arXiv:2611.33116v1 [math.RT] 24 Nov 2026

除代数表示的布劳尔类及其朗兰兹参数

RYAN XU

Abstract. 对于每个中心特征为代数值的 $\mathrm{GL}_n(K)$ 零深度超尖点表示 π ，我们证明，实现其雅克–朗兰兹转移以及其归一化朗兰兹参数 $\varphi_\pi \otimes |\cdot|^{-(n-1)/2}$ 所遇到的 Brauer 障碍，在它们的共同有理性域 $E = \mathbb{Q}(\pi)$上相加为 $(n-1)[B_{p,\infty} \otimes_{\mathbb{Q}} E]$。这里， $K/\mathbb{Q}_p$ 是有限域，转移的目标是 K 上不变量为 $1/n$的中心除代数的单位群，而$B_{p,\infty}$ 是 $\mathbb{Q}$ 上的四元数代数，恰好在 p 和 ∞处分歧。我们猜想这一恒等式不受深度限制。对于任意大的 $n = p-1$，我们构造了满足同一求和公式的简单超尖点表示。它们的转移具有有限阶中心特征，舒尔指标为 n；而其归一化参数的指标为 $n/2$。由于这些转移不是自对偶的，指标不相等这一事实与 Prasad and Ramakrishnan 所猜想的舒尔代数同构相矛盾。

Contents

1. 引言 2 1.1. 有理性域与布劳尔类 2 1.2. 历史 3 1.3. 猜想与第一个例子 4 1.4. 结果 5 1.5. 方法与开放问题 7 1.6. 结构安排 7 2. 表示的布劳尔类与符号约定 7 2.1. 表示的布劳尔类 8 2.2. 标量扩张下的 Hom 空间 8 2.3. Frobenius、循环代数与局部不变量 9 2.4. 交织算子的因子集 11 2.5. 共同有理性域 12 3. 零深度表示 14 3.1. 表示 ρ_z and τ_z 143.2. 有理性域与像代数 16 3.3. 情形 $z = 1$ 183.4. 任意 z 214. 舒尔指标与一族无界且不相等的指标 23 4.1. 舒尔指标的推论 23 4.2. 一族无界且不相等的指标 24 5. 半扭与 Prasad 和 Ramakrishnan 猜想 30 5.1. 八阶例子 30 5.2. Suzuki 关于 p 33 上方局部不变量的命题 6. 问题 34 6.1. 一般单位元 34 6.2. p 36 上方转移的类 6.3. 其他不变量的除代数 36 附录 A. 引理 2.5 与命题2.12的证明 36 附录 B. p 37 上方的条件计算 致谢 40 参考文献 40

1. Introduction

我们首先探讨 Jacquet–Langlands 转移和局部朗兰兹对应如何改变在有理性域上构造模型的障碍。设 K 是 $\mathbb{Q}_p$ 的有限扩张，其剩余域为 $\mathbb{F}_q$；设 π 是 $\mathrm{GL}_n(K)$ 的一个超尖点表示，其中心特征取代数值。则 π、其到 K 上不变量为 $1/n$ 的中心除代数之单位群的 Jacquet–Langlands 转移 ρ，以及经扭 $|\cdot|^{-(n-1)/2}$ 归一化的朗兰兹参数 τ，拥有共同有理性域 E，且该域是一个数域。ρ 和 τ 各自定义了 E 的 Brauer 群中的一个类，分别为其像所张成的 E-代数的类 $o_E(\rho)$ 和 $o_E(\tau)$（定义 1.3）；当且仅当该表示在E上有模型时，此类才为零。我们证明，这两个类可能不同，且对于无界的 n，其舒尔指标分别为 n 和 $n/2$。然而，在所有可计算的情形中，它们的和仅取决于秩 n、剩余特征 p 和域 E，并且等于有理四元数代数$B_{p,\infty}$之类的限制的 $n-1$ 倍；该四元数代数恰在 p 和 ∞ 处分歧，

$$o_E(\rho)+o_E(\tau)=(n-1)\,\mathrm{res}_{E/\mathbb{Q}}[B_{p,\infty}] \qquad \text{in } \mathrm{Br}(E). \tag{1.1}$$

我们猜想这对每一个这样的 π都成立，并在零深度情形下证明了它。

在零深度情形下，两个类都由 E的同一个循环扩张所对应的循环代数表示，其生成元互为逆元。将生成元取逆会使循环代数（$L/E,\ \delta,\ b$）的类变号，而该类关于 b是可加的，因此，一致化元处中心特征的取值（对两个类而言都是 b 的一个因子）在求和时相互抵消。剩下的是一个带有 b 这个有理数的循环代数的类，而四元数类来自这个数的符号及其 p-进赋值；τ 的规范化对此有所贡献（§1.4）。

记 $q=p^f$，令 $n\geq 1$，并令 D 为 K 上的不变量为$1/n$的中心除代数。对于 $\mathrm{GL}_n(K)$ 的不可约超尖点表示 π，记其到 $D^\times$ 的 Jacquet–Langlands 转移为 $\rho=\mathrm{JL}(\pi)$，并记其朗兰兹参数为 φ_π。

定义 1.1。该归一化朗兰兹参数属于 π 为

$$\tau=\varphi_\pi\otimes|\cdot|^{-(n-1)/2}.$$

我们称由 $|\cdot|^{-(n-1)/2}$ 得到的扭为半扭。

这里，互反映射将几何弗罗贝尼乌斯元素映到一致化元；对于几何 Frobenius 元 s，$|s|=q^{-1}$，而半次幂取 q 的正平方根（§2.3）。

当 π 的中心特征取代数值时，半扭使映射 $\pi\mapsto\tau$与 $\mathbb{C}$ 的自同构交换（§1.1），因此 π 和 τ 具有相同的有理性域。在 Prasad and Ramakrishnan [PR12, §6], 的规范化中（我们将在 §5.1 回顾），归一化参数 τ 是与 ρ关联的参数。

1.1. 有理性域与布劳尔类。

定义 1.2（Suzuki [Su23，定义 3.0.1]）。设 r 是群在复向量空间上的一个表示，并记 $r^\sigma=r\otimes_{\mathbb{C},\,\sigma}\mathbb{C}$ 为 $\sigma\in\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$。$\mathbb{Q}(r)$的有理性域是 $\mathbb{C}$ 的子域，由所有满足 $r^\sigma\cong r$的 σ 固定。

每个 r 的定义域都包含 $\mathbb{Q}(r)$。对于不可约有限维 r，域 $\mathbb{Q}(r)$由 r的特征值生成。

正如 Dat 在 [Dat07, 定理 2.1.2], 之后所指出的，Jacquet–Langlands 对应与 $\mathbb{C}$的自同构相交换；映射 $\pi\mapsto\tau$ [Dat07, 命题 2.2.3]也如此。因此，当 π 的中心特征取代数值时，三个域 $\mathbb{Q}(\pi)$、$\mathbb{Q}(\rho)$ 和 $\mathbb{Q}(\tau)$ 相同，而它们的公共域 E 是一个数域（引理 2.14）。当中心特征具有有限阶时，Suzuki 证明 Jacquet–Langlands 对应以及将 $\pi\mapsto\varphi_\pi(-\frac{n-1}{2})$ 映射到 Suzuki 的扭曲参数的映射与这些自同构相交换 [Su23, 引理 4.0.3]。

但有理性域未必是定义域。阶为八的四元数群的二维不可约表示具有有理特征，而其像的 $\mathbb{Q}$-张成空间是有理哈密顿四元数代数，它是一个除代数，因此该表示在 $\mathbb{Q}$ 上没有模型（定义 2.1、引理 2.3 以及 [Su23，备注 3.0.4

和 3.0.10]）。沿用 Suzuki 的做法，我们用由像张成的代数的类来衡量这一障碍。

定义 1.3（参见 [Su23，定义 3.0.6]）。设 F 是一个特征为零的域，其代数闭包为 $\overline{F}$；设 $r\colon \Gamma \to \mathrm{GL}(V)$ 是群 Γ 在非零有限维 F-向量空间 V 上的一个不可约表示，且其特征值属于 $\overline{F}$。{style id='16'>像代数 A_r 是算子 $r(\gamma)$，$\gamma \in \Gamma$ 的 F-线性张成空间。由于 $r(\gamma)r(\gamma') = r(\gamma\gamma')$，它是一个 F-代数；根据引理 2.2，它是次数为 $\dim r$ 的中心简单代数。{style id='31'>布劳尔类 r 为

$$o_F(r) = [A_r] \in \mathrm{Br}(F).$$

根据韦德伯恩定理 [Mil20，IV，定理 1.17 和推论 1.22]，对于整数 t 以及在 F 上的中心除代数 $\mathcal{D}_r$，存在唯一的（同构意义下）$A_r \cong M_t(\mathcal{D}_r)$，称为 r的 ***Schur*** 代数。r 的 舒尔指标 为 $\mathrm{ind}(A_r)$，即 $\mathcal{D}_r$ 的次数。

我们将此定义用于 $F = E$，并以 $\mathbb{C}$ 代替 $\overline{F}$，应用于复表示 ρ 和 τ。对于这样的表示 r 以及满足 $E \subseteq L \subseteq \mathbb{C}$ 的域 L，表示 r 在 L 上有模型，当且仅当 $A_r \otimes_E L$ 分裂（引理 2.3 和 [Su23，引理 3.0.7]）。因此，$o_E(r)$ 衡量了在 E 上构造模型的障碍；Schur 代数这一名称取自 Prasad and Ramakrishnan [PR12，§6]，它是该类中的除代数。

1.2. **历史**。对于一般线性群的表示，有理性域在以下两种情形下是定义域。Waldspurger 证明，非阿基米德局部域上的 GL_2 的不可约可容许表示在包含其有理性域的每个子域上都有模型；证明利用了新向量的唯一性 [Wal85，引理 I.2.1]。Suzuki 证明，中心特征为有限阶的 $\mathrm{GL}_n(K)$ 平方可积表示在其有理性域上有模型；证明利用了惠特克模型的唯一性 [Su23，引理 4.0.4]。因此，在有限阶情形下，剩余的障碍是 ρ 和 τ。

Prasad and Ramakrishnan 通过符号比较了 ρ 和 φ_π。自对偶不可约表示是正交的或辛的，而 p-进群的自对偶不可约容许酉表示是正交的，当且仅当它有一个定义在 $\mathbb{R}$ [上的模型 PR12，引理 2.1]。Prasad and Ramakrishnan 证明，当n 为奇数时，$D^\times$ 的自对偶不可约表示是正交的；而当 n 为偶数时，它是正交的，当且仅当其朗兰兹参数是辛的[PR12，定理 A 和推论 B]。

随后，Prasad and Ramakrishnan 提出，ρ 的舒尔代数与归一化参数的舒尔代数之间有何关联 [PR12，问题 6.1]。他们的猜想 6.1 将这两个舒尔代数的公共中心描述为一个分圆域，其中第 (1) 部分断言，当 ρ 不是自对偶时，这两个代数相等 [PR12，猜想 6.1(1)]。他们还指出，Harris 和 Taylor 在 ℓ-进上同调中实现这两种对应关系，确定了在 E 中不位于 p或 ∞ [之上的各赋值处，这两个舒尔代数之间的关系 PR12，§6]。

对于李型有限群，Oh 运用局部朗兰兹对应研究不在 p 之上的赋值处的 Brauer 障碍。Oh 指出，若 $\mathrm{GL}_n(K)$ 的一个零深度超尖点表示在某个固定一致化元处的中心特征取有理值，则它没有 ℓ-进 Brauer 障碍 $\ell \neq p$ [Oh16, 定理 7]。通过从 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ 的尖点表示转到 $\mathrm{GL}_n(K)$ 的零深度超尖点表示，Oh 由此推出经典结论：$\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ 的尖点表示没有 ℓ-进 Brauer 障碍[Oh16, 定理 8]。在零深度情形下，我们证明，对于任意代数值中心特征，和式 $o_E(\rho) + o_E(\tau)$ 在每个不属于 p 的有限赋值处的不变量均为零（定理 3.12）。

对于 p 之上的赋值，Sherman 运用 p-进朗兰兹纲领，为 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ 和 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_p)$ 的尖点表示重新证明了消失结论 [She18, 定理 1.1.1]。Sherman 还比较了 Fontaine 构造下的 Brauer 障碍 [She18, 引理 4.2.5]。

Suzuki 通过 $\mathrm{Br}(E)$ 中的类来表述这个问题，并指出自然的量是它们的和 [Su23，注 4.0.8]。对于有限阶中心特征，Suzuki 指出，在 $\mathbb{Q}(\pi)$ 中每个不在 p [之上的有限赋值处，JL(π) 的 Schur 代数与扭曲参数 $\varphi_\pi(-^{n-1}_{2})$ 的 Schur 代数的局部不变量之和为零Su23，定理 4.0.5]。证明使用

Lubin–Tate 塔对 $\varpi^{\mathbb{Z}}$的商，其中 K的一致化元为 ϖ。由于 ϖ 在该商的上同调上作用平凡，这一论证要求 $\omega_\pi(\varpi) = 1$。在注 2.16 的假设下，对 $\varpi^{d\mathbb{Z}}$ 取商可得到任意有限阶中心特征下的消失，其中 d 是 $\omega_\pi(\varpi)$ 的阶。即使对于 $d = 1$，转换为我们的记号也假设 Mieda 对上同调 [的描述（Mie16，定理 3.1]）在我们的规范化下成立，并且 Suzuki 的扭曲参数是 τ。在偶数秩情形，Suzuki 将远离p 和 ∞ 处的消失与 Prasad and Ramakrishnan 的实数域不变量结合起来，从而确定 p[之上的总和Su23，(4.0.6)]。我们的猜想预言了每个 p 之上各处的和的不变量。

1.3. **猜想与一个初步例子。** 在本文讨论的每一种情形中，这两个类都满足开篇段落中的恒等式 (1.1)，我们现在将其表述为一个猜想。

猜想 1.4。 设 π 是 GL$_n(K)$的一个不可约超尖点表示，其中心特征取代数值。设 $\rho = \mathrm{JL}(\pi)$，设 τ 如定义 1.1 所述，并设 E 是它们在 §1.1 中所述的共同有理性域。则 (1.1) 成立。

根据 Albert、Brauer、Hasse 和 Noether 定理，Br(E)中的一个类由其局部不变量 [Mil20, VII, 定理 7.1], 确定，因此该猜想可以逐赋值表述。对于 v 处的一个赋值，我们用 E_v 表示 E 在 v 处的完备化，用 inv$_v$ 表示 v处的局部不变量，其归一化方式如 §2.3 所述；对于其他数域的赋值，我们也使用相同的记号。用不变量表述，该猜想断言

$$\mathrm{inv}_v\, o_E(\rho) + \mathrm{inv}_v\, o_E(\tau) = \begin{cases} \frac{n-1}{2}\,[E_v : \mathbb{Q}_p] & \text{at each place } v \text{ above } p, \\ \frac{n-1}{2} & \text{at each real place } v, \\ 0 & \text{at every other place } v. \end{cases}$$

对于 $n = 1$，该猜想成立，因为此时 ρ 和 τ 是取值于 E 的特征。

A二阶中的一个例子说明了有理性域和半扭为何重要。

例 1.5。 半扭可能在有理性域上产生 Brauer 障碍。取 $n = 2$ 和 $K = \mathbb{Q}_5$，并令 D 为四元数除代数。选择一个非分歧二次扩张 $K_2 \subset D$ 以及 $\mathbb{F}_{25}^\times$ 的一个阶为 8 的特征 θ。将 θ 扩张到 $K_2^\times(1 + \mathfrak{p}_D)$，在 5 和 $1 + \mathfrak{p}_D$ 上均取平凡值，并诱导到 $D^\times$，得到 ρ。令 π 为其 Jacquet–Langlands 对应，并置 $\tau = \varphi_\pi \otimes |\cdot|^{-1/2}$。

共同有理性域为 $E = \mathbb{Q}(i)$，表示 ρ 和 φ_π 在 E 上有模型。τ 的像代数为

$$A_\tau \cong L \oplus Lu, \qquad L = \mathbb{Q}(\zeta_8), \qquad u^2 = -5, \qquad ux = \gamma_5(x)u \quad (x \in L),$$

其中 $\gamma_5(\zeta_8) = \zeta_8^5$。按照定义 2.6 的记号，这是循环代数（$L/E$，$\gamma_5$，$-5$）。该四元数代数在 E 上方 5 的两个素位处的不变量均为 $1/2$，在其他所有素位处的不变量均为 0，因此它是一个除代数，并且 τ 在 E上没有模型。 consequently$o_E(\rho) = 0$ 且 $o_E(\tau) = \mathrm{res}_{E/\mathbb{Q}}[B_{5,\infty}]$。应用定理 5.1，并取 $p = 5$，即可证明这些断言。

两个类在 Br(L) 中均消失，因为 ρ 和 τ 在 L上都有模型，所以障碍涉及从 L 向有理性域 E下降模型。为了解其来源，选取一个与一致化元 5 对应的几何 Frobenius 元 s。惯性像张成 L，而 $\tau(s)$ 正是该例中的元素 u。半扭将 Frobenius 算子的平方乘以 5，

$$\varphi_\pi(s)^2 = -1 = i\,\gamma_5(i) = \mathrm{N}_{L/E}(i), \qquad \tau(s)^2 = 5\,\varphi_\pi(s)^2 = -5.$$

扭之前，平方是从 L 到 E的一个范数，因此 A_{φ_π} 是分裂的。在 E 上方 5 处的任一赋值处，L 的完备化都是 $E_v = \mathbb{Q}_5$的非分歧二次扩张，其范数的赋值均为偶数，因此 -5在那里不是范数。因此，半扭将分裂代数 A_{φ_π} 变成了除代数 A_τ。

1.4. 结果。猜想 1.4 对每个具有代数值中心特征的零深度超尖点表示都成立（推论 3.15）。我们的第一个定理讨论$n \geq 2$的零深度情形。命题 3.7 将每个代数值对应的两个类都计算为循环代数的类。

这些表示来自次数为 n 的非分歧扩张的特征。令 $K_n \subset D$ 为 K 的次数为 n 的非分歧扩张，选取与一致化元 ϖ 对应的几何 Frobenius 元 s，并令$U_D^1 = 1+\mathfrak{p}_D$。令 θ 为 $\mathbb{F}_{q^n}^\times$ 的一个阶为 m 的特征，其在 $\theta \mapsto \theta^q$ 作用下的轨道含有 n 个元素。我们通过剩余映射将 θ 视为 $\mathcal{O}_{K_n}^\times$ 的特征，并通过局部类域论（ §3.1 ）将其视为惯性群 I_K 的特征。对于 $z \in \mathbb{Q}^\times$，令 χ_z 为 $K_n^\times U_D^1$ 上在 U_D^1 上平凡的特征，并令 μ_z 为 W_{K_n} 的特征，使得

$$\chi_z = \theta \text{ on } \mathcal{O}_{K_n}^\times, \quad \chi_z(\varpi) = z,$$
$$\mu_z = \theta \text{ on } I_K, \qquad \mu_z(s^n) = (-1)^{n-1} z,$$

并令

$$\rho_z = \mathrm{Ind}_{K_n^\times U_D^1}^{D^\times} \chi_z, \qquad \tau_z = \mathrm{Ind}_{W_{K_n}}^{W_K} (\mu_z) \otimes |\cdot|^{-(n-1)/2}.$$

根据 Bushnell 和 Henniart 关于零级对应的定理 [BH11L, 6.3, 推论 1], ，该定理证明了 Prasad and Ramakrishnan 提出的公式 [PR12, 定理 4.4]，表示 ρ_z 是 GL$_n(K)$ 的一个零深度超尖点表示 π_z 的 Jacquet–Langlands 转移，其中心特征将 ϖ 映为 z，而 τ_z 是 π_z 的归一化 Langlands 参数（命题 3.3）。具有代数值中心特征的 GL$_n(K)$ 的每个零深度超尖点表示，都是表示 π_z 之一，只需适当选择 θ 和 z （命题 3.14）。

最后，置

$$L = \mathbb{Q}(\zeta_m), \qquad \gamma\colon \zeta_m \mapsto \zeta_m^q, \qquad E = L^{\langle\gamma\rangle}, \qquad E_z = E(z),$$

使得 $E_1 = E$。例 1.5 是 $n = 2$、 $K = \mathbb{Q}_5$、 $m = 8$ 和 $z = 1$ 的情形（见 §5.1），并且有$L = \mathbb{Q}(\zeta_8)$ 和 $E = \mathbb{Q}(i)$。

定理 A。设 $n \geq 2$ 和 $z \in \mathbb{Q}^\times$。

(i) 表示 ρ_z 和 τ_z 的有理性域为 E_z，并且

$$o_{E_z}(\rho_z) + o_{E_z}(\tau_z) = (n-1)\,\mathrm{res}_{E_z/\mathbb{Q}}[B_{p,\infty}] \qquad in\ \mathrm{Br}(E_z).$$

(ii) 如果 v 是 E_z 在 p 上方的一个赋值，且 z 是一个单位，那么 $\mathrm{inv}_v\, o_{E_z}(\rho_z) = 0$ 且 $\mathrm{inv}_v\, \overline{o_{E_z}}(\tau_z) = \frac{n-1}{2}[E_{z,v} : \mathbb{Q}_p]$。(iii) 表示 ρ_1 在 E上有一个模型。表示 τ_1 在 E上有一个模型，当且仅当 n 为奇数，或者 n 和 f 为偶数且 E 是全虚的。否则， τ_1 的舒尔指标为 2。

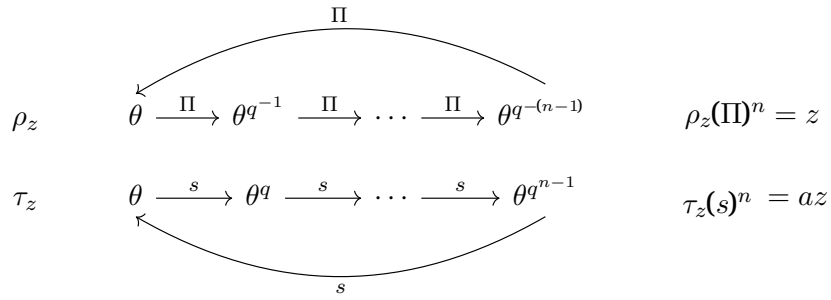
根据引理 2.14和第 (i) 部分，对于每个 $z \in \mathbb{Q}^\times$， $\mathbb{Q}(\pi_z) = \mathbb{Q}(\rho_z) = E_z$，因此第 (i) 部分就是关于 π_z的猜想 1.4。

我们在第 3 节通过计算两个像代数来证明定理 A。两个表示都是由 n 条直线的直和构成的， $\mathcal{O}_{K_n}^\times$和惯性群分别通过 n个互不相同的特征 θ^{q^i}作用于这些直线。(3.1) 中的元素 Π，其 n 次幂为 ϖ，以循环方式置换 ρ_z 的直线，而 s 则以循环方式置换 τ_z 的直线。它们的 n 次幂分别通过 z 作用于 ρ_z，并通过 az 作用于 τ_z，其中 a 是有理数

$$a = (-1)^{n-1} q^{n(n-1)/2}.$$

标量 a 将 $\mu_z(s^n)$ 中的符号与半扭作用于 s^n 时所乘的因子 $q^{n(n-1)/2}$ 结合起来。在下图中，每个节点都是一条 ρ_z 线或一条 τ_z 线，并标记为

$\mathcal{O}_{K_n}^\times$ 和 I_K 分别通过其作用于该线的特征来标记。



这两个循环以相反方向经过特征 θ^{q^i}，因为对 Π 的共轭通过 γ 作用于 θ 的取值，而对 s 的共轭则通过 γ^{-1} 作用。这就是两个像代数背后的循环代数具有互逆生成元的原因。令 $L_z = LE_z$ 为 E_z 的一个循环扩张，并令 γ_z 为伽罗瓦群 $\mathrm{Gal}(L_z/E_z)$ 的生成元，其限制到 $\gamma^{[L\cap E_z:E]}$ 上为 L （定义 3.4），因此 $\gamma_1 = \gamma$。这两个像代数分别是循环代数 $(L_z/E_z,\ \gamma_z,\ z)$ 和 $(L_z/E_z,\ \gamma_z^{-1},\ az)$ 上的矩阵代数（引理 3.2 和命题 3.7 ）；而将生成元取逆会使类变号，因此

$$o_{E_z}(\rho_z) + o_{E_z}(\tau_z) = [(L_z/E_z, \gamma_z, z)] - [(L_z/E_z, \gamma_z, az)] = -[(L_z/E_z, \gamma_z, a)].$$

对于 $z = 1$，我们有 $o_E(\tau_1) = [(L/E,\ \gamma^{-1},\ a)]$,，而定理 3.8 表明该类为 $(n-1)\,\mathrm{res}_{E/\mathbb{Q}}[B_{p,\infty}]$，其阶至多为二，因此它也等于 $[(L/E,\ \gamma,\ a)]$。类 $[(L_z/E_z,\ \gamma_z,\ a)]$ 是 $[(L/E,\ \gamma,\ a)]$ 在 E_z 上的限制，因此其和为 $(n-1)\,\mathrm{res}_{E_z/\mathbb{Q}}[B_{p,\infty}]$，并且它对 z 的依赖仅通过域 $E_z = E(z)$ 体现。

$o_E(\tau_1)$ 的不变量来自 p 处 a 的赋值，以及 a 在实地方的符号。困难的步骤出现在整除 m 的素数处，此时 L/E 可能分歧，且一个单位未必是范数；在这些地方，关于 a 的一个同余关系表明不变量为零（定理 3.8 和引理 3.9）。

对于有限阶中心特征，类 $o_{E_z}(\rho_z)$ 和 $o_{E_z}(\tau_z)$ 的阶可能大于二。对于阶为 7 的 $K = \mathbb{Q}_2$、$n = 3$、θ 以及 $z = \zeta_3$，这两个类互为反类且阶为三，它们的非零不变量出现在 7 上方的两个赋值处（例 3.13）。阶为三的类不同于其反类，因此，布劳尔类的符号——第 2 节对此作了规定——会影响求和。

现在可以问，这两个类的差距最大能有多大。在 (1.1) 成立的所有地方， E 的每个赋值处以及整体上， ρ 和 τ 的舒尔指标具有相同的奇数部分，且至多相差一个因子 2（命题 4.2 和 4.3）。原因在于，(1.1) 右侧的局部不变量属于 $\{0, \frac{1}{2}\}$，而 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 中两个和为 0 或 $\frac{1}{2}$ 的元素，其阶具有相同的奇数部分，且比值为 $\frac{1}{2}$、1 或 2（引理 4.1）。这两个极端情形都会出现在 p 上方的赋值处（注记 4.4）。下面的族在任意大的秩上都达到整体界。

定理 B. 设 $p \geq 7$ 为满足 $p \equiv 3 \pmod 4$的素数，令 $n = p - 1$，并设 K 为 $\mathbb{Q}_p$ 的 n 次非分歧扩张。存在一个中心特征为有限阶的简单超尖点表示 π ，它属于$\mathrm{GL}_n(K)$，并满足以下性质。

(i) 表示 π 不是自对偶的，而 π、 ρ 和 τ的共同有理性域为 $E = \mathbb{Q}(\zeta_n)$。(ii)素数 p 在 E中完全分裂，且 E 中位于 p 上方的赋值可标记为 v_j、$j \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$，使得

$$\mathrm{inv}_{v_j}\, o_E(\rho) = \frac{j}{n}, \qquad \mathrm{inv}_{v_j}\, o_E(\tau) = -\frac{j}{n} - \frac{1}{2}.$$

这两个类在 E的所有其他赋值处的不变量均为0 。

(iii) ρ和 τ的舒尔指标分别为 n和 $n/2$，且 $o_E(\rho) + o_E(\tau) = \mathrm{res}_{E/\mathbb{Q}}[B_{p,\infty}]$。

该表示是 Imai and Tsushima 的简单超尖点表示 $\pi_{1,\ \chi,\ 1}$ [IT20, §5.1], ，对应于某个阶为 n 的特征 χ of $\mathbb{F}_q^\times$。在定理 4.5 中，我们用扩张 $E(\zeta_p)/E$ 的循环代数表示 $o_E(\rho)$ 和 $o_E(\tau)$，其参数分别为 ζ_n^{-1} 和 $-\zeta_n$。在韦伊侧

像代数 A_τ 本身就是这个循环代数。然而， ρ of $D^\times$ 的表示维数为 $(q^n-1)/(q-1)$，大于 n，因此计算其类还需进一步处理。麦基公式将 ρ toU_D^1 的限制分解为直线，而投影到 n 个适当直线上的投影属于 A_ρ，并截出一个次数为 n 的角；该角是一个循环代数，其类为 A_ρ （引理 4.8(iii)）。 $-\zeta_n$ 中的符号源于 Imai and Tsushima 对应中的校正因子 [IT20, 命题 5.4], ，并在和式中产生四元数类（注 4.9）。

在例 1.5 中， ρ 和 τ 的舒尔指标分别为 1 和 2；在定理 B 中， n 和 $n/2$ 的舒尔指标也分别为 1 和 2。在这两种情形下， ρ 都不是自对偶的，其中心特征具有有限阶，且公共中心是分圆域（推论 5.2）。指标不等，排除了 Prasad and Ramakrishnan 在此情形下猜想的舒尔代数同构 [PR12, 猜想 6.1(1)]。(1.1)所允许的二倍差距在两个方向上都达到；在这一族中，两个指标都无界。

1.5. **方法与开放问题**。 我们通过用循环代数表示这两个类，并借助局部类域论计算其局部不变量，来证明定理 A 和 B [Mil20]。这些循环表示来自 ρ 和 τ的诱导形式；对零深度情形，我们采用 Bushnell 和 Henniart 定理中的结果 [BH11L，6.3，推论 1] ；对简单超尖点族，则采用 Imai and Tsushima 的描述 [IT20，命题 5.4], ，后者从 Bushnell 和 Henniart 的本质温和对应中推导出该结果 [BH05，BH11J]。

我们的证明需要 ρ 和 τ 由特征诱导而来，而该猜想一般尚未得到证明。Mieda 对 Lubin–Tate 塔上两个对应关系在上同调中的实现形式 [Mie16, 定理 3.1] 仅在注 2.16 及其假设中出现；这些内容涉及不位于 p之上的有限处。在 p之上，所预测的值具有我们将在第 6 节中解释的含义。等晶体是带有半线性 Frobenius 的向量空间。等晶体的斜率衡量其 Frobenius 的 p-进增长；在 v 处于 p 之上的情况下，所预测的值是简单等晶体的自同态代数在限制到 E_v后所得的不变量，该简单等晶体的斜率为 $\frac{n-1}{2}$。在零深度情形，设 $\rho_z \boxtimes \tau_z$ 具有一个 p-进实现，其系数在 $E_{z,v}$中；这里 v 是E_z 中位于 p之上的一个赋值，如假设 B.1 所述。若 z 在 v处是一个单位元，则半扭产生斜率 $\frac{n-1}{2}$ ；而 Frobenius 中心化子——即该实现作为等晶体的、在 $E_{z,v}$上线性的自同态所成的代数——具有所预测的不变量（命题 B.2）。我们不知道 Lubin–Tate 塔的 p-进上同调是否提供这样的实现。随后我们提出以下问题：一般而言， p-进上同调能否计算 p 之上的上述不变量；是什么分别决定每个类；以及对于具有其他不变量的除代数会发生什么。

1.6. **结构安排**。 论文的重点在第 3 节和第 4 节，其中证明了定理 A 和定理 B。第 2 节确定布劳尔类的符号以及关于 Frobenius、循环代数和局部不变量的约定，指出共同有理性域，并包含注 2.16；读者可按需查阅。第 5 节讨论秩二例子。在 §5.2 中，我们使用注 2.16 的归一化假设，将它们各自的不变量（位于 p 之上）与 Suzuki 的命题 [Su23, 命题 4.0.13] 中的两个断言进行比较。第 6 节陈述开放问题。附录 A 收录引理 2.5 和命题 2.12 的常规证明，附录 B 则收录关于 p 的条件计算。

2. Brauer classes of representations and sign conventions

本节介绍用于证明引言中两个定理的两项工具：表示的布劳尔类，以及带有局部不变量的循环代数。在 §§2.1–2.4 中，字母 F 表示一个一般的特征为零的域；在 §2.5 中，我们回到第 1 节的设定，并证明 π 、 ρ 和 τ 具有共同有理性域 E，这是一个数域，因此 $o_E(\rho)$ 和 $o_E(\tau)$ 属于同一个 Brauer 群。

定义 1.3 中的类 $o_F(r)$ 带有一个符号。一个中心单代数及其反代数具有相同的分裂域和相同的指标，因此， r 是否在给定域上有模型，只取决于类对 $\pm o_F(r)$。然而，由于我们要将不同表示的类相加， $o_F(r)$ 的符号便很重要。将和式中的一个被加项 x 替换为 $-x$ ，会从总和中减去 $2x$；一旦 x 的阶大于二，这就会改变总和，例 3.13 即属此情形。我们

使用像代数，正如 Suzuki 在 [Su23、定义 3.0.6 和引理 3.0.7] 中所做的那样。注 2.4 和 §2.4 描述了与 r 相关联的另外两个代数，它们表示 $-o_F(r)$；而 §2.3 则规定了 Frobenius 和循环代数的约定，这些约定决定了局部不变量。

2.1. **表示的布劳尔类。** 在本小节中， F 是一个特征为零的域， F是一个包含 F的代数闭域， Γ是一个群，而 $r\colon \Gamma \to \mathrm{GL}(V)$是 Γ 在一个非零的 F-向量空间 V上的不可约表示，其有限维为 d，特征 $\gamma \mapsto \operatorname{tr} r(\gamma)$取值于 F。群 Γ 可以是无限群，就像韦伊群W_K 一样。我们使用定义 1.3 中的像代数 A_r、类 $o_F(r)$和 Schur 代数 $\mathcal{D}_r$，其中以 F 代替 F的代数闭包，正如第 1 节对 $\mathbb{C}$所做的那样。

定义 2.1。 设 L 是一个具有 $F \subseteq L \subseteq F$的域。 r 的一个模型（定义在 L 上）是 Γ 在一个 L-向量空间 V_0 上的表示 r_0，连同一个表示同构 $V_0 \otimes_L F \cong V$。

引理 2.2. 代数 A_r 是一个次数为 d的中心单代数 F，自然映射$A_r \otimes_F F \to \mathrm{End}_F(V)$ 是一个同构。

证明。 根据 Burnside 定理（即稠密性定理 [EGH11，定理 2.5(i)] ），应用于群代数 $F[\Gamma]$，某些算子 $r(\gamma_1), \dots, r(\gamma_{d^2})$ 构成 $\mathrm{End}_F(V)$ 的一个 F-基。该基下迹型的 Gram 矩阵 $\big(\operatorname{tr} r(\gamma_i\gamma_j)\big)_{i,j}$可逆，且其元素属于 F；每个$a \in A_r$的迹 $\operatorname{tr}\big(a\, r(\gamma_j)\big)$ 都属于 F，因此 a的坐标属于 F。于是， $A_r = \bigoplus_i F\, r(\gamma_i)$（自然映射 $A_r \otimes_F F \to \mathrm{End}_F(V)$）是一个同构；并且 A_r 是次数为 d的中心单代数，因为它的双边理想和中心扩张后分别是 $M_d(F)$ 的双边理想和中心。□

引理 2.3 （参见 [Su23, 引理 3.0。7]）。 我们有如下结论：

(i) 设 L 是一个域，且满足 $F \subseteq L \subseteq F$。那么， r 在 L 上有一个模型，当且仅当 $A_r \otimes_F L$ 是分裂的。特别地， r 在 F 上有一个模型，当且仅当 $o_F(r) = 0$。(ii) 设 W是一个简单的 A_r-左模。那么，$\mathrm{End}_{A_r}(W) \cong \mathcal{D}_r^{\mathrm{op}}$，并且 $\mathrm{End}_{A_r}(W)$在 $\mathrm{Br}(F)$ 中的类为 $-o_F(r)$。

证明。 (i) 若 $A_r \otimes_F L \cong M_d(L)$（由引理 2.2 可知，其次数为 d），令 Γ 通过 $\gamma \mapsto r(\gamma) \otimes 1$作用在 $M_d(L)$ 的单模 L^d 上。将标量扩张至 F 后，此模在 F 上的维数为 d，并且是 $A_r \otimes_F F \cong \mathrm{End}_F(V)$ 上的模，因此与 V 同构，且此同构与 Γ 相容。因此，带有此 Γ 作用的 L^d 是 r 在 L 上的一个模型。反过来， V_0 上的模型 r_0 给出 $A_r \subseteq \mathrm{End}_L(V_0)$，而诱导映射 $A_r \otimes_F L \to \mathrm{End}_L(V_0)$ 是单射，因为其源是简单的；由维数相同可知它也是满射，因此 $A_r \otimes_F L$ 是分裂的。 $L = F$ 的情形即为第二个断言。

(ii) 记作 $A_r = M_t(\mathcal{D}_r)$。简单左 A_r-模同构于列空间 $\mathcal{D}_r^t$ （参见 Mil20, IV, Example 1.11 及 Corollaries 1.21 和 1.22], ），其 A_r-线性自同态是由 $\mathcal{D}_r$ 给出的右乘法，因此 $\mathrm{End}_{A_r}(W) \cong \mathcal{D}_r^{\mathrm{op}}$。其类为 $-[\mathcal{D}_r] = -o_F(r)$，因为 $a \otimes b \mapsto (x \mapsto axb)$ 是到 $\mathrm{End}_F(\mathcal{D}_r)$ 的同构。□

注记 2.4。 简单左 A_r-模等同于 F 上的 Γ 的不可约表示，其中群代数 $F[\Gamma]$ 通过 A_r 作用，因为 A_r 由算子 $r(\gamma)$ 张成。根据引理 2.3(ii)，此类表示的交换子表示 $-o_F(r)$。因此，以该交换子衡量有理性的约定，其符号与我们的约定相反，而 Suzuki 的约定与我们的相同。

2.2. **标量扩张下的 Hom 空间。**引理 2.3 通过有限维表示的布劳尔类来判断其模型。然而，在 §1.2 和注 2.16 所述的上同调论证中，表示 ρ 和 τ 出现在张量积$\pi^\vee \boxtimes \rho \boxtimes \tau$中；当 $n \geq 2$时，其因子 $\pi^\vee$是无限维的，因此必须借助 $\pi^\vee$的模型来提取 $\rho \boxtimes \tau$的模型。设 P是域 F上的 $\pi^\vee$的一个模型，并设 Y是 F上的 $\mathrm{GL}_n(K) \times D^\times \times W_K$的一个表示，它在$F$的某个扩张上变为 $\pi^\vee \boxtimes \rho \boxtimes \tau$。于是， F上的 $\rho \boxtimes \tau$的自然候选模型是空间 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_n(K)}(P,\ Y)$， $D^\times \times W_K$通过 Y作用于该空间，下一引理的 (ii) 部分给出了使这样的 Hom 空间成为模型的条件。

引理 2.5。设 $F \subset F'$ 是域，Λ 是一个含幺结合 F-代数，且 F 是中心的。(i) 对于有限生成左 Λ-模 X 以及任意左 Λ-模 Y，自然映射

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(X,Y)\otimes_F F' \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\Lambda\otimes_F F'}(X\otimes_F F', Y\otimes_F F'),$$

它将 $\xi\otimes c$ 映射为映射 $x\otimes c'\mapsto \xi(x)\otimes cc'$，是一个同构。

(ii) 设 Γ_1 和 Γ_2 为群。设 U 为 Γ_1 上的一个表示，它在 $F[\Gamma_1]$ 上有限生成，且 $U_{F'}=U\otimes_F F'$ 是绝对不可约的，并且 $\mathrm{End}_{\Gamma_1}(U_{F'})=F'$。设 T' 为 Γ_2 上的有限维表示，设 Y 为 $\Gamma_1\times\Gamma_2$ 上的一个表示，且 $Y_{F'}\cong U_{F'}\boxtimes T'$。那么 $\mathrm{Hom}_{\Gamma_1}(U,Y)$，其中 Γ_2 通过 Y 作用，满足 $\mathrm{Hom}_{\Gamma_1}(U,Y)\otimes_F F'\cong T'$，作为 Γ_2 上的表示。特别地，$\dim_F \mathrm{Hom}_{\Gamma_1}(U,Y) = \dim_{F'} T'$。

附录 A 证明引理 2.5，其中有限生成性至关重要，因为 X 的有限个生成元在 F' 中的像可用 F 上线性无关的 F' 元素构成的一个有限族来展开。注 2.16 在 p 上方的 E 的有限处应用 (i) 部分，而注 5.4 在 p 上方的 E 的一个赋值处两次应用 (ii) 部分。

2.3. **Frobenius、循环代数与局部不变量**。非分歧扩张的循环代数的不变量会在算术 Frobenius 替换为几何弗罗贝尼乌斯时变号，因此我们将韦伊群上的 Frobenius 选取与不变量的规范化一并固定。这些约定在本文余下部分均适用。

设 K 是 $\mathbb{Q}_p$ 的有限扩张，其剩余域 $\mathbb{F}_q$ 含有 $q=p^f$ 个元素，并令 W_K 为 K 的韦伊群。元素 $w\in W_K$ 在 $\mathbb{F}_q$ 的代数闭包 $\overline{\mathbb{F}}_q$ 上的作用是算术 Frobenius $x\mapsto x^q$ 的 $\nu(w)$ 次幂，我们称 $\nu: W_K\to\mathbb{Z}$ 为次数。我们固定几何弗罗贝尼乌斯的一个提升 $s\in W_K$，使得 $\nu(s)=-1$，并记 $|w|=q^{\nu(w)}$，从而 $|s|=q^{-1}$。在 W_K 的一个野惯性像为平凡的有限商群中，惯性像的每个元素 t 都满足温和关系

$$sts^{-1}=t^{q^{-1}},$$

其中 q^{-1} 是 q 模 t 的阶的逆元（该阶与 p 互素）。

在系数方面，设 L/F 是非阿基米德局部域的非分歧扩张。算术 *Frobenius* $\mathrm{Frob}\in\mathrm{Gal}(L/F)$ 是在剩余域上诱导 $x\mapsto x^{q_F}$ 的元素，其中 q_F 是 F [的剩余域的元素个数，参见 Mil20，I，第 §1] 节。

定义 2.6。设 L/F 是次数为 d 的循环扩张，设 δ 是 $\mathrm{Gal}(L/F)$ 的生成元，并设 $b\in F^\times$。循环代数 $(L/F,\ \delta,\ b)$ 是 F-代数

$$(L/F,\delta,b)=\bigoplus_{i=0}^{d-1} Lu^i,\qquad ux=\delta(x)u\ \ (x\in L),\qquad u^d=b.$$

循环代数可追溯至 Dickson（参见 [Mil20，VIII，第 §2] 节），而非阿基米德局部域 F 的局部不变量 $\mathrm{inv}_F:\mathrm{Br}(F)\to\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 则归功于 Hasse（参见 Mil20，IV，第 §4] 节的注释）。我们采用 Mil20，IV，第 §4], 节中的规范化，下一条命题的第 (ii) 部分对此作了说明。

命题 2.7 (见 [Mil20, IV, 定理 3.14、引理 3.15 和例 4。2])。设 L/F 是次数为 d 的循环群扩张，令 δ 生成伽罗瓦群 (L/F)，且令 $b,b'\in F^\times$。那么 $(L/F,\delta,b)$ 是一个次数为 d 的中心简单 F-代数，并且满足以下性质。

(i) 代数 $(L/F,\delta^{-1},b)$ 和 $(L/F,\delta,b^{-1})$ 同构，且 $[(L/F,\delta,bb')] = [(L/F,\delta,b)] + [(L/F,\delta,b')]$ 属于 $Br(F)$。特别地，将 δ 替换为 δ^{-1} 会使该类变号。*(ii)* 若 F 是非阿基米德局部域，L/F 是非分歧的，$\delta=$是 *Frob*，且 ϖ_F 是 F 的一个统一化元，则

$$\mathrm{inv}_F(L/F,\mathrm{Frob},\varpi_F)=1/d.$$

因此，对每个 $k\in\mathbb{Z}$,

$$\mathrm{inv}_F(L/F,\mathrm{Frob}^{-1},\varpi_F^k)=-k/d\quad in\ \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

对于 (i) 中的同构，令 u 为 $(L/F,\ \delta^{-1},\ b)$ 的生成元，u' 为 $(L/F,\ \delta,\ b^{-1})$ 的生成元。元素 u'^{-1} 满足：对 $x \in L$ 和 $(u'^{-1})^d = b$，有 $u'^{-1} x\, u' = \delta^{-1}(x)$，因此，在 L 上取单位映射并将 u 映至 u'^{-1} 的映射是一个同态 $(L/F,\ \delta^{-1},\ b) \to (L/F,\ \delta,\ b^{-1})$；由于其源空间是简单的，该映射是单射，而由维数可知它是双射。(i) 的最后一个断言由此同构及可加性得出，因为 $(L/F,\ \delta,\ 1)$ 是分裂的（它通过乘法及δ作用于 L，从而将其识别为 $\mathrm{End}_F(L)$）；(ii) 中的推论则由其第一个公式结合 (i) 得出。

定理 2.8（参见 [Mil20, III, §2, (29)] 和 [Mil20, IV, 注记 4.4(b)]）。设 F'/F 是非阿基米德局部域的有限扩张。

(a) 对于 $x \in \mathrm{Br}(F)$，$\mathrm{inv}_{F'}(\mathrm{res}^{F'/F} x) = [F' : F]\,\mathrm{inv}_F(x)$。(b) $\mathrm{Br}(F)$ 中一个类的阶等于其指标。特别地，一个次数为 h、其不变量在 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 中的阶为 h 的中心简单 F代数是除代数。

我们采用两种规范化的局部类域论。对于非阿基米德局部域 F，它们分别是 [Mil20, I, 定理 1.1] 中的局部 Artin 映射，以及 Bushnell 和 Henniart [BH11L, 1.4],中的互反同构

$$\mathrm{Art}_F : F^\times \longrightarrow \text{伽罗瓦群}(F^{\mathrm{ab}}/F),\ \text{一致化元} \mapsto \text{算术 Frobenius 元},\quad a_F : W_{\mathrm{ab}_F} \xrightarrow{\sim} F^\times,\ \text{几何 Frobenius 元} \mapsto \text{一致化元}。$$

我们使用 Art_F来计算局部不变量，这与命题 2.7(ii)中的不变量的归一化一致。我们使用 a_F，正如 Bushnell 和 Henniart 所做的那样，以便与朗兰兹对应进行比较。

现在我们比较这两个映射。a_F的逆元与映射 $W_{\mathrm{ab}_F} \to$伽罗瓦群(F^{ab}/F)复合，将一致化元映为几何弗罗贝尼乌斯元素，并诱导同构 $F^\times/\mathrm{N}(M^\times) \cong$伽罗瓦群$(M/F)$，其中 M是 F的有限阿贝尔扩张。再与 $F^\times$上的取逆元映射复合后，它因此具有 [Mil20, I, 定理 1.1], 中的两个性质，而其中的唯一性将其确定为 Milne 的映射 Art_F。因此，对于 $w \in W_F$以及 F的每个有限阿贝尔扩张 M，

$$w|_M = \mathrm{Art}_{M/F}\big(a_F(w)\big)^{-1}. \tag{2.1}$$

关于循环代数，有三个事实会在后面的章节中反复出现。前两个说明循环代数何时分裂，第三个则同样计算分歧循环扩张的局部不变量。

引理 2.9。设 L/F 是次数为 d 的循环扩张，设 δ 生成 伽罗瓦群(L/F)，并设 $b \in F^\times$。

(i) 如果 b 是 L 的范数，则 $(L/F, \delta, b)$ 分裂。(ii) 如果 F 是非阿基米德局部域，L/F 是非分歧的且 b 是一个单位，那么 b 是 L 的范数，因此 $(L/F, \delta, b)$ 分裂。(iii) 如果 F 是非阿基米德局部域，且 $\mathrm{Art}_F(b)$ 在 L 上按 δ^t 作用，则$(L/F, \delta, b)$ 的不变量为 t/d。

证明。(i) 写成 $b = \mathrm{N}_{L/F}(c)$，其中 $c \in L^\times$，并设 u 为 $(L/F, \delta, b)$ 的生成元。元素 $v = c^{-1}u$ 满足 $vxv^{-1} = \delta(x)$，其中 $x \in L$，并且

$$v^d = c^{-1}\delta(c^{-1}) \cdots \delta^{d-1}(c^{-1})\, u^d = \mathrm{N}_{L/F}(c)^{-1} b = 1.$$

由于 v^i 是 L 乘以 u^i 的非零元素，幂 1，v，……，v^{d-1} 构成一个 L-基，因此 $(L/F,\ \delta,\ b) \cong (L/F,\ \delta,\ 1)$，它是分裂的（参见命题 2.7 之后的讨论）。

(ii) 单位 b 是非分歧扩张 L [Mil20 中的一个范数，参见 I, 1.9 和定理 1.1(b)]，因此适用 (i)。

(iii) 令 χ 为 $\mathrm{Gal}(L/F)$ 的特征，且 $\chi(\delta) = 1/d$。χ 在连接映射 $H^1(\mathrm{Gal}(L/F)\ \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to H^2(\mathrm{Gal}(L/F)\ \mathbb{Z})$ 下的像 $\partial\chi$ 由如下上循环表示：对于 (δ^i, δ^j)，其中 $0 \le i, j < d$，当 $i + j < d$时其值为 0，否则为 1 [Mil20，III，§1，命题 1 之前9]。因此，$b \cup \partial\chi$ 由在这两种情况下取值分别为 1 和 b 的上循环表示 [Mil20，III，命题 3 之前6]。取 $e_{\delta^i} = u^i$时，定义 2.6 的关系正是该上循环对应的交叉积的关系，因此 $(L/F, \delta, b)$ 的不变量为 $\mathrm{inv}_F(b \cup \partial\chi)$ [Mil20,

IV，定理 3.14、推论3.16 以及注记 4.4(a)]。根据 [Mil20，III，命题 3.6]，，该不变量为 $\chi(\mathrm{Art}_F(b)|_L) = \chi(\delta^t) = t/d$。□

对于 L/F非分歧、 $\delta =$Frob 和一致化元 $b = \varpi_F$，元素 $\mathrm{Art}_F(\varpi_F)$ 在 L上的作用为 Frob，因此 (iii) 部分得到了命题 2.7(ii) 的不变量 $1/d$ 。

命题 3.3 和引理 4.7 的证明在某个 n次幂处计算韦伊群的一个特征，而下一个引理说明在互反律下与之对应的是乘法群的哪个元素。证明运用了互反律与有限 Galois 商中的转移 [Mil20, III, 引理 3.2] 的相容性。

引理 2.10。设 K'/K 是 K中的一个 n 次循环扩张，且 $g \in W_K$ 限制为伽罗瓦群(K'/K)的一个生成元。那么 $g^n \in W_{K'}$ 和 $a_{K'}(g^n) = a_K(g)$。

证明。 g^n 到 K' 的限制是平凡的，因此 $g^n \in W_{K'}$。令 $x = a_K(g)$，并令 $y = a_{K'}(g^n)$。设 M 是 K'的有限阿贝尔扩张，设 N 是包含M的 K 的有限Galois扩张，并设 $\mathrm{Ver} : \mathrm{Gal}(N/K)^{\mathrm{ab}} \to \mathrm{Gal}(N/K')^{\mathrm{ab}}$为转移。设 N_0和 N_1分别是 N/K 和 N/K'的最大阿贝尔子扩张，因此这两个阿贝尔化群分别为 $\mathrm{Gal}(N_0/K)$ 和 $\mathrm{Gal}(N_1/K')$，且 $M \subseteq N_1$。在其中，我们用 $g|_N$ 和 $g^n|_N$ 表示 g 和 g^n的像，并用 $\mathrm{Art}^{N/K}(x)$ 和 $\mathrm{Art}^{N/K'}(x)$ 表示 $\mathrm{Art}^{N_0/K}(x)$ 和 $\mathrm{Art}^{N_1/K'}(x)$。那么

$$\mathrm{Ver}(g|_N) = g^n|_N, \qquad \mathrm{Ver}\big(\mathrm{Art}_{N/K}(x)\big) = \mathrm{Art}_{N/K'}(x), \qquad g|_N = \mathrm{Art}_{N/K}(x)^{-1}.$$

第一个等式成立，是因为 1，g、……、g^{n-1}的像代表 $\mathrm{Gal}(N/K')$ 的陪集，而 g 按循环顺序置换它们，其中 $g \cdot g^{n-1} = g^n$。第二个等式是[Mil20, III, 引理 3.2], 中的第二个图表；第三个等式则是 $F = K$ 和阿贝尔扩张 N_0的 (2.1)。因此$g^n|_N = \mathrm{Art}^{N/K'}(x)^{-1}$，将其从 N_1 限制到 M，得到 $g^n|_M = \mathrm{Art}^{M/K'}(x)^{-1}$。此外，由$F = K'$的 (2.1)，还有 $g^n|_M = \mathrm{Art}^{M/K'}(y)^{-1}$。

因此，对于每个有限阿贝尔扩张 M of K'， x/y 都属于 $\mathrm{Art}_{M/K'}$ [Mil20, I, Theorem 1.1(b)] 的核 $\mathrm{N}(M^\times)$。根据局部存在定理 [Mil20, I, Theorem 1.4]，这些范数群是 $K'^\times$ 的有限指标开子群，且它们的交为平凡群，因此 $x = y$。□

2.4. **交织算子的因子集**。Oh 通过由交织算子构造的交叉积来定义表示的 Brauer 障碍；对于有限群和数域，Oh 证明像代数的类是该障碍的负值 [Oh16, §2, Theorem 1]。本小节将这一比较推广到任意群的表示，后续各节只使用 $o_F(r)$。当 r 由有限 Galois 扩张L of F上的矩阵给出时，从 r 的伽罗瓦共轭到 r 的同构定义了一个因子集，其交叉积的类为 $-o_F(r)$（命题 2.12）。符号取决于同构的方向以及交叉积中的乘法，而定义 2.11 对这两者都作了规定。

定义 2.11。设 L/F 是一个有限Galois扩张，其群为 G。

(i) 设 $c\colon\ G \times G \to L^\times$ 满足 $c(g,h)\,c(gh,k) = g\big(c(h,k)\big)\,c(g,hk)$，其中 g、h、$k \in G$。交叉积 $(L/F, c)$ 是具有 $u_g x = g(x)u_g$（对 $x \in L$ 和 $u_g u_h = c(g,h)\,u_{gh}$）的 F-代数 $\bigoplus_{g\in G} Lu_g$。 (ii) 设 Γ 是一个群，且 $r\colon\ \Gamma \to \mathrm{GL}_d(L)$ 是一个表示，其在 $M_d(L)$ 中的交换子为 L。对于 $g \in G$，令 $r^g = g \circ r$，其中 g 逐项作用于矩阵。给定同构 $\iota_g\colon\ r^g \to r$ （对于 $g \in G$），其因子集为

$$c(g,h) = \iota_g\, g(\iota_h)\, \iota_{gh}^{-1} \qquad (g,h \in G).$$

在 (ii) 中，因子集取值于 $L^\times$，并满足 (i) 中的单位元关系，而 $(L/F,\ c)$ 在 $\mathrm{Br}(F)$ 中的类仅取决于 r（附录 A）。

命题 2.12。设 F 是一个特征为零的域，其代数闭包为 F；设 $L \subseteq F$是 F 的一个有限*Galois*扩张，其群为 G；设 $r\colon\ \Gamma \to \mathrm{GL}_d(L)$ 是群 Γ 的一个表示，该表示在 F 上不可约，且其特征取值于 F。那么， r 在 $M_d(L)$ 中的交换子为 L。若 $\iota_g\colon\ r^g \to r$（ $g \in G$）是具有因子集 c的同构，则

$$[(L/F, c)] = -o_F(r) \qquad in\ \mathrm{Br}(F).$$

附录 A 通过双中心化子定理证明命题 2.12。

2.5. **共同有理性域**。现在我们回到第 1 节的算术情形，并证明 π、ρ 和 τ 具有相同的有理性域。通过非分歧扭曲，将该域是否为数域的问题归结为有限阶中心特征的问题。我们首先记录 Jacquet–Langlands 对应与任意特征扭曲的相容性，其中特征值不必具有绝对值 1。在 §5.1 中，我们利用这一点将 τ 与 Prasad and Ramakrishnan 为 ρ 赋予的参数对应起来。

我们采用 Dat 所述的 Jacquet–Langlands 对应和朗兰兹对应的形式；Dat 在 [Dat07, §§2.1.1–2.2.5], 中转换系数域，因此我们可以取系数为 $\mathbb{C}$。Dat 将 Jacquet–Langlands 对应表述为从 $D^\times$ 的不可约表示集合到 $\mathrm{GL}_n(K)$ 的离散系列表示集合 $\mathrm{Disc}_{\mathbb{C}}(\mathrm{GL}_n(K))$ 的一个双射，其特征在于，当 π 与 ρ 对应，且 g 与 x 是相应的椭圆正则元素时，特征满足等式 $\chi_\pi(g) = (-1)^{n-1}\chi_\rho(x)$ [Dat07, 定理´eor`eme 2.1.2]。与第 1 节一样，我们用 JL 表示逆双射，因此 $\rho = \mathrm{JL}(\pi)$。

我们将 $\mathrm{Disc}_{\mathbb{C}}(\mathrm{GL}_n(K))$ 读作 $\mathrm{GL}_n(K)$ 的本质平方可积表示的集合（对于 $n = 1$，它由 $K^\times$ 的所有特征组成），朗兰兹对应将该集合映射到维数为 n [Dat07, 2.2.7]的不可分解魏尔–德利涅表示。由于朗兰兹对应与由特征 [Dat07, §2.2.1] 进行的扭曲相容，并且由一个特征进行扭曲会保持不可分解性，该集合在由任意特征 χ of $K^\times$（无论是否酉）进行扭曲下保持不变。下一个引理的证明使用了这一稳定性。

引理 2.13。令 π 为 $\mathrm{GL}_n(K)$ 的本质平方可积表示，令 χ 为 $K^\times$ 的一个特征。则 $\mathrm{JL}(\pi \otimes (\chi \circ \text{行列式})) \cong \mathrm{JL}(\pi) \otimes (\chi \circ \text{约化范数})$.

证明。置 $\rho = \mathrm{JL}(\pi)$。令 $g \in \mathrm{GL}_n(K)$ 和 $x \in D^\times$ 为具有相同最小多项式 P 且次数为 n的椭圆正则元素。则 P是 g 的特征多项式，也是 x 的约化特征多项式，因此 $\det g = \mathrm{Nrd}\, x = (-1)^n P(0)$。所以，$\pi \otimes (\chi \circ \text{行列式})$ 在g 处的特征为 $(-1)^{n-1}\chi(\mathrm{Nrd}\, x)\chi_\rho(x)$，这正是 [Dat07, Th´eor`eme 2.1.2] 对对应于 $\rho \otimes (\chi \circ \text{约化范数})$ 的表示所规定的值。表示 $\pi \otimes (\chi \circ \text{行列式})$ 属于 $\mathrm{Disc}_{\mathbb{C}}(\mathrm{GL}_n(K))$，如上所示，因此 [Dat07, Th´eor`eme 2.1.2]中的刻画将其确定为对应于 $\rho \otimes (\chi \circ \text{约化范数})$ 的表示。□

引理 2.14。设 π 是 $\mathrm{GL}_n(K)$ 的超尖点表示，且其中心特征取代数值。那么 $\mathbb{Q}(\pi) = \mathbb{Q}(\mathrm{JL}(\pi)) = \mathbb{Q}(\tau)$，并且它们的共同域 $E = \mathbb{Q}(\pi)$ 是一个数域。

证明。正如 Dat 在 [Dat07, Th´eor`eme 2.1.2], 之后指出的，Jacquet–Langlands 对应与 $\mathbb{C}$ 的自同构可交换；映射 $\pi \mapsto \tau$ [Dat07, Fait 2.2.3] 也如此。Dat 按照定义 1.1 [Dat07, §2.2.1] 对互反律、特征 $|\cdot|$ 和半扭进行规范化。两个对应都是单射，因此三个稳定子相同。

剩下要证明 E 是一个数域。设 ω 是 π 的中心特征，并取一个非分歧特征 χ，使得 $\chi(\varpi)^n = \omega(\varpi)^{-1}$，其中 ϖ 是一致化元。值 $\chi(\varpi)$ 是代数的，而 $\pi_0 = \pi \otimes (\chi \circ \det)$ 的中心特征是有限阶的。表示 $\mathrm{JL}(\pi_0)$ 光滑且有限维，其中心特征与 π_0的中心特征相同，因此其核是开集，并包含中心 $K^\times$ 的一个有限指数子群。由于 $D^\times/K^\times$ 是紧的，$\mathrm{JL}(\pi_0)$ 可经由 $D^\times$ 的一个有限商群分解，因此其特征取值于某个分圆域，且 $E_0 = \mathbb{Q}(\pi_0) = \mathbb{Q}(\mathrm{JL}(\pi_0))$ 是一个数域。此外，π_0 有一个定义在 E_0 [Su23, 引理 4.0.4], 上的模型，对其进行扭曲便得到一个定义在数域 $E_0(\chi(\varpi))$上的 π 的模型。由于 π 的每个定义域都包含 $\mathbb{Q}(\pi)$，共同域 E 是一个数域。□

由于 ρ 和 τ 具有相同的有理性域，因此它们的类可以在 $\mathrm{Br}(E)$ 中相加，而其和本身就是某个表示的布劳尔类。

引理 2.15. 设 π 如引理 *2.14* 中所述，设 $\rho = \mathrm{JL}(\pi)$，设 τ 为其归一化 *Langlands* 参数，并设 $E = \mathbb{Q}(\pi)$。则表示 $\rho \boxtimes \tau$ 的像代数 $D^\times \times W_K$同构于 $A_\rho \otimes_E A_\tau$，且

$$o_E(\rho \boxtimes \tau) = o_E(\rho) + o_E(\tau).$$

证明. 设 V_ρ和 V_τ分别为 ρ和 τ的空间。映射 $A_\rho \otimes_E A_\tau \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_\rho \otimes_{\mathbb{C}} V_\tau)$, $\alpha \otimes \beta \mapsto \alpha \otimes \beta$ 是一个同态，其像为算子 $\rho(x) \otimes \tau(w)$（其中 $x \in D^\times$和 $w \in W_K$）的 E-张成空间；由于其源代数是简单的，该映射是单射。根据引理 2.2，ρ和 τ的算子分别张成 $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_\rho)$ 和 $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_\tau)$，因此 $\rho \boxtimes \tau$的算子张成 $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_\rho \otimes_{\mathbb{C}} V_\tau)$，且 $\rho \boxtimes \tau$不可约，其特征值为 $\mathrm{tr}\ \rho(x)\ \mathrm{tr}\ \tau(w)$，属于 E。因此，$\rho\boxtimes\tau$的像代数是 $A_\rho \otimes_E A_\tau$，其类为 $o_E(\rho) + o_E(\tau)$。□

下面的注记表明，对于有限阶中心特征，在该处所述假设下，此和的不变量在 E 中不位于 p 之上的有限处消失。

注记 2.16（Suzuki 关于有限阶中心特征的论证）。设 π 如引理 2.15 中所述，其中心特征 ω_π 为有限阶，并设 v 是 E 中不位于 p 之上的一个有限赋值。假设满足下文所述的规范化条件。则

$$\mathrm{inv}_v\, o_E(\rho) + \mathrm{inv}_v\, o_E(\tau) = 0.$$

这种消失正是我们记号下的定理形式；Suzuki 在 Su23，定理 4.0.5], 中陈述了该定理，并在 §1.2 中用 Suzuki 的术语回顾了它。Suzuki 的证明使用了 Lubin–Tate 塔对 $\varpi^{\mathbb{Z}}$ 取商，其中 ϖ 是 K 的一致化元。$D^\times$ 的中心元 ϖ 在该商的上同调上作用平凡，因此，只有当 ϖ 在 ρ =JL(π) 上作用平凡时，$\pi^\vee \boxtimes \mathrm{JL}(\pi) \boxtimes \varphi_\pi(-\frac{n-1}{2})$ 才会出现在其中。然而，当中心特征为有限阶时，ϖ 在 ρ 上的作用是一个单位根，且该单位根可能非平凡（在例 3.13 中，它是 ζ_3）。我们沿用 Suzuki 的论证，但改用对下文定义的子群 $\varpi^{d\mathbb{Z}}$ 取商；当 $\rho(\varpi) = 1$时，这就是 Suzuki 所用的商。即使在这种情况下，所述假设也会在我们将其上同调的一个分支与 $\pi^\vee \boxtimes \rho \boxtimes \tau$ 识别的步骤中用到。

令 $\ell \neq p$ 为以下方的素数，设 $k = E_v$，并选取一个代数闭包 $\bar{\ }$，并选取一个域同构 $\mathbb{C} \to k$，使其扩张 $E \to k$；通过该同构，我们将 π、ρ 和 τ 视为定义在 k上的对象。它保持 E上的像代数，因此也保持 $o_E(\rho)$ 和 $o_E(\tau)$。

令 $\zeta = \omega_\pi(\varpi)$，并令 d 为其阶。由 ϖ^d 生成的群 $\varpi^{d\mathbb{Z}}$ 是 $K^\times$的离散余紧子群，对偶表示 $\pi^\vee$ 的中心特征在该子群上平凡。令 H 为以下对象沿各层级取直接极限所得的空间：以 $\mathbb{Q}_\ell$为系数、次数为 $n-1$的紧支撑 ´上同调（étale），其对象是 Lubin–Tate 塔在该层级模去 $\varpi^{d\mathbb{Z}}$ 后的商群，并基变至 K 的代数闭包的完备化（几何一般纤维）；随后将其系数从 $\mathbb{Q}_\ell$ 扩张至 k（Dat 处理的是由 $K^\times$ 中正赋值元素生成的群所作用下的塔的商的整系数上同调 [Dat12, §1.2]）。空间 $H \otimes_k k$ 则是系数为 k 时的同一上同调（有关系数 $\mathbb{Q}_\ell$及其扩张，见 [Str08, §2.5] ）。

群 $G = \mathrm{GL}_n(K)$、$D^\times$ 和 W_K 通过彼此交换的 k-线性作用作用于 H，而 $H \otimes_k k$是 G 的一个可容许表示，且 $\varpi^{d\mathbb{Z}}$ 在其上平凡作用（关于这一上同调及其上的三种作用，见 [Mie16, §3.1] ）。Mieda 版本的非阿贝尔Lubin–Tate理论[Mie16, 定理 3.1], ——Mieda 将其归功于 Harris 和 Taylor、Boyer 以及 Mieda 早期的工作——适用于所有中心特征在 $\varpi^{d\mathbb{Z}}$上平凡的超尖点表示；对于 $\pi^\vee$，它描述了 $H \otimes_k \bar{k}$的 $\pi^\vee$-等型分量。

我们假设，当 W_K 按照 [Mie16, §3.1], 中的方式作用于 H 时，$\pi^\vee$-等型分量$H \otimes_k \bar{k}$ 作为 $G \times D^\times \times W_K$的表示同构于 $\pi^\vee \boxtimes \rho \boxtimes \tau$，其中 $\rho = \mathrm{JL}(\pi)$ 和 $\tau = \varphi_\pi \otimes |\cdot|^{-(n-1)/2}$ 是在 §2.3 和 §2.5 的规范化下与 π 相联系的。我们还假设，[Su23, 定理 4.0.5 和命题 4.0.13]中的扭曲参数 $\varphi_\pi(-\frac{n-1}{2})$ 是 τ，即使 $\rho(\varpi) = 1$时也是如此。

这两种对应都与对偶表示相容，而 Mieda 对 $\frac{n-1}{2}$ 的扭，在我们的规范化下就是对 $|\cdot|^{(n-1)/2}$ 的扭。因此，我们所假设的同构，是将 Mie16 定理 3.1], 应用于 $\pi^\vee$ 时所得的同构 [；这里，该定理中的朗兰兹对应对于 H 上 W_K 的这一作用，采用的是本文中的对应，其中一致化元对应于几何弗罗贝尼乌斯元素 [Dat07，§2.2.1]。

$H \otimes_k \bar{k}$ 的其他分量（Mie16, 第 3 节的分解中，1] 是其他超尖点表示副本之和，或不含超尖点子商，因此不存在从 $\pi^\vee$ 出发的非零映射。由于 $\mathrm{End}_G(\pi^\vee) = \bar{k}$ 且 $\rho \boxtimes \tau$ 是有限维的，遂可得

$t \mapsto (x \mapsto x \otimes t)$ 是 $D^\times \times W_K$的表示的一个同构

$$\rho \boxtimes \tau \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\bar{k}[G]}(\pi^\vee, H \otimes_k \bar{k}).$$

还需将这个 Hom 空间下降到 k。根据 Suzuki [Su23 的引理 4.0.4], π 在 E上有一个模型，因此 $\pi^\vee$ 在 k上有一个模型 P。由于$P \otimes_k \bar{k} \cong \pi^\vee$ 不可约， P也不可约，因而是循环群，尤其是作为 $k[G]$-模有限生成。引理 2.5(i)应用于$\Lambda = k[G]$、 $X = P$、 $Y = H$和 $F' = \bar{k}$后，给出 $\mathrm{Hom}_{k[G]}(P, H) \otimes_k \bar{k}$ 与 $\mathrm{Hom}_{\bar{k}[G]}(\pi^\vee, H \otimes_k \bar{k})$之间的同一关系；该关系与经由 H作用的 $D^\times$和 W_K相容。因此，$\mathrm{Hom}_{k[G]}(P, H)$是 $\rho \boxtimes \tau$在k上的一个模型。根据引理 2.3(i)，将其应用于 $F = E$、 $F = k$和 $L = k$可知， $\rho \boxtimes \tau$的像代数在 k上分裂，其类由引理 2.15 给出，为 $o_E(\rho) + o_E(\tau)$。在该假设下，这证明了 v处的消失。同一个商群也再次出现在问题 6.1 中的 p 上方。

3. Representations of depth zero

本节证明定理 A。命题 3.7 表明， ρ_z 和 τ_z的像代数可表示为定义在其有理性域 E_z的某个循环扩张上的循环代数之矩阵代数，其参数为 z 和 az ，并且生成元互为逆元，因此， z 会在两个类的和中抵消。因此，对于任意 z 的恒等式（§3.4）可归结为计算$o_E(\tau_1)$（其中 $z = 1$）；局部类域论逐个赋值完成这一计算（§3.3）。最后，对于$n \geq 2$ ，表示 π_z 穷尽了具有代数值中心特征的 $\mathrm{GL}_n(K)$的零深度超尖点表示（命题 3.14）；而 $n = 1$ 的情形显然成立（§1.3），故猜想 1.4 在零深度情形下成立（推论 3.15）。

3.1. 表示 ρ_z 和 τ_z。 本节中， K 是 $\mathbb{Q}_p$的有限扩张，其剩余域为 $\mathbb{F}_q$，其中 $q = p^f$，且 $n \geq 2$ 是一个整数。我们使用几何 Frobenius 元 $s \in W_K$、特征 $|\cdot|$ 以及 §2.3 中的互反映射 Art_F和 a_F。

令 $\varpi = a_K(s)$ 为 K 的一致化元，并令 D 为 K 上不变量为 $1/n$ 的中心除代数，其整数环为 $\mathcal{O}_D$，极大理想为 $\mathfrak{p}_D$，且 $U_D^1 = 1 + \mathfrak{p}_D$。我们固定 K 的一个次数为 n 的非分歧扩张 $K_n \subset D$，以及一个满足以下条件的元素 $\Pi \in D$

$$\Pi^n = \varpi, \qquad \Pi x \Pi^{-1} = \mathrm{Frob}(x) \quad (x \in K_n), \tag{3.1}$$

其中 Frob 是 K_n/K 的算术 Frobenius。对于任意一致化元 ϖ，这样的数对都存在，因为 $(K_n/K, \mathrm{Frob}\ \varpi)$ 的不变量为 $1/n$（命题 2.7(ii)），因此它是一个与 D 同构的除代数（定理 2.8(b)）。

映射 a_{K_n} 将惯性群 $I_K = I_{K_n}$ 映满到 $\mathcal{O}_{K_n}^\times$，模 $\mathfrak{p}_{K_n}$ 约化后便定义了一个满射 $I_K \to \mathbb{F}_{q^n}^\times$，$t \mapsto \bar{t}$。通过该映射，我们将 $\mathbb{F}_{q^n}^\times$ 的特征视为 I_K 的特征，因此这样的特征定义在 $\mathcal{O}_{K_n}^\times$ 上，也通过它们的公共商群 $\mathbb{F}_{q^n}^\times$ 定义在 I_K 上。

表示 ρ_z 和 τ_z 分别诱导自 $D^\times$的正规子群 $K_n^\times U_D^1 = \mathcal{O}_D^\times \varpi^{\mathbb{Z}}$ 以及 W_K的正规子群 W_{K_n}。两个商群都是阶为 n的循环群，分别由 Π的像和 s的像生成，而由这些生成元进行的共轭作用为

$$\Pi x \Pi^{-1} \equiv x^q \pmod{\mathfrak{p}_{K_n}} \quad (x \in \mathcal{O}_{K_n}), \qquad \overline{sts^{-1}} = \bar{t}^{\,q^{-1}} \quad (t \in I_K),$$

由 (3.1) 和 §2.3 的温和关系可知，其中 q^{-1} 是模 $q^n - 1$意义下 q 的逆元。因此，由 Π 进行的共轭在 K_n的剩余域 $\mathbb{F}_{q^n}$ 上诱导算术 Frobenius $x \mapsto x^q$；而由几何 Frobenius 元 s 进行的共轭，则在 I_K的商群 $\mathbb{F}_{q^n}^\times$ 上诱导其逆元。

设 $\theta\colon \mathbb{F}_{q^n}^\times \to \mathbb{Q}^\times$ 是一个阶为 m 的特征，其 q 次幂轨道长度为 n，也就是说， θ， θ^q， …， $\theta^{q^{n-1}}$ 互不相同。我们称这样的特征为本原特征。等价地， q在 $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$中的阶为 n。整数 m 整除 $q^n - 1$，但不整除 $q - 1$，因此 $p \nmid m$ 和 $m \geq 3$。

我们固定一个本原的 $\bar{t}$ 的 (q^n-1) 次单位根 ζ_m，并将 θ 与 $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_m)/\mathbb{Q})$ 识别为 $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$，即 c 通过 $\zeta_m \mapsto \zeta_m^c$ 作用所得到的类；如第 1 节中一样，我们令

$$L = \mathbb{Q}(\zeta_m), \qquad \gamma\colon \zeta_m \mapsto \zeta_m^q, \qquad E = L^{\langle\gamma\rangle},$$

因此， γ 是 q的类。由于 q 在模 m下的阶为 n，扩张 L/E 是次数为n 的循环扩张，且 γ 生成伽罗瓦群 $\mathrm{Gal}(L/E)$。

定义 3.1。令 $z \in \mathbb{Q}^\times$。

(i) 设 χ_z 是 $K_n^\times U_D^1$ 的特征，它在 U_D^1 上平凡，在 $\mathcal{O}_{K_n}^\times$ 上（经由剩余域）与 θ 一致，并将 ϖ 映为 z。记 $\rho_z = \mathrm{Ind}_{K_n^\times U_D^1}^{D^\times} \chi_z$。(ii) 设 μ_z 是 W_{K_n} 的特征，它在 I_K 上与 θ 一致，并将 s^n 映为 $(-1)^{n-1}z$。记 $\tau_z = \mathrm{Ind}_{W_{K_n}}^{W_K}(\mu_z) \otimes |\cdot|^{-(n-1)/2}$。(iii) 设 π_z 为 $\mathrm{GL}_n(K)$ 的表示，它在雅各布–朗兰兹对应下与 ρ_z 对应。

特征 χ_z 定义良好，因为 $K_n^\times U_D^1/U_D^1 \cong K_n^\times/(1+\mathfrak{p}_{K_n})$；而 μ_z 存在且唯一，因为 W_{K_n} 由 I_K 和 s^n 生成，并且 s^n 的共轭作用于温和惯性上等同于取 q^{-n} 次幂，这在 $\mathbb{F}_{q^n}^\times$ 上是单位元。数 z 是 ρ_z 的中心特征在 ϖ 处的取值；(iii) 用到了 ρ_z 不可约这一事实（引理 3.2）。

如第 1 节中所述，我们令

$$a = (-1)^{n-1} q^{n(n-1)/2} \in \mathbb{Q}^\times,$$

并回顾一下，$B_{p,\infty}$ 是 $\mathbb{Q}$ 上的四元数代数，恰好在 p 和实赋值处分歧。下一个引理描述了 ρ_z 和 τ_z 的形式，后续所有论证都会用到它们。

引理 3.2. 设 $z \in \mathbb{Q}^\times$。

(i) 令$\mu_z' = \mu_z \otimes \left(|\cdot|^{-(n-1)/2}|_{W_{K_n}}\right)$。则$\tau_z \cong$ 诱导表示$_{W_{K_n}}^{W_K}\,\mu_z'$，特征 μ_z' 在 I_K上与 θ一致，并且 $\mu_z'(s^n) = az$。(ii) ρ_z 在$\mathcal{O}_{K_n}^\times$上的限制，以及 τ_z 在 I_K上的限制，分别是 n 个不同特征 θ^{q^i}、 $0 \le i < n$的直和，每个特征对应一条直线；而 Π和 s分别循环置换这些直线。(iii) 元素 $\varpi = \Pi^n$ 在 ρ_z 上的作用为 z，元素 s^n 在 τ_z 上的作用为 az。

特别地， ρ_z 和 τ_z 是维数为 n 的绝对不可约表示。

证明。 (i) 部分是投影公式，再结合 $|s^n|^{-(n-1)/2} = q^{n(n-1)/2}$ （特征$|\cdot|$在 I_K 上平凡）。若 v张成 ρ_z 的直线，且 $K_n^\times U_D^1$在该直线上按 χ_z作用，则 ρ_z是直线 $\Pi^i v$、 $0 \le i < n$的直和； Π 按循环方式置换这些直线，而 $\mathcal{O}_{K_n}^\times$ 在 $\Pi^i v$ 上按 $\theta^{q^{-i}}$作用，因为 Π^{-1} 的共轭作用在 $\mathbb{F}_{q^n}$上诱导出 $x \mapsto x^q$ 的逆元。这些是 n 个互不相同的特征θ^{q^j}，因为 θ 是本原的，而中心元 ϖ 按 $\chi_z(\varpi) = z$作用。对 Ind μ_z'的直线 $s^i v$作同样的论证，可得 I_K上的特征 θ^{q^i}，因为 $s^{-1}ts = t^q$在温和惯性商群中，且取值为 $\mu_z'(s^n) = az$。由于这些直线上的特征互不相同，在 $\mathcal{O}_{K_n}^\times$ 和 Π下稳定，或在 I_K 和 s下稳定的子空间只能是零空间或整个空间；又因为系数属于 $\mathbb{Q}$，所以这两个表示都是绝对不可约的。□

下一个命题解释了为何选择 τ_z。这是 Prasad and Ramakrishnan 在 [PR12，定理 4.4]中提出的公式，后来由 Bushnell 和 Henniart 证明。

命题 3.3 (Bushnell 和 Henniart [BH11L, 6.3, 推论 1])。 设 $z \in \mathbb{Q}^\times$。 π_z 的朗-兹参数为 诱导表示$_{W_{K_n}}^{W_K}\,\mu_z$。因此， τ_z 是π_z的归一化 *Langlands* 参数。

证明。 我们将 Bushnell 和 Henniart 的陈述改写为我们的记号。他们用可容许温和对 $(K'/K, \vartheta)$ 对零级表示进行参数化，其中 K'/K 是非分歧的，而 ϑ 是 $K'^\times$的一个特征，在主单位上平凡，且其伽罗瓦群 $\mathrm{Gal}(K'/K)$-共轭彼此不同 [BH11L, 1.1]。

为了将我们的数据与这样的对相匹配，我们也用 χ_z 表示 χ_z 在 $K_n^\times$上的限制。在$\mathcal{O}_{K_n}^\times$ 上，此特征是本原特征 θ，且伽罗瓦群 $\mathrm{Gal}(K_n/K)$ 固定 ϖ，因此χ_z 的共轭彼此不同，并且 $(K_n/K, \chi_z)$ 是次数为 n 的可容许温和对。Bushnell 和 Henniart 与该对对应的$D^\times$ 表示，是由 $K_n^\times U_D^1$ 的一个特征诱导而来，该特征延拓了 χ_z ，并且在 U_D^1 [上平凡], BH11L, (1.5.1)], 所以它就是 ρ_z。

在其记号的 $e = 1$ 和 $f = n$ 情形下，Bushnell 和 Henniart 的推论 1 表明，该表示的 Jacquet–Langlands 对应的朗兰兹参数为：

即 π_z，为

$$\mathrm{Ind}_{W_{K_n}}^{W_K}\big((\eta^{n-1}\chi_z)\circ a_{K_n}\big) \qquad \text{[BH11L, 6.3, Corollary 1, (1.4.1) and (1.4.3)]},$$

其中，η 是 $K_n^\times$的非分歧二次特征。这里，Bushnell 和 Henniart 通过互反映射将 $K_n^\times$ 的特征视为 W_{K_n} 的特征；该映射将几何弗罗贝尼乌斯元素映到素元 [BH11L, 1.4], ，这就是我们的 a_{K_n}；他们采用的朗兰兹对应是我们所用的对应，即 Harris 和 Taylor 以及 Henniart 的对应。

对于 $e=1$，[BH11L, (1.4.3)] 中的参数是 [BH11L, (1.4.1)],的诱导表示，因为 Sp_1 对 W_K 的每个不可约表示均保持不变。这里，我们将 Sp_e [BH11L, 1.2] 定义中的指数 $i+(1-n)/2$ 读作 $i+(1-e)/2=0$，正如 [BH11L, 3.1, (3.2.1)和引理 13] 所要求的那样。

还需证明诱导特征（$\eta^{n-1}\chi_z$）$\circ a_{K_n}$ 是 μ_z。它在 I_K上与 θ 一致，因为 η 是非分歧的，也因为我们将 θ 视为 I_K的一个特征。它在s^n 处的取值是唯一需要仔细处理之处。元素 s 在 $\mathrm{Gal}(K_n/K)$ 中的限制是一个生成元，因此根据引理 2.10，$a_{K_n}(s^n)=a_K(s)=\varpi$，于是

$$(\eta^{n-1}\chi_z)\big(a_{K_n}(s^n)\big)=\chi_z(\varpi)\,\eta(\varpi)^{n-1}=(-1)^{n-1}z=\mu_z(s^n).$$

因此，该特征是 μ_z，第二个断言由定义 1.1 得出。 □

由于 τ_z 是不可约的（引理 3.2），$\mathrm{Ind}_{W_{K_n}}^{W_K}\mu_z$ 的 π_z的朗兰兹参数也不可约，因此 π_z 是超尖点表示。它的深度为零，因为 ρ_z 在U_D^1 上是平凡的，而且雅各布–朗兰兹对应保持深度 [ABPS16，推论 2.8]。μ_z 中的符号（-1）$^{n-1}$ 正是中心特征所要求的。在 $\mathrm{Ind}\,\mu_z$ 的基 v，sv，……，$s^{n-1}v$ 中，W_{K_n}通过 μ_z作用于 v，而元素 s 通过 $X^n-\mu_z(s^n)$的伴随矩阵作用，因此

$$\det(\mathrm{Ind}\,\mu_z)(s)=(-1)^{n-1}\mu_z(s^n)=z,$$

局部朗兰兹对应将这个行列式与 a_K 联系起来，对应于 π_z 在 $\varpi=a_K(s)$ 处的中心特征的值z。

3.2. **有理性域与像代数**。现在我们计算 ρ_z 和 τ_z 的有理性域（定义 1.2）及其像代数。有理性域为 $E(z)$（命题 3.7）。然而，将 z 添入 E 后，与 L 的交可能会扩大，进而由 L 生成的 $E(z)$ 的循环扩张次数会小于 n。以下域及次数刻画了这一点。

定义 3.4。对于 $z\in\mathbb{Q}^\times$ 我们令

$$E_z=E(z),\qquad L_z=LE_z,\qquad h_z=[L\cap E_z:E],\qquad d_z=n/h_z,$$

其中复合域和交均取在 $\mathbb{Q}$ 中。限制将 $\mathrm{Gal}(L_z/E_z)$ 与 $\mathrm{Gal}(\overline{L}/L\cap E_z)$ 识别为同一群；后者是由 γ^{h_z} 生成的 $\mathrm{Gal}(L/E)$ 的子群，而我们令 $\gamma_z\in\mathrm{Gal}(L_z/E_z)$ 为限制到 L 上等于 γ^{h_z} 的生成元。

因此 $[L_z:E_z]=d_z$，而对于 $z=1$，我们有 $E_1=E$、$L_1=L$、$h_1=1$、$d_1=n$ 和 $\gamma_1=\gamma$。当 $h_z>1$时，$\mathcal{O}_{K_n}^\times$ 中的一个适当元素通过一个算子作用于 ρ_z，该算子在 E_z 上生成一个与 $L\otimes_E E_z$同构的代数，而 I_K 中的一个适当元素也通过一个算子作用于 τ_z，该算子在 E_z 上生成一个与 $L\otimes_E E_z$同构的代数；后者是由 h_z 个 L_z组成的乘积。于是，像代数是这个域乘积上的交叉积，而下面的引理将此类交叉积化为次数较小的循环代数。

引理 3.5。设 δ是伽罗瓦群(L/E)的一个生成元，设 F'是 E的一个域扩张，并设 $b\in F'^\times$。令 $T=L\otimes_E F'$，其中 δ通过第一因子作用；设 A是一个具有T-基1、u、……、u^{n-1}并满足关系 $uxu^{-1}=\delta(x)$的 F'-代数，其中 $x\in T$且 $u^n=b$。设 e是 T的一个本原幂等元，$g\ge 1$是满足 $\delta^g(e)=e$的最小整数。那么 g 整除 n，域 $L'=eT$是 F' 的一个次数为 n/g 的循环扩张，其伽罗瓦群由δ^g的限制 δ' 生成，并且

$$A\cong M_g\big((L'/F',\delta',b)\big).$$

如果 $b\in E$，那么 $A=(L/E,\delta,b)\otimes_E F'$，并且

$$\mathrm{res}_{F'/E}[(L/E,\delta,b)]=[A]=[(L'/F',\delta',b)].$$

T 的本原幂等元在 δ 下构成一个轨道。其中一个本原幂等元所对应的角 eAe 是 F' 上的循环代数，而元素 $u^i e u^{-j}$ 是连接共轭角的矩阵单位。

证明。由于 L/E 是可分的， T 是有限个域的乘积，而 δ 置换其本原幂等元。某个轨道上的和在 δ 下不变，因而属于域 $T^\delta = F'$，所以 δ 传递地作用，本原幂等元为 e， $\delta(e)\dots,\delta^{g-1}(e)$，且 g 整除 n。由 δ^g 生成的 n/g 阶群忠实地作用于 $L' = eT$ （Gal(L/E) 中在 eT 上平凡的元素，在每个 $\delta^i(e)T$ 上都平凡），其不变环为 eF'（对于被 δ^g 固定的 $x \in eT$，其和 $\sum_{0\le i<g}\delta^i(x)$ 属于 F'）。根据阿廷定理， L'/F' 是次数为 n/g 的循环群，其伽罗瓦群由 δ' 生成。

由于 $u^i e u^{-i} = \delta^i(e)$，乘积 $eu^i e = e\delta^i(e)u^i$ 除非 g 整除 i，否则为零。因此 e

$$eAe = \bigoplus_{0\le j<n/g} L'v^j, \qquad v = eu^g = u^g e,$$

其中 $vxv^{-1} = \delta'(x)$ 对于 $x \in L'$ 和 $v^{n/g} = be$ 成立，因此单代数 $(L'/F',\ \delta',\ b)$ 同构映射到 eAe，二者在 F' 上的维数均为 $(n/g)^2$ 。最后，元素 $e_{ij} = u^i e u^{-j}$、$0 \le i,\ j < g$ 构成一个矩阵单位系，其中 $\sum_i e_{ii} = 1$，因此 $x \mapsto (e_{0i}xe_{j0})_{i,\ j}$ 是从 A 到 $M_g(eAe)$ 的一个同构。当 $b \in E$ 时， A 的表示形式为 $(L/E,\ \delta,\ b) \otimes_E F'$，由此得到最后一个断言。□

在 $F' = E_z$ 上，引理 3.5 给出了像代数的矩阵表示（下一推论的 (i) 部分），并且在 E_z 的完备化上描述了这些代数如何进行局部化（ (ii) 和 (iii) 部分）。

推论 3.6。设 $F = E_z$ 对某个 $z \in \mathbb{Q}^\times$ 成立，设 δ 生成 伽罗瓦群(L/E)，设 $b \in F^\times$，并设 A 为引理 *3.5* 中关于 $F' = F$ 的 F-代数。

(i) 若 $\delta = \gamma$，分别地，若 $\delta = \gamma^{-1}$，则

$$A \cong M_{h_z}\big((L_z/E_z, \gamma_z, b)\big), \quad \textit{resp.} \quad A \cong M_{h_z}\big((L_z/E_z, \gamma_z^{-1}, b)\big).$$

(ii) 设 v 是 F 的一个赋值，设 L' 是域乘积 $L \otimes_E F_v$ 的一个因子，并设 g 是这些因子的数量。则 L' 由 L 的像在 F_v 上生成，整数 g 是使得 δ^g 映射到自身的最小正整数， δ^g 在 L' 上的限制 δ' 生成伽罗瓦群 (L'/F_v)，并且

$$\mathrm{res}_{F_v/F}[A] = [(L'/F_v, \delta', b)] \qquad in\ \mathrm{Br}(F_v).$$

如果 $F = E$，那么 L' 是 L 在 v上方的一个赋值 $\tilde{v}$ 处的完备化 $L_{\tilde{v}}$ ，而 g 是 L 在 v 上方的赋值个数 g_v 。(iii) 设 v 是 F 的一个有限赋值，位于 L 非分歧的某个素数上方，并假设 b是 v处的单位。那么 $\mathrm{res}_{F_v/F}[A] = 0$。

证明。 (i) 此处 $T = L \otimes_E E_z$，而满射乘法映射 $T \to L_z$ 的核是 $(1-e)T$，其中 e 是满足 $eT \cong L_z$的一个本原幂等元。由于该核确定了 e，元素γ^i 当且仅当可扩张为 Gal(L_z/E_z) 的一个元素时才固定 e ，也就是说，当且仅当 h_z 整除 i时成立（定义 3.4）。因此，对于 $\delta = \gamma^{\pm 1}$，有 $g = h_z$ ； $\gamma^{\pm h_z}$ 在 $eT \cong L_z$ 上的限制 δ' 为 $\gamma_z^{\pm 1}$，由引理 3.5 得出 (i)。

(ii) 代数 $A \otimes_F F_v$ 是针对 $F' = F_v$ 的引理 3.5 中的代数，具有相同的 δ 和 b，且其类为 res $_{F_v/F}[A]$。 $L \otimes_E F_v$ 的每个因子都是由 L 的像在 F_v 上生成的，而 δ^i 将因子 $L' = e(L \otimes_E F_v)$ 映到 $\delta^i(e)(L \otimes_E F_v)$。由于 δ 对本原幂等元具有传递作用，满足 $\delta^i(L') = L'$ 的最小 $i \ge 1$ 就是它们的个数 g，由引理可得 $A \otimes_F F_v \cong M_g\big((L'/F_v,\ \delta',\ b)\big)$。对于 $F = E$，这些因子是 v 之上各赋值 $\tilde{v}$ 处的完备化 $L_{\tilde{v}}$；伽罗瓦群 Gal(L/E) 对这些因子的置换方式与其对这些赋值的置换方式相同，因此 $g = g_v$。

(iii) 根据 (ii)， $\mathrm{res}_{F_v/F}[A]$ 是 $(L'/F_v, \delta', b)$ 的类，其中 L'由L 的像生成，因此在 F_v 上非分歧。根据引理 2.9(ii)，该代数分裂，因为 b 在v处是单位。□

命题 3.7。设 $z \in \mathbb{Q}^\times$。表示 ρ_z 和 τ_z 的有理性域均为 E_z，并且

$$A_{\rho_z} \cong M_{h_z}\big((L_z/E_z, \gamma_z, z)\big), \qquad A_{\tau_z} \cong M_{h_z}\big((L_z/E_z, \gamma_z^{-1}, az)\big).$$

特别是 $A_{\rho_1} \cong (L/E, \gamma, 1)$ 以及 $A_{\tau_1} \cong (L/E, \gamma^{-1}, a)$。

¯我们平行地处理 ρ_z 和 τ_z。像为 t的元素在公共商群 $\mathbb{F}_{q^n}^\times$ 中的算子，在 E_z 上生成一个 $L \otimes_E E_z$的副本 T；而 Π 或 s的算子 u 循环置换引理 3.2(ii)中的直线，并将 T正规化。像代数是交叉积 $\bigoplus_{0 \le i < n} Tu^i$，推论 3.6(i)将这一分解转化为矩阵表示。

证明。令 $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$。由引理 3.2(i)，表示 ρ_z^σ和 τ_z^σ分别由 $\sigma \circ \chi_z$和 $\sigma \circ \mu_z'$诱导；它们分别在 $\mathcal{O}_{K_n}^\times$ 和 I_K 上与 $\sigma \circ \theta$ 一致，并分别在 ϖ 处取值 $\sigma(z)$，在 s^n 处取值 $a\sigma(z)$。由引理 3.2 的(ii)和(iii)部分，$\rho_z^\sigma \cong \rho_z$ 当且仅当对于某个 i，有 $\sigma \circ \theta = \theta^{q^i}$且 $\sigma(z) = z$（反过来，$\sigma \circ \chi_z$ 便是 χ_z 经 Π的某个幂共轭所得）；对 τ_z也同样成立，只需以 s 代替 Π。记 $\sigma(\zeta_m) = \zeta_m^c$，我们有 $\sigma \circ \theta = \theta^{q^i}$ 当且仅当 $c \equiv q^i \pmod m$，因此这两个条件可写为

$$\sigma|_L \in \langle \gamma \rangle = \mathrm{Gal}(L/E), \qquad \sigma(z) = z,$$

也就是说，σ 固定 $E(z)$。因此，有理性域为 E_z。

现在令 r 为 ρ_z 或 τ_z。若 $r = \rho_z$，取剩余类为 $\bar{t}$ 的 $t \in \mathcal{O}_{K_n}^\times$；若 $r = \tau_z$，则取像在 $\mathbb{F}_{q^n}^\times$ 中的$\bar{t}$ $t \in I_K$。由引理 3.2(ii)，算子 $r(t)$可对角化，其特征值$\theta^{q^i}(\bar{t}) = \zeta_m^{q^i}$、$0 \le i < n$的重数均为一。这些是 ζ_m 在 E上的最小多项式P 的根，因此 P 也是 $r(t)$在 E_z上的最小多项式；由 $r(t)$生成的 E_z-代数 T同构于 $E_z[X]/(P) \cong L \otimes_E E_z$，其中 $r(t)$对应于 $\zeta_m \otimes 1$。

令 u 为 Π 在 ρ_z上的算子，或为 s在 τ_z上的算子。于是

$$u\,x\,u^{-1} = \delta(x) \quad (x \in T), \qquad u^n = b, \qquad \text{where} \quad (u, b, \delta) = \begin{cases} (\rho_z(\Pi),\, z,\, \gamma) & \text{if } r = \rho_z, \\ (\tau_z(s),\, az,\, \gamma^{-1}) & \text{if } r = \tau_z, \end{cases}$$

并且 δ通过第一因子作用于 $T \cong L \otimes_E E_z$。事实上，由 $\rho_z(\Pi)$进行共轭会将 $\rho_z(t)$发送到$\rho_z(t)^q$，因为由 Π 进行共轭根据 (3.1) 在 $\mathbb{F}_{q^n}$ 上诱导出 $x \mapsto x^q$，而 $1 + \mathfrak{p}_{K_n} \subset U_D^1$ 作用平凡。由 $\tau_z(s)$进行共轭会将 $\tau_z(t)$发送到 $\tau_z(t)^{q'}$，其中 $qq' \equiv 1 \pmod m$；这是因为 s 在温和惯性上的作用是提升至 q^{-1}次幂，而这正是 Π的作用的逆（§3.1）。关系 $u^n = b$就是引理 3.2(iii)。

在 $r(t)$ 的特征向量基下，T 的元素都是对角矩阵，而 u^i 将每条特征直线映射到其后第 i 条特征直线。因此，子空间 Tu^i、$0 \le i < n$分别位于不同的循环对角线中，且它们的和是直和，其关于 E_z的维数为 n^2。每个 Tu^i 都包含于 A_r中，因为 $r(t)$ 和u 都如此，而 A_r 是一个代数。根据引理 2.2，取 $F = E_z$为有理性域，代数 A_r 的维数也为 n^2，因而 $A_r = \bigoplus_{i<n} Tu^i$。于是，$A_r$ 就是针对 $F' = E_z$、生成元 δ 和参数 b的引理 3.5 中的代数 A，而推论 3.6(i)给出了这两个同构。□

3.3. $z = 1$的情形。

定理 3.8. 表示 ρ_1 在 E上有一个模型，使得 $o_E(\rho_1) = 0$。类$o_E(\tau_1) = [(L/E, \gamma^{-1}, a)]$ 的阶至多为 2，因此它也等于 $[(L/E, \gamma, a)]$,，并且当n 为奇数时它消失。$o_E(\tau_1)$ 的局部不变量如下。

(i) 在 E 中位于 p上方的每个赋值 v，

$$\mathrm{inv}_v\, o_E(\tau_1) = \frac{f(n-1)}{2} = \frac{n-1}{2}\,[E_v : \mathbb{Q}_p] \quad in\ \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

(ii) 在每个不位于 p 之上的有限赋值处，包括位于整除 m 的素数之上的赋值处，不变量均为 0。(iii) 域 E 有实赋值，当且仅当 $-1 \in \langle q \rangle \subset (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$。在这种情况下，$n$ 为偶数，且每个实赋值处的不变量均为 $1/2$。(iv) 在每个复处，不变量均为 0。

因此

$$o_E(\tau_1) = (n-1)\,\mathrm{res}_{E/\mathbb{Q}}[B_{p,\infty}] \quad in\ \mathrm{Br}(E). \tag{3.2}$$

我们逐个赋值确定 $(L/E, \gamma^{-1}, a)$ 的类，然后将其与 $(n-1)\,\mathrm{res}_{E/\mathbb{Q}}[B_{p,\infty}]$ 进行比较。在 v 处的 E，推论 3.6(ii) 用一个关于 $L_{\tilde{v}}/E_v$ 、参数为 a 的循环代数表示该类对 E_v 的限制，其中 $L_{\tilde{v}}$ 是 L 在 $\tilde{v}$ （位于 v之上）的完备化。在 p之上的各赋值处以及实赋值处，我们分别根据赋值和 a的符号读出该代数的不变量。在其他有限赋值处，我们证明 a是 $L_{\tilde{v}}$的范数，因此根据引理 2.9(i)，该代数分裂。在 L/E 非分歧的此类赋值处， a 是一个单位，因而是一个范数（引理 2.9(ii)）。困难的一步是在 m的素数因子之上的各赋值处，此时 L/E 可能分歧，单位未必是范数；在这些地方，我们使用关于 a的一个同余关系。

引理 3.9. 设 ℓ 是一个整除 m 的素数，设 v 是 E 上方的一个赋值，设 $\tilde{v}$ 是 L 上方的一个赋值，其中 a 是从 $L_{\tilde{v}}^{\times}$ 到 $E_v^{\times}$ 的范数。

证明。 若 n 是奇数，则 $a = q^{n(n-1)/2} = \mathrm{N}^{L/E}(q^{(n-1)/2})$，因此我们可以假设 n 是偶数。我们将证明 $\mathrm{Art}^{E_v}(a)$ 在 $L_{\tilde{v}}$ 上是平凡的，关键在于 a 模 m 的 ℓ-部分的一个同余。写作 $m = m_\ell m'$，其中 m_ℓ 是 ℓ 的幂，且 $\ell \nmid m'$。在 $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) = (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^{\times}$ 中，取 $H = \langle q \rangle = \mathrm{Gal}(L/E)$，并令 J 为 $\tilde{v}$ 的分解群。于是 $J \cap H$ 是 L/E 中 $\tilde{v}$ 的分解群，而 $J/(J \cap H)$ 的阶为 $[E_v : \mathbb{Q}_\ell]$。我们断言

$$a^{[E_v:\mathbb{Q}_\ell]} \equiv 1 \pmod{m_\ell}.$$

由于 $q^n \equiv 1$ (模 m)，我们有 $a^2 = (q^n)^{n-1} \equiv 1$ (模 m)，这就解决了$[E_v : \mathbb{Q}_\ell]$ 为偶数的情形。

然而， $[E_v : \mathbb{Q}_\ell]$为奇数的情形比较棘手。如果 $m_\ell = 2$，则同余成立，因为a是奇数。

否则 $m_\ell > 2$，我们取 $\tilde{v}$ 的惯性群中的一个 2 阶元素。令 $j \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^{\times}$ 为满足 $j \equiv -1$ (模 m_ℓ) 和 $j \equiv 1$ (模 m') 的类。它的阶为 2，且属于 $\tilde{v}$ 的惯性群，该群由模 m' 同余于 1 的类组成（域 $\mathbb{Q}(\zeta_{m'})$ 在 ℓ 处分歧，而 $\mathbb{Q}(\zeta_{m_\ell})$ 在 ℓ 处全分歧）。因此 $j \in J$。 j 在 $J/(J \cap H)$ 中的像是平凡元，因为该群的阶为奇数，所以 $j \in H$。循环群 H 的阶 n 为偶数，因此它唯一的 2 阶元素是 $q^{n/2}$，从而 $j = q^{n/2}$。于是

$$q^{n/2} \equiv -1 \pmod{m_\ell}, \qquad a = -(q^{n/2})^{n-1} \equiv 1 \pmod{m_\ell},$$

因为 $n-1$ 是奇数。这就证明了该断言。

现在 $a \in \mathbb{Q}_\ell$，所以 $\mathrm{N}^{E_v/\mathbb{Q}_\ell}(a) = a^{[E_v:\,\mathbb{Q}_\ell]}$。Artin映射与范数的相容性 [Mil20，III，引理 3.2] 表明

$$\mathrm{Art}_{E_v}(a)|_{L_{\tilde{v}}} = \mathrm{Art}_{\mathbb{Q}_\ell}\big(a^{[E_v:\mathbb{Q}_\ell]}\big)\big|_{L_{\tilde{v}}}.$$

由于 $\ell \neq p$，数 $a^{[E_v:\,\mathbb{Q}_\ell]}$ 是 $\mathbb{Z}_\ell$的单位。因此，该单位的 Artin 元固定阶与 ℓ 互素的单位根，并将 ℓ-幂阶的单位根提升到 $a^{-[E_v}$次幂$:\,\mathbb{Q}_\ell]$ [Mil20，I，例 3.13], 由该断言可知，它模 m_ℓ 同余于 1。由于 $L_{\tilde{v}} = \mathbb{Q}_\ell(\zeta_m)$，元素 $\mathrm{Art}^{E_v}(a)$ 在 $L_{\tilde{v}}$上平凡，而根据局部类域论 [Mil20，III，定理 3.4(b)]， a 是来自 $L_{\tilde{v}}$ 的范数。□

定理 *3.8* 的证明。 根据命题 3.7， $A_{\rho_1} \cong (L/E,\ \gamma,\ 1)$，它是分裂的，因此根据引理 2.3(i)， ρ_1 在 E 上有一个模型。

根据同一命题， $o_E(\tau_1) = [(L/E,\ \gamma^{-1},\ a)]$。由于 $q^{n-1} \in E$，我们有 $a^2 = q^{n(n-1)} = \mathrm{N}^{L/E}(q^{n-1})$，因此根据命题 2.7(i)和引理 2.9(i)， $2\,o_E(\tau_1) = [(L/E,\ \gamma^{-1},\ a^2)] = 0$。于是，再次根据命题 2.7(i)， $o_E(\tau_1) = -o_E(\tau_1) = [(L/E,\ \gamma,\ a)]$,。如果 n为奇数，那么$a = \mathrm{N}^{L/E}(q^{(n-1)/2})$，且根据引理 2.9(i)，该类消失。

为计算局部不变量，设 v 是 E 的一个赋值， $\tilde{v}$ 是 L 上方的一个赋值，且 v。根据推论 3.6(ii)，取 $F = E$、 $\delta = \gamma^{-1}$ 和 $b = a$,

$$\mathrm{res}_{E_v/E}\ o_E(\tau_1) = \big[(L_{\tilde{v}}/E_v, \gamma^{-g_v}, a)\big],$$

where g_v 是 L 上方赋值的个数，而 γ^{-g_v} 表示其对 $L_{\tilde{v}}$ 的限制。

位于 p 上方。由于 $p \nmid m$，素数 p 在 L中是非分歧的，并且它在 $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$ 中的分解群是子群 $\langle p\rangle$，其阶为 $\mathrm{ord}_m(p)$，即 p 模 m的阶。该子群包含 $q = p^f$，因此包含 $\langle\gamma\rangle$。所以对于 $v \mid p$，我们有 $g_v = 1$，且扩张 $L_{\tilde{v}}/E_v$ 是次数为 n的非分歧扩张。由于 p^f 模 m的阶为 n，

$$[E_v : \mathbb{Q}_p] = \frac{\mathrm{ord}_m(p)}{n} = \gcd\big(\mathrm{ord}_m(p), f\big),$$

因此 $f = c[E_v$ ：对于一个与 n互素的整数 c，有 $\mathbb{Q}_p]$ 。 $L_{\tilde{v}}/E_v$ 的算术 Frobenius 为 $\mathrm{Frob} = p^{[E_v:\ \mathbb{Q}_p]}$，因为 $E_v/\mathbb{Q}_p$ 是非分歧的，因此

$$\gamma = q = p^{c[E_v:\mathbb{Q}_p]} = \mathrm{Frob}^c \qquad \text{on } L_{\tilde{v}}.$$

由于 $g_v = 1$，上面显示的局部化就是 $(L_{\tilde{v}}/E_v,\ \mathrm{Frob}^{-c},\ a)$ 的类。

为应用命题 2.7(ii)，我们转到生成元 Frob^{-1}。若 u 是 $(L_{\tilde{v}}/E_v,\ \mathrm{Frob}^{-c},\ a)$ 的生成元，且 $cc' \equiv 1$（模 n），那么 $u^{c'}$ 通过 Frob^{-1} 及其幂作用于 $L_{\tilde{v}}$，并且它们构成一个 $L_{\tilde{v}}$-基，因此

$$(L_{\tilde{v}}/E_v, \mathrm{Frob}^{-c}, a) \cong (L_{\tilde{v}}/E_v, \mathrm{Frob}^{-1}, a^{c'}).$$

现在，$a^{c'} = \pm p^k$ 满足 $k = c'fn(n-1)/2$，素数 p 是 E_v的一致化元，而单位 ±1没有贡献（引理 2.9(ii)），因此根据命题 2.7，

$$\mathrm{inv}_v\, o_E(\tau_1) = -\frac{k}{n} = -\frac{c'f(n-1)}{2} \quad \text{in } \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

因此，v 处的不变量来自 p-进赋值 a，这是半扭所贡献的。对于奇数 n，这个数以及 (i) 中的两个表达式都是整数。对于偶数 n，整数 c 和 c'都是奇数，因此 $-c'f(n-1)/2 \equiv f(n-1)/2 = c[E_v:\ \mathbb{Q}_p](n-1)/2 \equiv [E_v:\ \mathbb{Q}_p](n-1)/2$模 $\mathbb{Z}$。这就证明了 (i)。

不在 p之上的有限处。设 v 位于素数 $\ell \neq p$之上。若 $\ell \nmid m$，则 L/E 在v 处非分歧，且 a 是 v处的单位，因此根据引理 2.9(ii)，局部化分裂。若 $\ell \mid m$，则根据引理 3.9，a 是来自 $L_{\tilde{v}}$ 的范数，且根据引理 2.9(i)，局部化分裂。这就证明了 (ii)。

无限素点。复共轭作用于 L 上，其对应的类为 -1，由于 $m \geq 3$，该类并不平凡。由于 $E/\mathbb{Q}$ 是阿贝尔的，E 要么是全实的，要么是全虚的；当且仅当复共轭固定 E 时，即当且仅当 $-1 \in \langle q\rangle$ 时，它是全实的。在这种情况下，循环群 $\langle\gamma\rangle$ 包含阶为 2 的元素 -1，因此 n 为偶数，$-1 = \gamma^{n/2}$ 且 $a = -q^{n(n-1)/2} < 0$。

在 E 的实赋值 v 处，L 在 v 上方的各个赋值都是复的，其分解群由 $\gamma^{n/2}$ 生成，因此 $g_v = n/2$，而 γ^{-g_v} 通过复共轭作用于 $L_{\tilde{v}} = \mathbb{C}$（共轭$(z) = \bar{z}$）。因此，根据证明开头关于 $\mathrm{res}_{E_v/E}\ o_E(\tau_1)$ 的公式，$o_E(\tau_1)$ 限制到 $E_v = \mathbb{R}$ 后，是 $(\mathbb{C}/\mathbb{R},\ \text{共轭 } a)$ 的类。由于 $-a > 0$ 是来自 $\mathbb{C}$ 的范数，

$$(\mathbb{C}/\mathbb{R}, \mathrm{conj}, a) \cong (\mathbb{C}/\mathbb{R}, \mathrm{conj}, -1),$$

代数　　哈密顿四元数代数，其不变量为 $1/2$。在复处，布劳尔　　r
群消　　失。这证明了 (iii) 和 (iv)。

最后，根据定理 2.8(a)，类 $(n-1)\ \mathrm{res}_{E/\mathbb{Q}}[B_{p,\infty}]$ 的不变量为 $(n-1)[E_v$：在 p 上方的每个赋值 v 处均为 $\mathbb{Q}_p]/2$，在其他有限处以及复处的不变量为 0；在每个实赋值处，不变量为 $(n-1)/2$，由于当E 有实赋值时 n 为偶数，因此它模 $\mathbb{Z}$ 等于 $1/2$。这些正是 $o_E(\tau_1)$的不变量，因此 (3.2) 中的两个类相等，因为局部化映射 $\mathrm{Br}(E) \to \bigoplus_v \mathrm{Br}(E_v)$ 是单射 [Mil20, VII, 定理 7.1，以及 IV, 定理 3.14]。□

推论 3.10。表示 τ_1 在 E 上有模型，当且仅当 n 为奇数，或者 n 和 f均为偶数且 E 是全虚的。否则，τ_1 的舒尔指标为2。

证明。根据引理 2.3(i)，τ_1 有一个定义在 E 上的模型，当且仅当定理 3.8 中所有不变量都消失。对于奇数 n，这些不变量确实都消失。对于偶数 n，$f(n-1)/2 \equiv f/2$ 在 p 上的不变量当且仅当 f 为偶数时消失，而每个实赋值贡献 $1/2$；这就给出了判定准则，因为 E是全实或全虚。否则，$o_E(\tau_1) =$res $_{E/\mathbb{Q}}[B_{p,\infty}]$ 是非分裂四元数代数$B_{p,\ \infty} \otimes_{\mathbb{Q}} E$的类。它是一个除代数，因此 τ_1 的舒尔指标为 2。□

推论 3.11。 表示 ρ_1、 τ_1 和 π_1 在 L上有模型。表示π_1 的有理性域为 E ，并且在 E上有模型。特别地，这三个表示在 L的每个完备化 $L_{\tilde{v}}$ 上都有模型，并且类 $o_E(\rho_1)$ 和 $o_E(\tau_1)$ 在$\mathrm{Br}(L_{\tilde{v}})$中消失。

证明。表示 ρ_1 和 τ_1 是由 χ_1 及引理 3.2(i) 中的特征 μ_1' 诱导而来，其取值于 L，因为 χ_1 在 $\mathcal{O}_{K_n}^\times$ 上为 θ ，并在 ϖ 处取值 1，而 μ_1' 在 I_K 上为 θ ，并在 s^n 处取值 $a \in \mathbb{Q}^\times$ 。因此它们在 L 上有模型，无需取 q 的平方根，因为半扭在 μ_1' 中只通过 s^n 处的有理数值 $q^{n(n-1)/2}$ 起作用。

对于 π_1 ，我们使用 Suzuki 的结果，这些结果涉及中心特征具有有限阶 [的表示（Su23，假设 4.0.1]）。 π_1 的中心特征与 ρ_1的相同，它在 ϖ 上平凡，并经由 $\mathbb{F}_q^\times$ 因子化到 $\mathcal{O}_K^\times$ 上，因此它具有有限阶；而 π_1是一个具有酉中心特征的 Jacquet–Langlands 对应表示，且平方可积。 π_1的有理性域与 ρ_1的有理性域相同，因为 Jacquet–Langlands 对应与 $\mathbb{C}$ 的自同构相交换（ Dat 在 Dat07 的 [之后的注记，定理 2.1.´eor`eme 2.1.2]），而根据命题 3.7，该域为 E 。因此，根据 Su23 引理 4.0.4], ， π_1 在 E [上有模型，进而在 L 上以及任意 $L_{\tilde{v}}$ 上都有模型。最后，根据引理 2.3(i)， ρ_1 和 τ_1 在 L 上的模型表明， $o_E(\rho_1)$ 和 $o_E(\tau_1)$ 在 Br(L) 中为零，因而在 Br($L_{\tilde{v}}$) 中也为零。□

推论 3.11 说明了为什么恒等式 (1.1) 要在有理性域上陈述。在 L上，或在任意完备化 $L_{\tilde{v}}$上，这两个类都消失了，因此将其限制到这些域会丢失 τ_1 在 p上方各赋值处的不变量$\frac{n-1}{2}[E_v:\mathbb{Q}_p]$ 。

3.4. **任意** z。 对于 $z=1$ ，代数 A_{ρ_1} 是分裂的。对于任意 z ，这两个类都依赖于z，但它们的和为 $(n-1)$ $\mathrm{res}_{E_z/\mathbb{Q}}[B_{p,\infty}]$，其对 z 的依赖仅通过域 E_z体现。

定理 3.12。设 $z \in \mathbb{Q}^\times$。则

$$o_{E_z}(\rho_z) + o_{E_z}(\tau_z) = (n-1)\,\mathrm{res}_{E_z/\mathbb{Q}}[B_{p,\infty}] \quad in\ \mathrm{Br}(E_z). \tag{3.3}$$

因此，该和的不变量在 p上方的每个赋值 v 处为 $\frac{n-1}{2}[E_{z,v}:\mathbb{Q}_p]$ ，在每个实赋值处为 $\frac{n-1}{2}$ ，而在所有其他赋值处为0 。如果 z 在 p上方的赋值 v 处是一个单位，则

$$\mathrm{inv}_v\, o_{E_z}(\rho_z) = 0, \qquad \mathrm{inv}_v\, o_{E_z}(\tau_z) = \frac{n-1}{2}\,[E_{z,v}:\mathbb{Q}_p] \quad in\ \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

当 ρ_z 的中心特征具有有限阶时，这适用于 p 上方的每个赋值；而这当且仅当 z 是单位根时成立。

证明。 由命题 3.7 和命题 2.7(i),

$$o_{E_z}(\rho_z) + o_{E_z}(\tau_z) = [(L_z/E_z, \gamma_z, z)] - [(L_z/E_z, \gamma_z, az)] = -[(L_z/E_z, \gamma_z, a)].$$

这里，韦伊侧的逆生成元产生负号，而参数的可加性抵消了 z。由于 $a \in E$，引理 3.5 应用于 $F' = E_z$、 $\delta = \gamma$ 和 $b = a$，并且推论 3.6(i) 表明 $[(L_z/E_z, \gamma_z, a)] = \mathrm{res}_{E_z/E}[(L/E, \gamma, a)]$。根据定理 3.8, $[(L/E, \gamma, a)]$ =$(n-1)$ $\mathrm{res}_{E/\mathbb{Q}}[B_{p,\infty}]$，这是一个阶至多为 2 的类，因此该和等于 $(n-1)$ $\mathrm{res}_{E_z/\mathbb{Q}}[B_{p,\infty}]$。在有限处，根据定理 2.8(a)，该和的不变量满足：由于 $B_{p,\infty}$ 在 p 处的不变量为 1 2，而在其他素数处的不变量为 0。在 E_z 的实赋值 v 处，我们有 $E_{z,v} = \mathbb{R}$，且不变量为 $(n-1)[B_{p,\infty} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}]$ 的不变量，即 $\frac{n-1}{2}$ 。在复处，Brauer 群为零。

如果 z 在 E_z 上方、位于 p之上的赋值 v 处是一个单位，则根据命题 3.7 和推论 3.6(i) 和 (iii)，$\mathrm{inv}_v\, o_{E_z}(\rho_z) = 0$ ，因为 L 在 $p \nmid m$处分歧，而 $o_{E_z}(\tau_z)$ 在 v 处的不变量由 (3.3) 得出。 ρ_z 的中心特征经由 $\mathbb{F}_q^\times$ 在 $\mathcal{O}_K^\times$ 上分解，并将 ϖ 映为 z，因此当且仅当 z 是单位根时，它具有有限阶；单位根在每个赋值处都是单位。□

例 3.13 （具有有限中心特征的三阶类）。 本例表明，在中心特征具有有限阶时，定理 3.12 中的类 $o_{E_z}(\rho_z)$ 和 $o_{E_z}(\tau_z)$ 可以具有三阶；此时，命题 3.7 中的逆生成元会改变该类。本例还表明，代数 A_{ρ_z} 对于选择 $z=1$ （定理 3.8）是分裂的，但对于其他 z 则未必分裂。

取阶为 7 的 $K=\mathbb{Q}_2$、$n=3$ 和 θ；由于 2 在模 7 下的阶为 3，因此它是本原的。于是 $L=\mathbb{Q}(\zeta_7)$、$\gamma(\zeta_7)=\zeta_7^2$，域 E 是 $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^\times$ 中平方元 $\{1,2,4\}$ 的不动域，即 $\mathbb{Q}(\sqrt{-7})$，并且 $a=8$。设 $z=\zeta_3$ 是本原三次单位根。那么 $E_z=\mathbb{Q}(\sqrt{-7},\zeta_3)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上的次数为 4，且 $L_z=\mathbb{Q}(\zeta_7,\zeta_3)$。域 $L\cap E_z$ 位于 E 与 L 之间，并且 $[L:E]=3$ 是素数，因此它是 E，因为 $[L:\mathbb{Q}]=6$ 不整除 $[E_z:\mathbb{Q}]=4$。于是 $h_z=1, d_z=3$，并且 γ_z 将 ζ_7 映到 ζ_7^2，同时固定 ζ_3。

根据命题 3.7,

$$A_{\rho_z}\cong(L_z/E_z,\gamma_z,\zeta_3),\qquad A_{\tau_z}\cong(L_z/E_z,\gamma_z^{-1},8\zeta_3).$$

由于 $8=\mathrm{N}^{L_z/E_z}(2)$ 是一个范数，命题 2.7(i) 和引理 2.9(i) 表明

$$o_{E_z}(\tau_z)=-[(L_z/E_z,\gamma_z,8\zeta_3)]=-o_{E_z}(\rho_z).$$

因此这两个类互为反代数，其和为 $0=2\mathrm{res}_{E_z/\mathbb{Q}}[B_{p,\infty}]$，正如 (3.3) 所要求的。

我们计算 $o_{E_z}(\rho_z)$ 的不变量，首先考察 7 上方的赋值。素数 7 在 $\mathbb{Q}(\sqrt{-7})$ 中分歧，在 $\mathbb{Q}(\zeta_3)$ 中分裂，因此 E_z 在 7 上方有两个素位 v，每个素位的 $[E_{z,v}$ 为：$\mathbb{Q}_7]=2$，且剩余域为 $\mathbb{F}_7$；在该域中，ζ_3 在一个素位处化为 2，在另一个素位处化为 4。7 在 L_z 中的分歧指数为 6，在 E_z 中为 2，因此 L_z/E_z 在 v 处全分歧，次数为 3，而 A_{ρ_z} 在 v 处的局部化是循环代数 $(L_{z,\tilde{v}}/E_{z,v},\gamma_z,\zeta_3)$，其中 $L_{z,\tilde{v}}=\mathbb{Q}_7(\zeta_7)$。

由引理 2.9(iii)，该代数的不变量为 $t/3$ if $\mathrm{Art}_{E_{z,v}}(\zeta_3)$ 作用于 $L_{z,\tilde{v}}$ 时为 γ_z^t。由于$\zeta_3\in\mathbb{Q}_7$，和：$\mathbb{Q}_7]=2$，范数相容性 [Mil20, III, 引理 3.2] 表明 t

$$\mathrm{Art}_{E_{z,v}}(\zeta_3)|_{L_{z,\tilde{v}}}=\mathrm{Art}_{\mathbb{Q}_7}(\zeta_3^2)|_{L_{z,\tilde{v}}},$$

并且 $\mathrm{Art}_{\mathbb{Q}_7}(\zeta_3^2)$ 将 ζ_7 映到 ζ_7^c，其中 $c\equiv(\zeta_3^2)^{-1}=\zeta_3$ 模 7 [Mil20, I, 例 3.13]。因此，$\mathrm{Art}_{E_{z,v}}(\zeta_3)$ 在 $\zeta_3\equiv 2$ 所在的赋值处以 γ_z 作用于 $L_{z,\tilde{v}}$，在 $\zeta_3\equiv 4$ 所在的赋值处则以 γ_z^2 作用于它。由于 $o_{E_z}(\tau_z)=-o_{E_z}(\rho_z)$，7 上方两个赋值处的不变量为

$$\begin{aligned}&\text{where } \zeta_3\equiv 2,\qquad \mathrm{inv}_v\, o_{E_z}(\rho_z)=\tfrac{1}{3},\qquad \mathrm{inv}_v\, o_{E_z}(\tau_z)=\tfrac{2}{3},\\&\text{where } \zeta_3\equiv 4,\qquad \mathrm{inv}_v\, o_{E_z}(\rho_z)=\tfrac{2}{3},\qquad \mathrm{inv}_v\, o_{E_z}(\tau_z)=\tfrac{1}{3}.\end{aligned}$$

在其他每个有限赋值处，类 $o_{E_z}(\rho_z)=[(L_z/E_z,\ \gamma_z,\ \zeta_3)]$ 均为零；这是将推论 3.6 的 (i) 和 (iii) 部分应用于 $\delta=\gamma$ 和 $b=\zeta_3$ 得出的，因为 $L=\mathbb{Q}(\zeta_7)$ 在 7 以外均非分歧，而ζ_3是一个单位，所以 $o_{E_z}(\tau_z)=-o_{E_z}(\rho_z)$ 在这些地方也为零。域 E_z没有实赋值，因此这两个类的阶均为三。

还需要证明表示 π_z 穷尽了零深度情形（回忆一下，本节中 $n\geq 2$）。

命题 3.14。每个中心特征取代数值的$\mathrm{GL}_n(K)$ 零深度超尖点表示都同构于 π_z，其中 θ 是 $\mathbb{F}_{q^n}^\times$ 上的某个本原特征，且 $z\in\mathbb{Q}^\times$为某个对象。

证明。Jacquet–Langlands 对应保持深度 [ABPS16，推论 2.8]。在$D^\times$上，零深度等价于存在非零的 U_D^1-不变向量 [ABPS16，§2.4 以及命题 2.5], 应用于 $\mathcal{O}_D$，即 D的唯一遗传序。由于 U_D^1 是正规子群，具有此类向量的不可约表示在 U_D^1 上平凡。

Prasad and Ramakrishnan 对在U_D^1 [上平凡的 $D^\times$ 的不可约表示进行了分类 PR12, §4，第 758–759] 页。对于 n的一个因子 d，令 $K_d\subseteq K_n$ 为 K 的 d次非分歧扩张。维数为 d 的表示对应于 $K_d^\times$ 上在 $1+\mathfrak{p}_{K_d}$ 上平凡且其 Gal(K_d/K)-共轭两两不同的特征的 Gal(K_d/K)-轨道（Prasad and Ramakrishnan 将此类特征称为正则特征）。由于 Gal(K_d/K)固定 ϖ，最后一个条件意味着，限制到 $\mathcal{O}_{K_d}^\times$ 后所得特征来自 $\mathbb{F}_{q^d}^\times$ 上的一个特征，其 d 个元素的轨道的阶为 q的幂。维数为 d的表示所对应的 Weil–Deligne 参数含有因子 $\mathrm{sp}_{n/d}$ [PR12, 定理 4.4], ；而超尖点表示具有不可约 Weil 参数和零单值化，因此 $d=n$。

对于 $d=n$，与这类特征 χ 相关联的表示 $K_n^\times$，是由 $K_n^\times U_D^1$上的特征诱导而来；该特征 χ的延拓在 U_D^1上取平凡值。其中心特征，也就是

相应的 $\mathrm{GL}_n(K)$ 表示的中心特征，将 ϖ 映为 $\chi(\varpi)$，并在 $\mathcal{O}_K^\times$ 上取单位根为值。因此，当且仅当 $z=\chi(\varpi)$属于 $\mathbb{Q}^\times$时，它才取代数值；此时，该表示是由本原特征 θ 在 $\mathbb{F}_{q^n}^\times$上诱导出的 ρ_z。□

现在我们可以证明零深度情形下的猜想 1.4。

推论 3.15。猜想 *1.4* 对每个具有代数值中心特征的零深度超尖点表示都成立。对于每个 $z\in\mathbb{Q}^\times$，表示 π_z、ρ_z 和 τ_z 具有共同有理性域 E_z，并且

$$o_{E_z}(\rho_z)+o_{E_z}(\tau_z)=(n-1)\,\mathrm{res}_{E_z/\mathbb{Q}}[B_{p,\infty}].$$

证明。对于 $n=1$，猜想成立（§1.3）。对于 $n\geq 2$，命题 3.14 将断言归结为 π_z。命题 3.3 将其归一化朗兰兹参数确定为 τ_z，而命题 3.7 表明 $\mathbb{Q}(\rho_z)=\mathbb{Q}(\tau_z)=E_z$。引理 2.14 适用于 π_z，其中心特征取代数值，因此 $\mathbb{Q}(\pi_z)=\mathbb{Q}(\rho_z)=E_z$ 也成立。由定理 3.12 即得该等式。□

第 4 节探讨一般情况下这两个类之间的差距究竟能有多大。

4. Schur indices and a family with unbounded unequal indices

恒等式 (1.1) 无论在何处成立，都会迫使 ρ 和 τ 的舒尔指标具有相同的奇数部分，且两者相差至多一个因子 2（§4.1），

$$\frac{\mathrm{ind}\,A_\tau}{\mathrm{ind}\,A_\rho}\in\left\{\tfrac{1}{2},1,2\right\}.$$

然而，在这些限制范围内，指标仍可能不相等，且可以无界。在 §4.2 中，我们构造了简单超尖点表示，其两个类的指标分别为 n 和 $n/2$；具体做法是用同一个有理性域的循环扩张所对应的循环代数来表示这两个类。

在本节中，π 是 $\mathrm{GL}_n(K)$ 的一个超尖点表示，其中心特征取代数值；$\rho=\mathrm{JL}(\pi)$、归一化参数 τ 和域 E 均与第 1 节中的定义相同，因此 $E=\mathbb{Q}(\pi)=\mathbb{Q}(\rho)=\mathbb{Q}(\tau)$ 是一个数域（引理 2.14）。

4.1. 关于舒尔指标的推论。回顾定义 1.3 中的像代数 A_ρ 和 A_τ 是中心单 E-代数，并且 A_τ 的次数为 n。对于中心单 E-代数 A 以及 E 的赋值 v，我们分别用 $\mathrm{ind}\,A$ 表示 A 的指标，用 $\mathrm{ind}_v A$ 表示 $A\otimes_E E_v$ 的指标。在局部域（包括 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{C}$）以及数域上，中心单代数的指标等于其类的阶 [Poo17，定理 1.5.34(iv) 和 1.5.36(iv)]。由于 $\mathrm{Br}(E)$ 中的类由其局部不变量 [Mil20，VII，定理 7.1]，决定，因此可知，$\mathrm{ind}\,A$ 是各个指标 $\mathrm{ind}_v A$ 的最小公倍数，而 $\mathrm{ind}_v A$ 是 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 中 $\mathrm{inv}_v[A]$ 的阶。

本小节的两个命题建立在关于 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 中的阶的以下基本事实之上。

引理 4.1。设 x、$y\in\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 的阶分别为 m 和 m'，并假设 $x+y\in\{0,\frac{1}{2}\}$。若 $x+y=0$，则 $m'=m$。若 $x+y=\frac{1}{2}$，则

$$m'=\begin{cases}2m, & m\ \text{odd},\\ m/2, & m\equiv 2 \pmod 4,\\ m, & 4\mid m.\end{cases}$$

在所有情况下，m 和 m' 的奇数部分相同，且 $m'/m\in\{\frac{1}{2},1,2\}$。

证明。如果 $x+y=0$，那么 $y=-x$的阶为 x。设 $x+y=\frac{1}{2}$，并写作 $x=c/m$，其中 $\gcd(c,m)=1$，从而 $y=(m-2c)/(2m)$。如果 m 为奇数，那么 $m-2c$ 为奇数且与 m互素，因此 y 的阶为 $2m$。如果 $m=2k$ 且 k 为奇数，那么 c 为奇数，所以 $k-c$ 为偶数，并且 $y=(k-c)/2$，其中 $(k-c)/2$ 与 k 互素，因为 $k-c$ 是。因此 y 的阶为 $k=m/2$。如果 $4\mid m$，那么 c 为奇数，且 $y=(m/2-c)/m$，其中 $m/2-c$ 为奇数；同时，任何同时整除 m 和 $m/2-c$的奇素数都将整除 c。因此 y 的阶为 m。□

在 E 位于 p之上的一个赋值 v 处，限制将局部不变量乘以局部次数 [Mil20, III, §2, (29)], 和 $\mathrm{inv}_p B_{p,\infty} = \frac{1}{2}$，因此 (1.1) 蕴含

$$\mathrm{inv}_v o_E(\rho) + \mathrm{inv}_v o_E(\tau) = \frac{n-1}{2}[E_v : \mathbb{Q}_p] \qquad \text{in } \mathbb{Q}/\mathbb{Z}. \tag{4.1}$$

命题 *4.2.* 设 v 是 E 上方的一个赋值，令 $m_\rho =$ 诱导表示$_v A_\rho$ 和 $m_\tau =$ 诱导表示$_v A_\tau$，并假设 v 处满足 *(4.1)*。则 m_ρ 和 m_τ 整除 n。若 $(n-1)[E_v : \mathbb{Q}_p]$ 为偶数，则 $\mathrm{inv}_v o_E(\tau) = -\mathrm{inv}_v o_E(\rho)$，且 $m_\tau = m_\rho$。若 $(n-1)[E_v : \mathbb{Q}_p]$ 为奇数，则 m_τ 等于 $2m_\rho$、$m_\rho/2$ 或 m_ρ，分别取决于 m_ρ 为奇数、$m_\rho \equiv 2$ （模 4）或 $4 \mid m_\rho$。

证明。指标 m_ρ 和 m_τ 分别是 $x = \mathrm{inv}_v o_E(\rho)$ 和 $y = \mathrm{inv}_v o_E(\tau)$ 的阶，而 $x+y$ 根据 $(n-1)[E_v : \mathbb{Q}_p]$ 为偶数还是奇数，取 0 或 $\frac{1}{2}$。因此，引理 4.1 按照所述由 m_ρ 确定 m_τ。由于 $A_\tau \otimes_E E_v$ 的次数为 n，其指标 m_τ 整除 n。若 $(n-1)[E_v : \mathbb{Q}_p]$ 为偶数，则 $m_\rho = m_\tau$ 整除 n。若 $(n-1)[E_v : \mathbb{Q}_p]$ 为奇数，则 n 为偶数，因此 n 消去 $\frac{1}{2}$ 和 y，从而也消去 $x = \frac{1}{2} - y$，且 m_ρ 整除 n。□

命题 4.3。假设 (1.1)。那么 指标 A_ρ和 指标 A_τ都整除 n，且奇数部分相同，并且 指标 A_τ/ 指标 $A_\rho \in \{\frac{1}{2}, 1, 2\}$。若 n为奇数，则 $o_E(\tau) = -o_E(\rho)$，且 指标 A_τ =指标 A_ρ。

证明。由于 A_τ的次数为 n，其指标整除 n，因此 n 消去 $o_E(\tau)$。(1.1) 的右侧也被 n消去，因为 $2[B_{p,\infty}] = 0$ 和 $n(n-1)$均为偶数。因此 n 消去 $o_E(\rho)$；又由于 Br(E) 中一个类的指标等于其阶，两个指标都整除 n。在 E 的每个赋值 v 处，$(n-1)\,\mathrm{res}_{E/\mathbb{Q}}[B_{p,\infty}]$ 的局部不变量属于 $\{0, \frac{1}{2}\}$，因此根据 (1.1) 和引理 4.1，局部指标 $\bar{\mathrm{ind}}_v A_\rho$与 $\mathrm{ind}_v A_\tau$ 的奇数部分相同，且它们的 2-adic 赋值至多相差 1。整体指标是局部指标的最小公倍数，因此它们也满足同样的性质，这就是第二个断言。若 n 为奇数，则 $n-1$ 为偶数，且 (1.1) 的右侧为零，所以$o_E(\tau) = -o_E(\rho)$。□

注 4.4：命题 4.2 中指标不相等的两种情形都会出现。如果 π 具有零深度且中心特征为有限阶，那么在每个位于 p 之上的赋值 v 处都有 $\mathrm{inv}_v o_E(\rho) = 0$ （定理 3.12 和命题 3.14），因此 $m_\rho = 1$；而当 $(n-1)[E_v$ 时，$m_\tau = 2 : \mathbb{Q}_p]$ 为奇数。定理 4.5 的族满足 $(n-1)[E_v : \mathbb{Q}_p]$ 为奇数，且在每个位于 p之上的赋值处都有 $m_\rho = n$ 和 $m_\tau = n/2$，其中 $n = p-1$ 无界；其两个类的整体指标也分别为 n 和 $n/2$。

4.2. **具有无界不等指标的一个族**。在本小节中，$p \geq 7$ 是一个满足 $p \equiv 3$ （模 4）的素数，并且

$$n = p - 1, \qquad q = p^n.$$

设 K 是 $\mathbb{Q}_p$ 的次数为 n的非分歧扩张，其剩余域为 $\mathbb{F}_q$；固定 K的一个一致化元 ϖ，并令 D 为 K 上的中心除代数，其不变量为 $1/n$。固定 κ 作为 $\mathbb{F}_p^\times$的一个生成元，并固定 b 作为 $\mathbb{F}_q^\times$的一个生成元，使得 $b^{(q-1)/n} = \kappa$ （映射 $x \mapsto x^{(q-1)/n}$ 将 $\mathbb{F}_q^\times$的生成元映射到 $\mathbb{F}_p^\times$的生成元），并将 κ 和 b 与它们在 $\mu_{q-1} \subset K$中的 Teichmüller 表示相对应。令 $\chi\colon \mathbb{F}_q^\times \to \mathbb{C}^\times$ 和 $\psi\colon \mathbb{F}_q \to \mathbb{C}^\times$ 为特征

$$\chi(b) = \zeta_n, \qquad \psi(x) = \zeta_p^{\mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}(x)},$$

其中 ζ_N 表示 $\mathbb{C}$ 中固定的一个本原 N 次单位根。令 $\pi = \pi_{1,\chi,1}$ 为 Imai and Tsushima [IT20, §5.1] 中定义的 GL$_n(K)$ 的简单超尖点表示，其中 ϖ 是一致化元，而 $\zeta = 1$ 和 $c = 1$ 是其记号中的参数。

我们将 K 的剩余次数取为 n，原因有二：这使得 χ 在 $\mathbb{F}_p^\times$ 上平凡，正如我们在引理 4.7 之前所验证的；并且由于 n 为偶数，这使得 $q = p^n$ 成为平方，因此半扭取有理值，且 τ 与 φ_π 具有相同的像代数（引理 4.7 证明的末尾）。

最后，令

$$E = \mathbb{Q}(\zeta_n), \qquad E' = E(\zeta_p).$$

由于 E 在 $p \nmid n$ 上非分歧，而 $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ 在 p 上全分歧，因此域 $E \cap \mathbb{Q}(\zeta_p)$ 是 $\mathbb{Q}$，且 E'/E 是次数为 $p-1 = n$ 的循环群。令 γ_κ 为 Gal(E'/E) 的生成元，使得 $\gamma_\kappa(\zeta_p) = \zeta_p^\kappa$。

定理 4.5。表示 π、ρ 和 τ 具有以下性质。

(i) π 的中心特征具有有限阶， π 不是自对偶的，而 $\mathbb{Q}(\pi) = \mathbb{Q}(\rho) = \mathbb{Q}(\tau) = E$.
(ii) 布劳尔类为

$$o_E(\rho) = [(E'/E, \gamma_\kappa, \zeta_n^{-1})], \qquad o_E(\tau) = [(E'/E, \gamma_\kappa, -\zeta_n)].$$

(iii) 素数 p 在 E中完全分裂。对于 $j \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ ，令 v_j 为 E 中位于 p之上的赋值，使得 $\zeta_n \equiv \kappa^j$。那么

$$\mathrm{inv}_{v_j} o_E(\rho) = \frac{j}{n}, \qquad \mathrm{inv}_{v_j} o_E(\tau) = -\frac{j}{n} - \frac{1}{2},$$

并且这两个类在 E的每个其他赋值处的不变量均为0 。
(iv)在 E 中位于 p 之上的每个赋值处， ρ 和 τ 的局部舒尔指标分别为 n 和 $n/2$，且诱导表示 $A_\rho = n$，诱导表示 $A_\tau = n/2$。(v) 两个类之和为 $o_E(\rho) + o_E(\tau) =$ 转移$_{E/\mathbb{Q}}[B_{p,\infty}]$，因此(1.1) 成立。

定理 B 由定理 4.5 的 (i) 和 (iii)–(v) 部分推出，其中 (iii) 部分通过同余关系 $\zeta_n \equiv \kappa^j$确定了 p 之上各赋值的标记 v_j 。定理 4.5 中的舒尔指标没有上界，因为存在无穷多个素数 $p \equiv 3$ (模 4)（欧几里得论证适用于 $4p_1 \cdots p_r - 1$）。

例 4.6。这一族中最小的成员，其指标已经不相等，分别为 6 和 3；两个类的不变量在 7 上方的两个赋值处都相加为 1/2。取 $p = 7$，使得 $n =$6和 $q = 7^6$。取 $\kappa = 3$，它是 $\mathbb{F}_7^\times$的一个生成元；再取 $\mathbb{F}_q^\times$的一个生成元 b ，使得 $b^{(q-1)/6} = 3$。于是$E = \mathbb{Q}(\zeta_6)$，且 $E' = \mathbb{Q}(\zeta_6, \zeta_7)$，而 γ_3固定 ζ_6并将 ζ_7映到 ζ_7^3。由定理 4.5(ii)，这两个类分别为 $o_E(\rho) = [(E'/E, \gamma_3, \zeta_6^{-1})]$和 $o_E(\tau) = [(E'/E, \gamma_3, -\zeta_6)]$。 ζ_6 的最小多项式$X^2 - X + 1$ 模 7 的根为 $3 = 3^1$ 和 $5 = 3^5$ ，因此素数 7 在 E 中分裂为赋值 v_1（其中 $\zeta_6 \equiv 3$）和 v_5（其中 $\zeta_6 \equiv 5$），二者的完备化均为 $\mathbb{Q}_7$。由定理 4.5(iii)， $o_E(\rho)$和 $o_E(\tau)$在 v_1 和 v_5 处的不变量组成的有序对为

$$\big(\mathrm{inv}_{v_1} o_E(\rho), \mathrm{inv}_{v_1} o_E(\tau)\big) = \big(\tfrac{1}{6}, \tfrac{1}{3}\big), \qquad \big(\mathrm{inv}_{v_5} o_E(\rho), \mathrm{inv}_{v_5} o_E(\tau)\big) = \big(\tfrac{5}{6}, \tfrac{2}{3}\big).$$

所有其他不变量均为零，因此舒尔指标为 6 和 3。每一对的和在 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$处为1_2 ，所以根据 (1.1)，该和在 7 上方的两个素位处的不变量均为1_2 。半扭使 s 的算子乘以有理数 $q^{5/2} = 7^{15}$，因此 τ 和 φ_π 具有相同的像代数（参见引理 4.7 证明的末尾）。

我们根据 Imai and Tsushima 对 ρ 和 φ_π 的描述，得到定理 4.5(ii)中的两个循环代数：在韦伊侧，它们是像代数 A_τ 本身（引理 4.7）；在 $D^\times$ 侧，它们是A_ρ 的一个角（引理 4.8）。我们回顾 Imai and Tsushima 在 IT20, §5.1] 中关于 $\zeta = c = 1$的数据，并将其用于复系数情形。设 α 是 $X^n - \varpi$ 和 $K_\alpha = K(\alpha)$的一个根。Imai and Tsushima 通过从 W_{K_α}的一个特征诱导得到 φ_π ，并通过从 $D^\times$的子群 $K_\alpha^\times U_D^1$ 的一个特征诱导得到 ρ ，其中 K_α 嵌入于 D。他们从 Bushnell 和 Henniart [BH05, BH11J]的本质温和对应推出这一描述（他们的雅可比–朗兰兹对应从 $D^\times$ 到 GL$_n$ (K)，因此他们的恒等式 JL($\rho_{1,\chi}$,1) = $\pi_{1,\chi}$,1 是我们的 ρ =JL(π)）。由于 $\mu_n \subset K$ 和 $p \nmid n$，扩张 K_α/K 是次数为 n的循环、全分歧且温和分歧扩张。记 $U_{K_\alpha}^i = 1 + \alpha^i \mathcal{O}_{K_\alpha}$，并固定一个 K 的加法特征 ψ_K ，使得对 $x \in \mathcal{O}_K$有$\psi_K(x) = \psi(\bar{x})$。

对于 φ_π，Imai and Tsushima 定义了 $K_\alpha^\times$ 的特征 ξ 和 μ，如下：

$$\xi(\alpha) = 1, \qquad \xi(x) = \chi(\bar{x}) \ \ (x \in \mu_{q-1}),$$
$$\xi(y) = \psi_K\big(\mathrm{Tr}_{K_\alpha/K}(\alpha^{-1}(y-1))\big) \ \ (y \in U_{K_\alpha}^1),$$
$$\mu(\alpha) = \lambda_{K_\alpha/K}(\psi_K), \qquad \mu|_{K^\times} = \delta_{K_\alpha/K}, \qquad \mu|_{U_{K_\alpha}^1} = 1,$$

其中， $\delta_{K_\alpha/K}$是诱导表示$_{K_\alpha/K}1$的行列式，而 $\lambda_{K_\alpha/K}(\psi_K)$是 Langlands 常数，他们证明了

$$\varphi_\pi \cong \mathrm{Ind}_{W_{K_\alpha}}^{W_K}(\mu^{-1}\xi)$$

[IT20，命题 5.4]。这里，特征 μ 是校正因子，Imai 和 Tsushima 通过局部互反律将 $K_\alpha^\times$的特征视为 W_{K_α} 的特征，并将其标准化为一致化元对应于几何弗罗贝尼乌斯元素 [IT20，§1.1]。

对于 ρ，我们如同在 (3.1) 中那样，固定此处的统一化元 ϖ，并取一个次数为 n、剩余域为 $\mathbb{F}_{q^n}$ 的 K 的非分歧扩张$K_n \subset D$，以及满足 $\Pi^n = \varpi$ 和 $\Pi x \Pi^{-1} = \mathrm{Frob}(x)$ 的 $\Pi \in D$，其中 $x \in K_n$。因此 $D = \bigoplus_{i<n} K_n \Pi^i$，且对于 $x \in \mu_{q^n-1}$，有 $\Pi x \Pi^{-1} = x^q$。我们通过$\alpha \mapsto \Pi$将 K_α 嵌入到 D 中，并记作 $U_D^i = 1 + \Pi^i \mathcal{O}_D$。Imai and Tsushima 将 $K_\alpha^\times U_D^1$ 的特征 Θ 定义为

$$\Theta(\Pi) = -1, \qquad \Theta(x) = \chi(\bar{x}) \quad (x \in \mu_{q-1}),$$
$$\Theta(h) = \psi_K\big(\mathrm{Trd}_{D/K}(\Pi^{-1}(h-1))\big) \quad (h \in U_D^1)$$

（此处其在 Π 处的取值 $(-1)^{n-1}c$ 为 -1），并证明

$$\rho \cong \mathrm{Ind}_{K_\alpha^\times U_D^1}^{D^\times} \Theta$$

[IT20，命题 5.4]。这个诱导表示与将 K_α 嵌入D [的方式无关。IT20，§5.1]。

以下证明中反复用到关于剩余域的三个事实。令 ε为 $\mathbb{F}_q^\times$的二次特征。则

$$\chi|_{\mathbb{F}_p^\times} = 1, \qquad \varepsilon|_{\mathbb{F}_p^\times} = 1, \qquad \varepsilon(b) = -1.$$

特征 χ 在 $\mathbb{F}_p^\times$上是平凡的，因为 $\kappa = b^{(q-1)/n}$ 生成 $\mathbb{F}_p^\times$，且 $(q-1)/n = 1 + p + \cdots + p^{n-1} \equiv n \equiv 0$（模 n），因此 $\chi(\kappa) = \zeta_n^{(q-1)/n} = 1$。特征 ε 在 $\mathbb{F}_p^\times$上是平凡的，因为 $\mathbb{F}_p$ 中的每个元素都是偶次数扩张 $\mathbb{F}_q$ 中的平方，这使得校正因子值 $\mu(\alpha)$成为一个符号（引理 4.7）。最后，$\varepsilon(b) = -1$，因为 b 生成 $\mathbb{F}_q^\times$。

在韦伊侧，φ_π 由 K_α的韦伊群 W_{K_α} 的特征 $\xi' = \mu^{-1}\xi$ 诱导而来。W_{K_α} 的算子在 E 上张成 E'的一个对角副本。令 $g \in W_K$ 为满足 $a_K(g) = b$的元素。引理 4.7 的证明表明，g 限制为 $\mathrm{Gal}(K_\alpha/K)$的一个生成元，g 的算子正规化 E' 的对角副本，并通过 γ_κ作用于其上；该副本与此算子生成 A_{φ_π}，后者正是引理 4.7 中的循环代数。这里有两个步骤需要谨慎处理。按照 §2.3 的互反律约定，元素 g 满足 $g(\alpha) = \kappa\alpha$，而这一对 α 的作用决定了自同构 γ_κ，即 g 的算子通过共轭作用于 E'的对角副本时所对应的自同构。标量 $\xi'(g^n)$所带的符号来自 Imai and Tsushima 的校正因子中的二次特征。

引理 4.7. 特征 $\xi' = \mu^{-1}\xi$ 取值于 E'，并且

$$\xi'(\alpha) = \pm 1, \qquad \xi'(x) = \chi\varepsilon(\bar{x}) \quad (x \in \mu_{q-1}),$$
$$\xi'(1 + x\alpha) = \psi(n\bar{x}) \quad (x \in \mathcal{O}_K), \qquad \xi'|_{U_{K_\alpha}^2} = 1.$$

特别地，$\xi'(b) = -\zeta_n$。此外，$\mathbb{Q}(\varphi_\pi) = \mathbb{Q}(\tau) = E$，并且

$$A_{\varphi_\pi} = A_\tau \cong (E'/E, \gamma_\kappa, -\zeta_n).$$

证明。由于 μ在 $U_{K_\alpha}^1$上平凡，特征 ξ'在此处与 ξ一致，而 $\mathrm{Tr}^{K_\alpha/K}(\alpha^{-1} \cdot x\alpha) = nx$给出 $\xi'(1 + x\alpha) = \psi(n\bar{x})$，其中 $x \in \mathcal{O}_K$。对于 $y \in U_{K_\alpha}^2$，元素 $\alpha^{-1}(y-1)$ 属于 $\alpha\mathcal{O}_{K_\alpha}$，其迹属于 $\varpi\mathcal{O}_K$，因此 $\xi'(y) = 1$，并且 $U_{K_\alpha}^1 = (1 + \alpha\mathcal{O}_K)U_{K_\alpha}^2$。在 $\mu_{q-1} \subset K^\times$上，特征 μ为 $\delta_{K_\alpha/K}$，而在 $\mathcal{O}_K^\times$上它是 $x \mapsto \varepsilon(\bar{x})^{n-1} = \varepsilon(\bar{x})$ [IT20，引理 5.3]，，因为 $n-1$ 为奇数。因此，$\xi'(x) = \chi\varepsilon(\bar{x})$ 在此处成立，并且 $\xi'(b) = \chi(b)\varepsilon(b) = -\zeta_n$。

由于 n 是偶数，证明 [IT20 命题 5.15] 中的公式 (5.22) 可写为

$$\lambda_{K_\alpha/K}(\psi_K) = \Big(\frac{n/2}{q}\Big)\mathfrak{m}(\psi_K)^{n-1}, \qquad \mathfrak{m}(\psi_K)^2 = \Big(\frac{-1}{q}\Big)$$

[IT20, (5.18)]，其中 $(\frac{\cdot}{q})$ 是 $\mathbb{F}_q$的二次剩余符号，也就是说，ε。$n/2$ 和 -1 都属于 $\mathbb{F}_p^\times$，而 ε在其上是平凡的，因此 $\mathfrak{m}(\psi_K) = \pm 1$且 $\xi'(\alpha) = \lambda_{K_\alpha/K}(\psi_K)^{-1} = \pm 1$。所以 ξ'的取值属于 E'，并且它在 $1 + \alpha\mathcal{O}_K$ 上的取值恰好是所有 p次单位根，因为 $p \nmid n$。

为了描述 Ind ξ'，我们需要一个 W_K 中的元素，其限制是 Gal(K_α/K)的一个生成元。设 $g \in W_K$是满足 $a_K(g) = b$的元素。我们断言 $g(\alpha) = \kappa\alpha$。令 $P(X) = \varpi X + X^q$，并令 t为 P的一个非零根。对于 $\zeta \in \mu_{q-1}$，级数 ζX与 P可交换，因此它是 P的卢宾–泰特形式群的自同态 $[\zeta]_P$。单位$x \in \mathcal{O}_K^\times$ 的算术阿廷符号在该群的扭点上的作用为 $[x^{-1}]_P$ [（Mil20, I, 1.14, 1.15], ）；根据 (2.1)，元素 g 在这些扭点上的作用是 b的算术阿廷符号的逆元，也就是说，作用为$[b]_P$。

还需要从挠点 t 过渡到 $X^n - \varpi$的一个根。取 η 于 K 的最大非分歧扩张中，使得 $\eta^n = -1$。单位的阿廷符号在该扩张上作用平凡 [Mil20, I, 1.8], ，而 g 在其上的作用是单位 b的阿廷符号的逆元，因此$g(\eta) = \eta$。于是

$$\begin{aligned} t^{q-1} &= -\varpi, \qquad g(t) = [b]_P(t) = bt, \\ \beta &= t^{(q-1)/n}, \quad \beta^n = -\varpi, \quad g(\beta) = b^{(q-1)/n}\beta = \kappa\beta, \\ \alpha' &= \beta/\eta, \qquad \alpha'^n = \varpi, \quad g(\alpha') = \kappa\alpha'. \end{aligned}$$

$X^n - \varpi$ 的每个根都具有 $\zeta\alpha'$ 的形式，其中 $\zeta \in \mu_n \subset K$，所以 $g(\alpha) = \kappa\alpha$，并且由于 κ 的阶为 n，g 限制为 Gal(K_α/K)的一个生成元。

局部互反律与共轭相容，因此对于与 $y \in K_\alpha^\times$对应的 $h \in W_{K_\alpha}$，元素 ghg^{-1} 对应于 $g(y)$。我们在$K_\alpha^\times$的生成元上验证 $\xi'(g(y)) = \gamma_\kappa(\xi'(y))$。在 μ_{q-1} 上，自同构 g 作用平凡，而 ξ' 在那里取值于 E。对于 $x \in \mathcal{O}_K$，我们有 $g(1 + x\alpha) = 1 + \kappa x\alpha$，并且由于 κ 的剩余类属于 $\mathbb{F}_p$，$\psi(n\kappa\bar{x}) = \gamma_\kappa(\psi(n\bar{x}))$。最后，$\xi'(g(\alpha)) = \xi'(\kappa)\xi'(\alpha) = \xi'(\alpha)$，因为 $\xi'(\kappa) = \chi\varepsilon(\kappa) = 1$（两个特征在 $\mathbb{F}_p^\times$上都平凡），且 $\xi'(\alpha) = \pm 1$ 被 γ_κ固定。因此

$$\xi'(ghg^{-1}) = \gamma_\kappa\big(\xi'(h)\big) \qquad (h \in W_{K_\alpha}). \tag{4.2}$$

元素 1，g，……，g^{n-1} 表示 W_K/W_{K_α}。在 Ind ξ' 的基 $e_i = g^i \otimes 1$ 中，元素 $h \in W_{K_\alpha}$ 的作用为 $\iota(\xi'(h))$，其中

$$\iota(z) = \operatorname{diag}\big(z, \gamma_\kappa^{-1}z, \dots, \gamma_\kappa^{-(n-1)}z\big) \qquad (z \in E')$$

由 (4.2) 可知，且 $u = \varphi_\pi(g)$ 将 e_i 映到 e_{i+1}，其中 $i < n-1$，并将 e_{n-1} 映到 $\xi'(g^n)e_0$。由于 g 限制在伽罗瓦群 Gal(K_α/K) 上是一个生成元，引理 2.10 表明 $a_{K_\alpha}(g^n) = a_K(g) = b$，因此

$$u\,\iota(z)\,u^{-1} = \iota(\gamma_\kappa z), \qquad u^n = \xi'(g^n) = \xi'(b) = \chi(b)\,\varepsilon(b) = -\zeta_n.$$

设 $A = \bigoplus_{i<n} \iota(E')u^i$。如命题 3.7 的证明中所示，直和项 $\iota(E')u^i$ 将每条直线 $\mathbb{C}e_j$ 映入 $\mathbb{C}e_{j+i}$（指标模 n），因此该和是直和，且 $\dim_E A = n^2$；上述关系表明 $A \cong (E'/E,\ \gamma_\kappa,\ -\zeta_n)$。每个算子 $\varphi_\pi(g^ih) = u^i\iota(\xi'(h))$ 都属于 A。反过来，$\iota(E')$ 是矩阵 $\iota(\xi'(h))$ 的 E-张成空间，因为 ξ' 的取值张成了 E' 上的 E，而 u 属于 φ_π 的像。因此 $A_{\varphi_\pi} = A$。

如果 $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ 固定 E，那么它在 E' 上的作用是某个 γ_κ^k，并且根据 (4.2)，$\sigma \circ \varphi_\pi \cong \mathrm{Ind}(\gamma_\kappa^k \circ \xi') \cong \varphi_\pi$。反过来，与 W_{K_α} 对应的元素通过标量 $-\zeta_n$ 作用于 φ_π，而每个满足 $\sigma \circ \varphi_\pi \cong \varphi_\pi$ 的 σ 都必须固定这个标量，因此 $\mathbb{Q}(\varphi_\pi) = \mathbb{Q}(\zeta_n) = E$。最后，由于 $q = p^n$ 且 n 为偶数，$|w|^{-(n-1)/2} = p^{-\nu(w)n(n-1)/2}$ 对 $w \in W_K$ 是有理的，因此 $\tau(w)$ 是 $\varphi_\pi(w)$ 的一个非零有理数倍数。故 $A_\tau = A_{\varphi_\pi}$，并且 $\mathbb{Q}(\tau) = \mathbb{Q}(\varphi_\pi) = E$。□

在 $D^\times$这一侧，像代数 A_ρ 的次数为 $(q^n - 1)/(q - 1) > n$，因此 ρ的类还需要一个额外的想法。我们找到一个秩为 n 的幂等元 $e_0 \in A_\rho$，其角代数 $e_0A_\rho e_0$是一个次数为 n的循环代数。麦基公式将 ρ 对 U_D^1 的限制分解为若干直线V_c，这些直线由范数的核 N^1标记，加法群 U_D^1/U_D^2在这些直线上通过互不相同的特征作用。投影 e_0 到具有 $c \in \mathbb{F}_p^\times$的 n 条直线上属于 A_ρ，因为对 $\mathbb{F}_p^\times$求和会将 e_0 的傅里叶表达式中的单位根变为整数。这是困难的一步。随后，角代数中包含 E' 的一个副本 $\iota'(E')$，以及一个单位 u'，它循环置换这些 n 条直线，并表示循环生成元。最后，角代数与 A_ρ 是同一除代数上的矩阵代数，因此角代数具有 A_ρ的布劳尔类。

引理 4.8。令 V 为 ρ的空间，令 $N^1 \subset \mathbb{F}_{q^n}^\times$ 为范数 $\mathbb{F}_{q^n}^\times \to \mathbb{F}_q^\times$ 的核，并令 $\Psi(x) = \zeta_p^{\mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_{q^n}/\mathbb{F}_p}(x)}$，其中 $x \in \mathbb{F}_{q^n}$。

(i) 空间 V是直线 V_c, $c \in N^1$的直和，U_D^2在其上平凡作用，而 $1+x\Pi$对其作用为 $\Psi(c\bar{x})$，其中 $x \in \mathcal{O}_{K_n}$。*(ii)* ρ 的中心特征的阶为 n，且 $\mathbb{Q}(\rho) = E$。*(iii)* 令 e_0 为 V到 $\bigoplus_{c\in\mathbb{F}_p^\times} V_c$上的投影。则 $e_0 \in A_\rho$，且 $e_0 A_\rho e_0 \cong (E'/E, \gamma_\kappa, \zeta_n^{-1})$。特别地，$o_E(\rho) = [(E'/E, \gamma_\kappa, \zeta_n^{-1})]$。

证明。(i) 对于 $x \in \mathcal{O}_{K_n}$，元素 $\Pi^{-1}x\Pi$ 属于 K_n，且其在 K 上的迹与 x相同，因此$\Theta(1+x\Pi) = \psi_K(\mathrm{Tr}^{K_n/K} x) = \Psi(\bar{x})$。若 $h \in U_D^2$，则 $\Pi^{-1}(h-1)$ 属于 $\Pi\mathcal{O}_D = \bigoplus_{1\le i\le n} \mathcal{O}_{K_n}\Pi^i$。$y\Pi^i$ 的约化迹在 $y \in K_n$ 和 $0 < i < n$ 时为零，而 $\mathrm{Trd}(y\varpi) \in \varpi\mathcal{O}_K$ for $y \in \mathcal{O}_{K_n}$。因此 Θ在U_D^2上平凡作用，并在$U_D^1/U_D^2 \cong \mathbb{F}_{q^n}$上诱导 Ψ，$1 + x\Pi \mapsto \bar{x}$。

群 $D^\times$ 是陪集 $dK_\alpha^\times U_D^1$的无交并，其中 d 取遍 μ_{q^n-1}/μ_{q-1}的一组代表元，且 U_D^1 是正规子群，因此根据麦基公式，$\rho|_{U_D^1}$ 是特征$h \mapsto \Theta(d^{-1}hd)$之和。由于 $\Pi d = d^q\Pi$，这些特征为

$$d^{-1}(1 + x\Pi)d = 1 + d^{q-1}x\Pi, \qquad \Theta\big(d^{-1}(1 + x\Pi)d\big) = \Psi(d^{q-1}\bar{x}).$$

映射 $d \mapsto d^{q-1}$ 诱导出一个双射

$$\mu_{q^n-1}/\mu_{q-1} \xrightarrow{\sim} N^1$$

（其像包含于 N^1，因为 $d^{(q-1)(1+q+\cdots+q^{n-1})} = 1$，且两个群的阶均为 $(q^n-1)/(q-1)$，并且当 c 不同时，特征 $x \mapsto \Psi(cx)$也各不相同，因为 $\mathbb{F}_{q^n}/\mathbb{F}_p$ 的迹型非退化。因此，$\rho|_{U_D^1}$ 的直线由 $c \in N^1$ 标记，而 $1 + x\Pi$ 通过 $\Psi(c\bar{x})$ 作用于直线 V_c。这证明了 (i)。

(ii) $K^\times$的中心由 $\varpi = \Pi^n$、μ_{q-1} 和 $U_K^1 \subset U_D^2$生成。由于 n为偶数，$\rho(\varpi) = \Theta(\Pi)^n = 1$，且 ρ 通过 χ作用于 μ_{q-1}，因此 ρ的中心特征的阶为 n的 χ，并且 $\mathbb{Q}(\rho)$包含 $\mathbb{Q}(\zeta_n) = E$。反之，设 $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ 中固定 E 的 $\sigma \in$。它作用于 E'，而 E' 包含 Θ 的值，其作用形式为某个 $c \in \mathbb{F}_p^\times$ 下的 γ_c，其中 $\gamma_c(\zeta_p) = \zeta_p^c$，因此 $\sigma \circ \Theta$ 在Π 上以及在 μ_{q-1} 上都与 Θ 一致，并将 $1 + x\Pi$ 映射为 $\Psi(c\bar{x})$。由于 $c^n = 1$，存在 $d \in \mu_{q^n-1}$ 使得 $d^{q-1} = c$，且 d 将 $K_\alpha^\times U_D^1$ 正规化，因为 $d\Pi d^{-1} = c^{-1}\Pi$。共轭特征 $\Theta^d(h) = \Theta(d^{-1}hd)$同样将 $1 + x\Pi$ 映射为 $\Psi(c\bar{x})$，根据 (i) 中的计算，它在 μ_{q-1}上与 Θ 一致，并且在 Π处取值 $\Theta^d(\Pi) = \Theta(c\Pi) = \chi(c)\Theta(\Pi) = \Theta(\Pi)$，因为 χ 在 $\mathbb{F}_p^\times$ 上是平凡的。因此，$\sigma \circ \Theta = \Theta^d$、$\sigma \circ \rho \cong \rho$以及 $\mathbb{Q}(\rho) = E$。

(iii) 令 pr_c 为 V到 V_c的投影。由于 U_D^2 平凡作用，

$$\mathrm{pr}_c = q^{-n} \sum_{x\in\mathbb{F}_{q^n}} \Psi(cx)^{-1}\rho(1 + [x]\Pi),$$

其中 $[x] \in \mathcal{O}_{K_n}$ 是 x的 Teichm¨uller 代表元。$c \in \mathbb{F}_p^\times$ 的范数为 $c^n = 1$，因此$\mathbb{F}_p^\times \subset N^1$，并且

$$e_0 = \sum_{c\in\mathbb{F}_p^\times} \mathrm{pr}_c = q^{-n} \sum_{x\in\mathbb{F}_{q^n}} \Big(\sum_{c\in\mathbb{F}_p^\times} \zeta_p^{-c\,\mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_{q^n}/\mathbb{F}_p}(x)} \Big) \rho(1 + [x]\Pi).$$

内层求和是有理整数（$p-1$ 或 -1），因此 $e_0 \in A_\rho$，且 e_0 的秩为 n .

接下来，我们在角 $e_0 A_\rho e_0$中构造一个 E' 的副本。对于 $z \in E'$，令

$$\iota'(z) = \sum_{c\in\mathbb{F}_p^\times} \gamma_c(z)\,\mathrm{pr}_c, \qquad \text{so that} \qquad e_0\,\rho(1 + [x]\Pi) = \iota'\big(\Psi(x)\big) \quad (x \in \mathbb{F}_{q^n}),$$

由于根据 (i)，算子 $\rho(1 + [x]\Pi)$ 在每条直线 V_c, $c \in N^1$ 上都按标量 $\Psi(cx)$ 作用，并且对于 $c \in \mathbb{F}_p^\times$，$\Psi(cx) = \gamma_c(\Psi(x))$。算子 $e_0\rho(1 + [x]\Pi)$ 属于 $e_0 A_\rho e_0$，因为 $e_0 \in A_\rho$以及 $\rho(1 + [x]\Pi)$ 保持每条直线 V_c, $c \in N^1$ 不变，因而与 e_0 对易。映射 ι' 是 E-线性的，且 Ψ 的值在 E 上张成 E'，因此 ι' 将 E' 映入 $e_0 A_\rho e_0$，并且它是 E-代数 $E' \to e_0 A_\rho e_0$ 的一个单射同态。

选取满足 $d_0^{q-1}=\kappa^{-1}$ 的 $d_0\in\mu_{q^n-1}$，这是可能的，因为 $\kappa^{-1}\in N^1$。如同 (i) 中一样，$d_0^{-1}(1+x\Pi)d_0=1+\kappa^{-1}x\Pi$，因此 $\rho(d_0)$ 将 V_c 映到 $V_{c\kappa^{-1}}$ 上。特别地，$\rho(d_0)$ 与 e_0 对易，并且 $u'=\rho(d_0)e_0$ 是 $e_0A_\rho e_0$ 的一个单位，将每条直线 V_c, $c\in\mathbb{F}_p^\times$ 映到 $V_{c\kappa^{-1}}$ 上。由于 $\iota'(z)$ 在 V_c 上按 $\gamma_c(z)$ 和 $\gamma_{c\kappa^{-1}}\gamma_\kappa=\gamma_c$ 作用，只需在每条直线 $V_{c\kappa^{-1}}$ 上检验即可得，$u'\,\iota'(z)\,u'^{-1}$ 和 $\iota'(\gamma_\kappa z)$ 都按 $\gamma_c(z)$ 作用。

接下来，$(d_0^n)^{q-1}=\kappa^{-n}=1$，因此 d_0^n 属于 μ_{q-1}，而后者是中心的。记 $d_0^n=b^t$。于是$\kappa^t=(d_0^n)^{(q-1)/n}=d_0^{q-1}=\kappa^{-1}$，因此 $t\equiv-1$(模 n)，且 $\rho(d_0^n)=\chi(b)^t=\zeta_n^{-1}$。因此 u'和 ι'满足循环代数的关系，

$$u'\,\iota'(z)\,u'^{-1}=\iota'(\gamma_\kappa z)\quad(z\in E'),\qquad u'^n=\rho(d_0^n)\,e_0=\zeta_n^{-1}e_0.$$

令 $B=\bigoplus_{i<n}\iota'(E')u'^i\subset e_0A_\rho e_0$。由于 u'^i 将 V_c 映到 $V_{c\kappa^{-i}}$上，各个直和项占据 $\mathrm{End}(e_0V)$ 中互不相交的块，因此该和是直和，维数为 $\dim_E B=n^2$，且 $B\cong(E'/E,\ \gamma_\kappa,\ \zeta_n^{-1})$。由于 $\mathbb{Q}(\rho)=E$，根据 (ii)，应用引理 2.2，并取 $F=E$，可知自然映射 $A_\rho\otimes_E\mathbb{C}\to\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ 是同构。它将 $e_0A_\rho e_0\otimes_E\mathbb{C}$ 映到 $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(e_0V)$ 上，后者的维数为 n^2，因为 e_0 的秩为 n。因此 $\dim_E e_0A_\rho e_0=n^2$，且 $B=e_0A_\rho e_0$。

最后，将 $A_\rho\cong\mathrm{End}_\Delta(W)$ 写作 Δ 上的中心除代数。非零幂等元 e_0 对应的角是 $\mathrm{End}_\Delta(e_0W)$，它是同一个 Δ 上的矩阵代数，因此具有 A_ρ 的类 $o_E(\rho)$。□

定理 *4.5* 的证明。(i) 根据引理 4.8(ii)，ρ 的中心特征的阶为 $n\geq6$。Jacquet–Langlands 对应保持中心特征，因此 π 也如此；又由于自对偶表示的中心特征的阶至多为二，π 和 ρ 都不是自对偶的。根据引理 2.14，$\mathbb{Q}(\pi)=\mathbb{Q}(\rho)=\mathbb{Q}(\tau)$，而根据引理 4.7 和 4.8，该域是 E。

(ii) 对于 ρ，这是引理 4.8(iii)；对于 τ，这是引理 4.7。

(iii) 由于 $p\equiv1$ (模 n)，素数 p 在 $E=\mathbb{Q}(\zeta_n)$ 中完全分裂，而 E 在 p 之上的赋值对应于 ζ_n 在 $\mathbb{F}_p$ 中的像，也就是 $\mathbb{F}_p^\times$ 的生成元 κ^j、$j\in(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$。在 $v=v_j$ 处，我们有 $E_v=\mathbb{Q}_p$，而 $E'\otimes_E E_v=\mathbb{Q}_p(\zeta_p)$ 在 $\mathbb{Q}_p$ 上全分歧，次数为 n，其中 γ_κ 通过 $\zeta_p\mapsto\zeta_p^\kappa$ 作用。

根据引理 2.9(iii)，只需知道两个参数的算术阿廷符号如何作用于 $\mathbb{Q}_p(\zeta_p)$。对于单位 $y\in\mathbb{Z}_p^\times$，y 的算术阿廷符号通过 $\zeta_p\mapsto\zeta_p^{\bar y^{-1}}$ [Mil20, I, Example 3.13]，作用于 ζ_p，也就是说，作为带有 $\kappa^t=\bar y^{-1}$ 的 γ_κ^t。在 v_j 处，我们有 $\zeta_n\equiv\kappa^j$ 和 $-1\equiv\kappa^{n/2}$，因此 $o_E(\rho)$ 的参数 $y=\zeta_n^{-1}$ 与 $o_E(\tau)$ 的参数 $y=-\zeta_n$ 分别具有 $\bar y^{-1}=\kappa^j$ 和 $\bar y^{-1}=-\kappa^{-j}=\kappa^{n/2-j}$，故在 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 中，

$$\mathrm{inv}_{v_j}o_E(\rho)=\frac{j}{n},\qquad \mathrm{inv}_{v_j}o_E(\tau)=\frac{n/2-j}{n}=-\frac{j}{n}-\frac12.$$

在 E 中不位于 p 之上的有限赋值 v 处，扩张 E'/E 是非分歧的，且 ζ_n^{-1} 和 $-\zeta_n$ 是单位。将引理 2.9(iii) 的描述应用于特征在 v 处分解群上的限制；该特征来自伽罗瓦群 $\mathrm{Gal}(E'/E)$，并将 γ_κ 映到 $1/n$。由此可知两个不变量都为零，因为单位的阿廷符号属于惯性群，而惯性群在 $E'\otimes_E E_v$ 上平凡作用。域 E 是全虚的，因此无限素点处的不变量也都为零。

(iv) 对于与 n 互素的 j，不变量 j/n 的阶为 n；根据 (iii)，v_j 处的两个不变量在 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 中相加为 $1\,2$。由于 $p\equiv3$ (模 4)，我们有 $n=p-1\equiv2$ (模 4)，因此引理 4.1 表明 $-j/n-\frac12$ 的阶为 $n/2$。这些阶就是 v_j 处的局部舒尔指标；其他每个赋值处的局部指标均为 1，而全局指标是局部指标的最小公倍数（§4.1），因此全局指标为 n 和 $n/2$。

(v) $o_E(\rho)+o_E(\tau)$ 的局部不变量在每个v_j 处均为$1\,2$，其他地方为 0。$\mathrm{res}_{E/\mathbb{Q}}[B_{p,\infty}]$ 的局部不变量为 $[E_v:$ 在 p [上方的赋值处为 $\mathbb{Q}_p]/2=\frac12$，其他地方为 0，因为 E 没有实赋值。于是这两个类相等 [Mil20, VII, 定理 7.1]。由于 $n-1$是奇数且 $2[B_{p,\infty}]=0$，这就是 (1.1)。□

注记 4.9。$\xi'(b)=-\zeta_n$ 中的符号给出了定理 4.5(v) 的四元数类 $\mathrm{res}_{E/\mathbb{Q}}[B_{p,\infty}]$，因为

$$o_E(\rho)+o_E(\tau)=[(E'/E,\gamma_\kappa,\zeta_n^{-1})]+[(E'/E,\gamma_\kappa,-\zeta_n)]=[(E'/E,\gamma_\kappa,-1)].$$

这两个类都使用生成元 γ_κ，因此参数的可加性（命题 2.7(i)）留下乘积 $\zeta_n^{-1}\cdot(-\zeta_n) = -1$，即校正因子贡献的符号，而次数为 n 的循环代数 $(E'/E, \gamma_\kappa, -1)$ 表示该四元数类。中心特征也决定了这个符号。令 g 和 $u = \varphi_\pi(g)$ 如引理 4.7 的证明中所述。由于 u 将 e_i 映到 e_{i+1}（当 $i < n-1$ 时），并将 e_{n-1} 映到 $\xi'(g^n)e_0$，它循环地置换直线 $\mathbb{C}e_i$，其行列式为 $(-1)^{n-1}\xi'(g^n)$。局部朗兰兹对应将 $\det\varphi_\pi$ 与 π 的中心特征相匹配；该中心特征在 μ_{q-1} 上为 χ，且 $a_K(g) = b$，因此

$$(-1)^{n-1}\xi'(g^n) = \det u = \chi(b) = \zeta_n,$$

因此 $\xi'(g^n) = -\zeta_n$，因为 n 是偶数。

因此，给定 ρ 和 φ_π的诱导形式后，中心特征便确定了 E'/E的两个循环表示的参数，即 ρ 的 $\zeta_n^{-1} = \rho(d_0^n)$，其中 $d_0^n \in \mu_{q-1} \subset K^\times$ 是中心的（引理 4.8(iii) 的证明），以及 φ_π 的 $-\zeta_n = \xi'(g^n)$。定理 4.5(iii) 和 (iv) 的证明根据这两个参数计算出指标 n 和 $n/2$，因此这些指标不依赖于 Langlands 常数 $\lambda_{K_\alpha/K}(\psi_K)$，也不依赖于用于描述 φ_π的互反映射的选择。将两个代数之一替换为其反代数，会使该代数的不变量变号；而改变局部不变量的符号约定，则会使两个代数的不变量都变号。任一改变都保持不变量的阶不变，因此指标也不变。按照命题 2.7(ii) 的相反规范化，(3.1) 中的代数 D 将称为不变量为 $-1/n$的除代数，而 ρ、τ、A_ρ 和 A_τ 则保持不变。

注记 4.10。同余 $p \equiv 3$ (模 4) 仅用于定理 4.5 证明的第 (iv) 部分。对于与 n 互素的 j，$-j/n - \frac{1}{2} = -(j+n/2)/n$ 的阶为 $n/\gcd(n, j+n/2)$，当且仅当 $n/2$–为奇数时，这个最大公约数为 2。当 $n/2$ 为偶数时，数 j/n 和 $-j/n-\frac{1}{2}$ 的阶均为 n；对于 $n=4$，它们相等（当 $j=1$ 时均为 $1/4$，当 $j=3$ 时均为 $3/4$）。

条件 $p \geq 7$ 使该族非自对偶且 E 为全虚。对于 $p = 3$，其中 $n = 2$ 和 χ 是 $\mathbb{F}_9^\times$ 的二次特征，引理 4.8(ii) 的论证表明 $\mathbb{Q}(\rho) = \mathbb{Q}(\zeta_2) = \mathbb{Q}$；又由于 ρ 可经由 $D^\times$ 的一个有限商群分解，故可得$\rho^\vee \cong \bar\rho \cong \rho$，因此 ρ 是自对偶的。

这一族的表示 ρ 并非自对偶，其有理性域 $E = \mathbb{Q}(\zeta_n)$ 是分圆域。这正是 Prasad 和 Ramakrishnan 猜想 [PR12，猜想 6.1(1)], 所讨论的情形，第 5 节将转而讨论这一猜想。

5. The half twist and the conjecture of Prasad and Ramakrishnan

Prasad 和 Ramakrishnan 猜想的最小反例具有二阶且深度为零。例 1.5 已经展示了一个表示 $\rho$of $D^\times$ 并非自对偶的情形，其中 $o_E(\rho) = 0$ 且 $o_E(\tau) \neq 0$；在 §5.1 中，我们为每个 $p \equiv 5$ (模 8) 构造这样的表示对，其分圆中心为 $E = \mathbb{Q}(i)$，这是第 3 节的 $n = 2$ 情形。对 $p = 3$ 采用相同的构造，可得到中心为 $\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$ 的表示对；该中心是 $\mathbb{Q}$ 上的阿贝尔域，并非分圆域。因此，这一表示对反驳了注 5.3 第二种解读下的猜想，该解读要求中心仅为 $\mathbb{Q}$上的阿贝尔域。在这些表示对中，ρ和 φ_π 都存在定义在 E上的模型，因此半扭使两个舒尔代数产生差异。推论 5.2 将这些表示对与 §4.2 中指标无界的一族一并归纳。

在 §5.2 中，我们将这些例子与 Suzuki 关于上述局部不变量的一个命题进行比较p [Su23, 命题 4.0.13]。按照我们的记号并在注 2.16 的假设下解读，该命题包含两项断言，而八阶例子与其中一项相矛盾，另一个则是定义在 $\mathbb{Q}_2$ 上的例子。所有这些例子都满足 (1.1)。

5.1. 八阶例子。 我们首先回顾 Prasad 和 Ramakrishnan 比较这两个 Schur 代数时所采用的规范化。Prasad 和 Ramakrishnan 将局部朗兰兹对应乘以 $K^\times$ 的特征 $x \mapsto |x|^{(n-1)/2}$，使其与 $\mathbb{C}$ [PR12, §6], 的自同构相容；按照 §2.3 的互反约定，我们将此理解为对 $D^\times$ 的表示进行扭曲。令 $\nu_D = |\mathrm{Nrd}_{D/K}|$，对于不可约的$n$维参数 r，令 π_r 为具有如下朗兰兹参数的 $\mathrm{GL}_n(K)$ 表示

r。于是，与 r 对应的 $D^\times$ 表示为 JL(π_r) $\otimes \nu_D^{(n-1)/2}$。由于朗兰兹对应和 Jacquet–Langlands 对应都与按 |det |的幂进行扭曲相容， $|\cdot|$ 且 ν_D（[Dat07, §2.2.1] 和引理 2.13），与 $\rho =$ JL(π) 对应的参数为 $\varphi_\pi \otimes |\cdot|^{-(n-1)/2} = \tau$。

相反符号的扭 $\varphi_\pi \otimes |\cdot|^{(n-1)/2}$ 与 τ 相差一个有理值特征 $|\cdot|^{n-1}$，因此它与 τ 具有相同的有理性域和像代数，且下文的比较对两种扭符号均成立。同一规范化也将 $\rho \otimes \nu_D^{(n-1)/2}$ 赋予 φ_π，从而使该扭处于 $D^\times$ 一侧。在下文的八阶例子中，这一对表示的舒尔代数也不同：因为 φ_π 在 E 上有一个模型，而该扭将 A_ρ 的循环参数 1 替换为 p^{-1}，因此 $o_E(\rho \otimes \nu_D^{1/2})$ 在 p 之上的 E 各赋值处的不变量为 $1\,2$。

回顾一下，对于有理性域 F 为数域的有限维不可约表示 r， r 的 Schur 代数是 F 上属于类 $o_F(r)$ 的中心除代数，因此 A_r 是它上的矩阵代数 [Su23，引理 3.0.7]。Prasad and Ramakrishnan 提出了以下猜想 [PR12，猜想 6.1]。设 D 是 K 上指标为 d 的中心除代数，π' 是 $\mathrm{GL}_m(D)$ 的不可约离散系列表示，满足 $md = n$；设 σ 是其 n 维参数，并按相同方式规范化。该猜想涉及 π' 和 σ 的 Schur 代数，并将它们的公共中心描述为一个数域“（它是一个分圆域）”。猜想的第（1）部分断言，当 π' 不是自对偶时，这两个除代数同构；当 π' 自对偶且 π' 与 σ 的符号一致时，也有同样结论。

我们只考虑 π' 不是自对偶的情形。我们反例中使用的 $D^\times$ 的表示具有有限阶中心特征。它们是酉的，并且模中心平方可积，因为 $D^\times/K^\times$ 是紧的，因此属于离散系列。对于 $m = 1$，非自对偶情形因此断言，对于这些表示， $o_E(\rho) = o_E(\tau)$。

现在我们构造最小的例子，它们具有 $n = 2$。设 $p = 3$ 或 $p \equiv 5$ （模 8），并设 $K = \mathbb{Q}_p$，从而 $q = p$。我们选取满足 $a_{\mathbb{Q}_p}(s) = p$的 s，使得第 3 节中的一致化元 ϖ 为 p。设 D 为 $\mathbb{Q}_p$上的四元数除代数，设 $K_2 \subset D$ 为 $\mathbb{Q}_p$的非分歧二次扩张，并令 $\Pi \in D$ 满足：对于 $x \in K_2$，有 $\Pi^2 = p$ 和 $\Pi x \Pi^{-1} = \bar{x}$，其中$x \mapsto \bar{x}$ 是 K_2的非平凡自同构。

设 θ 是 $\mathbb{F}_{p^2}^\times$ 的一个阶为 8 的特征，将其视为 $K_2^\times U_D^1$ 的一个特征，它在 U_D^1 和 p 上均为平凡特征。令

$$\rho_\theta = \mathrm{Ind}_{K_2^\times U_D^1}^{D^\times} \theta,$$

令 π_θ 为 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ 的表示，满足 JL(π_θ) $= \rho_\theta$；令 φ_θ 为 π_θ 的朗兰兹参数， $\tau_\theta = \varphi_\theta \otimes |\cdot|^{-1/2}$ 为其归一化参数。令 $L = \mathbb{Q}(\zeta_8)$，令 $\gamma_p \in$ 伽罗瓦群$(L/\mathbb{Q})$ 为满足 $\gamma_p(\zeta_8) = \zeta_8^p$ 的自同构，并令 $E = L^{\langle \gamma_p \rangle}$。采用第 3 节的记号， ρ_θ 和 τ_θ 是 $n = 2$、 $K = \mathbb{Q}_p$、 $m = 8$ 和 $z = 1$ 对应的深度零表示 ρ_1 和 τ_1。

定理 5.1. 取上述的 p、 θ、 L 和 E，我们有如下结论：

(i) 表示 ρ_θ 不可约且非自对偶，其中心特征具有有限阶，并且 $\mathbb{Q}(\rho_\theta) = \mathbb{Q}(\pi_\theta) = \mathbb{Q}(\tau_\theta) = E$。域 E 在 $p = 3$ 时为 $\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$，在 $p \equiv 5$ （模 8）时为 $\mathbb{Q}(i)$。*(ii)* 表示 ρ_θ 和 φ_θ 在 E 上有模型。*(iii)* 代数 A_{τ_θ} 同构于 $(L/E, \gamma_p, -p)$，这是一个定义在 E 上的四元数除代数，在 E 的两个位于 p 之上的赋值处不变量为 $1\,2$，在其他所有赋值处不变量均为 0。

命题 3.7 和定理 3.8 的情形 $n = 2$ 给出了 (ii) 中 ρ_θ 的模型、(iii) 部分，以及 (i) 中 ρ_θ 的有理性域。剩下的问题是为未扭曲参数 φ_θ 构造一个定义在 E 上的模型。我们在 E-向量空间 L 上实现 φ_θ，其中 s 的作用方式是先作用以 γ_p，再乘以 L 中一个范数到 E 为 -1 的元素，从而使 s 对应的算子平方为 -1。半扭会使这个平方乘以 p；而 $-p$ 在 E 中位于 p 之上的赋值处不是范数，这就是 τ_θ 在 E 上没有模型的原因。

证明。 (i) 固定 $\mathbb{F}_{p^2}^\times$ 的一个生成元 t。我们可以取 $\zeta_8 = \theta(t)$，于是如定理前所述，对于 $n = 2$、 $K = \mathbb{Q}_p$ 和 $m = 8$， ρ_θ 是第 3 节中 $\gamma = \gamma_p$ 的表示ρ_1。

特征 θ 是本原的，因为 $\theta^p \neq \theta$，由于 $8 \nmid p-1$。因此，根据引理 3.2， ρ_θ 是不可约的；根据命题 3.7，$\mathbb{Q}(\rho_\theta) = E$；根据引理 2.14， $\mathbb{Q}(\pi_\theta) = \mathbb{Q}(\tau_\theta) = E$。

具体而言， ρ_θ 通过 $D^\times/p^{\mathbb{Z}}U_D^1 \cong \mathbb{F}_{p^2}^\times \rtimes \langle j\rangle$分解，其中 j 是 Π、 $j^2 = 1$ 和$jxj^{-1} = x^p$ 的像（对 $x \in \mathbb{F}_{p^2}^\times$而言），并且在 t的特征向量基中

$$\rho_\theta(t) = \begin{pmatrix} \zeta_8 & 0 \\ 0 & \zeta_8^p \end{pmatrix}, \qquad \rho_\theta(j) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

ρ_θ 的像是有限的，因此其中心特征具有有限阶。 ρ_θ的指数 $\{1, p\}$ 与其对偶表示 $\{-1, -p\}$ 的指数模 8 不同，因此 ρ_θ 不是自对偶的。如果 $p = 3$，则元素$c_8 = \zeta_8 + \zeta_8^3$ 被 γ_3 和 $c_8^2 = -2$固定，因此 $E = \mathbb{Q}(c_8) = \mathbb{Q}(\sqrt{-2})$。如果 $p \equiv 5$ （模 8），则$\gamma_p(\zeta_8) = -\zeta_8$，因此 γ_p 固定 $i = \zeta_8^2$ 和 $E = \mathbb{Q}(i)$。

(ii) 和 (iii) 这里 $a = -p$ 和 $f = 1$，因此命题 3.7 和定理 3.8 的 $n = 2$ 情形表明， ρ_θ在 E 上有一个模型， $A_{\tau_\theta} \cong (L/E, \gamma_p^{-1}, -p) = (L/E, \gamma_p, -p)$，因为 γ_p 的阶为二；并且 $o_E(\tau_\theta)$ 在 p 上方的每个赋值处的不变量均为 $1\,2$，在其他有限赋值处均为 0。域 E 没有实赋值，因为 $-1 \notin \langle p\rangle = \{1, p\} \subset (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times$，而 p 在 E 中分裂（-2 是模 3 的平方，且当 $p \equiv 5$ 模 8 时，$p \equiv 1$ 模 4），所以 A_{τ_θ} 是一个在 p 上方的两个赋值处具有非零不变量的除代数。

对于 φ_θ，我们对 $n = 2$ 和 $z = 1$使用命题 3.3。它表明 $\varphi_\theta = \mathrm{Ind}_{W_{K_2}}^{W_K} \mu_1$，其中$\mu_1$ 在惯性群上的限制与 θ 一致，且 $\mu_1(s^2) = -1$。因此， φ_θ 在野惯性群上是平凡的，其在惯性群上的限制具有特征 θ 和 θ^p， s 交换这两条特征直线，并且 $\varphi_\theta(s)^2 = -1$。

在 E 向量空间 L 上，让惯性群通过 θ 作用，即以乘法作用，并让 s 通过以下 E-线性算子作用

$$x \mapsto \zeta_8\, \gamma_3(x) \quad \text{if } p = 3, \qquad x \mapsto i\, \gamma_p(x) \quad \text{if } p \equiv 5 \pmod 8,$$

其平方等于乘以

$$\zeta_8\, \gamma_3(\zeta_8) = \zeta_8^4 = -1, \qquad \text{respectively} \qquad i\, \gamma_p(i) = i^2 = -1.$$

s的共轭作用将惯性特征提升至 p 次幂，这就是温和关系，因为$p^{-1} \equiv p$ (模 8)。在 $\mathbb{C}$ 上， $L \otimes_E \mathbb{C}$ 中惯性群的特征直线具有特征θ 和 θ^p，并由 s 交换，因此这是 E 上 φ_θ 的一个模型。最后， L 的一个自同构$\zeta_8 \mapsto \zeta_8^c$ 将 φ_θ 变为这样一个表示：其在惯性群上的限制具有指数$\{c, cp\}$；当且仅当 $c \in \{1, p\}$ 时，该表示与 φ_θ 同构。因此 $\mathbb{Q}(\varphi_\theta) = E$。□

推论 5.2。 我们有如下结论：

(i) 设 $p \equiv 5$ （模 *8*）。定理 *5.1* 中的数对 $(\rho_\theta, \tau_\theta)$ 满足 [*PR12* 猜想 *6.1(1)*]，中非自对偶情形的假设，其中心为分圆域 $\mathbb{Q}(i)$，且其舒尔代数不同构。对于 $p = 3$，若只要求中心是 $\mathbb{Q}$ 的阿贝尔扩张，则同样的结论成立，此时中心为 $\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$。*(ii)* 对每个满足 $p \equiv 3$ （模 *4*）的素数 $p \geq 7$，定理 *4.5* 中的数对 (ρ, τ) 满足相同的假设，其中心为分圆域 $\mathbb{Q}(\zeta_{p-1})$，且其舒尔代数的指标为 $p-1$ 和 $(p-1)/2$。若将 τ 替换为 φ_π 或 $\varphi_\pi \otimes |\cdot|^{(n-1)/2}$，将 ρ 替换为 $\rho \otimes \nu_D^{(n-1)/2}$，或者将任一除代数替换为其反代数，这两个指标均不变。

证明。 ρ_θ $\mathrm{GL}_1(D)$ 的表示 ρ 是带有限阶中心特征的不可约表示，因而是酉离散系列。根据定理 5.1(i)，它们不是自对偶表示， ρ_θ；这是因为其中心特征的阶为 $n \geq 6$ （引理 4.8(ii)），而自对偶表示的中心特征的阶至多为二， $\rho_\circ$ PR12，第 6] 节的规范化将 τ_θ 和 τ 与它们联系起来，而舒尔代数的公共中心是 E [Su23，引理 3.07]。在 (i) 中，根据定理 5.1，$o_E(\rho_\theta) = 0$ 和 $o_E(\tau_\theta) \neq 0$；而 (ii) 中的指标就是定理 4.5(iv) 中的指标。对于 (ii) 的最后一个断言， q 是一个平方，因此 $|\cdot|^{\pm(n-1)/2}$ 和 $\nu_D^{(n-1)/2}$ 取有理值。于是， φ_π 和 $\varphi_\pi \otimes |\cdot|^{(n-1)/2}$ 分别具有 A_τ 的有理性域和像代数，其中 τ；扭 $\rho \otimes \nu_D^{(n-1)/2}$ 具有 ρ 的有理性域和像代数，而反代数具有相同的指标。□

注记 5.3。 该猜想将两个舒尔代数的公共中心描述为一个分圆域 [PR12，猜想 6.1]，；在该猜想之前，Prasad and Ramakrishnan 将中心描述为：对于中心特征具有有限阶的离散系列表示，它是 $\mathbb{Q}$ [PR12，第 6] 节的一个阿贝尔扩张。因此，我们从两个方面理解该猜想。第一种理解是，它涉及公共中心为分圆域的对。第二种理解是，它涉及所有 π' 具有有限阶中心特征的对，而此类对的公共中心是 $\mathbb{Q}$ 的一个阿贝尔扩张。

域 $\mathbb{Q}(i)$ 和 $\mathbb{Q}(\zeta_{p-1})$ 是分圆域，且中心特征具有有限阶，因此，推论 5.2(i) 中满足 $p \equiv 5$ (模 8) 的反例以及推论 5.2(ii) 中的反例，在这两种解读下都与该猜想相矛盾。情形 $p = 3$ 与第二种解读相矛盾。

备注 5.4。 在 p上方的 E 的赋值 v 处，八阶例子中的表示 $\pi_\theta^\vee \boxtimes \rho_\theta \boxtimes \tau_\theta$ 在 E_v 上没有模型。这里我们将这三个表示视为代数闭包 E_v 上的表示，其中 E_v 是 E_v 的代数闭包；对于 $F = E$而言，它扮演 §2.1中 F 的角色。这是可能的，因为它们中的每一个都有一个定义在数域上的模型。事实上，根据 Suzuki 关于模型的结果 [Su23，引理 4.0，π_θ 有一个定义在 E 上的模型，因而 $\pi_\theta^\vee$也有这样的模型。表示 ρ_θ 有一个定义在 E上的模型（定理 5.1(ii)），而 τ_θ 有一个定义在 L 上的模型（推论 3.11）。

假设这个张量积有一个定义在 E_v 上的模型。将 E_v 和 E_v 分别代替 F 和 F'，两次应用引理 2.5(ii)，便可通过 Hom 空间从中提取出一个定义在 E_v 上的 τ_θ 的模型，正如注 2.16 提取出一个定义在不位于 p 上方的有限赋值处的 $\rho \boxtimes \tau$ 的模型。第一次应用取 U 为 $\pi_\theta^\vee$ 的一个定义在 E_v 上的模型。这个模型是无限维的。它是不可约的，因为它在 E_v 上变得不可约，因此在群代数上是循环的，特别是有限生成的（这就是引理要求有限生成性的原因）。经过标量扩张到 E_v 后，该模型变为 $\pi_\theta^\vee$；根据容许性，其等变自同态都是标量。第一次应用得到一个定义在 E_v 上的 $\rho_\theta \boxtimes \tau_\theta$ 的模型。

第二次应用取 U 为有限维、绝对不可约的 Jacquet–Langlands 转移 ρ_θ 的一个定义在 E_v 上的模型，并由此得到一个定义在 E_v 上的 τ_θ 的模型。根据引理 2.3(i)，这与 $\mathrm{inv}_v\, o_E(\tau_\theta) = 1/2$ 矛盾。因此，在 p 上同时实现这些表示的论证必须解释这种线性下降的失败。

5.2. **关于上述局部不变量的 Suzuki 命题** p。本节的例子也与 Suzuki 的一个命题有关，该命题对上述两个类的局部不变量作了界定 p [Su23, 命题 4.0.13]。设 π 是 $\mathrm{GL}_n(K)$ 的一个超尖点表示，其中心特征具有有限阶。Suzuki 指出，在 p 上方的 $\mathbb{Q}(\pi)$ 的每个赋值 v 处，$\mathrm{JL}(\pi)$ 的 Schur 代数与扭曲参数 $\varphi_\pi(-^{n-1}_{2})$ 的 Schur 代数的局部不变量都属于 $\frac{1}{\gcd(n,p-1)}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$。这是该命题的第一项断言。第二项断言是，若 $\gcd(n, p-1) \le 2$，则 [Su23, 猜想 4.0.7] 成立；并且当 $\mathrm{JL}(\pi)$ 不是自对偶时，该猜想断言，在 p 上方的每个赋值处，这两个除代数都相同。与 §1.2 一样，我们仅在注 2.16 的假设下，才用我们的记号来解读这些断言，其中 $\mathrm{JL}(\pi) = \rho$且 $\varphi_\pi(-^{n-1}_{2}) = \tau$。这些例子本身无条件成立。

按照这种解读，定理 5.1 与第二个断言相矛盾。这里，π_θ 是超尖点表示，因为它的参数 φ_θ 不可约，且其中心特征的阶有限。此外，p 是奇数，且 $n = 2$，所以 $\gcd(n,\ p-1) = 2$。由于 ρ_θ 不是自对偶的，第二个断言称，ρ_θ 和 τ_θ 的 Schur 代数在 p上方的每个赋值处都相同。根据定理 5.1，它们在这样的赋值处的不变量分别为 0 和 1_2，二者都属于 $\frac{1}{2}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$，且彼此不同。

按照同一种解读，下面这个含有 $p = n = 2$的例子与第一个断言相矛盾。这两个例子都是定理 A 中 $n = 2$ 的情形（例5.5请参见其证明末尾），因此满足 (1.1)。在这两个例子中，和的不变量在不位于p上方的有限赋值处均为零；又由于 $n = 2$ 是偶数，它们在 p 上方各赋值处的不变量总和正是 Suzuki 公式给出的值。因此，按照我们的解读，这两个例子都与 [Su23、定理 4.0.5 和 (4.0.6)]一致。

例5.5. 对于 $x,\ y \in \mathbb{Q}^\times$，记 $(x,\ y)_\mathbb{Q}$为由 $I,\ J$生成的四元数代数，其中$I^2 = x$、$J^2 = y$和 $IJ = -JI$。令 $\zeta = \zeta_3$和

$$T = \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^{-1} \end{pmatrix}, \qquad U_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

令 φ 为 $W_{\mathbb{Q}_2}$ 的表示，它在野惯性上平凡，且温和惯性的一个拓扑生成元 t 作用为 T，几何 Frobenius 元 s 作用为 U_0。那么 φ 是 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_2)$ 的一个超尖点表示 π 的朗兰兹参数，具有平凡中心特征，$\mathbb{Q}(\pi) = \mathbb{Q}$，且归一化参数 $\tau = \varphi \otimes |\cdot|^{-1/2}$ 满足

$$A_\tau \cong (-3,-2)_{\mathbb{Q}}, \qquad \mathrm{inv}_2\, o_{\mathbb{Q}}(\tau) = \tfrac{1}{2}.$$

按照第 3 节的记号，数对 $(\mathrm{JL}(\pi)\ \tau)$ 是 (ρ_1, τ_1)，其中 $K = \mathbb{Q}_2$, $n = 2$ 和一个阶为 $m = 3$ 的特征 θ，因此 $o_{\mathbb{Q}}(\mathrm{JL}(\pi)) = 0$ 且 $o_{\mathbb{Q}}(\tau) = [B_{2,\infty}]$。由于 $\gcd(n, p-1) = \gcd(2,1) = 1$，在注 2.16 的假设下，以我们的记号表述 Su23 命题 4.0.13], 的第一条断言将给出 $\mathrm{inv}_2\, o_{\mathbb{Q}}(\tau) = 0$。

例*5.5*各断言的证明。这些矩阵满足 $T^3 = 1$, $U_0^2 = -1$ 和 $U_0 T U_0^{-1} = T^{-1}$。由于 $2^{-1} \equiv -1 \pmod 3$，最后一个关系就是温和关系 $sts^{-1} = t^{2^{-1}}$，因此 φ 是一个连续表示，其像的阶为 12。它是不可约的，因为 U_0 交换了 T 的特征直线；又 $\det T = \det U_0 = 1$，所以 φ 是 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_2)$ 的一个超尖点表示 π 的朗兰兹参数，且具有平凡中心特征。

由于 $|s|^{-1/2} = \sqrt{2}$，表示 τ 由 $\tau(t) = T$ 和 $\tau(s) = U = \sqrt{2}\, U_0$ 给出，其中 $U^2 = \bar{-}2$。用 U_0 共轭会固定 U 并将 T 替换为 T^{-1}；用 $\mathrm{diag}(1,-1)$ 共轭会固定 T 并将 U 替换为 $-U$。这些共轭在矩阵元素上实现了 $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta,\sqrt{2})/\mathbb{Q})$ 的两个生成元，因此 $\mathbb{C}$ 的每个自同构都保持 τ 的同构类，且 $\mathbb{Q}(\tau) = \mathbb{Q}$。由引理 2.14，$\mathbb{Q}(\pi) = \mathbb{Q}$ 也成立。

τ 的像所张成的 $\mathbb{Q}$-空间为

$$A_\tau = \mathbb{Q}[T] \oplus \mathbb{Q}[T]U, \qquad \mathbb{Q}[T] = \{\mathrm{diag}(x, \bar{x}) : x \in \mathbb{Q}(\zeta)\} \cong \mathbb{Q}(\zeta),$$

其中 $UxU^{-1} = \bar{x}$ 和 $U^2 = -2$，因此 $A_\tau \cong (\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}, x \mapsto \bar{x}, -2)$。有了 $I = 1 + 2T$，我们得到 $I^2 = -3$ 和 $UI = -IU$，因此 $A_\tau \cong (-3,-2)_{\mathbb{Q}}$。扩张 $\mathbb{Q}_2(\zeta)/\mathbb{Q}_2$ 是次数为 2 的非分歧扩张，因为 $X^2 + X + 1$ 在 $\mathbb{F}_2$ 上不可约，所以其范数的赋值均为偶数，而 -2 不是范数。因此 $A_\tau \otimes \mathbb{Q}_2$ 不是分裂的，且 $\mathrm{inv}_2\, o_{\mathbb{Q}}(\tau) = \frac{1}{2}$。

最后，令 θ 为 $\mathbb{F}_4^\times$ 的特征，满足 $\theta(\bar{t}) = \zeta$，其中 $\bar{t}$ 是 t 在 §3.1 的满射 $I_{\mathbb{Q}_2} \to \mathbb{F}_4^\times$ 下的像，因此 $m = 3$ 且 θ 是本原的。$\mathbb{Q}_2$ 的非分歧二次扩张的韦伊群由惯性群和 s^2 生成，后者的作用为 $U_0^2 = -1$，因此它通过定义 3.1 的特征 μ_1 作用于第一个基向量，并由弗罗贝尼乌斯互反律得到 $\varphi \cong$ 诱导表示 μ_1。根据命题 3.3，$\pi = \pi_1$ 且 $\mathrm{JL}(\pi) = \rho_1$；由定理 3.8，结合 $L = \mathbb{Q}(\zeta)$、$E = \mathbb{Q}$、$a = -2$ 和 $f = 1$，得到 $o_{\mathbb{Q}}(\rho_1) = 0$ 以及 $o_{\mathbb{Q}}(\tau_1) = [B_{2,\infty}]$。□

6. Questions

最后，我们以两个问题和一个猜想作结；本文的计算尚未解决这些问题。它们涉及上述总和在一般 π 下的 不变量 p、各个单独的类，以及具有其他不变量的除代数。

6.1. 一般恒等式。 对于 $n = 1$，猜想 1.4 成立；本文证明了它对每个具有代数值中心特征的零深度超尖点表示（推论 3.15）以及定理 B 中的族均成立。这两个证明都利用了 ρ 和 τ 是由特征诱导而来这一点，从而可用循环代数表示这两个类（对于定理 B 中的 ρ，则通过引理 4.8(iii) 中次数为 n 的角）。在不位于 p 上方的有限赋值处，在注 2.16 的假设下，对于每个有限阶中心特征，猜想均成立；其中包括 $\omega_\pi(\varpi) = 1$ 的情形，而这种消失正是 Suzuki 在 Su23 定理 4.0.5] 中陈述的定理在我们记号下的形式。Suzuki 的证明利用了塔对 $\varpi^{\mathbb{Z}}$ 的商，处理的是具有 $\omega_\pi(\varpi) = 1$ 的表示（§1.2）。猜想中主要尚未解决的部分，是每个位于 p 上方的赋值处的不变量。

铃木的论证无法推广到 p 上方的素位。在注 2.16 中，对于一个不在 p 上方的有限赋值 v，我们取从 $\pi^\vee$ 在 E_v 上的一个模型到上同调 H 的同态空间，其中 H 是一个在 E_v 上的表示。根据该注的假设，H 的 $\pi^\vee$-等型分量在将标量扩张到 E_v 的代数闭包后为 $\pi^\vee \boxtimes \rho \boxtimes \tau$，这便将 Hom 空间与 $\rho \boxtimes \tau$ 在 E_v 上的一个模型对应起来。在 p 上方，表示 $\pi^\vee \boxtimes \rho \boxtimes \tau$

未必存在一个在 E_v 上的模型，正如八阶例子所示（注 5.4）；因此，要覆盖这些例子的 p 上方的实现，需要比在 E_v 上的线性实现更多的结构。

猜想所预言的上述 p 取值暗示了应采用何种结构；为描述这一结构，我们回顾一下等晶体。令 $\mathbb{Q}_p$ 为 $\mathbb{Q}_p$的最大非分歧扩张的完备化，并令 σ 为其弗罗贝尼乌斯自同构，它在剩余域 $\mathbb{F}_p$ 上诱导绝对 Frobenius $x \mapsto x^p$ 。

定义。一个等晶体是一个有限维的 $\mathbb{Q}_p$-向量空间 N，配有一个双射 $\Phi\colon N \to N$，称为其 *Frobenius*，它相对于 σ是半线性的，这意味着 Φ 是可加的，并且对于 $c \in \mathbb{Q}_p$ 和 $x \in N$，有 $\Phi(cx) = \sigma(c)\Phi(x)$。若 $N \neq 0$ 且 N 没有非零真子空间在 Φ 作用下保持不变，则该等晶体称为简单。该等晶体的自同态是与 Φ可交换的 $\mathbb{Q}_p$-线性映射 $N \to N$ 。

等晶体的斜率是有理数，用来衡量 p-进增长率，并按迭代次数进行规范化。例如，如果 $N \neq 0$ ，且对某个整数 $k \geq 1$， Φ^k将 N 的某个基中的每个向量都乘以同一个标量，那么该等晶体只有一个斜率，即此标量的 p-进赋值除以 k。

Dieudonn´e 计算了斜率为 λ的简单等晶体的自同态代数。它是 $\mathbb{Q}_p$上的中心除代数，其不变量按 Crew 使用的规范化为 $-\lambda$ （Cre25，定理 1.1.2]）。对于 $\lambda = \frac{n-1}{2}$ ，这个不变量为 $-\frac{n-1}{2}$ ，即模 $\mathbb{Z}$的 $\frac{n-1}{2}$ ；而限制到E_v 会使其乘以 $[E_v : \mathbb{Q}_p]$ （定理 2.8(a)），由此得到

$$\frac{n-1}{2}\,[E_v : \mathbb{Q}_p] \quad \text{in } \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

这就是猜想 1.4 对 E 上方的 v 处的 p所预言的值。

在零深度的情形下，数值 $\frac{n-1}{2}$ 来自半扭。元素 s^n 通过 az（引理 3.2(iii)）作用于 τ_z ，而半扭贡献了 $a = (-1)$ 的因子 $q^{n(n-1)/2}\,{}^{n-1}q^{n(n-1)/2}$。由于 $\underline{q} = p^f$，且由于 s 在 K 的剩余域 $\mathbb{F}_q$ 上的作用是 $x \mapsto x^q$ 的逆元（ §2.3 ），

$$q^{n(n-1)/2} = p^{fn(n-1)/2}, \qquad s^n \text{ acts on } \overline{\mathbb{F}}_q \text{ as } (x \mapsto x^p)^{-fn}.$$

因此，该因子的 p-进赋值为 $fn\,(n-1)\,/2$，并且 s^n 在剩余域上的作用与 σ^{-fn} 在 $\mathbb{F}_p$ 上的作用相同。将该因子的赋值除以迭代次数 fn ，得到 $\frac{n-1}{2}$ 。 a 的相同赋值给出了定理 3.8(i) 中的不变量 $\frac{n-1}{2}[E_v : \mathbb{Q}_p]$ 。

在假设 B.1 中所述的 $\rho_z \boxtimes \tau_z$ 的 p-进实现上，Fontaine 构造利用 Frobenius 将彼此交换的半线性伽罗瓦作用线性化，并将 Frobenius 某次幂的作用与标量 az 联系起来。半扭对所得斜率贡献了上文得到的项 $\frac{n-1}{2}$ ；当 z 是 p-进系数域中的单位时，斜率就等于此项。令 $\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}} \subset \mathbb{Q}_p$ 为 $\mathbb{Q}_p$ 的最大非分歧扩张，并设 $\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}}$ 上的一个模带有双射半线性 Frobenius Φ ，以及一个与之交换的作用 $w \mapsto g_w$ ，该作用来自伽罗瓦群 Gal(K/K)，并且相对于 $\overline{\mathbb{Q}}_p^{\mathrm{nr}}$ 上的伽罗瓦作用是半线性的；此外，某个开子群逐点固定一组基。于是，Fontaine 线性化

$$r(w) = g_w \Phi^{-f\nu(w)} \qquad (w \in W_K)$$

是韦伊群 [Fon94, 1.3.1 和 1.3.5] 的线性作用。元素 w 通过 $\sigma^{f\nu(w)}$ 作用于 $\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}}$，其中 ν 是 §2.3 的次数，因此 g_w 对于 $\sigma^{f\nu(w)}$ 是半线性的，因子 $\Phi^{-f\nu(w)}$ 对于 $\sigma^{-f\nu(w)}$ 是半线性的，而它们的乘积是线性的。特别地， $r(s) = g_s\Phi^f$，因为 $\nu(s) = -1$。

现在假设假设 B.1，在该假设下， $\rho_z \boxtimes \tau_z$ 以这种方式出现，其系数取自 E_z, v对于 v 在 E_z 上的一个赋值 p。我们不知道 Lubin–Tate 塔的 p-进上同调是否能提供这样的实现。在这一假设下，算子 $r(s)^n = g_{s^n}\Phi^{fn}$ 通过标量 az 作用于整个实现，而该标量正是 s^n 在 τ_z 上（命题 B.2(i)）的作用标量。因此$\Phi^{fn} = az\, g_{s^n}^{-1}$。 g_{s^n} 的某个幂固定了伽罗瓦群的一个开子群所固定的基，因此 Φ 的某个适当迭代将由该基张成的格映射到自身乘以 p 的某个幂，而这迫使单一斜率

$$\frac{v_p(az)}{fn} = \frac{n-1}{2} + \frac{v_p(z)}{fn}$$

（命题 B.2(ii)）。

若 z 在 v处是单位，则斜率为 $\frac{n-1}{2}$ 。于是，命题 B.2(iii) 表明，系数取自$E_{z,\,v}$的 Frobenius 中心化子（即在 $E_{z,\,v}$上线性的等晶体自同态代数），是 $\rho_z \boxtimes \tau_z$ 在 $E_{z,\,v}$上的像代数，其不变量为 $-\frac{n-1}{2}[E_{z,v}\colon \mathbb{Q}_p]$，这正是猜想 1.4 所预言的模 $\mathbb{Z}$ 的值。附录 B 给出了这些结论背后关于纤维和格的论证。

对于任意的 π，这些观察表明，可以通过等晶体上的一种实现来计算 $o_E(\rho)+o_E(\tau)$ 在 E 的某个赋值 v（位于 p 之上）处的不变量，即计算与其 Frobenius 交换的自同态代数的不变量。

问题 6.1。设 π 具有有限阶中心特征，$c\in K^\times$ 具有正赋值且满足 $\rho(c)=1$，并设 v 是 E 上方的一个赋值。能否通过 Lubin–Tate 塔除以由 c生成的 $D^\times$ 子群所得商的 p-进上同调，以及其 Frobenius 和 $\mathrm{GL}_n(K)$、$D^\times$ 与 W_K的作用，计算 $o_E(\rho)+o_E(\tau)$ 在 v 处的不变量?

对于每个有限阶中心特征，这样的 c 都存在，因为 ϖ 通过某个阶为 d的单位根作用于 ρ，而 $c=\varpi^d$ 给出了注 2.16 在不位于 p之上的有限处所使用的商群。然而，对于无限阶的代数中心特征，在有理性域上进行下降则是一个额外问题，因为引理 2.14 的约化转而考虑 π 的一个具有有限阶中心特征的非分歧扭曲。对于 $n\geq 2$，本文仅在零深度情形下证明了具有这类中心特征的 (1.1)，此时循环表示直接表明 z 从和式中消去了。

6.2. **上述转移的类** p。如果猜想 1.4 对 π成立，那么它就能由 ρ的类确定 τ 的类。于是，问题变成在位于 p之上的赋值处，什么决定了 $o_E(\rho)$。在中心特征为有限阶的零深度情形下，$\mathrm{inv}_v\, o_E(\rho)$ 在每个位于 p之上的 v 处都等于 $=0$ （定理 A(ii) 和命题 3.14）。然而，在定理 B 中，不变量 $\mathrm{inv}^{v_j}\, o_E(\rho)$ 随赋值而变化，并在 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$中取遍阶为 n 的所有值。问题 6.1 涉及和式，即 $\rho\boxtimes\tau$的类（引理 2.15）；该类无法分别确定两个被加项，而在零深度情形以及对于该族，第 3 节和第 4 节的循环表示分别计算出每个类。

问题 6.2。设 v 是 E 上方的一个赋值。$\mathrm{inv}_v\, o_E(\rho)$ 如何依赖于 π 和 v?

6.3. **具有其他不变量的除代数**。设 t 是一个与 n 互素的整数，设 $D^{(t)}$ 是 K 上不变量为 t/n 的中心除代数，因此 $D^{(1)}=D$；设 $\rho^{(t)}=\mathrm{JL}_{D^{(t)}}(\pi)$ 是将 π 转移到 $(D^{(t)})^\times$ 的 Jacquet–Langlands 转移，因此 $\rho^{(1)}=\rho$。当 π 的中心特征具有有限阶时，$\rho^{(t)}$ 仍具有有理性域 E [（Su23，引理 4.0.3]）。

如果猜想 1.4 对 π 成立，那么从下述猜想的等式中减去 (1.1) 的 t 倍，可知该等式等价于

$$o_E(\rho^{(t)})=t\,o_E(\rho).$$

因此，结合猜想 1.4，下述猜想预言，转移到 $D^{(t)}$ 的布劳尔类是转移到 D 的类的 t 倍。

猜想 6.3。设 π 是 $\mathrm{GL}_n(K)$ 的中心特征具有有限阶的超尖点表示，且 t 是与 n互素的整数。则

$$o_E(\rho^{(t)})+t\,o_E(\tau)=t(n-1)\,\mathrm{res}_{E/\mathbb{Q}}[B_{p,\infty}]\qquad \text{in } \mathrm{Br}(E).$$

对于 $t=1$，这是关于有限阶中心特征的猜想 1.4。

Appendix A. Proofs of Lemma 2.5 and Proposition 2.12

本附录证明了引理 2.5 和命题 2.12，所采用的记号见第 §§2.2 和 2.4 节。

引理 *2.5* 的证明。(i) 设 $x_1,\dots,x_r$ 在 Λ 上生成 X，且 $\xi'\colon X\otimes_F F'\to Y\otimes_F F'$ 是 $\Lambda\otimes_F F'$-线性映射。取一个有限族 $c_1,\dots,c_k\in F'$，它们在 F 上线性无关，并取元素 $y_{ij}\in Y$，使得对 $1\leq i\leq r$ 有 $\xi'(x_i\otimes 1)=\sum_j y_{ij}\otimes c_j$。若 $\sum_i a_i x_i=0$ 且 $a_i\in\Lambda$，则 $\sum_j\big(\sum_i a_i y_{ij}\big)\otimes c_j=0$，因此对每个 j 都有 $\sum_i a_i y_{ij}=0$。于是，生成元之间的每个关系

都逐个系数成立。因此，对每个 j，赋值 $x_i \mapsto y_{ij}$ 可延拓为一个 Λ-线性映射 $\xi_j\colon X \to Y$，且 $\xi' = \sum_j \xi_j \otimes c_j$，这就证明了满射性。为证明单射性，将核中的一个元素写成 $\sum_l \eta_l \otimes d_l$，其中 $\eta_l \in$ 属于 $\mathrm{Hom}_\Lambda(X,Y)$，且 $d_l \in F'$ 在 F 上线性无关。因此，对每个 $x \in X$，都有 $\sum_l \eta_l(x) \otimes d_l = 0$，所以对每个 l 都有 $\eta_l(x) = 0$。于是每个 η_l 都为零，该元素也为零。

(ii) 第 (i) 部分通过 $\Lambda = F[\Gamma_1]$ 将 $\mathrm{Hom}_{\Gamma_1}(U,Y) \otimes_F F'$ 与 $\mathrm{Hom}_{\Gamma_1}(U_{F'}, Y_{F'})$ 联系起来，并且该同构与 Γ_2 交换，而 Γ_2 通过 Y 作用于两边。与给定的同构 $Y_{F'} \cong U_{F'} \boxtimes T'$ 复合后，由于它同样与 Γ_2 交换，便将 $\mathrm{Hom}_{\Gamma_1}(U,Y) \otimes_F F'$ 与 $\mathrm{Hom}_{\Gamma_1}(U_{F'}, U_{F'} \otimes_{F'} T')$ 识别为 Γ_2 的表示。最后，$v \mapsto (u \mapsto u \otimes v)$ 将 T' 与后者进行识别，并且与 Γ_2 相容，因为在 T' 的一个基下，Γ_1-线性映射 $U_{F'} \to U_{F'} \otimes_{F'} T'$ 由 $\mathrm{End}_{\Gamma_1}(U_{F'})$ 中的元素给出。□

现在证明定义 2.11 之后给出的断言。由于 $\iota_g\, g(\iota_h)$ 和 ι_{gh} 都是 $r^{gh} \to r$的同构，每个 $c(g,h)$ 都是 r 的自同构，因此是 $L^\times$ 中的一个标量，因为 r 在 $M_d(L)$ 中的交换子是 L。将 $\iota_g\, g(\iota_h)$ $(gh)(\iota_k)$ 用两种方式展开，即得定义 2.11(i) 的恒等式。任何其他同构的选取都具有 $\lambda_g \iota_g$ 的形式，其中 $\lambda_g \in L^\times$，其因子集为 $c'(g,h) = \lambda_g\, g(\lambda_h)\, \lambda_{gh}^{-1}\, c(g,h)$。映射 $(L/F, c') \to (L/F, c)$ 在 L上为恒等映射，并将 $(L/F, c')$ 的生成元 u'_g 映到 $\lambda_g u_g$；它保持定义 2.11(i) 的关系，并将 L-基 (u'_g) 映到 L-基 $(\lambda_g u_g)$，因此是一个同构，而 $(L/F, c)$ 的类仅取决于 r。

命题 *2.12* 的证明。根据引理 2.2，F在 $r(\Gamma)$中的张成空间 A_r是一个次数为 d的中心单简单 F代数。诱导映射 $A_r \otimes_F L \to M_d(L)$是单射，因为其定义域是简单的；又因为两边的维数都是 d^2（在 L上），所以它也是满射。因此，L在 $r(\Gamma)$中的张成空间是 $M_d(L)$，而 r 的交换子是 $M_d(L)$的中心 L。

同构 ι_1 是 r的一个自同构，因此是一个标量；而$(L/F,\ c)$的类只取决于 r。因此，我们可以假设 $\iota_1 = 1$。于是，根据 c的定义，对于所有 $g,\ h \in G$，都有 $c(1,\ h) = c(g,\ 1) = 1$；元素 u_1 是$(L/F,\ c)$的单位元，而$(L/F,\ c)$是一个中心简单F代数 [（参见 Mil20，IV，引理 3.13]）。

将 $V = L^d$ 视为维数为 $d[L$ 的 F-向量空间：$F]$，其中 A_r 通过矩阵乘法作用；令 $C = \mathrm{End}_{A_r}(V)$ 为 $\mathrm{End}_F(V)$ 中 A_r 的中心化子。根据 [Mil20, IV, 定理 3.1 及推论 3.3], ，代数 C 是关于 F 的中心简单代数，其维数为 $[L\colon\ F]^2$，且乘法 $A_r \otimes_F C \to \mathrm{End}_F(V)$ 是一个同构。因此$[C] = -[A_r] = -o_F(r)$。

对于 $x \in L$，令 m_x 表示 x 在 V 上的乘法；对于 $g \in G$，定义 $U_g\colon\ V \to V$，其由 $U_g(v) = \iota_g\, g(v)$ 给出，其中 g 作用于坐标。两个映射都是 F-线性的。每个 m_x 都与 A_r 交换，因为 $A_r \subseteq M_d(L)$。对于 $\delta \in \Gamma$，我们有 $\iota_g\, g(r(\delta)) = r(\delta)\iota_g$，因为 ι_g 是一个同构$r^g \to r$，所以

$$U_g\big(r(\delta)v\big) = \iota_g\, g\big(r(\delta)\big)\, g(v) = r(\delta)\, U_g(v),$$

并且 U_g 与 A_r可交换。

算子 m_x 和 U_g 满足交叉积的关系。事实上，$U_g m_x = m_{g(x)} U_g$，因为 $g(xv) = g(x)\, g(v)$，且ι_g 是 L-线性的；又因为 $U_g U_h = m_{c(g,h)} U_{gh}$，由于$\iota_g\, g(\iota_h) = c(g,\ h)\, \iota_{gh}$。因此，$xu_g \mapsto m_x U_g$定义了一个 F-代数的同态（$L/F,\ c$）$\to C$。它是单射，因为（$L/F,\ c$）是简单的；又因两个代数的维数均为 $[L$，所以它是满射：$F]^2$ 在 F上。因此，$[(L/F,\ c)] = [C] = -o_F(r)$。□

Appendix B. A conditional computation above p

本附录证明命题 B.2，使 §6.1 的启发式论述变得严谨。对于某个 $z \in \mathbb{Q}^\times$，我们使用定义 3.1 中的表示 ρ_z 和 τ_z，其中 $q = p^f$ 和 $a = (-1)^{n-1} q^{n(n-\overline{1})/2}$，因此 s^n 通过 az 作用于 τ_z 上（引理 3.2(iii)）。表示 π_z、ρ_z和 τ_z 具有共同有理性域 E_z（推论 3.15）。令 v 为 E_z 上方 p的一个赋值，置 $k = E_{z,v}$，并通过 $v_p(p) = 1$将 k 的赋值 v_p 归一化。

固定 K的一个代数闭包$\overline{K}$，令 $\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}}$为 K中 $\mathbb{Q}_p$ 的最大非分歧扩张，$\breve{}$，并令 $\mathbb{Q}_p$ 和 σ 如 §6.1 中所述。该实现取系数于环

$$R_{k,0} = \mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} k, \qquad R_k = \breve{\mathbb{Q}}_p \otimes_{\mathbb{Q}_p} k,$$

其中 k 通过第二因子作用。群 G_K =Gal(K/K) 作用于 $\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}}$，并连续地作用于 $\breve{\mathbb{Q}}_p$；元素 $w \in W_K$ 在二者上的作用分别为 $\sigma^{f\nu(w)}$，其中 ν 是 §2.3 的次数。

假设 B.1。 存在一个非零有限秩自由 $R_{k,\,0}$-模 M_0，满足

(a) 一个双射 $\Phi\colon M_0 \to M_0$，其关于 $\sigma \otimes 1$ 是半线性的；(b) 一个 $w \mapsto g_w$ 的作用，即 G_K 通过关于 G_K 在 R_k 的第一因子上的作用为半线性的映射作用于 M_0，使得 G_K 的某个开子群固定 M_0 的一个 $R_{k,\,0}$-基；以及 (c) 一个 $D^\times$ 的 $R_{k,\,0}$-线性作用，

使得这三个作用彼此可交换，并且满足以下条件。将 Φ、g 以及 $D^\times$ 的作用延拓到 $M = \breve{\mathbb{Q}}_p \otimes_{\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}}} M_0$，并对 $w \in W_K$ 置 $r(w) = g_w\Phi^{-f\nu(w)}$。那么，对于某个包含 $\mathbb{Q}_p$ 的代数闭域 Ω 以及某个 $\mathbb{Q}_p$-嵌入 $k \to \Omega$，沿由这两个嵌入给出的同态 $R_k \to \Omega$ 的纤维 $M \otimes_{R_k}\Omega$，其中 $D^\times$ 通过 M 作用，而 $w \in W_K$ 通过 $r(w)$ 作用，是一个同构于 $\rho_z \boxtimes \tau_z$ 的 $D^\times \times W_K$ 表示。

r 的公式是半线性伽罗瓦作用 [的 Fontaine 线性化，见 5], Fon94, 1.3.1 和 1.3.5], ，§6.1 中已回顾。根据 (a)、(b) 以及 Φ 与映射 g_w 的交换性，每个 $r(w)$ 都是 R_k-线性的，并且 $r(ww') = r(w)r(w')$（命题 B.2(i)）。表示 ρ_z 和 τ_z 有定义在 L_z 上的模型，这些模型由取值于 L_z 的特征诱导得到（引理 3.2(i)）；在假设中，我们通过一个延拓 $E_z \subseteq k \to \Omega$ 的 L_z 的嵌入，将 $\rho_z \boxtimes \tau_z$ 视为 Ω 上的表示。任意两个这样的嵌入相差一个 Gal(L_z/E_z) 中的元素，因此所得表示同构，而 E_z 是有理性域。

命题 B.2。 假设假设 *B.1* 成立。

(i) 映射 $r(w)$ 构成 W_K 在 M 上的一个 R_k-线性作用，该作用与 Φ 以及 $D^\times$、$r(s) = g_s\Phi^f$ 交换，并且 $r(s)^n = az$ 作用在 M 上。(ii) 在 $\breve{\mathbb{Q}}_p$ 上的等晶体 (M, Φ) 具有单一斜率

$$\lambda = \frac{v_p(az)}{fn} = \frac{n-1}{2} + \frac{v_p(z)}{fn}.$$

(iii) 假设 z 在 v处是单位。那么，由与 Φ 交换的 M 的 R_k-线性自同态构成的代数 $C = \mathrm{End}_{R_k,\Phi}(M)$ 是一个次数为 n^2的中心单 k-代数。它是 k-张成的乘积 $x\,r(w)$（其中 $x \in D^\times$ 且 $w \in W_K$）所成的空间，也就是说，是 $D^\times \times W_K$ 在 M上的算子所成的空间，并且

$$[C] = \mathrm{res}_{k/E_z}\big(o_{E_z}(\rho_z) + o_{E_z}(\tau_z)\big), \qquad \mathrm{inv}_k[C] = -[k:\mathbb{Q}_p]\,\frac{n-1}{2}.$$

特别地，这个不变量是 $\frac{n-1}{2}[k:\mathbb{Q}_p]$ 在 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$中的值，也就是猜想 *1.4* 对 v处的预测值。

首先，我们将标量恒等式 $r(s)^n = az$ 从纤维推广到整个 M；根据引理 3.2(iii)，该恒等式在纤维上成立。这个纤维是在 R_k的某个域因子上形成的，但 $\sigma \otimes 1$ 传递地置换这些因子，而 $r(s)^n - az$ 与 Φ交换，因此只要该恒等式在一个因子上成立，就会在每个因子上成立。在一个由 G_K的开子群固定的基下，该恒等式变为 Φ的某个幂对应的格恒等式，从而确定斜率。最后，Dieudonné 定理和中心化子定理计算出 Frobenius 交换子；将 Burnside 定理应用于不可约纤维，可知它与像代数相同。

证明。 (i) 映射 g_w 在 R_k的第一因子上关于 $\sigma^{f\nu(w)}$ 半线性，而 $\Phi^{-f\nu(w)}$ 关于 $\sigma^{-f\nu(w)}$半线性，因此 $r(w)$ 是 R_k-线性的。由于 g 与 Φ可交换，且 ν 是加法映射，故 $r(ww') = r(w)r(w')$，并且 r 与 Φ 以及 $D^\times$可交换。由于 $\nu(s) = -1$，我们有 $r(s) = g_s\Phi^f$。

还需证明 $r(s)^n = az$ 在 M上成立。令 $B = r(s)^n - az$。它是 R_k-线性的，并且与 Φ可交换，因为 $r(s)$ 如此，且 $az \in k$ 被 $\sigma \otimes 1$固定。令 k_0 为 $k/\breve{\mathbb{Q}}_p$的最大非分歧子扩张。环 $\breve{\mathbb{Q}}_p \otimes_{\mathbb{Q}_p} k_0$ 是若干个 $\breve{\mathbb{Q}}_p$的副本之积，每个嵌入 k_0 到 $\breve{\mathbb{Q}}_p$对应一个副本；由于 k/k_0 是全分歧的，每个副本在对 k作基变后仍是一个域。因此，根据 Cre25，引理 1.2.1]， R_k 是有限个域的乘积，每个这样的嵌入 [各对应一个域。自同构 $\sigma \otimes 1$ 传递地置换这些因子，因为 σ 传递地置换 k_0 的嵌入。因此， M 是由 R_k的本原幂等元 e 对应的子模 eM 构成的直和，而 Φ 将 eM 映到 $(\sigma \otimes 1)(e)M$。

我们首先证明， B 在这些直和项中的一个上为零。由 $\breve{\mathbb{Q}}_p \subseteq \Omega$ 给出的映射 $R_k \to \Omega$ 以及 k 的嵌入经过某个域因子（记为 e_0R_k），且 $M \otimes_{R_k}\Omega = e_0M \otimes_{e_0R_k}\Omega$。在这个纤维上， $r(s)^n$ 的作用为 $\tau_z(s)^n = az$ （引理 3.2(iii)），而 $e_0R_k \to \Omega$ 是一个域扩张，因此 B 在 e_0M上为零。由于 B 与 Φ可交换，它在每个$\Phi^i(e_0M) = (\sigma \otimes 1)^i(e_0)M$上都为零，而这些正好是全部直和项 eM，因为 $\sigma \otimes 1$传递地置换本原幂等元。因此 B 在 M上为零。

(ii) 根据 (i)， $g_{s^n}\Phi^{fn} = r(s^n) = az$，因此 $\Phi^{fn} = az\, g_{s^n}^{-1}$。设 $e_1, \dots, e_N$是由 U中的一个开子群固定的 $R_{k,0}$-基，其中 G_K为 M_0。 s在有限群 G_K/U'中的像具有有限阶；这里， U' 是包含于 U中的 G_K 的最大正规子群，因此对于某个 $t \geq 1$有 $s^{nt} \in U$，并且我们可以选择 t 使得 $c = t\, v_p(az)$ 为整数。元素 s^{nt} 在 $\breve{\mathbb{Q}}_p$ 上的作用为 σ^{-fnt}，并固定 e_j，因此

$$\Phi^{fnt}\Big(\sum_j x_j e_j\Big) = (az)^t \sum_j (\sigma^{fnt} \otimes 1)(x_j)\, e_j \qquad (x_j \in R_k).$$

设 $(az)^t = p^c\eta$ 具有 $\eta \in \mathcal{O}_k^\times$。 $\breve{\mathbb{Q}}_p$-向量空间M中的格 $\Lambda = \bigoplus_j \big(W(\mathbb{F}_p) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_k\big)e_j$ 在 $W(\mathbb{F}_p)$作用下保持不变，其中 $W(\mathbb{F}_p)$是 $\breve{\mathbb{Q}}_p$的整数环；它也在 $\sigma^{fnt} \otimes 1$ 以及乘以η的作用下保持不变，因此

$$\Phi^{fnt}(\Lambda) = p^c\Lambda.$$

反复应用这个单位元关系，便可推出 M 的每个斜率都等于 $c/(fnt)$。为此，我们将Λ 与 Dieudonn´e–Manin 分类 [Cre25, 定理 1.1.1], 中的格作比较。根据该分类，$(M,\ \Phi)$是其斜率分量的直和；斜率为 a'/b且已约至最简的分量 S 有一个格 Λ_S，满足 $\Phi^b(\Lambda_S) = p^{a'}\Lambda_S$。由于 $\Phi(S) = S$，S的格 $\Lambda'_S = \Lambda \cap S$ 满足 $\Phi^{fnt}(\Lambda'_S) = p^c\Lambda'_S$。因此， Φ 的适当迭代会分别将 Λ_S 和 Λ'_S 乘以 p的幂，每次迭代的增长率分别为 a'/b 和 $c/(fnt)$。由于这两个格彼此相差不超过 p 的某个固定次幂，且 Φ 的一个公倍迭代保持这种关系不变，因此这两个增长率必定相等。

为使这一点精确，取 N' 使得 $p^{N'}\Lambda_S \subseteq \Lambda'_S \subseteq p^{-N'}\Lambda_S$。对于整数 $h \geq 1$，映射 Φ^{bfnth} 将 Λ_S 乘以 $p^{a'fnth}$，并将 Λ'_S 乘以 p^{cbh}，因此将其作用于这些包含关系并乘以 p^{-cbh}，得到

$$p^{N'+(a'fnt-cb)h}\Lambda_S \subseteq \Lambda'_S \subseteq p^{-N'+(a'fnt-cb)h}\Lambda_S.$$

由于 $S \neq 0$，将这些包含关系与最初的包含关系作比较可知，对于每个 h，都有 $|a'fnt - cb|\, h \leq 2N'$。因此 $a'fnt = cb$，也就是说，对于 M 的每个斜率a'/b，都有 $a'/b = c/(fnt) = v_p(az)/(fn)$。最后 $v_p(a) = v_p(q^{n(n-1)/2}) = fn(n-1)/2$，由此得到 λ 的公式。

(iii) 这里 $v_p(z) = 0$，所以由 (ii) 可得 $\lambda = \frac{n-1}{2}$。令 $C_0 = \mathrm{End}_{\breve{\mathbb{Q}}_p,\Phi}(M)$ 为等晶体 (M, Φ) 的自同态代数。由 (ii) 和 [Cre25, 定理 1.1.1], , 等晶体 (M, Φ) 是斜率为 λ 的简单等晶体的若干个副本的直和；根据 Dieudonné 定理 [Cre25, 定理 1.1.2], 后者的自同态代数是 $\mathbb{Q}_p$ 上不变量为 $-\lambda$ 的中心除代数。因此 C_0 是不变量为 $-\lambda$ 的中心简单 $\mathbb{Q}_p$-代数，其维数为 $(\dim_{\breve{\mathbb{Q}}_p} M)^2 = ([k:\mathbb{Q}_p]N)^2$,, 其中 N 是 M 在 R_k上的秩。

接下来我们施加 k-线性条件。 k 对 M 的系数作用是忠实的，并且与Φ交换，因此它使 k 成为 C_0 的子域。 C_0 中的元素是 R_k-线性的，当且仅当它与该子域交换，因此 C_0 中 k 的中心化子是 C。根据中心化子定理 [Mil20, IV, 定理 3.1], C 是简单的， k 是 C的中心化子，因此 C 的中心是 k，且 $[k:\mathbb{Q}_p]\dim_{\mathbb{Q}_p} C = \dim_{\mathbb{Q}_p} C_0$。因此， C是维数为 $\dim_k C = N^2$的 k 上的中心单代数。

为计算 C的类，令 $C_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} k$ 通过左乘 C_0 和右乘 k作用于 C_0 。该模的自同态与左乘交换，因此它是由 C_0中的某个元素给出的右乘；并且它与k 的右乘交换，当且仅当该元素属于 C。右乘法的复合顺序相反，因此该模的自同态代数是 C^{op}。如引理 2.3(ii) 的证明所述，中心单代数上的非零有限生成模的自同态代数表示其反类，因此 $[C] = [C_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} k] = \mathrm{res}_{k/\mathbb{Q}_p}[C_0]$，且根据定理 2.8(a)，$\mathrm{inv}_k[C] = -[k:\ \mathbb{Q}_p]\lambda$ 。

令 A 为乘积 $x\,r(w)$（其中 $x \in D^\times$ 和 $w \in W_K$）的 k-张成空间，也就是 M 上 $D^\times \times W_K$ 的算子所张成的空间。这些算子是 R_k-线性的，并且与 Φ 对易，因此 A 属于 C。自然映射 $C \otimes_k \Omega \to \mathrm{End}_\Omega(M \otimes_{R_k} \Omega)$ 是单射，因为其源是简单的；又因为两边的维数均为 N^2，所以它也是满射。纤维是 $D^\times \times W_K$ 的不可约表示 $\rho_z \boxtimes \tau_z$（见引理 2.15 的证明），因此由 Burnside 定理，$D^\times \times W_K$ 在该纤维上的算子张成 $\mathrm{End}_\Omega(M \otimes_{R_k} \Omega)$，而 $A \otimes_k \Omega$ 的像就是 $\mathrm{End}_\Omega(M \otimes_{R_k} \Omega)$。因此 $\dim_k A \geq N^2 = \dim_k C$，且 $A = C$。

剩下的工作是将 C 与扩张到 k 上的 $\rho_z \boxtimes \tau_z$ 的像代数相对应。通过单射 $C \to \mathrm{End}_\Omega(M \otimes_{R_k} \Omega)$，代数 C 是纤维上 $\rho_z \boxtimes \tau_z$ 的算子所张成的 k-向量空间。这个 k-向量空间也是从 $A_{\rho_z \boxtimes \tau_z} \otimes_{E_z} k$ 出发的自然映射的像，而该映射是单射。因此，根据引理 2.15，$[C] = \mathrm{res}^{k/E_z}(o_{E_z}(\rho_z) + o_{E_z}(\tau_z))$。由于 $n = \dim\ \rho_z = \dim\ \tau_z$，$C$ 的次数为 $N = n^2$。最后，$-[k:\mathbb{Q}_p]^{n-1}_2$ 和 $[k:\mathbb{Q}_p]^{n-1}_2$ 相差整数 $[k:\mathbb{Q}_p](n-1)$。□

根据定理 3.12，类 $\mathrm{res}^{k/E_z}(o_{E_z}(\rho_z) + o_{E_z}(\tau_z))$ 确实具有不变量 $^{n-1}_2[k:\mathbb{Q}_p]$，因此对于在 u 处为单位的 z，命题 B.2 在假设 B.1 下得出了第 3 节直接证明的结论。因此，该命题为问题 6.1 中一种可能的计算提供了一个模型。在该命题中，这个不变量是系数域上 Frobenius 中心化子的那个不变量。

Acknowledgments

我们谨向 Michael Harris 致以诚挚的谢意。他指导了这篇论文所源自的哥伦比亚大学本科毕业论文，并为我们介绍了这个问题，使我们得以接触许多优美的课题。我们非常感谢他的指导，也感谢从他那里学到的一切。感谢 Kenta Suzuki 就 [Su23，定理 4.0.5] 与我们通信。

References

[ABPS16] A.-M. Aubert、P. Baum、R. Plymen 和 M. Solleveld，*Depth and the local Langlands correspondence* 2013，波恩工作会议（W. Ballmann、C. Blohmann、G. Faltings、P. Teichner 和 D. Zagier 编），数学进展，第 319 卷，Birkh¨auser，Cham，2016 年，‑第 17–41 页，doi:10.1007/978-3-319-43648-7 2，arXiv:1311.1606v2。[BH05] C. J. Bushnell 和 G. Henniart，*The essentially tame local Langlands correspondence II: totally ram- , ,* Compos. Math. ( )，第 – *ified representations* **141** 2005 4, 979 1011, 10 1112 0010437 05001363 期，doi: . /S X 。[BH11J] C. J. Bushnell 和 G. Henniart，*The essentially tame Jacquet–Langlands correspondence for inner forms of n* **7** 2011 3, 469 538 GL( )，Pure Appl. Math. Q. ( )，第 – 期。[BH11L] C. J. Bushnell 和 G. Henniart，*Explicit functorial correspondences for level zero representations of p-adic linear groups* **131** 2011 2, 309 331, 10 1016 2010 09 003 ，J. Number Theory ( )，第 – 期，doi: . /j.jnt. . . 。[Cre25] R. Crew，*Weil groups and F-isocrystals*，预印本，2025 年，arXiv:1710.05707v4。[Dat07] J.-F. Dat，*Théorie de Lubin–Tate non-abélienne et représentations elliptiques*，Invent. Math. **169** (2007)，75–152，arXiv:math/0604020v1。[Dat12] J.-F. Dat，*Théorie de Lubin–Tate non abélienne ℓ-entière*，Duke Math. J. **161** (2012)，第 6 期，951–1010，doi:10.1215/00127094-1548425，arXiv:1011.1887v1。[EGH11] P. Etingof、O. Golberg、S. Hensel、T. Liu、A. Schwendner、D. Vaintrob 和 E. Yudovina，*Introduction to representation theory* 59，，学生数学文库，美国数学学会，罗得岛州普罗维登斯，2011 年，arXiv:0901.0827v5。[Fon94] J.-M. Fontaine，*Représentations ℓ-adiques potentiellement semi-stables*，Astérisque **223** (1994)，第 VIII 讲，321–347。[IT20] N. Imai 和 T. Tsushima，*Affinoids in the Lubin–Tate perfectoid space and simple supercuspidal repre- sentations I: tame case* **2020**， 22, 8251 8291， 10 1093 229, ，Int. Math. Res. Not. IMRN，第 – 期，doi: . /imrn/rny，arXiv:1308.1276v5。

[Mie16] Y. Mieda, *Parity of the Langlands parameters of conjugate self-dual representations of* n *and the local Jacquet–Langlands correspondence* **19** 2020 6, 2017 2043, GL( ), J. Inst. Math. Jussieu ( ), 第 – 期, doi:10.1017/S1474748019000045, arXiv:1603.04691v1。[Mil20] J. S. Milne, *Class field theory*, 课程讲义, 第 4.03 版, 2020 年, https://www.jmilne.org/math/。[Oh16] G. Oh, *Brauer obstructions of finite groups of Lie type in view of the local Langlands corre-spondence*, 荣誉学士论文, 斯坦福大学, 2016 年, https://www.math.columbia.edu/~gyujinoh/Gyujin-Oh-Thesis.pdf。[PR12] D. Prasad 和 D. Ramakrishnan, *contrast* **134** 2012 3, 749 772, 10 1353 2012 0017, 0807 0240 , *Self-dual representations of division algebras and Weil groups: A* Amer. J. Math. ( ), 第 – 期, doi: . /ajm. . arXiv: . 。[Poo17] B. Poonen, *Rational points on varieties*, 数学研究生丛书, 第 186 卷, 美国数学学会, 罗得岛州普罗维登斯, 2017 年, 在线版本 https://math.mit.edu/~poonen/papers/Qpoints.pdf。[She18] D. A. Sherman, *Schur indices and the p-adic Langlands program*, 博士论文, 斯坦福大学, 2018 年, https://purl.stanford.edu/yz634ff4165。[Str08] M. Strauch, *Deformation spaces of one-dimensional formal modules and their cohomology*, Adv. Math. **217** (2008), 第 3 期, 889–951, doi:10.1016/j.aim.2007.07.005, arXiv:math/0611109v1。[Su23] K. Suzuki, *Rationality of the local Jacquet–Langlands correspondence for* GL(n), 预印本, 2023 年, arXiv:2307.06039v1。[Wal85] J.-L. Waldspurger, *Quelques propriétés arithmétiques de certaines formes automorphes sur* GL(2), Compositio Math. **54** (1985), 121–171。

Université Paris-Saclay, Faculté des Sciences d'Orsay, 91400 Orsay, France
Email address: ke.xu@universite-paris-saclay.fr