arXiv:2611.33113v1 [math.AC] 24 Nov 2026

多色排列 Wordle 的最大次数滤过、Koszul复形与维数计数

Lawren Smithline

摘要。我们研究一族理想的 Koszul 分解，其中每个理想都由完全分解为线性因子的多元多项式生成。研究动机源自 Kutin 和 Smithline 的游戏《排列 Wordle》，以及 Kutin、Smithline 和 Vatter 对该游戏的分析；另一个动机是 Kutin 和 Smithline 在关于《多色排列 Wordle》的研究中提出的一个开放问题，即猜想 4.5。对于这一理想族中的每个理想，采用我们选定的生成元时，Koszul 微分在最大次数滤过下是严格的；更一般地，在坐标构成一组连续整数的每个多重次数处，Koszul 微分也都是严格的。由此得到的维数计数解决了 Kutin 和 Smithline 的猜想。

证明采用归纳法，每个归纳步骤都是一次迭代。核心论证由人工完成。本证明在人工智能辅助下完成，将多重次数约化的迭代与映射锥归纳分开。这种方法避免了追踪提升之间的相容性直至复形最高次数的需要。

1. 引言

Kutin 和 Smithline [11] 介绍了排列 Wordle 游戏。猜测者试图用尽可能少的猜测，还原出题者隐藏的集合 $[n]=\{1,\dots,n\}$ 的排列。每一轮中，猜测者提交一个排列，并像在 Wordle 游戏中一样，获知哪些条目正确。策略 CircularShift 恰好经过 r 轮便能解出的排列数量为欧拉数 $A(n,r-1)$ [11, 定理 3.5]。Kutin、Smithline 和 Vatter [10] 允许将 $[n]^n$ 中的任意词作为猜测，并证明 CircularShift 在一种强意义上是最优的；我们沿用 [11, §7]，将其称为支配性：对于每个 r，在 S_n 中，CircularShift 在 r 轮内解出的排列数量不少于任何其他可能策略。

Kutin 和 Smithline [11] 还将排列 Wordle 推广为多色排列 Wordle。多色排列 Wordle 的游戏机制与排列 Wordle 相同。每个字母 k 都附带一个额外属性——颜色，该属性取s_k 个值之一。本文确立了关于某个商环的一个关键事实，即定理 6.1。这个事实使我们得以证实 [11]的猜想 4.5。

定理 1.1。 CircularShift 对多色排列 *Wordle* 具有支配性。

1.1. **排列 Wordle 和均匀多色排列 Wordle 的支配性**。在 的支配性证明中，基本上有两个阶段

10]。首先是将问题转化为维数计数问题，这种方法见于 [2], [9], 和 [12]。整个空间的维数为 $n!$，它是一个多项式环的商空间，其中

日期：2026年11月25日。2020 年数学主题分类。 主要分类 13D02；次要分类 05E40、05A05、05A15、91A46。关键词和短语。 Koszul 复形、滤过复形、多重次数滤过、希尔伯特函数、多项式方法、排列 Wordle。

n 个变量模去某个理想所得。用适用于推广的语言重新表述，多项式环为

$$R_n = \mathbf{C}[x_1, \ldots, x_n].$$

这个理想是

$$I_n = \Big(\prod_{j=1}^{n} (x_j - k) : 1 \le k \le n \Big).$$

支配性证明的第二阶段是一种约化算法，即 Allen [1, §2]，中给出的直化论证，它将 R_n 的一个元素化为其在 R_n/I_n 中所属等价类的一个特定元素。这个商空间作为向量空间有一个显式的基，即 Garsia–Stanton 下降单项式 [8, §9]；另见 [7]。通过限制与下降单项式相关联的排列的下降数，可以从这个基中选出子集。这些子集与通过 最大次数滤过 选出的子集相同；后者限制下降单项式中任一变量的最大次数。由此得到的向量空间滤过给出了所需的维数，即按至多有 d 个下降的排列计数的累积欧拉数，其中排列属于 S_n 。

在第6.2节中，我们概述 CircularShift 的支配性如何推广到均匀多色排列 Wordle，其中所有 s_k 都等于同一个值 s，且无需借助 Koszul 分解。对于均匀多色排列 Wordle，采用 [10] 的直化论证的一种变体即可奏效，其中以 Bagno–Biagioli [3] 带颜色下降单项式取代下降单项式。

1.2. **概要**。 第 2 节从设置与记号开始，将第一阶段推广到多色排列 Wordle，其中包括理想族 $J(M,\ N) \subseteq R_N$，对于$N \ge M \ge 1$。注2.3说明了其中的联系。第 2 节的其余部分阐述了推广第二阶段所需的结构。

第3节使用映射锥构造，将结果推进到多一个生成元的情形。第 3.1 节证明了推论 3.2，这是关于 $J(M,\ N)$ 的生成元的一个事实；除了生成元的形状之外，归纳法还需要这一事实，而其证明基于生成元的构造、(1) 和 (2)，且是初等的。第4节使用迭代，将结果推进到多一个变量的情形。第 5 节将前两节汇总为主定理：对于每个理想 $J(m,\ n)$ 以及每个无间隙的 多重次数，该多重次数处 Koszul 分解的滤过分量是正合的。理想 $J(n,\ n)$ 适用于多色排列 Wordle。

归纳法沿着网格的对角线进行，网格的两条轴分别枚举变量数和生成元数。第 2.2节定义了严格性谓词 $S(N,\ M)$ 和正合性谓词 $E(N,\ M)$。

定理 5.1 的基础情形为 $S(1,\ 1)$ 和 $E(N,\ 1)$（命题2.16和2.19）。图1展示了定理 5.1 的归纳过程中 $S(N,\ M)$ 和 $E(N,\ M)$ 的变化。

维数计数结果，即第 6 节的定理 6.1，仅通过推论 5.3 使用定理 5.1。定理 6.1 弥补了将排列 Wordle 的支配性证明第二阶段转化为多色排列 Wordle 的空缺。第 6.1 节解释了如何将定理 6.1 补入 [10] 的论证，以完成定理 1.1 的证明。

最后，第 7 节介绍了人工完成这一过程以及人工智能协作。论证的核心——通过将归纳法嵌套在迭代中来构造协同子——是人工完成的；

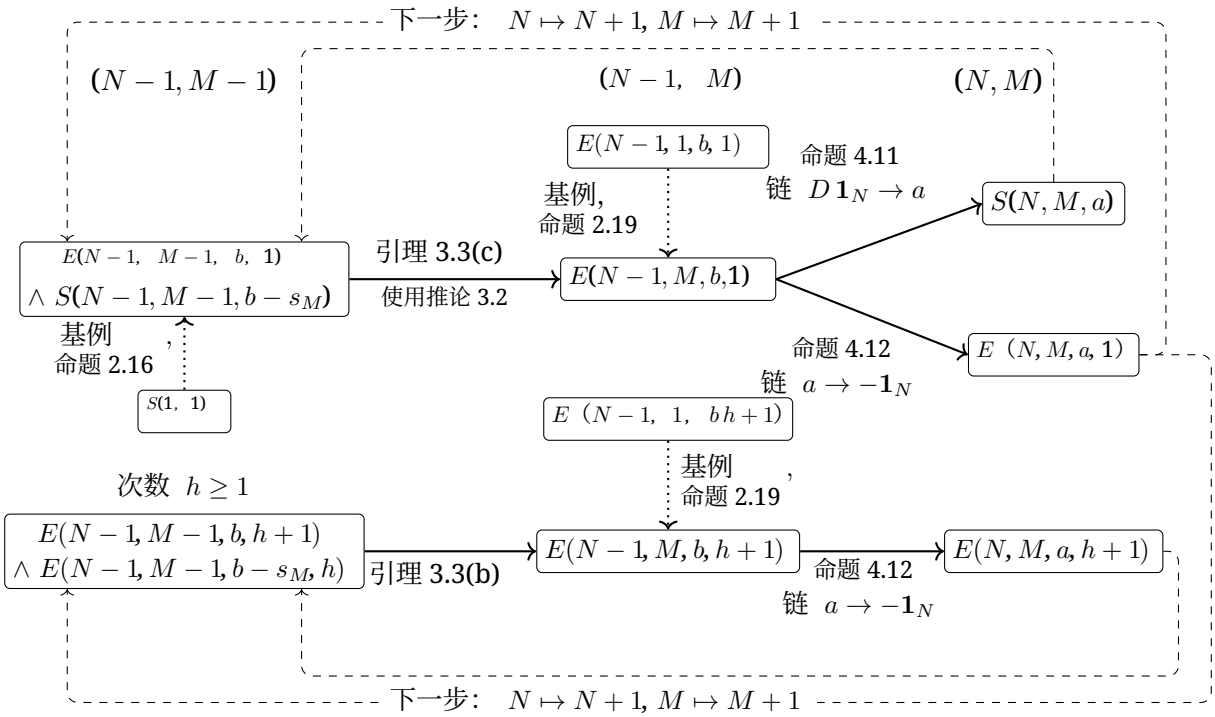


图1. 定理 5.1 的归纳过程。列标题表示（变量数，生成元数）。实线箭头表示同一步内的蕴含关系：先通过映射锥将列 $(N-1, M-1)$ 转化为 $(N-1, M)$，再通过约化转化为 (N, M)。图的上半部分展示了 0级严格性 S 与 1 级正合性E 之间的相互作用。下半部分展示正次数；对于 $h \geq 1$，左侧的次数 h和 $h+1$ 为中间和右侧的次数 $h+1$ 提供依据。点线箭头表示基例：对于 $M = 1$，中间列为 $E(N-1, 1)$；而在$N = M = 2$处，左侧列中的严格性基例为 $S(1,1)$。虚线箭头表示将 (N, M) 处的结论反馈到下一步，其中 $N \mapsto N+1, M \mapsto M+1$。这幅图的初稿由 Claude Opus 5.5 根据特定提示词绘制，并经人工审核。

逻辑布局和整体阐述都得益于与 Anthropic 的 Claude 模型 Sonnet 5.5、Opus 5.5 和 Fable 5.2 的交流。

2. 设置与记号

在归纳法的起始处，Koszul 分解的一个实例含有n 个变量和 $m \leq n$ 个生成元。在证明过程中构造协同子时，我们使用 N 和 $M \leq N$ 作为归纳法的运行参数： N 个变量和M 个生成元。若使用 N 而未指定 n，则默认 $N \leq n$。

固定正整数 s_1、……、 s_n 以及互不相同的正实数 v_1、……、 v_n。令

$$c_k = v_k^{s_k}, \qquad q_k(x) = x^{s_k} - c_k. \tag{1}$$

关于这些 $q_k(x)$，我们需要了解的关键事实是：每个都有单根，并且任意两个的根集互不相交。这些 $q_k(x)$ 采用二项式形式只是为了方便。

令 $R_N = \mathbf{C}[x_1, \ldots, x_N]$，并令

$$Q(k,N) = \prod_{i=1}^{N} q_k(x_i) \text{ for } N \le n. \tag{2}$$

定义 2.1. 对于 $P \in R_N$，令 $\deg_j P$ 表示 P 作为关于 x_j 的多项式的次数，其系数取自以 $N-1$ 个变量 $\{x_1, \ldots, x_N\} \setminus \{x_j\}$ 为变量的多项式环，并约定 $\deg_j 0 = -\infty$。

定义 2.2. 非零 $P \in R_N$ 的多重次数 是向量

$$(\deg_1 P, \ldots, \deg_N P) \in \mathbf{Z}^N.$$

注意，对每个 j，都有 $\deg_j Q(k,N) = s_k$，且 $Q(k,N) = q_k(x_N)\ Q(k,N-1)$。由于 R_N 是整环，次数可加：$\deg_j(Q(k,N)Z) = s_k + \deg_j Z$。当 N 明确时，我们将 $Q_k = Q(k,N)$ 简写为

令 $J(M,N)$ 为理想 $(Q(k,N) : 1 \le k \le M)$，并令 $J_N = J(N,N)$。对于多色排列 Wordle，关注的理想是 J_n。对于排列 Wordle，所有 $s_k = 1$、所有 $v_k = k$，以及 $J_n = I_n$。

注2.3。对于排列 Wordle，支配性证明的第一阶段，即从排列猜测到记录多项式的平移，在字母 k 于位置 j 猜测错误时涉及因子 $x_j - v_k$。对于多色排列 Wordle，当颜色为 g_k 的字母 k 于位置 j 猜测错误时，该因子为 $x_j - v_k\zeta_{s_k}^{g_k}$，其中 ζ_{s_k} 是一个本原 s_k 次单位根。

在归纳法过程中，我们每次选取一个变量进行约化。J 的每个生成元 Q_k（M，N）在变量 x_1、……、x_N 的置换下保持不变。这些置换对称性诱导出 J（M，N）的同构自由分解，详见下文命题 2.12。

2.1. **的分次分量** $\wedge^* R_N^M$ **与 Koszul 复形**。对于 $T \subseteq [M]$，将外代数 $\wedge^* R_N^M$ 的基记为 e（T）。T 的次数为 $|T|$。

定义 2.4。</style>}对于 $T \subseteq [M]$，次数 deg T 为 $\sum_{k\in T} s_k$。基元素 $e(T)$ 的次数 deg $e(T)$ 为 deg T。

定义 2.5。对于 $Z = \sum_T Z(T)e(T)$ 定义

$$\nu_j(Z) = \max_{T:\, Z(T)\neq 0} \Big(\deg_j Z(T) + \deg T\Big)$$

其中 $\nu_j(0) = -\infty$，与 $\deg_j 0 = -\infty$ 一致。定义

$$\nu(Z) = \Big(\nu_1(Z), \ldots, \nu_N(Z)\Big).$$

以下关于多重次数的记号很有用：

(1) 对于 $a, b \in \mathbf{Z}^N$，记作 $a \succeq b$，其中 $a_j \ge b_j$，$1 \le j \le N$；(2) 对于 $a, b \in \mathbf{Z}^N$，记作 $a \succ b$，其中 $a \succeq b$ 和 $a \neq b$；(3) 对于 $a \in \mathbf{Z}^N$，记作 $a_{\hat{p}} \in \mathbf{Z}^{N-1}$，其中 a 删除了坐标 p，而 $\hat{}a$ 表示 $a_{\hat{}N}$；(4) 将 $\epsilon_p \in \mathbf{Z}^N$ 记作 $\mathbf{Z}^N$ 的第 p 个单位向量。

在第 5 节的推论 5.3 和第 6 节的维数计数中，我们将关注所有变量上的多重次数均匀的情形，因此用 $\mathbf{1}_N$ 表示所有坐标均为 1 的向量很有用。

第 3.2 节的映射锥论证使用相差 $\mathbf{1}_N$ 的倍数的多重次数向量。因此，对于向量 $b \in \mathbf{Z}^N$ 和标量 $s \in \mathbf{Z}$，我们将 $b - s$ 作为 $b - s\mathbf{1}_N$的简写。

令 $\operatorname{sign}(T, k) = (-1)^{|\{j \in T:\ j<k\}|}$。注意，$\operatorname{sign}(T \cup \{k\},\ k) = \operatorname{sign}(T, k)$。

定义 2.6。 微分 δ 为

$$\delta e(T) = \sum_{k \in T} \operatorname{sign}(T, k)\, Q_k\, e(T \setminus \{k\}).$$

定义 2.7。 Koszul 复形 $K(N, M)$由 $\bigwedge^h R_N^M$以及微分映射组成

$$\delta : \bigwedge^h R_N^M \to \bigwedge^{h-1} R_N^M.$$

我们将 Koszul 复形定义中的指标 h 称为次数，而不是同调次数，以避免与对于 $P \in R_N$的 $\deg_j P$ 以及 $\deg\ e(T)$ 混淆。此外，我们有时将 $\delta_{K(N,M)}$ 写成带下标的形式，以强调特定 Koszul 复形的微分。

注 2.8。 我们将 Koszul 微分表述为一个使次数降低 1 的映射。Eisenbud [6, §17.2] 以同调方式书写 Koszul 复形，其中微分使次数升高；这两个版本是同构的，他的 H^j 对应于我们的次数 $M - j$ （参见 [13, 例 4.5.2]）。

定义 2.9。对于 $b \in \mathbf{Z}^N$，定义

$$F_h^b(N, M) = \{Z \in \textstyle\bigwedge^h R_N^M :\ b \succeq \nu(Z)\}.$$

根据次数相加，$\delta(F_h^b(N,\ M)) \subseteq F_{h-1}^b(N,\ M)$。

定义 2.10。 过滤 Koszul 复形 $K(N,\ M,\ b)$ 是 Koszul 复形 $K(N,\ M)$ 限制在次数 h至 $F_h^b(N,\ M)$ 上的结果。

我们也将次数为零的滤过分量 $F_0^b(N,\ M)$ 记作 $R_N(b)$，以强调它包含于 R_N 中且不依赖于 M。如果对于任意 $1 \le j \le N$，$b_j < 0$，也就是说，$b \not\succeq 0\,\mathbf{1}_N$，那么 $R_N(b) = \{0\}$。

对于命题 4.11 中的约化，方便的做法是从所有坐标都相等的多重次数开始。

定义 2.11。 Z 的最大次数是 $\mu(Z) = \max_{1 \le j \le N} \nu_j(Z)$。

将 $F_h^{d\mathbf{1}_N}(N, M)$ 记作 $F_h^d(N, M)$，将 $R_N(d\mathbf{1}_N)$ 记作 $R_N(d)$，这是对记号的轻微滥用。

在第3、4、5节中，我们使用以下记号来简化 K及其分次分量的索引：

$$\mathcal{K} = K(N-1, M-1), \qquad \mathcal{K}^+ = K(N-1, M), \qquad \mathcal{K}' = K(N, M),$$
$$\mathcal{K}(h) = \textstyle\bigwedge^h R_{N-1}^{M-1}, \qquad \mathcal{K}^+(h) = \bigwedge^h R_{N-1}^M, \qquad \mathcal{K}'(h) = \bigwedge^h R_N^M.$$

我们对滤过复形及其分次分量也使用类似的记号：

$$\mathcal{F}(b,*)=K(N-1,M-1,b),\qquad \mathcal{F}^{+}(b,*)=K(N-1,M,b),\qquad \mathcal{F}'(b,*)=K(N,M,b),$$
$$\mathcal{F}(b,h)=F_h^b(N-1,M-1),\qquad \mathcal{F}^{+}(b,h)=F_h^b(N-1,M),\qquad \mathcal{F}'(b,h)=F_h^b(N,M).$$

在第4节中，我们将变量数相差 $1N$ 的滤过 Koszul 复形联系起来。在引理 4.8 的归约步骤中，我们会根据需要对变量进行排列，从而始终处理降低最后一个变量次数的问题。

命题 2.12。 设 σ 是对称群 S_N 中的一个排列。*Koszul* 复形 $K(N,M)$ 在对变量 $x_1,\dots,x_N$ 施以 σ 的排列后保持不变。过滤 *Koszul* 复形 $K(N,M,b)$ 同构于 $K(N,M,\sigma(b))$，其中 σ 通过排列坐标作用于 $\mathbf{Z}^N$。

证明。 验证过程是机械的。对于重新排列后的变量 $x_k^\sigma = x_{\sigma(k)}$，我们使用多重次数向量 $\sigma(b)$，其中 $\sigma(b)_k = b_{\sigma(k)}$。 □

2.2. **无间隙多重次数以及归纳和迭代论证所用的谓词**。 我们希望证明 $K(N,M,d\mathbf{1}_N)$ 的正合性。更具体地说，我们希望对 $1\le h\le M-1$，同调 $H_h(K(N,M,d\mathbf{1}_N))$ 为平凡，$F_M^{d\mathbf{1}_N}(N,M)$ 上的微分为单射，并且 $F_1^{d\mathbf{1}_N}(N,M)$ 上的微分满射到 $J(M,N)\cap F_0^{d\mathbf{1}_N}(N,M)$。

我们使用的多重次数类比 $\mathbf{1}_N$ 的标量倍数更大。

定义 2.13。 如果向量 $b\in\mathbf{Z}^N$ 的取值集合 $\{b_1,\dots,b_N\}$ 是一个连续整数集合，则称其为无间隙的 。

我们用平移闭性 来指代平移 $b\mapsto b-\mathbf{1}_N$ 保持无间隙性质这一事实。第 3.2 节的映射锥论证使用了如下推论：如果b 是无间隙的，那么 $b-s_M$ 也是无间隙的。

定义 2.14。 对于 $1\le M\le N$ 和 $b\in\mathbf{Z}^N$，陈述 $S(N,M,b)$ 为

$$\delta(F_1^b(N,M))=R_N(b)\cap J(M,N).$$

陈述 $S(N,M)$ 是：对于所有无间隙的 $b\in\mathbf{Z}^N$，$S(N,M,b)$。

注 2.15。 根据次数相加，

$$\delta(F_1^b(N,M))\subseteq R_N(b)\cap\delta(\textstyle\bigwedge^1 R_N^M)$$

始终如此，因此 $S(N,M,b)$ 表示 $\delta\colon F_1^b(N,M)\to R_N(b)$ 是 严格的。

命题 2.16。对于每个 $N\ge 1$，$S(N,1)$ 成立。

证明。模 $\bigwedge^1 R_N^1$ 有一个基元素，我们记作 e_1。Fo r

$$Z=\delta(Z_1e_1)=Q_1Z_1\in F_0^b(N,1),$$

根据次数相加，我们有 $Z_1e_1\in F_1^b(N,1)$：

$$\deg_j Z_1=\deg_j Z-s_1\le b_j-s_1.$$

□

注 2.17. 推论 5.3 和第 6 节中的维数计数论证使用$S(N,\ M,\ b)$，即映射 $\delta\colon F_1^b(N,\ M)\ \to J(M,\ N)\cap R_N(b)$ 的满射性。命题 4.11 在除 $S(1,\ 1)$ 之外的所有情形中，都从 $E(N-1,\ M,\ *,\ 1)$ 推导出 $S(N,\ M,\ b)$。这个例外 $S(1,\ 1)$ 是一个基例。

定义 2.18。 对于 $1\le M\le N+1, b\in\mathbf{Z}^N$，以及次数 $h>0$，命题 $E(N,M,b,h)$ 为

(3) $X\in$核 $\delta\colon F_h^b(N,M)\ \to F_{h-1}^b(N,M)\ \Rightarrow X\in$像 $\delta\colon F_{h+1}^b(N,M)\ \to F_h^b(N,M)$。

命题 $E(N,M,*,h)$ 为：对于所有无间隙的 $b\in\mathbf{Z}^N$, $E(N,M,b,h)$。命题 $E(N,M)$ 为：对于 $1\le h\le M$, $E(N,M,*,h)$。

若 $h>M$，则 $F_h^b(N,M)\ =0$，因此 $E(N,M,b,h)$ 显然成立。重述 $E(N,M,b,h)$：同调 $H_h\Big(K(N,M,b)\Big)$ 是平凡的，也就是说， $F_h^b(N,M)$ 中的每个圈都是 $F_{h+1}^b(N,M)$ 中某个元素的边界。

命题 2.19。 对于 $N\ge 1, b\in\mathbf{Z}^N$，以及 $h>0$, $E(N,1,b,h)$ 成立。特别地，$E(N,1)$ 成立。

证明。 模 $\bigwedge^1 R_N^1$ 只有一个基元素，记作 e_1。$F_1^b(N,1)$ 的一个元素为 ze_1，其中 $z\in R_N$，并且

$$\delta(ze_1)=z\,\delta e_1=zQ_1.$$

由于 R_N 是整环， $zQ_1=0$ 意味着 $z=0$，因此 1 级中唯一的圈是 0。对于 $h>1$，$E(N,1,b,h)$ 显然成立，因为 $\bigwedge^h R_N^1=0$。□

注 2.20。 命题2.16和2.19的证明并未用到无间隙多重度假设。

3. 增加生成元个数

图1左侧通过映射锥构造增加生成元个数。引理 3.3 在 1 级的结论要求 0 级的一个元素是某个滤过分量中元素的边界。0 级没有正合性陈述，因此需要分两步进行。第 3.1 节的非零因子结论表明该元素是一个边界，而严格性 $S(N-1,M-1)$ 表明它是滤过分量中某个元素的边界。

3.1. 理想生成元的正则性结果。 我们在推论 3.2 中证明， Q_M^-在模 $J(M-1,\ N-1)$ 的意义下不是零因子。我们使用一种下降过程，在中间步骤中先缩减生成元集，再缩减变量集，这与定理 5.1 所用下降过程的顺序相反。推论 3.2 是定理 5.1 唯一依赖于 v_k 互不相同这一性质的地方。

一种标准证明会用到如下事实：域上的多项式环是 Cohen–Macaulay [6,命题 18.9]。我们可以不借助该定理，因为根据构造，每个 Q_k 都完全分解为线性因子，并且对于 $k\ne\ell$、 Q_k 和 Q_ℓ，它们没有公因子。

为简化生成元和理想的索引，记作

$$Q_k^-=Q(k,N-1),\qquad \mathcal{J}=J(M-1,N-1),\quad \mathcal{J}^-=J(M-1,N),\quad \mathcal{J}'=J(M,N).$$

令 Roots(q_k) 为 $q_k(x)$ 的 s_k 根的集合。根据构造式 (1)， q_k 的根的绝对值为 v_k，且 v_k 互不相同。因此

$$q_\ell(\beta) \neq 0 \quad \text{whenever } \beta \in \mathrm{Roots}(q_k) \text{ and } k \neq \ell. \tag{4}$$

根据（2）， Q_k 是由线性形式 $x_i - \beta$ 与 $i \in [N]$ 以及 $\beta \in$ Roots(q_k)的乘积。

命题 3.1（线性形式不是零因子）。设 $N \geq M \geq 0$、 $j \in [N]$ 和$\alpha \in \mathbf{C}$ 满足 $q_k(\alpha) \neq 0$，其中 $1 \leq k \leq M$。若 $Y \in R_N$ 且 $(x_j - \alpha)\, Y \in J'$，则 $Y \in J'$。

证明。我们对 M 进行归纳法，同时考虑所有 $N \geq M$。当 $M = 0$ 时， $R_N/\mathcal{J}' = R_N$ 是一个整环。在这种情况下，$(x_j - \alpha)Y = 0$ 蕴含 $Y = 0$。

假设该命题对 $M-1$ 以及任意数量的变量 $N' \geq M-1$ 都成立。由于每个 Q_k 关于这些变量都是对称的，我们不妨假设 $j = N$。令 $\pi\colon R_N \to R_{N-1}$ 为环同态，它将 x_N 在 α 处取值。π 的核是理想 $(x_N - \alpha)$。由于 $\pi(x_i) = x_i$ 对 $1 \leq i < N$ 成立， π 是满射。将 Q_k 因式分解为 $q_k(x_N)Q_k^-$，我们得到

$$\pi\Big(Q_k\Big) = q_k(\alpha)Q_k^-, \quad q_k(\alpha) \neq 0 \text{ for } 1 \leq k \leq M. \tag{5}$$

根据假设，存在 $P'_1, \ldots, P'_M \in R_N$，使得

$$(x_N - \alpha)Y = \sum_{k=1}^{M} P'_k Q_k. \tag{6}$$

记 $P_k = q_k(\alpha)\pi(P'_k)$。

断言 *1*： $P_M \in \mathcal{J}$。将 π 应用于 (6)。左边属于 $\ker\pi$。由 (5),

$$0 = \sum_{k=1}^{M} P_k Q_k^-.$$

分离出项 $P_M Q_M^-$，可得 $P_M Q_M^- \in \mathcal{J}$。多项式 Q_M^-是线性形式 $x_i - \beta$的乘积，其中 $i \in [N-1]$ 和 $\beta \in$根为 Roots(q_M)。由 (4)，对于 $1 \leq \ell < M$，有 $q_\ell(\beta) \neq 0$。适用于 $M-1$ 个生成元和 $N-1$ 个变量的归纳假设成立，我们逐一约去这些线性形式。因此， $P_M \in \mathcal{J}$。

断言 *2*： $P'_M \in \mathcal{J}^- + (x_N - \alpha)$。由 (5)， π 将 $\mathcal{J}^-$ 的生成元 Q_k 映射为 $\mathcal{J}$生成元的非零常数倍，因此 $\pi\Big(\mathcal{J}^-\Big) = \mathcal{J}$。由于 $q_M(\alpha) \neq 0$，断言 1 表明 $\pi(P'_M) \in \mathcal{J}$，所以

$$\exists\, \tilde{P} \in \mathcal{J}^- : \pi(\tilde{P}) = \pi(P'_M).$$

˜对于这个 P，我们有

$$P'_M - \tilde{P} \in \ker\pi = (x_N - \alpha).$$

改写后，

$$\exists\, Y_M \in R_N : P'_M = \tilde{P} + Y_M(x_N - \alpha). \tag{7}$$

利用 (7) 展开 (6) 中求和的最后一项，可得

$$(x_N - \alpha)\Big(Y - Y_M Q_M\Big) = \sum_{k=1}^{M-1} P'_k Q_k + \tilde{P} Q_M \in \mathcal{J}^-.$$

根据关于 $M-1$ 个生成元和 N 个变量的归纳假设， $Y - Y_M Q_M \in \mathcal{J}^-$。因此， $Y \in \mathcal{J}'$。□

推论 3.2。 设 $N \geq M \geq 1$。若 $Y \in R_{N-1}$ 且 $YQ_M^- \in J$，则 $Y \in J$。也就是说， Q_M^- 模 J 不是零因子。

证明。 多项式 Q_M^- 完全分解为线性形式 $x_j - \alpha$，其中 $j \in [N-1]$，且 $\alpha \in \text{Roots}(q_M)$；由 (4)， $q_k(\alpha) \neq 0$ 对 $1 \leq k < M$ 成立。命题 3.1 对于 $M-1$ 个生成元和 $N-1$ 个变量，逐一消去这些线性形式，得到 $Y \in \mathcal{J}$。□

3.2. **映射锥引理**。

引理 3.3。 设 $2 \leq M \leq N$, $b \in \mathbf{Z}^{N-1}$, $h > 0$，以及 $s = s_M$。若

(a) $E(N-1, M-1, b, h)$; *(b)* 若 $h \geq 2$，则 $E(N-1, M-1, b-s, h-1)$; 且 *(c)* 若 $h = 1$，则 $S(N-1, M-1, b-s)$,

那么 E（$N-1, M, b, h$）。

引理 3.3 的证明遵循图2中的图示。列是次数为 $h+1$、 h 和 $h-1$ 的正合序列，它们对应于映射锥 $\mathcal{K}^+$ 中滤过部分 $\mathcal{F}^+(b, *)$，其中该映射锥由在 $\mathcal{K}$ [6, 上乘以 Q_M^- 构成，参见推论 17.11]；另见 [13, §1.5 和引理 4.5.3]:

$$0 \to \mathcal{F}(b, *) \hookrightarrow \mathcal{F}^+(b, *) \xrightarrow{\pi} \mathcal{F}(b-s, *) \wedge e_M \to 0, \tag{8}$$

其中 π 是到复形的 e_M 部分的投影。第三个复形的次数-j 分量为 $\mathcal{F}(b-s, j-1) \wedge e_M$，其微分为

$$\tilde{\delta}_{\mathcal{K}}(Y \wedge e_M) = (\delta_{\mathcal{K}} Y) \wedge e_M. \tag{9}$$

从中间行、中间列中的一个圈 X 出发，证明从 (10) 推进到 (17)，并构造出满足 $\delta W = X$ 的 W。

证明。 设 X 满足 $E(N-1, M, b, h)$ 的前提：

$$X \in \mathcal{F}^+(b, h),\ \delta X = 0.$$

将 (8) 改述为， $X \in \mathcal{K}^+(h)$ 有唯一的表达式

$$X = X_0 + X_1 \wedge e_M \quad \text{for} \quad X_0 \in \mathcal{K}(h),\ X_1 \in \mathcal{K}(h-1). \tag{10}$$

该滤过分别作用于每个系数 $X(T)$。对于 $T \subseteq [M-1]$，系数 $X(T)$ 为 $X_0(T)$；而对于 $T' \subseteq [M-1]$，系数 $X(T' \cup \{M\})$ 为 $X_1(T')$，且 $\deg(T' \cup \{M\}) = \deg T' + s$。因此

$$X \in \mathcal{F}^+(b, h) \iff X_0 \in \mathcal{F}(b, h) \text{ and } X_1 \in \mathcal{F}(b-s, h-1). \tag{11}$$

由于 $\text{sign}(T, k)$ 表示 T 中低于 k 的元素个数的奇偶性，

$$\text{sign}(T' \cup \{M\}, k) = \text{sign}(T', k) \quad \text{for } 1 \leq k \leq M, \text{ and}$$

$$\text{sign}(T' \cup \{M\}, M) = \text{sign}(T', M) = (-1)^{|T'|} \quad \text{for } T' \subseteq [M-1].$$

对于任意次数 j 和 $Z \in \mathcal{K}(j)$,

$$\delta(Z \wedge e_M) = \Big((\delta Z) \wedge e_M\Big) + (-1)^j Q_M^- Z. \tag{12}$$

Equ式 (12) 对 $Z = X_1$ 和 $\delta X = 0$ 共同推出 $\delta X_1 = 0$ 对 $h \geq 2$ 和

$$\delta X_0 + (-1)^{h-1} Q_M^- X_1 = 0, \quad h \geq 1. \tag{13}$$

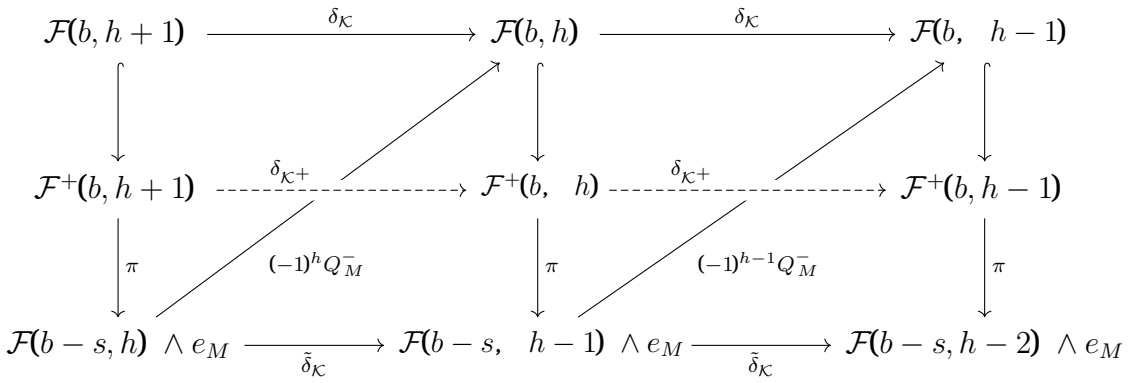


图2。将乘法 Q_M^-限制在 $\mathcal{F}^+(b,*)$ 上所得的映射锥，如引理 3.3 的证明中所示。各列分别是短正合序列 (8) 的次数 $h+1$、h 和 $h-1$。次数为负的部分为零。˜底行带有 (9) 的诱导微分 $\delta_{\mathcal{K}}$，使得 (8) 成为复形的正合序列，因此所有方块均可交换。中间行中的箭头用虚线表示，因为 $\delta_{\mathcal{K}^+}$ 并不是顶行与底行中映射的直和：它是离开某一列的顶端和底端部分的三个箭头之和。引理 3.3 的证明中的断言 1 是沿底行的提升，而断言 2 是沿顶行的提升。Claude Opus 5.5 根据特定提示词生成了该图的初稿。该图已经过人工审阅。

断言 1：存在 $Y_1 \in \mathsf{F}(b-s,h)$ 使得 $X_1 = \delta Y_1$。若 $h \geq 2$，则 X_1 是 $\mathsf{F}(b-s,h-1)$ 中的一个正分级圈，并且根据 $E(N-1,M-1,b-s,h-1)$，存在 $Y_1 \in \mathsf{F}(b-s,h)$ 使得 $X_1 = \delta Y_1$。若 $h=1$，则 $X_1 \in R_{N-1}$，而 (13) 给出 $Q_M^- X_1 \in \mathsf{J}$。根据推论 3.2，$X_1 \in \mathsf{J} = \delta\,\mathsf{K}(1)$。因此，$X_1$ 满足 $S(N-1,M-1,b-s)$ 的前提，并且再次存在 $Y_1 \in \mathsf{F}(b-s,1)$ 使得 $X_1 = \delta Y_1$。

Let

$$W_1 = Y_1 \wedge e_M \in \mathcal{F}^+(b,h+1).$$

由 (12),

$$\delta W_1 = \delta Y_1 \wedge e_M + (-1)^h Q_M^- Y_1. \tag{14}$$

断言 2：存在 $W_0 \in \mathcal{F}(b,\ h+1)$ 使得 $X' = X - \delta W_1 = \delta W_0$。由于 $\delta X = 0$且 δW_1 是边界，$\delta X' = 0$。使用 (10) 和 (14) 重写 X'，可得

$$X' = X_0 + X_1 \wedge e_M - \delta Y_1 \wedge e_M - (-1)^h Q_M^- Y_1. \tag{15}$$

根据断言 1，$\delta Y_1 = X_1$，因此 (15) 中的 $\mathcal{F}(b-s,\ h-1)\wedge e_M$部分相互抵消。根据次数相加，$Q_M^- Y_1 \in \mathcal{F}(b,\ h)$，并且由 (11) 可知 $X_0 \in \mathcal{F}(b,\ h)$，所以

$$X' = X_0 - (-1)^h Q_M^- Y_1 \in \mathcal{F}(b,h) \tag{16}$$

是一个圈。$E(N-1,\ M-1,\ b,\ h)$ 的结论给出带有 $\delta W_0 = X'$ 的 $W_0 \in \mathcal{F}(b,\ h+1)$。断言 1 和断言 2 的构造表明

$$W = W_0 + W_1 \in \mathcal{F}^+(b,h+1) \tag{17}$$

以及 $\delta W = X$。我们已经证明了 $E(N-1,\ M,\ b,\ h)$。 □

注 3.4。 用同调代数的语言来说，(8) 是复形的短正合列，其长正合同调列为 $[13,\ §1.3]$，其中包含

$$H_h\Big(\mathcal{F}(b,*)\Big) \to H_h\Big(\mathcal{F}^+(b,*)\Big) \to H_{h-1}\Big(\mathcal{F}(b-s,*)\Big) \xrightarrow{(-1)^{h-1}Q_M^-} H_{h-1}\Big(\mathcal{F}(b,*)\Big).$$

由 (12)，连接映射是乘以 $(-1)^{h-1}Q_M^-$。因此， $E(N-1,M,b,h)$，即 $H_h\Big(\mathrm{F}^+(b,*)\Big)$ 的消失，可由上述两个断言推出。断言 1 是连接映射的单射性。在次数 $h \geq 2$ 中，连接映射的整环 $H_{h-1}\Big(\mathrm{F}\,(b-s,*)\Big)$ 由 $E(N-1,M-1,b-s,h-1)$ 可知为 0。在次数 $h=1$ 中，由 $S(N-1,\ M-1,b-s)$，连接映射的整环为 $R_{N-1}(b-s)/\Big(\mathrm{J}\ \cap R_{N-1}(b-s)\Big)$，其作用是乘以 Q_M^-，根据推论 3.2，这是单射。断言 2 是 $E(N-1,M-1,b,h)$，也就是说， $H_h\Big(\mathrm{F}\,(b,*)\Big)=0$。

命题 3.5。 对于 $N \geq M > 1$，如果 $S\,(N-1、\ M-1)$ 以及 $E\,(N-1、\ M-1)$，那么 $E\,(N-1、\ M)$。

证明。 设 $b \in \mathbf{Z}^{N-1}$ 为无间隙的，并设 $h > 0$。

无间隙向量在平移下封闭，因此 $b - s_M$ 是无间隙的。假设连同次数高于 $M-1$ 时的平凡情形一起，包括

(a) $E\,(N-1、\ M-1、\ b、\ h)$；(b) 如果 $h \geq 2$，则 $E\,(N-1、\ M-1、\ b-s_M、\ h-1)$；以及 (c) 如果 $h=1$，则 $S\,(N-1、\ M-1、\ b-s_M)$。

根据引理 3.3， $E\,(N-1、\ M、\ b、\ h)$ 成立。 □

注 3.6。 最初的 Claude 对话 [4] 指出，分解式 (12) 是 Koszul 复形的标准映射锥描述，而多重次数滤过的记账，以及使用 $S\,(N-1、\ M-1)$ 和 $E\,(N-1、\ M-1)$ 来代替通常的正合性，则是新的。

映射锥描述填补了早期人工编写的草稿中的空白；参见第 7 节。

4. 增加变量数

图1右侧增加了变量数。第4.1节通过顶层系数映射和正合列 (18)，联系了变量数相差一个的滤过 Koszul 复形。第 4.2 节构造了无间隙多重度链，第 4.3 节沿这些链迭代引理 4.8。

4.1. 顶层系数映射与 Koszul 微分。 作为命题 2.12 的推论，当两个 Koszul 复形的变量数相差一个时，我们可以将额外变量取为 x_N。

定义 4.1。 对于一个多重次数 $b \in \mathbf{Z}^N$ 和一个次数 h，定义顶层系数映射 $\mathrm{tc}:\ F_h^b(N,M) \to F\hat{}_h^b(N-1,M)$，$\mathrm{tc}(Y) = \sum_{|T|=h} \Big(x^{b_N - \deg_N {}^T\text{在 } Y(T)} \Big) e(T)$ 中的系数，

其中， b_N − 次数 $T < 0$ 为零的系数。

$Y(T)$ 中 $x^{b_N-\text{次数}_N\ T}$ 的系数在每个满足 $j<N$、$\hat{}$的 x_j 中的次数至多为 b_j- 次数 T，因此 $\mathrm{tc}(Y)\in F_h^b(N-1,M)$。

命题 4.2。设 $N\geq 2$、$b\in\mathbf{Z}^N$ 和 $h\geq 0$，并假设 $b_N\geq$ 最小值$_{j<N}\,b_j$。该序列

$$0\to F_h^{b-\epsilon_N}(N,M)\hookrightarrow F_h^b(N,M)\xrightarrow{\mathrm{tc}}F_h^{\hat{b}}(N-1,M)\to 0 \tag{18}$$

是向量空间的分裂正合列，其截面为

$$\sigma(W)=\sum_{|T|=h}x_N^{b_N-\deg T}\,W(T)\,e(T),\quad W\in F_h^{\hat{b}}(N-1,M). \tag{19}$$

证明。对于 $|T|=h$，(18) 中三个空间的 $e(T)$ 直和项为

$$R_N(b-\epsilon_N-\deg T)\,e(T),\quad R_N(b-\deg T)\,e(T)\quad\text{and}\quad R_{N-1}(\hat{b}-\deg T)\,e(T),$$

而 tc 和 σ 分别是对应直和项上线性映射的直和。因此，只需针对单个 T 分析 tc 和 σ。

如果 $b_N-\deg T<0$，则

$$R_N(b-\epsilon_N-\deg T)=R_N(b-\deg T)=R_{N-1}(\hat{b}-\deg T)=0.$$

前两个等式是因为 $b_N-\deg\,T<0$，第三个等式是因为 $\min_{j<N}b_j\leq b_N<\deg\,T$。否则，作为向量空间，

$$R_N(b-\deg T)=\bigoplus_{k=0}^{b_N-\deg T}R_{N-1}(\hat{b}-\deg T)\,x_N^k. \tag{20}$$

在这个直和项上，tc 是到最高项 $k=b_N-\deg\,T$ 的投影；tc 的核是由满足 $k<b_N-\deg\,T$ 的项组成的和，即 $R_N(b-\epsilon_N-\deg\,T)$；而 σ 是最高项的包含映射，因此复合映射 $\mathrm{tc}\circ\sigma$ 是恒等映射。这给出了 (18) 的正合性与分裂，以及 (19) 的截面。□

命题 4.3. 令 $b\in\mathbf{Z}^N$ 且 $h\geq 0$。在 $F_{h+1}^b(N,M)$ 上，

$$\delta_{K(N-1,M)}\,\mathrm{tc}=\mathrm{tc}\,\delta_{K(N,M)}. \tag{21}$$

也就是说，tc 是从 $K(N,M,b)$ 到 $K(N-1,M,\hat{}b)$的复形映射。

证明。$F_{h+1}^b(N,M)$ 中的每个元素都是形如 $P\,e(T)$ 的项之和，其中 $|T|=h+1$且$P\in R_N(b-\deg\,T)$。映射 tc、$\delta_{K(N-1,M)}$ 和 $\delta_{K(N,M)}$ 都是线性的，因此只需考虑单个项 $P\,e(T)$。若 $b_N-\deg\,T<0$，则 $P=0$ 且 (21) 两边均为零。否则，令 $P_{\mathrm{tc}}\in R_{N-1}$ 为 P 中 $x^{b_N-\deg_N\ T}$ 的系数，则

$$\mathrm{tc}\Big(P\,e(T)\Big)=P^{\mathrm{tc}}e(T).$$

对于 $k\in T$，$P\,Q(k,N)=P\,q_k(x_N)\,Q(k,N-1)$，且 $\deg(T\setminus\{k\})=\deg\,T-s_k$。由于 $\deg_N P\leq b_N-\deg\,T$，只有 $q_k(x_N)$ 中的项 $x_N^{s_k}=x_N^{s_k}-c_k$达到 $x^{b_N-\deg(T\setminus\{k\})N}$，并且$Q(k,N-1)\in R_{N-1}$，因此

$$\mathrm{tc}\Big(P\,Q(k,N)e(T\setminus\{k\})\Big)=P^{\mathrm{tc}}\,Q(k,N-1)e(T\setminus\{k\}).$$

因此

$$\begin{aligned}\mathrm{tc}\Big(\delta_{K(N,M)}\,P\,e(T)\Big) &= \sum_{k\in T}\mathrm{sign}(T,k)\,P^{\mathrm{tc}}\,Q(k,N-1)\,e(T\setminus\{k\})\\ &= \delta_{K(N-1,M)}\,P^{\mathrm{tc}}e(T) = \delta_{K(N-1,M)}\ \mathrm{tc}\Big(P\,e(T)\Big).\end{aligned}$$

□

注记 4.4. (19) 的截面 σ 并非唯一选择，也不是复形映射。

4.2. **具有删除性质的无间隙多重次数链**。第 4.3 节的约化论证沿着无间隙多重次数链进行，我们将在下文的命题 4.6 中构造该链。

引理 4.5 (约化坐标的选择[1])。设 $N\geq 2$，且 $a,b\in\mathbf{Z}^N$ 无间隙，并且 $a\succ b$。在满足 $a_j>b_j$ 的指标 j 中，设 p 是使 a_p 最大的一个。那么

(a) $a_p\geq$ 最小值$_{j\neq p}\,a_j$;

(b) $a_{\hat{p}}$ 无间隙；*(c)* $a-\epsilon_p$ 无间隙；*(d)* $a-\epsilon_p\succeq b$。

证明。我们证明，要么 $a_p=\max_{j\in[N]}a_j$，要么存在 $k\neq p$ 使得 $a_k=a_p$。

假设 $(a_p-1)\mathbf{1}_N\succeq b$。对于满足 $a_j>b_j$ 的 $j\neq p$，$a_p\geq a_j$；对于满足$b_j\geq a_j$的 $j\neq p$，$a_p>b_j$，因此 $a_p\geq a_j$ 也成立。由于 $N\geq 2$, $[N]\setminus\{p\}$ 非空，因此存在满足 $a_j\leq a_p$ 的 $j\neq p$。这验证了 (a) 部分，并表明 $a_p=\max_{j\in[N]}a_j$。由于 a_p 是 a 的坐标中最大的，(b) 和 (c) 部分得证：$a_{\hat{p}}$ 和 $a-\epsilon_p$ 都是无间隙的。

或者，$(a_p-1)\mathbf{1}_N\not\succeq b$，因此存在某个满足 $b_j\geq a_p$ 的 $j\neq p$。由于 b 是无间隙的，且 $a_p>b_p$，因此存在 $k\neq p$，可能是 $k=j$，使得 $b_k=a_p$。由于 $a\succ b$,$a_k\geq b_k$，并且根据 a_p 的极大性，$b_k\geq a_k$。因此 $b_k=a_k=a_p$，坐标 a_k 验证了 (a) 部分。对于 (b) 和 (c) 部分，$a_k=a_p$ 确保 $a_{\hat{p}}$ 是无间隙的，且 $a-\epsilon_p$ 是无间隙的。

无论哪种情况，$a\succ b$和 $a_p>b_p$，因此 $a_p-1\geq b_p$，于是 (d) 部分成立：$a-\epsilon_p\succeq b$。 □

命题 4.6. 设 $N\geq 2$，并设 $a,b\in\mathbf{Z}^N$ 为无间隙，且满足 $a\succeq b$。令 $r=\sum_{j=1}^{N}(a_j-b_j)$。存在无间隙向量

$$a=a^{(0)}\succ a^{(1)}\succ\cdots\succ a^{(r)}=b$$

以及指标 $p_0,\ldots,p_{r-1}\in[N]$，使得对 $0\leq i<r$,

(a) $a^{(i)}_{p_i}\geq$ 最小$_{j\neq p_i}\,a^{(i)}_j$；

(b) $a^{(i)\,\hat{}\,p_i}$ 为无间隙；

(c) $a^{(i+1)}=a^{(i)}-\epsilon_{p_i}$。

证明。我们对 r进行归纳。若 $r=0$，则 $a=b$，且该链没有步骤。若$r>0$，则 $a\succ b$。令 p_0 为引理 4.5 中选取的指标。4.5(a) 和 4.5(b) 部分分别给出 $i=0$对应的 4.6(a) 和 4.6(b) 部分，4.5(c) 部分表明 $a^{(1)}=a-\epsilon_{p_0}$ 为无间隙，而 4.5(d) 部分表明 $a^{(1)}\succeq b$。由于 $\sum_j\,(a^{(1)}_j-b_j)\;=r-1$，归纳假设给出了链的其余部分。□

[1] Claude Fable 5.2 撰写了这条引理的初稿，并采用反证法证明。我们给出一个直接证明。

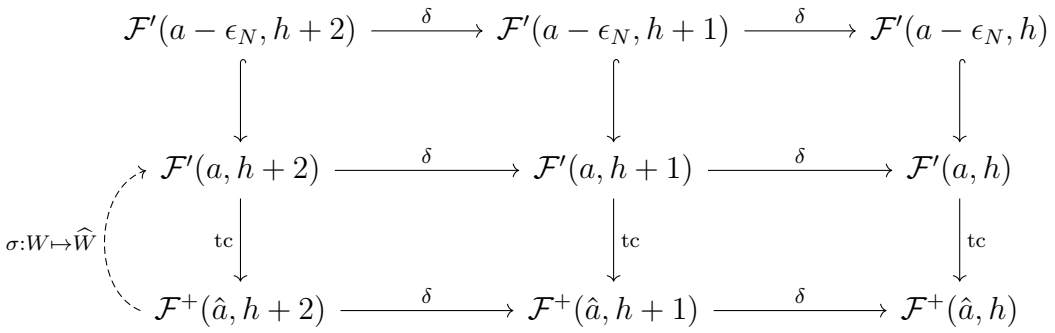


图 3. 引理 4.8 的证明中，次数为 $h+2$、$h+1$ 和 h 时的顶层系数映射 tc。虚线箭头不是复形映射。Claude Opus 5.5 根据特定提示词生成了此图。此图经人工审核。

备注 4.7。命题 4.6 的链就是命题 4.11 证明中的变量选择序列：在步骤 i，根据引理 4.8，变量 x_{p_i} 的次数降低 1。条件 4.6(a)–4.6(c) 满足该引理所需的条件：4.6(a) 是其假设 4.8(a)；4.6(b) 使得可以从 $E(N-1,\ M)$ 得到其假设 4.8(b)；而 4.6(c) 连同 $a^{(i+1)} \succeq b$，给出了其假设 4.8(c)。

4.3. 归约步骤。命题 4.11，$E(N-1, M, *, 1) \Rightarrow S(N, M)$ 对于 $N \geq 2$和 $N \geq M \geq 1$，以及命题 4.12，$E(N-1, M) \Rightarrow E(N, M)$ 对于 $N \geq M \geq 2$，都使用引理 4.8 的迭代。

引理 4.8 (单个变量降一阶)。设 $N \geq 2,\ N \geq M \geq 1$，以及$0 \leq h < M$。设 $a, b \in \mathbf{Z}^N$以及 $p \in [N]$。假设

(a) $a_p \geq$ 最小值$_{j \neq p}\, a_j$; *(b)* $E(N-1,$ $M, a_{\hat{p}}, h+1)$ 成立；*(c)* $a_p > b_p$。

若 $Z \in \mathcal{F}'(a, h+1)$且 $\delta Z \in \mathcal{F}'(b, h)$，则存在 $W \in \mathcal{F}'(a, h+2)$使得

$$\tilde{Z} - \delta\widehat{W} \in \mathcal{F}'(a - \epsilon_p, h+1).$$

引理 4.8 的证明遵循图 3 中的图示。令 $p = N$ 如证明中所示，这些行是复形 $\mathcal{F}'(a - \epsilon_N, *)$、$\mathcal{F}'(a, *)$ 和 $\mathcal{F}^+(\hat{a}, *)$，而这些列是次数 $h+2$、$h+1$ 和 h。证明从中间行、中间列中的 Z 开始，并逐步进行，从 (22) 到 (29)。

证明。根据命题 2.12，我们可以循环移位变量 $x_p, \ldots, x_N$，将 x_p移至最后一个位置，并将 $x_{p+1}, \ldots, x_N$各向下移动一位，以同样的方式移动向量 a和b 的坐标，并用 x_N 表示约化。令 $Z = \delta Z$。

正在证明 tc(Z) 是一个圈。根据次数相加，$Z = \delta Z \in \mathcal{F}'(a,\ h)$。由 4.8(c) 可知，$a_N > b_N$，因此

$$Z \in \mathcal{F}'(a, h) \cap \mathcal{F}'(b, h) \subseteq \mathcal{F}'(a - \epsilon_N, h). \tag{22}$$

由 4.8(a) 和次数 h 中的命题 4.2，

$$\mathrm{tc}(Z) = 0. \tag{23}$$

˜根据定义 4.1，tc(Z) $\in \mathcal{F}^+(\hat{}a,\ h+1)$。根据命题 4.3，

$$\delta\ \mathrm{tc}(\tilde{Z}) = \mathrm{tc}(\delta\tilde{Z}) = 0. \tag{24}$$

提升与修正。根据条件 4.8(b)，E（$N-1$、M、$\hat{}a$、$h+1$），

$$\exists W \in \mathcal{F}^+(\hat{a}, h+2) : \delta W = \mathrm{tc}(\tilde{Z}). \tag{25}$$

B根据 4.8(a)，命题 4.2 适用于次数 $h+2$ 中的 a。令 σ 如（19）中所示，l et

$$\widehat{W} = \sigma(W) \in \mathcal{F}'(a, h+2), \tag{26}$$

‾使得 tc(W) $= W$。根据命题 4.3，

$$\mathrm{tc}(\delta_{\mathcal{K}'}\widehat{W}) = \delta\ \mathrm{tc}(\widehat{W}) = \delta W = \mathrm{tc}(\tilde{Z}), \tag{27}$$

so

$$\mathrm{tc}(\tilde{Z} - \delta_{\mathcal{K}'}\widehat{W}) = 0. \tag{28}$$

根据 4.8(a) 以及次数 $h+1$ 中的命题 4.2，

$$\tilde{Z}' = \tilde{Z} - \delta_{\mathcal{K}'}\widehat{W} \in \mathcal{F}'(a - \epsilon_N, h+1). \tag{29}$$

再次应用命题 2.12，将变量和向量 a 及 b 恢复为原始顺序，从而使约化对 x_p 有效。□

注 4.9。条件 4.8(a) 在 a 的最大坐标为 a_p 时成立，根据命题 4.2，这使 tc 成为满射。在引理 4.8 的证明中，利用条件 4.8(b) 在（25）处得到提升 W 的存在性，是多重次数类进入证明的唯一位置。

注记 4.10. 我们可以用同调代数的语言重述引理 4.8，为方便起见使用$p = N$。根据条件 4.8(a)和命题 4.2，图 3 的列构成复形短正合列的一部分

$$0 \to \mathcal{F}'(a - \epsilon_N, *) \xhookrightarrow{\iota} \mathcal{F}'(a, *) \xrightarrow{\mathrm{tc}} \mathcal{F}^+(\hat{a}, *) \to 0,$$

其中 ι 是包含映射。条件 4.8(b)表明 $H_{h+1}\big(\mathcal{F}^+(\hat{}a, *)\big) = 0$，因此长正合同调列 [13, §1.3]包含

$$H_{h+1}\big(\mathcal{F}'(a-\epsilon_N,*)\big) \xrightarrow{\iota_*} H_{h+1}\big(\mathcal{F}'(a,*)\big) \to 0 \to H_h\big(\mathcal{F}'(a-\epsilon_N,*)\big) \xrightarrow{\iota_*} H_h\big(\mathcal{F}'(a,*)\big).$$

次数 $h+1$ 上的映射 ι_* 是满射：F′(a, h + 1)中的一个圈与 F′($a-\epsilon_N$, h + 1)中的一个圈相差一个边界。沿着多重次数链，这就是命题 4.12。次数 h 上的映射 ι_* 是单射：F′($a-\epsilon_N$, h) 中的一个圈，若它是来自 F′(a, h + 1)的边界，则它也是来自 F′($a-\epsilon_N$, h + 1)的边界。对于 $h = 0$，沿着多重次数链，这就是命题 4.11。引理 4.8证明了一个同时导出这两条结论的陈述：F ′(a, h + 1)中一个边界落在 F′($a-\epsilon_N$, h)内的元素，与 F′($a-\epsilon_N$, h + 1)中的一个元素相差一个边界。换言之，相对同调

$$H_{h+1}\big(\mathcal{F}'(a,*), \mathcal{F}'(a-\epsilon_N,*)\big) \cong H_{h+1}\big(\mathcal{F}^+(\hat{a},*)\big)$$

为零，这就是条件 4.8(b)。

命题 4.11. 对于 $N \geq 2$ 和 $N \geq M \geq 1$，若 $E(N-1, M, *, 1)$，则 $S(N, M)$。

证明。设 $b \in \mathbf{Z}^N$ 无间隙，且令 $Z = \delta\tilde{Z} \in R_N(b)$ 满足 $\tilde{Z} \in \mathcal{K}'(1)$。我们假设 $Z \neq 0$，否则无需证明。令 $D = \max\left(\mu(\tilde{Z}), \max_j b_j\right)$ 和 $a = D\,\mathbf{1}_N$。向量 a 无间隙，$a \succeq b$，且 $\tilde{Z}$ 位于 $\mathcal{F}'(a, 1)$ 中。取命题 4.6 中的链 $a = a^{(0)} \succ \cdots \succ a^{(r)} = b$ 和指标 $p_0, \ldots, p_{r-1}$，并令 $\tilde{Z}^{(0)} = \tilde{Z}$。

设 $0 \leq i < r$，并假设 $\tilde{Z}^{(i)} \in \mathcal{F}'(a^{(i)}, 1)$，其中 $\delta\tilde{Z}^{(i)} = Z$。引理 4.8 的假设对 $a^{(i)}$、b、$p = p_i$ 和 $h = 0$ 均成立：假设 4.8(a) 由命题 4.6(a) 得出；假设 4.8(b) 由命题 4.6(b) 以及本命题的假设 $E(N-1, M, *, 1)$ 得出；假设 4.8(c) 则因为 $a^{(i)}_{p_i} = a^{(i+1)}_{p_i} + 1 > b_{p_i}$，由命题 4.6(c) 得出。由引理 4.8 可得 $\widehat{W}_i \in \mathcal{F}'(a^{(i)}, 2)$，使得 $\tilde{Z}^{(i+1)} = \tilde{Z}^{(i)} - \delta\widehat{W}_i$ 属于 $\mathcal{F}'(a^{(i+1)}, 1)$。迭代边界 $\delta\delta\widehat{W}_i$ 为零，因此 $\delta\tilde{Z}^{(i+1)} = \delta\tilde{Z}^{(i)} = Z$。

经过 r 步，$\tilde{Z}^{(r)} \in \mathcal{F}'(b, 1)$ 和 $\delta\tilde{Z}^{(r)} = Z$。 □

命题 4.12。对于 $N \geq M \geq 2$，如果 $E(N-1, M)$，那么 $E(N, M)$。

证明。设 $a \in \mathbf{Z}^N$ 为无间隙的，设 $0 \leq h < M$，并设 $\tilde{Z} \in \mathcal{F}'(a, h+1)$，其中 $\delta\tilde{Z} = 0$。我们证明 $Z \in \delta\mathcal{F}'(a, h+2)$。

如果 a 具有负坐标，那么 $\mathcal{F}'(a, h+1) = 0$ 且 $Z = 0$。否则，令 $b = -\mathbf{1}_N$；b 是无间隙的，$a \succeq b$，并且 $\mathcal{F}'(b, h+1) = 0$，因为 b 具有负坐标。命题 4.6 生成链 $a = a^{(0)} \succ \cdots \succ a^{(r)} = b$ 以及指标 p_0，……，p_{r-1}。令 $\tilde{Z}^{(0)} = \tilde{Z}$。

设 $0 \leq i < r$，并假设 $\tilde{Z}^{(i)} \in \mathrm{F}'(a^{(i)}, h+1)$ 是一个圈，且 $\tilde{Z} - \tilde{Z}^{(i)} \in \delta\mathrm{F}'(a, h+2)$。其边界为零，属于 $\mathrm{F}'(b, h)$，因此引理 4.8 的假设对 $a^{(i)}$、b、$p = p_i$ 以及次数 h 均成立；如命题 4.11 的证明中那样，用 $E(N-1, M, *, h+1)$ 替代 $E(N-1, M, *, 1)$。该引理给出 $\widehat{W}_i \in \mathrm{F}'(a^{(i)}, h+2) \subseteq \mathrm{F}'(a, h+2)$，使得 $\tilde{Z}^{(i+1)} = \tilde{Z}^{(i)} - \delta\widehat{W}_i$ 属于 $\mathrm{F}'(a^{(i+1)}, h+1)$。由于 $\tilde{Z}^{(i)}$ 和 $\delta\widehat{W}_i$ 都是圈，$\tilde{Z}^{(i+1)}$ 也是一个圈，且 $\tilde{Z} - \tilde{Z}^{(i+1)} \in \delta\mathrm{F}'(a, h+2)$。

经过 r 步后，$\tilde{Z}^{(r)} \in \mathcal{F}'(b, h+1) = 0$，因此 $\tilde{Z} \in \delta\mathcal{F}'(a, h+2)$。 □

注 4.13。最初与 Claude 的对话 [4] 大意是，它不知道第 4.3 节有相关参考文献，并认为迭代约化是论证中的新内容。虽然引理 4.8 与 Buchberger 算法的归约步骤相呼应（第 2 章，第 6 节，定理 6，以及第 10 节，定理 6]，），但无间隙多重次数、嵌套迭代和映射锥构造都不同于 Gröbner 基约化。

注 4.14。每次迭代中使用的提升 $E(N-1, M)$ 本身由命题 3.5 根据 $S(N-1, M-1)$ 和 $E(N-1, M-1)$ 得到，而后两者是通过将变量和生成元各减少一个的相同迭代证明的。展开归纳法便得到嵌套迭代，即对变量进行“扇出”，其中每一层都会重新应用变量的对称性。将谓词 S 和 E 分开，可使每一层都自成一体：命题 3.5 对所有子集 T 同时添加一个生成元，而命题 4.11 和 4.12 的迭代则添加一个变量。

由于引理 3.3 一次处理所有子集 T，因此无需进行任何兼容性处理。分别约简每个坐标 $X(T)$ 时，需要选择一个所有 $T \subsetneq T'$（满足 $|T| = |T'| - 1$）共用的 $\tilde{z} \in \mathcal{K}^+(h+2)$。独立选择的局部修正未必能来自同一个 $\tilde{z}$。

5. 归纳论证与过滤复形的正合性

定理 5.1。 对于所有 $N \geq M \geq 1$, $S(N,M)$ 以及 $E(N,M)$，均有：对于每个无间隙$b \in \mathbf{Z}^N$,

(a) $\delta K'(1)$ 中的一个元素，若属于 $R_N(b)$，则它是 $F'(b,1)$中某个元素的边界；*(b)* 对每个 $h \geq 1$，$F'(b,h)$ 中的一个圈，都是 $F'(b,h+1)$中某个元素的边界。

特别地，这对 $m \leq n$ 生成元$Q_1, \ldots, Q_m$ 的每个 n-变量问题实例都成立。

证明。 将参数 N 映射为 $\Delta = N - M \geq 0$。对于特定的 Δ，我们对 M 使用归纳法。当 $M = 1$时， $E(1+\Delta, 1)$ 即为命题 2.19。当 $\Delta = 0$ 时， $S(1,1)$ 即为命题 2.16；对于 $\Delta \geq 1$，命题 4.11 结合 $M = 1$，可由 $E(\Delta, 1, *, 1)$ 得到 $S(1+\Delta, 1)$。

设 $M \geq 2$。根据归纳假设，有 $S(\Delta + M - 1,\ M-1)$ 和 $E(\Delta + M - 1,\ M-1)$。命题 3.5 给出 $E(\Delta + M - 1,\ M)$。将 $E(\Delta + M - 1,\ M)$ 加入归纳假设后，命题 4.11 给出 $S(\Delta + M,\ M)$，而命题 4.12 给出 $E(\Delta + M,\ M)$。□

注 5.2。 归纳法也可以从 $M = 0$ 开始，基例为 $S(N,\ 0)$ 和 $E(N,\ 0)$，显然成立。这样的起点需要对 $N = 0$ 和 $M = 0$ 作如下约定： $R_0 = \mathbf{C}$；每个 $Q(k,\ 0) = 1$ 视为空乘积； $F_h^b(0,\ M) = \bigwedge^h R_0^M$ 表示空向量 b；以及 $\bigwedge^0 R_N^0 = R_N$，从而 $F_0^b(N,\ 0) = R_N(b)$。此外，还需要使条件 4.8(a) 对于 $N = 1$ 成为空真，并在引理 4.8 或命题 4.2 中单独处理 $N = 1$ 的情形。我们从 $M = 1$ 开始，以避免这些例外。

推论 5.3 (过滤复形的正合性)。 设 $N \geq M \geq 1$ 和 $b \in \mathbf{Z}^N$ 无间隙。K'的过滤子复形，

$$0 \to \mathcal{F}'(b,M) \to \cdots \to \mathcal{F}'(b,1) \to \mathcal{F}'(b,0) = R_N(b),$$

是正合的，但右端除外；在右端，

$$\delta\,\mathcal{F}'(b,1) = J(M,N) \cap R_N(b) = \sum_{k \leq M} Q_k\, R_N(b - s_k).$$

证明。 对于 $1 \leq h \leq M$，在$\mathcal{F}'(b,\ h)$处的正合性是 $E(N,\ M,\ b,\ h)$，这是定理 5.1 的一部分。在右端， $S(N,\ M,\ b)$给出

$$J(M,N) \cap R_N(b) = \Big(\delta\mathcal{K}'(1)\Big) \cap \mathcal{F}'(b,0) \subseteq \delta\,\mathcal{F}'(b,1),$$

反向包含显然成立。 □

备注5.4。严格性只在0级中用到。定理 5.1 通过引理 3.3，使用$S(N-1, M-1, b-s)$；推论 5.3 使用 $S(N,M,b)$来描述 $J(M,N) \cap R_N(b)$。0级中没有正合性陈述，因为0级的每个元素都是一个圈。除这些0级陈述外，通往 $E(N,M)$的推导过程只涉及正合性陈述。次数 $h > 0$ 中的严格性由 $E(N,M,b,h)$推出，因为一个落在F ′(b, h)中的边界，也是一个落在F′(b, h)中的圈。

备注5.5。 Claude Fable 5.2 接收了关于备注A.1和A.2的提示词。

备注A.1指出，定理 5.1中的无间隙假设不可省略，也不能放宽为允许间隙大小至多为 $\min_k s_k$。

注 A.2指出，当所有 s_k 都等于同一个值 s时， $K(N,\ M,\ b)$是关于单色情形的 s^N 个滤过 Koszul 复形的直和。

Claude Fable 5.2 在推论 A.3 中指出，定理 5.1 结合命题 3.5 对 $M = N+1$ 的结论，可推出 Koszul 复形 $\mathcal{K}'$ 除右端外均为正合。对于$M = N+1$ 和 $N = n$，该推论还需要一个生成元 Q_{n+1}，也就是需要提供 s_{n+1} 和 v_{n+1}这些超出第 2 节所固定内容的数据。

在较早的草稿中，我们从这一正合性出发，并将其作为正则性的推论，引用为 [6, 推论 17。5],

注 5.6. 我们可以比注 A.2 走得更远。令 $t =$为 s_1、……、 s_M 的最大公因数。每个 Q_k 都是关于 x_i^t这些幂的多项式，因此，同理，过滤 Koszul 复形 $K(N,\ M,\ b)$ 是按 t^N 直和分解的，其中各项为指数 s_k/t对应的过滤 Koszul 复形，位于多重次数$\lfloor (b-r)/t \rfloor$，其中 $r \in \{0,\ \ldots\ldots,\ t-1\}^N$。因此，只要这些多重次数各自无间隙或含有负坐标， $S(N,\ M,\ b)$ 和 $E(N,\ M,\ b,\ h)$ 就成立；这比仅限于无间隙多重次数的范围更广。

6. 商空间的维数 $R_n(d)/(J_n \cap R_n(d))$

我们将推论 5.3 应用于多色排列 Wordle 中 CircularShift 的支配性问题。固定 n、数据 s_1、……、 s_n，以及 $d \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$，按照 [11], 我们令$W_{(s_1,\ldots,s_n)}(n,\ d)$ 表示长度为 n、恰好在 $d+1$ 轮中由 CircularShift 解出的 (s_1、……、 s_n)-有色排列的数量。根据 [11, 定理 4.7], , $W_{(s_1,\ldots,s_n)}(n,\ d)$ 的生成函数满足

$$\sum_d W_{(s_1,\ldots,s_n)}(n,d)u^d = (1-u)\prod_k (1-u^{s_k})\sum_d (d+1)^n u^d. \tag{30}$$

当所有 $s_k = 1$, $W_{(s_1,\ldots,s_n)}(n,\ d)$ 都成立时，它就是欧拉数 $A(n,\ d)$，而 (30) 则特化为欧拉多项式 $A_n(u)$ 及其众所周知的生成函数形式

$$A_n(u) = \sum_{d=0}^{n-1} A(n,d)u^d = (1-u)^{n+1}\sum_{d=0}^{\infty}(d+1)^n u^d. \tag{31}$$

定理 6.1。 设 n 为正整数， s_1、……、 s_n 为正整数，v_1、……、 v_n 为互不相同的正实数，令 $J = J_n$。对于每个 $d \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$，维数 维 $R_n(d)/(J \cap R_n(d))$ 满足

$$\dim \tfrac{R_n(d)}{J\cap R_n(d)} - \dim \tfrac{R_n(d-1)}{J\cap R_n(d-1)} = W_{(s_1,\ldots,s_n)}(n,d).$$

证明。 令 $d \geq 0$。由推论 5.3，结合 $N = M = n$, $b = d\mathbf{1}_n$，可知 $K(n,n,d\mathbf{1}_n)$ 是一个有限维空间上的有限正合复形，用于解析 $R_n(d)/(J \cap R_n(d))$。由于 $\dim\ F_h^b(n,n) = \sum_{|T|=h} \max(d - \deg\ T + 1, 0)^{\ n}$，我们得到

$$\dim R_n(d)/(J\cap R_n(d)) = \sum_{T\subseteq[n]} (-1)^{|T|}\ \max(d-\deg T+1,0)^{\,n}.$$

我们发现

$$(1-u)^{n+1}\sum_{d\geq 0}\dim\frac{R_n(d)}{J\cap R_n(d)}\,u^d = A_n(u)\prod_{k=1}^{n}(1-u^{s_k}).$$

因此，连续差分的生成函数为

$$\sum_{d\geq 0}\Big(\dim \tfrac{R_n(d)}{J\cap R_n(d)} - \dim \tfrac{R_n(d-1)}{J\cap R_n(d-1)}\Big)u^d = A_n(u)\prod_{k=1}^{n}[s_k]_u, \qquad [s]_u = \sum_{j=0}^{s-1} u^j. \tag{32}$$

将 (31) 最右侧的表达式代入 (32) 中的 $A_n(u)$，即可得到 (30) 的右侧。由 (30) 的左侧可得所需结果。□

(32) 右侧的次数为 $(n-1) + \sum(s_k - 1) = \sum s_k - 1$，并且在 $u = 1$ 处的值为 $n! \prod s_k$。因此，维数在 $d = \sum s_k - 1$ 处达到 $n! \prod s_k$，并保持不变。

Claude Sonnet 5.5 [4] 选取并推导了以下维数计数示例，我们已对其进行了验证：$n = 3, s = (1, 1, 1)$：1，5，6，6，……；以及 $n = 2, s = (3, 2)$：1，4，8，11，12，12，……。Claude Sonnet 5.5 进一步指出，这些示例与在零点集 $V(J_n)$ 上对 $R_n(d)$ 求值的直接秩计算相符；该集合包含 $n! \prod s_k$ 个点。

6.1. **回顾 CircularShift 支配性在排列 Wordle 中的应用，并将其应用于多色排列 Wordle**。第 1.1 节回顾了如何通过多项式方法将 CircularShift 平移为维数计数，其详尽程度足以引出定理 6.1。此处，我们回顾证明定理 1.1（多色排列 Wordle 中的 CircularShift 支配性）所需的结果。虽然我们指出了多色排列 Wordle 与排列 Wordle 之间的具体差异，但完整证明请参阅 [10]。

定理 1.1 的证明要点。 我们可以假设出题者以均匀随机的方式选择秘密答案 [10, §2]。与 [10, 定理 11], 中一样，我们可以只考虑确定性策略。

给定 $n, s_1, \ldots, s_n$，对于多色排列 Wordle，出题者选择一个排列和一种着色 (σ, κ)。在第 t 轮，猜测者猜测 (γ_t, χ_t)。响应是一个由正确位置组成的集合

$$U_t = \{i : \sigma(i) = \gamma_t(i) \text{ and } \chi_t(\gamma_t(i)) = \kappa(\gamma_t(i))\}.$$

对于一个游戏实例，如果 $U_d = [n]$，我们将所有后续猜测 (γ_t, χ_t) 定义为等于 (γ_d, χ_d)。

给定一个策略，序列 $U_1, \ldots, U_d$ 是一个**可行历史**，当且仅当存在 (σ, κ) 能够产生该序列。对于每个可行历史，固定选择一个见证 (σ_U, κ_U) 来证明其可行性。长度为 d 的可行历史数量，给出了在 $d+1$ 轮内解出的有色排列数量的上界：每个可行历史至多能在下一轮解出一个有色排列。

选取 v_1、……、v_n 个互不相同的正实数，由此得到理想 J_n 及其零点集 $V(J_n)$。对于 $1 \le k \le n$，将 Roots(q_k) 的 s_k 个元素记为 $r(k, \ell)$，其中 $0 \le \ell < s_k$。对于由猜测 γ_1、……、γ_d 得到的可行历史 $U = U_1$、……、U_d，其历史多项式为

$$P_{U,t} = \prod_{i \notin U_t} \Big(x_i - r\big(\gamma_t(i), \chi_t(\gamma_t(i))\big) \Big), \qquad P_U = \prod_{t=1}^{d} P_{U,t}.$$

对于任何与历史 U 一致的 (σ, κ)，因猜测 (γ_t, χ_t) 在位置 i 处不同于 (σ, κ)，所以因子 $x_i - r\big(\gamma_t(i), \chi_t(\gamma_t(i))\big)$ 在 $x_i = r\big(\sigma(i), \kappa(\sigma(i))\big)$ 处非零。因此，[10, 命题 14] 的三角性论证表明，多项式 $\{P_U : U$ 长度为 d 的可行历史$\}$ 作为 $V(J_n)$ 上的函数线性无关。此外，长度为 d 的历史的历史多项式 P_U 属于滤过分量 $R_n(d)$，因为它是 $R_n(1)$ 中 d 个多项式的乘积。

因此，$\dim\langle P_U:\ U$ 长度为 d 的可行历史$\rangle$ 不超过 $\dim R_n(d)/\big(J_n\cap R_n(d)\big)$，因此任何确定性策略在$d+1$ 轮内能够解决的有色排列数量也不超过该值。根据定理 6.1、 [11, 定义 4.6 和定理 4.7], ，此维数为$\sum_{k\le d} W_{(s_1,\dots,s_n)}(n,\ k)$，即 CircularShift 在 $d+1$ 轮内能够解决的有色排列数量，由此得证定理 1.1。□

6.2. **均匀多色排列 Wordle 的支配性证明概述**。 [10] 的支配性证明可推广到均匀多色排列 Wordle，其中所有 s_k 都等于同一个值 s，且无需借助 Koszul 分解。简言之，$[n]$ 的 s 色有色排列具有群结构，即缠绕积$G(s,\ n)=\mathbf{Z}/s\mathbf{Z}\wr S_n$。

采用按排序次数向量、再按字典序排列的单项式序，如 [10]所示。对 [10] 的约化会找出整除最高单项式的 Garsia–Stanton 下降单项式，并对变量排序，使下降单项式及其余因子的指数序列都弱递减。相反，应找出 Bagno–Biagioli [3]有色下降单项式以及与之相乘得到最高单项式的完美 s次幂余因子。该 s次幂余因子所诱导的对称多项式具有 $G(s,\ n)$-不变性，因此它与 J_n中的某个元素只相差一个常数； J_n是 I_n的类比物。

$g\in G(s,\ n)$ 的带颜色下降单项式的最高指数是 fdes(g)，而 [3, 定理 A.1] 中关于它们 fdes 的生成函数，在其 $q=1$ 处并以其 t 作为我们的u时，与（30）一致；这与 [11,定理 4.7]中所示的 CircularShift 性能相符。

由于定理 1.1 证明了更一般的结果，我们省略均匀多色排列 Wordle 的这一构造其余细节。

7. 关于人工智能协作的评论

在撰写本文时，即 2026 年末，我们大多数人都刚开始接触用于技术写作的人工智能协作；不同用户的经验有所差异：更接近人工智能开发领域的用户可能已有约两年经验，而订阅预算有限的个人则可能还不到一年。人工智能工作流和 AI 风险管理仍在不断发展。

这里的结果建立在 [10] 和 [11], 之上，最初源于这样的直觉：理想的 J_n应当是对 I_n 的良好推广。至少，多项式方法的平移第一阶段在那里应当能够奏效。人们也认识到 Q_1、.....、Q_n 构成正则序列的重要性：在后续写作中，人工智能坚持认为，不能将其轻描淡写地视为标准结果。

关于推论 5.3 和定理 6.1，曾有过多次错误的尝试。大多数问题都在于被一个变量中的障碍卡住了。将构造协同子与对 $n=2$ case 的分析结合起来的想法，启发了迭代约化。推进到$n=3$ 后表明，还需要更多工作。

关于一般情形 n 的最初纸面草稿记录了变量次数的降低。注 4.14 提到了这一策略：分别约化每个坐标 $X(T)$。随着这一归纳法从 $e(T)$ 沿着各个次数推进，它实际上将为$m=|T|$构造 $K(n,\ m,\ d\mathbf{1}_n)$。

那个草图表明，减少一个生成元后，或许可以选择下一个要约化的变量。它还断言，不同的选择会遇到

次高次数的 Syzygy模中的一个障碍，并递归地向上延伸至最高次数，此时微分是单射。相关细节从未完成推导；当前论证的成功表明，早先的草图是可行的。第 3 节和第 4 节的进展使得不再需要完成草图中的论证。

此时，人们决定将这段特定证明作为人工智能协作研究的良好案例。人们有充分的直觉认为这种证明方法会成功。权衡之下，与其亲手推导细节，不如核实他人是否已经推导出了这些细节。

手写草稿被转录成一份简单的 LaTeX 文档。Claude Sonnet 5.5 [4]则以 LaTeX 文档作出回应。Claude Sonnet 5.5 的论证与人类的论证有所不同。Claude Sonnet 5.5 提议将谓词 E 和 S分开（注 4.14 解释了它们的作用），并使用一个比$\mathbf{Z}\ \mathbf{1}_N$更大的多重次数族。（Sonnet 5.5 提议的族为$\{b \in \mathbf{Z}^N : \max_j b_j - \min_j b_j \leq 1\}$；本文采用 Fable 5.2 提议的无间隙多重次数。）

草稿 [4] 是本工作的起点；作者通过逐行手写，对其进行了人工评估。随后与 Claude Sonnet 5.5 进行了一轮数学编辑，其中包括将定理 5.1 限定在主对角线 $M = N$上。之后与 Claude Opus 5.5 继续协作，进行的数学编辑范围较小，包括审阅人工添加的第 6.1 节背景内容，阐明本文定理 1.1 与 [10]的最优性证明之间的联系；以及使用“workshopping open item ...”等提示词和建议的替换段落来完成常规编辑任务。Claude Fable 5.2 指出，若恢复定理 5.1 对 $M \leq N$ 的适用范围，就可以删去整个将主对角线论证推广到 $M \leq N$的章节。无间隙类进一步简化了约化迭代，使证明更接近最初的手写草稿。现在，单次数约化作为引理 4.8 单独呈现，而不再与命题 4.11 的证明交织在一起。当被问及滤过各层的正合性是否可以取代正则序列定理时，Claude Fable 5.2 提议在归纳过程中，将正合性谓词 $E(N, M)$与所有次数中的严格性谓词并列推进。作出这一改动后，推论 A.3 证明了理想 $J(M, N)$的生成元所对应的 Koszul 复形的正合性，而无需引用正则序列的标准结论。此外，严格性谓词只在 0 级保留，在该级中，证明$E(N-1, M, *, 1)$和推论 5.3 需要 $S(N-1, M-1)$。此后，经过一系列密切指导的修改，补充了一些同调代数的表述。尤其是，受 Claude Fable 5.2 所撰写的同调代数证明启发，加入命题4.2和4.3后，引理 4.8 的证明转变为对图 3 的逐步追踪。

确保人类对最终草稿负责的主要方法，是向人工智能发出一项总体指令：要求它撰写一份审阅文档，提出对源文件（ `.tex` 文件）的修改建议，但不得直接编辑源文件。人类用户单独维护源文件并进行修改，有时采纳人工智能的建议，有时则不采纳。

应要求，人工智能编写了配套源文件。例如，Claude Sonnet 5.5 被要求审阅第 3.1 节的早期版本，研究序列 $Q_1, \ldots, Q_N$ 的正则性，并给出一个不依赖于 R_N 的 Cohen–Macaulay 性质的证明。
Claude

Fable 5.2 被要求精简 Claude Sonnet 5.5 的工作。当前的第 3.1 节是人工根据 Claude Fable 5.2 的方案改写的。

角色分工——由人工智能审阅指导人工编辑，再由人工提示词指导人工智能审阅——或许比必要的程度更为谨慎。不过，这确实为人类作者提供了充分依据，使其可以声称本文全文均经过百分之百的人工审阅。

从总体上看，所使用的人工智能模型 Claude Sonnet 5.5、Claude Opus 5.5 和 Claude Fable 5.2，合在一起，就像一个人所见过的最博学的参考馆员，能够查阅藏书最丰富的图书馆；一个最勤奋、咖啡因摄入最充足的研究生；一位最敏锐的技术编辑；有时又像一个最漫不经心的高中二年级学生——但它们其实都不是这些角色。它们是多模态大语言模型，在本文中借助工具读取文件、运行代码和搜索网络。

致谢

若不致谢 Samuel Kutin 对排列 Wordle 和多色排列 Wordle 研究 [11] 以及 Samuel Kutin 和 Vince Vatter 对排列 Wordle 研究 [10]的贡献，这项工作便不完整。Kutin 首先注意到 CircularShift 与欧拉数之间的联系，这对证明 CircularShift 在所有情况下的性能至关重要。Vatter 则让我们注意到了多项式方法，并证明了 CircularShift 对原始排列 Wordle 的最优性。

附录 A. Claude Fable 5.2 撰写的文本

我们收录以下由 Claude Fable 5.2 撰写、经人工审阅且易于验证的文本。

备注A.1（关于定理 5.1 和推论 5.3）。 定理 5.1 的无间隙假设不可省略，也不能放宽为允许大小至多为 $\min_k s_k$ 的间隙。令$N = M = 2$。若 $s_1 = s_2 = 1$，则

$$(x_2 - c_2)\,Q_1 - (x_2 - c_1)\,Q_2 = (c_2 - c_1)(x_2 - c_1)(x_2 - c_2)$$

是 $J(2,\ 2) \cap R_2(b)$ 中的一个非零元素，其中 $b = (0,\ 2)$，而 $R_2(b-1) = \{0\}$。因此 $S(2,\ 2,\ (0,\ 2))$ 不成立。若 $s_1 = s_2 = 2$，则用 x_i 替换 x_i^2，再乘以 x_1，同一恒等式表明

$$Z = x_1(x_2^2 - c_1)(x_2^2 - c_2)$$

属于 $J(2,\ 2) \cap R_2(b)$，其中 $b = (2,\ 4)$。$R_2(b-2) = R_2\big((0,\ 2)\big)$ 的元素都是仅关于 x_2 的多项式，因此 $Q_1 R_2(b-2) + Q_2 R_2(b-2)$ 的每个元素关于 x_1 都是偶函数，而 Z 关于 x_1 是奇函数。因此 $S(2,\ 2,\ (2,\ 4))$ 不成立，尽管 b 的间隙为 $\min_k s_k$。

注 A.2. 假设所有 s_k 都等于同一个值 s。情形 $s = 1$ 决定了满足 $S(N, M, b)$ 的多重次数 b。每个 Q_k 都是关于 $y_i = x_i^s$, $1 \le i \le N$ 的多项式，因此

$$R_N = \bigoplus_r x^r\, \mathbf{C}[y_1, \ldots, y_N], \qquad r \in \{0, \ldots, s-1\}^N, \quad x^r = x_1^{r_1} \cdots x_N^{r_N},$$

并且 δ 保留了 $\bigwedge^h R_N^M$ 的相应分解。项 $x^r y^\gamma e(T)$ 属于$F_h^b(N,M)$，当且仅当对所有 j，都有 $r_j + s\gamma_j + s|T| \le b_j$，也就是说，当

$$\gamma_j + |T| \le \beta(r)_j, \qquad \beta(r)_j = \left\lfloor \frac{b_j - r_j}{s} \right\rfloor .$$

因此， $K(N,\ M,\ b)$ 是对 r 取直和所得的结果，其中每一项都是生成元 $\prod_i (y_i - c_k)$ 对应的、多重次数为 $\beta(r)$ 的过滤复形副本；并且，对于每个 r， $S(N,\ M,\ b)$ 成立，当且仅当这些生成元在 $\beta(r)$ 处满足相应陈述。根据定理 5.1，只要每个 $\beta(r)$ 无间隙或具有负坐标，这一结论就成立。例如，若对所有 j 都有 $b_j \equiv s-1$ (模 s)，那么每个 $\beta(r)$ 都等于 $\big(b-(s-1)\big)/s$，而 b 可能存在大小为 s 的间隙。在备注A.1中，多重次数 $b=(2,\ 4)$ 配合 $s=2$ 时，有 $\beta\big((1,\ 0)\big) = (0,\ 2)$。

推论 A.3（定理 5.1 的推论）。 对于 $N \ge 1$ 和 $1 \le M \le N+1$， Q_1 上由 Q_1、……、Q_M 生成的 *Koszul* 复形$K(N,M)$ 在每个正分级上的同调均为零。

证明。令 X 为次数 $h \ge 1$ 中 $K(N,\ M)$ 的一个圈，并令 $d = \mu(X)$，使得 $X \in F_h^{d\mathbf{1}_N}(N,\ M)$。向量 $d\mathbf{1}_N$ 无间隙。若 $M \le N$，则由定理 5.1 可得 $E(N,\ M,\ d\mathbf{1}_N,\ h)$。若 $M = N+1$，则将 $N+1$ 同时代替 N 和 M，对定理 5.1 中的 $S(N,\ N)$ 与 $E(N,\ N)$ 应用命题 3.5，即可得到该结论。因此 X 是一个边界。□

参考文献

[1] Edward E. Allen. 下降单项式与对角对称多项式的一组基。《代数与组合》，3(1):5–16，1994。doi: 10.1023/A:1022481303750。URL https://link.springer.com/content/pdf/10.1023/A%3A1022481303750.pdf.[2] László Babai 和 Péter Frankl。组合学中的线性代数方法，2024。URL https://people.cs.uchicago.edu/~laci/babai-frankl-book2024.pdf。未发表手稿。[3] Eli Bagno 和 Riccardo Biagioli。复反射群的彩色下降表示 $G(r,\ p,\ n)$。《以色列数学杂志》，160:317–347，2007。doi: 10.1007/ s11856-007-0065-z。URL https://arxiv.org/abs/math/0503238v1.[4] Claude Sonnet 5.5。 $J(m,\ n)$ 的 Koszul 分解保持盒滤过，而 $A_n(d)/(J \cap A_n(d))$ 的维数亦然。未发表的 LaTeX 输出，由 Claude Sonnet 5.5 (Anthropic) 于 2026年10月与作者对话时生成。日期为2026年10月22日；文件 koszul_filtration_proof.tex。未经同行评审；本文引用的段落已由作者审阅。[5] David A. Cox、John Little 和 Donal O'Shea。《理想、簇与算法：计算代数几何与交换代数导论》。数学本科教材。施普林格，查姆，第五版，2025。doi: 10.1007/978-3-031-91841-4。[6]David Eisenbud。《从代数几何视角看交换代数》，第150卷，研究生数学教材。施普林格，1995。[7] A. M. Garsia。Cohen–Macaulay 环理论中的组合方法。*Adv.in Math.*，38(3):229–266，1980。[8] A. M. Garsia 和 D. Stanton。Stanley–Reisner 环的群作用与置换群不变量。*Adv. in Math.*，51(2):107–201，1984。doi: 10.1016/0001-8708(84) 90005-7。

[9] Larry Guth。《组合学中的多项式方法》，第64卷，大学讲义系列。美国数学学会，罗德岛州普罗维登斯，2016。ISBN 978-1-4704-2890-7。URL https://bookstore.ams.org/ulect-64/。[10] Samuel Kutin、Lawren Smithline 和 Vincent Vatter。排列 Wordle，2026。URL https://arxiv.org/abs/2609.01874。arXiv:2609.01874。即将发表于《美国数学月刊》。[11]Samuel A. Kutin 和 Lawren M. Smithline。排列 Wordle，2024。URLhttps://arxiv.org/abs/2408.00903。arXiv:2408.00903v3，最后修订于2026年1月23日。[12] Jiří Matoušek。《三十三篇小品：线性代数的数学与算法应用》，第53卷，学生数学文库。美国数学学会，罗德岛州普罗维登斯，2010。ISBN 978-0-8218-4977-4。URL https://bookstore.ams.org/stml-53。[13] Charles A. Weibel。《同调代数导论》，第38卷，剑桥高等数学研究。剑桥大学出版社，1994。

通信研究中心，美国新泽西州普林斯顿市邦恩大道805号，邮编08540-1966电子邮箱地址：lawren@ccr-princeton.org