可在线获取 https://www.math.ias.edu/~lurie/papers/HA.pdf，2017。[Lur26] ，Kerodon，https://kerodon.net，2026。[MRR23] Lyne Moser、Nima Rasekh 和 Martina Rovelli，《(∞, n)-范畴的直化—逆直化构造》，arXiv:2307.07259v1，2023。[MRR24] ，(∞, n)-极限 II：跨模型比较，arXiv:2408.04742v1，2024。[MRR26] ，(∞, n)-极限 I：定义与初步一致性结果，arXiv:2312.11101v3，2026。[NS17] Thomas Nikolaus 和 Steffen Sagave，《可呈示对称幺半 ∞-范畴由对称幺半模型范畴表示》，Algebr. Geom. Topol. 17 (2017)，第 5 期，3189–3212。[Nui24] Joost Nuiten，《关于 Segal 空间的直化》，《组合数学》160 (2024)，第 3 期，586–656。[Ras21a] Nima Rasekh，《拟范畴与 Segal 空间：笛卡尔版本》，《同伦相关结构杂志》16 (2021)，第 4 期，563–604。[Ras21b] ，《D-单纯空间的 Yoneda 引理》，arXiv:2108.06168v1，2021。[Ras23] ，《单纯空间的 Yoneda 引理》，Appl. Categ. Structures 31 (2023)，第 4 期，论文编号 27。MR 4616631[Rez01] Charles Rezk，《同伦论的同伦理论模型》，《美国数学会汇刊》353 (2001)，第 3 期，973–1007。MR 1804411[Rez10] ，《弱 n-范畴的笛卡尔呈现》，《几何与拓扑》14 (2010)，第 1 期，521–571。MR 2578310[RV14] Emily Riehl 和 Dominic Verity，《Reedy 范畴理论与实践》，Theory Appl. Categ. 29 (2014)，256–301。MR 3217884[RV22] ，《∞-范畴论要义》，剑桥高等数学研究丛书，第 194 卷，剑桥大学出版社，剑桥，2022。MR 4354541[Seg74] Graeme Segal，《范畴与上同调理论》，Topology 13 (1974)，293–312。MR 353298

[Sha21] Amit Sharma，相干交换幺半拟范畴的同伦论，Theory Appl. Categ. **37**（2021），第 16 号论文，418–481 页。[Shu10] Michael Shulman，构造对称幺半双范畴，arXiv:1004.0993v1，2010。[SP09] Christopher Schommer-Pries，二维扩展拓扑场论的分类，ProQuest LLC，美国密歇根州安娜堡，2009 年，博士学位论文——加州大学伯克利分校。[SP14] , 低维高阶范畴论中的可对偶性，Topology and field theories，Contemp. Math.，第 613 卷，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2014 年，第 111–176 页。[Ste25] Danny Stevenson，关于全单纯集合函子的一个注记，Appl. Categ. Structures **33**（2025），第 3 期，第 21 号论文。[Vit92] Enrico M. Vitale，莫里田理论的幺半范畴，Cahiers Topologie Géom. Différentielle Catég. **33**（1992），第 4 期，331–343 页。MR 1197429[Wal85] Friedhelm Waldhausen，空间的代数 KK 理论，Algebraic and geometric topology（新不伦瑞克，新泽西州，1983），Lecture Notes in Math.，第 1126 卷，Springer，柏林，1985 年，第 318–419 页。MR 802796

加拿大渥太华渥太华大学数学与统计系电子邮箱： adutt095@uottawa.ca