arXiv:2611.33121v1 [hep-th] 24 Nov 2026

反常与贝里相位

从 $\pi^0 \to \gamma\gamma$ 到费米子真空的几何

本文基于为纪念迈克尔·贝里的科学成就而举办的会议“《相、焦散与混沌：经典与量子方面》”中的一篇贡献，会议由 *ICTS-TIFR* 主办，于*2026*年*10*月在班加罗尔举行

Spenta R. Wadia

理论科学国际中心（ICTS-TIFR），塔塔基础研究所，
Shivakote，班加罗尔 560089，印度

spenta.wadia@icts.res.in

摘要

我们从历史视角回顾手征反常，从 $\pi^0 \to \gamma\gamma$ 难题以及 Adler、Bell 和 Jackiw 的工作，一直到 Wess–Zumino–Witten（WZW）项。随后，我们描述 WZW 项在 1983—85 年如何从量子色动力学中得到启发。对具有有能隙谱的非阿贝尔规范场进行积分，得到夸克的 Nambu–Jona-Lasinio 型理论；再对因手征对称性破缺而具有能隙的夸克进行积分，则得到 WZW 模型。费米子行列式分解为依赖调节器的模和一个普适相位；前者给出介子的动力学，后者由反常确定，即为 WZW 项。将其限制在重子孤子的集体坐标上，WZW 项施加一个 $U(1)$约束，使重子波函数成为单极球谐函数，并确定其自旋、统计性质和味多重态。随后我们解释，这一相位就是贝里相位：流代数的施温格项是手征场构型空间上一个 $U(1)$联络的曲率，而 WZW 项则是该联络的全纯，我们称之为贝里–威尔逊环。在 $1+1$ 维中，我们用欧拉角显式写出该联络，展示出一个狄拉克单极子，其量子化电荷就是流代数的层级。

1 引言

反常是量子场论中最坚实的事实之一。量子理论中无法保留的经典对称性，会留下一个可精确计算、单圈精确且拓扑量子化的余迹；它从最短距离一直延续到最长距离。贝里相位 [1] ，正如我们将要解释的那样，在某种意义上，是量子力学中的同一思想。当一个系统在其参数空间中沿闭合回路绝热演化时，它的状态不一定会回到自身，而这种偏离由联络及其曲率决定，是一种几何相位。

本文源于一场纪念迈克尔·贝里的会议上的演讲，旨在说明这两个思想如何交汇。用一句话概括就是：

> 手征反常指的是：费米子真空在背景场空间中沿闭合回路演化后，并不会回到自身——这就是贝里相位。

本文结构安排如下。第2 节回顾前奏： π^0 难题、Adler– Bell–Jackiw（ABJ）反常，以及 Bardeen 对其所作的非阿贝尔推广。第3 节介绍反常在粒子物理中的一些应用：标准模型中的反常抵消、U（1）问题、’t Hooft 的反常匹配、Fujikawa 从

路径积分测度推导反常及其与阿蒂亚–辛格指标定理的关系，以及 Witten 对韦斯–祖米诺项的整体表述。第4 节回顾 1983 年如何从量子色动力学出发获得 WZW 项——85 [18, 19]：对具有能隙谱的规范场进行积分，得到一种非线性费米子的南部–约纳-拉西尼奥型理论；对因手征对称性破缺而具有能隙的夸克进行积分，则得到包含拓扑项的 WZW 模型。第5节回顾重子孤子的量子化，以及由此得到的重子波函数（即单极球谐函数） [20]。第6 节回顾贝里相位，并建立它与夸克行列式之间的对应关系。第7节说明流代数的施温格项如何在构型空间上定义一个 U（1）联络，其全纯性所对应的贝里–威尔逊环就是 WZW 项 [21], ，并明确写出该联络。第8 节总结要点，第9 节列出本文未能涉及的重要主题，包括引力反常、Green–Schwarz机制、指标理论的数学（包括 Witten 指标）、行列式线丛、反常流入，以及凝聚态物理中的应用。全文中的 i 因子和整体符号均取决于约定；我们力求在各节内部保持一致。

2 前奏： π^0 谜题与轴反常

2.1 谜题

1949年，Steinberger 通过含赝标量π介子–核子耦合的质子圈计算了衰变 $\pi^0 \to \gamma\gamma$ ，所得衰变率出人意料地接近实验结果 [2]。近二十年后，Sutherland 和 Veltman [3]证明，流代数与部分守恒轴流（PCAC）假设，

$$\partial_\mu j^\mu_{5,3} = f_\pi m_\pi^2 \, \pi^0, \tag{1}$$

再加上规范不变性，意味着振幅在极限 $m_\pi \to 0$下为零。由于观测到的衰变宽度为 $\Gamma \approx 7.8$ eV，因此要么 PCAC 严重失效，要么形式论证中的某一步有误。出错的这一步，是假设经典关系$\partial_\mu j^\mu_5 = 2im\,\bar\psi\gamma_5\psi$ 在量子理论中仍作为算符恒等式成立。

2.2 Adler 和 Bell–Jackiw

Bell 和 Jackiw 在 σ-模型中采用泡利–维拉斯正则化 [5], ，而 Adler 在旋量电动力学中 [6], 证明，含一个轴顶点和两个矢量顶点的三角图（图1）具有线性发散，并且取决于圈动量的选路，因此没有任何正则化器能够同时保持矢量流和轴流守恒。保持规范不变性后，可得

$$\partial_\mu j^\mu_5 = 2im\,\bar\psi\gamma_5\psi + \frac{e^2}{16\pi^2}\,\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}. \tag{2}$$

这个额外项是一个全导数， $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} = \partial_\mu K^\mu$，但它具有物理后果。事实上，Schwinger 在 1951 [4] 中就预见到了这一点：他通过使用带有相位 $\exp\left(ie\int_x^{x+\epsilon} A\cdot dx\right)$ 的点分裂来定义规范不变的轴流，并得到了恰好这一项。

2.3 衰变率与颜色数

反常项直接给出 $\pi^0 \to \gamma\gamma$ 振幅，而且在手征极限下结果精确。夸克电荷为 $Q_u = \frac{2}{3}$、$Q_d = -\frac{1}{3}$，色荷数为 N_c，

$$\Gamma(\pi^0 \to \gamma\gamma) = \frac{\alpha^2 m_\pi^3}{64\pi^3 f_\pi^2}\left[N_c\,(Q_u^2 - Q_d^2)\right]^2 = \frac{\alpha^2 m_\pi^3}{64\pi^3 f_\pi^2}\left(\frac{N_c}{3}\right)^2. \tag{3}$$

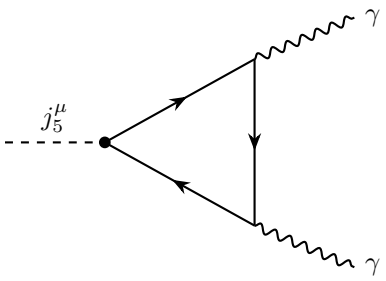


图 1：导致 ABJ反常的轴矢量–矢量三角图。

取 $f_\pi \simeq 92\,\text{MeV}$，可得 $N_c = 3$对应的数值为 $\Gamma \simeq 7.7\,\text{eV}$，而 $N_c = 1$对应的数值为 $\approx 0.86\,\text{eV}$；等价地，寿命为 $\tau = \hbar/\Gamma \approx 8.5 \times 10^{-17}\,\text{s}$。测得的衰变宽度为 $\Gamma \approx 7.8\,\text{eV}$，这是夸克具有三种色荷的早期证据之一。

Adler 和 Bardeen 证明，反常的系数在单圈阶上就已精确确定：在微扰论的更高阶中不会获得修正 [7]。这早期暗示了反常与量子场论的拓扑性质有关。

2.4 Bardeen 非阿贝尔反常

Bardeen 根据三角图、四边形图和五边形图 [8]，计算了与非阿贝尔矢量场和轴矢量场耦合的费米子的普遍反常。用现代形式表示，对于处于规范场 $A = A_\mu^a T_a$ 中的左手 Weyl 费米子，

$$(D_\mu J^\mu)_a = \frac{1}{24\pi^2}\,\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\ \mathrm{Tr}\left[T_a\,\partial_\mu\Big(A_\nu\partial_\rho A_\sigma + \tfrac{1}{2}A_\nu A_\rho A_\sigma\Big)\right]. \tag{4}$$

该反常满足 Wess–Zumino 一致性条件 [9], ，这体现了规范变换构成一个群。π介子的有效作用量必须再现这一反常，而我们将在第 4 节从夸克行列式中重新得到它。

3 反常在粒子物理中的一些应用

3.1 标准模型中的反常抵消

规范反常会破坏规范不变性，进而破坏幺正性和可重整化性，因此对所有费米子求和时，规范反常必须相互抵消 [10, 11]。三代夸克—轻子中的每一代在与标准模型外部规范场耦合的环路中运行时，其量子数都使得所有规范反常相互抵消。这对标准模型的可重整化性至关重要。

要了解其原理，可将第一代（u、 d、 ν_e、 e）完全用左手 Weyl 场表示：右手场 f_R 以其电荷共轭场 f_R^c的形式出现；该场是左手场，携带相反的电荷。取 $Q = T_3 + Y$时，量子数和反常系数列于表 1中。第二个表中的每一行都是一个三角图，其顶点处标示了相应的流，系数为 $\propto \mathrm{Tr}[T^a\{T^b, T^c\}]$，对所有左手场求和；“grav$^2 U(1)_Y$”表示混合引力反常，它有两个引力子顶点，系数为 $\propto \sum Y$；在弯曲时空中保持一致性需要抵消这一反常。最后一行是 Witten 的全局 $SU(2)$ 反常 [12], ，它要求双重态的数目为偶数。

夸克单独存在和轻子单独存在都不自洽；只有两者之间的反常才会相互抵消。每个夸克项都带有一个因子 N_c（例如，在 $SU(2)^2U(1)_Y$ 行中，$N_c \cdot \frac{1}{6}$ 对应 $-\frac{1}{2}$），因此要实现抵消,- 必须满足 $N_c = 3$。一代粒子不能是不完整的：1975年发现了 τ 轻子，1977年发现了 b夸克，第三代还需要一个伙伴——顶

	$SU(3)$	$SU(2)$	Y
$(u,\ d)_L$	$\mathbf{3}$	$\mathbf{2}$	$\frac{1}{6}$
u_R^c	$\bar{\mathbf{3}}$	$\mathbf{1}$	$-\frac{2}{3}$
d_R^c	$\bar{\mathbf{3}}$	$\mathbf{1}$	$\frac{1}{3}$
$(\nu_e,\ e)_L$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{2}$	$-\frac{1}{2}$
e_R^c	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	1

反常	夸克	轻子	总计
$SU(3)^3$	0	–	0
$SU(3)^2\,U(1)_Y$	0	–	0
引力$^2\,U(1)_Y$	0	0	0
$SU(2)^2\,U(1)_Y$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$U(1)_Y^3$	$-\frac{3}{4}$	$+\frac{3}{4}$	0
# $SU(2)$ 双重态	3	1	4（偶数）

表 1：左：标准模型的一代左手 Weyl 场。右：规范反常，分别列出夸克和轻子的贡献。

夸克，最终于1995年由费米实验室的 CDF 和 DØ 合作组发现，其质量约为 173 GeV。第二代和第三代重复了第一代的模式。

3.2 瞬子、 $U(1)$ 问题与反常匹配

在量子色动力学中，味单态轴流的散度与 Tr 成正比 GG，并且存在带有整数拓扑荷的（欧几里得）规范场构型，即瞬子 $\nu = \frac{1}{32\pi^2}\int \mathrm{Tr}\; G\tilde{G}$。't Hooft [13] 指出，相应的费米子零模导致 $\Delta Q_5 = 2N_f\nu$：轴 $U(1)$ 不是量子色动力学的对称性，也不存在第九个 Goldstone 玻色子。

't Hooft 还提出了反常匹配原理 [14]。对一个全局对称性进行弱规范化，并加入旁观费米子以抵消其反常。由于规范理论必须在所有尺度上保持自洽，原始自由度的反常必须在每个更低能标上得到重现，以抵消弱耦合旁观费米子的反常。因此，'t Hooft 的论证表明，反常在重整化群流下保持不变：在紫外计算得到的反常等于红外自由度的反常。在具有自发破缺的手征对称性的量子色动力学中，红外自由度是 Nambu-Goldstone 玻色子，而反常则由韦斯–祖米诺项重现。

3.3 Fujikawa：反常存在于测度中

Fujikawa [15] 指出，反常源于路径积分中的费米子测度不具有不变性。考虑欧几里得量子电动力学，并将费米子场展开为狄拉克算子的本征模， $\not{D}\phi_n = \lambda_n\phi_n$。在局域手征旋转 $\psi \to e^{i\alpha(x)\gamma_5}\psi$， $\bar{\psi} \to \bar{\psi}e^{i\alpha(x)\gamma_5}$下，测度变为

$$\mathcal{D}\psi\,\mathcal{D}\bar{\psi} \;\to\; \exp\Big(-2i\int d^4x\,\alpha(x)\,\mathcal{A}(x)\Big)\,\mathcal{D}\psi\,\mathcal{D}\bar{\psi}, \qquad \mathcal{A}(x) = \sum_n \phi_n^\dagger(x)\,\gamma_5\,\phi_n(x). \tag{5}$$

照目前的形式， $\mathcal{A}(x)$没有明确定义，因为它的形式是 $\mathrm{Tr}\,\gamma_5 \times \delta(0)$，因此必须以规范不变的方式进行正则化：

$$\mathcal{A}(x) = \lim_{M\to\infty} \mathrm{Tr}\left[\gamma_5\, e^{-\not{D}^2/M^2}\right](x,x). \tag{6}$$

使用 $\not{D}^2 = D^\mu D_\mu + \frac{e}{2}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$计算热核，并在 $\sigma F/M^2$中展开。带有 γ_5的迹恰好需要两个 σF 因子；动量积分给出 $M^4/16\pi^2$，这抵消了展开中的 $1/M^4$ 。含有少于 F 个因子的项在取迹时为零，而含有更多因子的项则受到 $1/M^2$的幂次抑制。结果为

$$\mathcal{A}(x) = -\frac{e^2}{32\pi^2}\,\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}, \tag{7}$$

符号取决于约定，并由此再现 ABJ 方程（2）。

3.4 阿蒂亚–辛格指标定理

令 α 为常数，即可显现反常的拓扑特征，此时雅可比行列式涉及 $\int d^4x\,\mathcal{A}\,(x)$。由于 $\{\gamma_5, \not{D}\} = 0$，若 $\not{D}\phi_n = \lambda_n\phi_n$，则 $\not{D}\,(\gamma_5\phi_n) = -\lambda_n\gamma_5\phi_n$。对于 $\lambda_n \neq 0$，模 ϕ_n 和 $\gamma_5\phi_n$ 具有不同的本征值，因此彼此正交，所以

$$\int d^4x\ \phi_n^\dagger\gamma_5\phi_n = 0 \qquad (\lambda_n \neq 0). \tag{8}$$

非零模成对出现并相互抵消；只有零模存留下来，而且可以选择具有确定手征性的零模 $\gamma_5 = \pm 1$。正则化器消失，且

$$\int d^4x\ \mathcal{A} = n_+ - n_- = \operatorname{ind}\not{D} = \frac{e^2}{32\pi^2}\int d^4x\,\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} = \frac{1}{8\pi^2}\int (eF)\wedge(eF)\ \in\ \mathbb{Z}. \tag{9}$$

这就是阿蒂亚–辛格指标定理 [16]：解析指标等于一个拓扑不变量。它同时解释了三个事实：反常系数在单圈近似下精确，因为整数不会有微小修正；具有 $\nu \neq 0$ 的瞬子会强制产生费米子零模和 't Hooft 顶角 $\Delta Q_5 = 2N_f\nu$；反常密度就是局部指标密度。

3.5 Witten 对韦斯–祖米诺项的全局表述

Wess 和 Zumino [9] 构造了赝标介子的有效作用量，使其能够再现反常。Witten [17] 对其给出了全局的几何表述。手征拉格朗日量 $\frac{f_\pi^2}{4}\mathrm{Tr}\ \partial_\mu U\partial^\mu U^\dagger$具有一些虚假的离散对称性，例如这些对称性会禁止衰变$K^+K^- \to \pi^+\pi^-\pi^0$；韦斯–祖米诺项打破了这些对称性。它无法写成局域的四维拉格朗日量。取而代之的是，将 U 延拓到一个五维圆盘 D^5，其边界是（紧化后的）时空，$\partial D^5 = S^4$:

$$\Gamma_{WZW} = -\frac{i}{240\pi^2}\int_{D^5} d^5x\ \epsilon^{ijklm}\ \mathrm{Tr}\left[L_iL_jL_kL_lL_m\right], \qquad L_i = U^\dagger\partial_i U. \tag{10}$$

两种延拓的差异为对 S^5 的积分；由于 $\pi_5(SU(3)) = \mathbb{Z}$ 是 2π 乘以一个整数。因此，为使 $e^{iN\Gamma}$ 定义良好，N 必须为整数。对 WZW项进行规范化会重现$\pi^0 \to \gamma\gamma$ 并确定 $N = N_c$；当 N_c 为奇数时，斯格明子是费米子 [17]。Witten 将这一情况类比为带电粒子绕着狄拉克单极子在球面上运动：其作用量只能通过二维圆盘定义，并且只有当电荷与磁荷的乘积量子化时才是单值的。这一图景将在第6 节和第7节再次出现。

4 从量子色动力学到 WZW项

本节将回顾 WZW项（包括其量子化系数）如何从量子色动力学 [18, 19]中产生。同一时期的相关工作还包括 [22, 23, 24, 25]。

4.1 非线性费米子理论

格点规范理论计算揭示了量子色动力学的一个基本事实：纯规范扇区存在质量隙。为了在 Kadanoff–Wilson 重整化群的概念框架下研究量子色动力学的手征对称性，我们设想对规范场的短波长自由度进行积分，直至达到与胶球质量倒数同量级的长度尺度。由于此时规范场具有有限的关联长度，得到的理论只计算规范不变费米子算符的关联，这与费米弱相互作用理论颇为相似

当波长远大于 $1/M_W$ 时，电弱理论会呈现出相互作用。由此得到的非线性费米子理论是南部–约纳-拉西尼奥模型的推广 [26]:

$$-i\mathcal{L} = \bar{\psi}_{L\alpha j}\, i\partial\!\!\!/\, \psi_{L\alpha j} + \bar{\psi}_{R\alpha j}\, i\partial\!\!\!/\, \psi_{R\alpha j} + g_1^2 \left(\bar{\psi}_{L\alpha j}\psi_{R\alpha k}\right)\left(\bar{\psi}_{R\beta k}\psi_{L\beta j}\right) - i\,\frac{g_2^2}{4}\left[\left(\bar{\psi}_{L\alpha j}\gamma_\mu\psi_{L\alpha k}\right)\left(\bar{\psi}_{L\beta k}\gamma_\mu\psi_{L\beta j}\right) + L \leftrightarrow R\right] + \cdots, \tag{11}$$

其中 α、$\beta = 1$、……、N 是色荷指标，j、$k = 1$、……、n 是味指标，g_1、g_2 具有质量维数 -1，且截断 Λ 低于胶球质量。该理论具有全局 $U(n) \times U(n)$ 手征对称性。

引入辅助规范不变集体场、复味矩阵 M 以及矢量场 L_μ，R_μ 它们与左、右手夸克耦合后，可以将（11）重写为

$$-i\mathcal{L} = \bar{\psi}_L\, i\partial\!\!\!/\, \psi_L + \bar{\psi}_R\, i\partial\!\!\!/\, \psi_R + \bar{\psi}_L M\psi_R + \bar{\psi}_R M^\dagger\psi_L + i\left(\bar{\psi}_L L\!\!\!/\,\psi_L + \bar{\psi}_R R\!\!\!/\,\psi_R\right) + \frac{i}{g_1^2}\,\mathrm{tr}\; M^\dagger M + \frac{i}{g_2^2}\,\mathrm{tr}\left(L_\mu^2 + R_\mu^2\right); \tag{12}$$

对 M、L_μ、R_μ 进行高斯积分即可得到（11）。在（V_1、V_2）$\in U(n) \times U(n)$ 下，$\psi_L \to V_1\psi_L$，$\psi_R \to V_2\psi_R$，$M \to V_1 M V_2^\dagger$，$L_\mu \to V_1 L_\mu V_1^\dagger$ 以及 $R_\mu \to V_2 R_\mu V_2^\dagger$。

4.2 缓慢变化的手征背景中的夸克

在这个背景场中，夸克所感受到的狄拉克算子为

$$D = i\partial\!\!\!/ - L\!\!\!/\, P_L - R\!\!\!/\, P_R + iMP_L + iM^\dagger P_R. \tag{13}$$

P_L 和 P_R 是手征投影算符。当 N很大时，对于 $\Lambda^2 g_1^2 > 8\pi^2/N$，手征对称性自发破缺：$M = H\,U$，其中 $H \sim \langle\psi\psi\rangle$ 是组分夸克质量，$U(x)$ 是π介子场。因此夸克具有能隙。将它们积分掉，并对长波长展开，$k \ll H$，所有内容都包含在费米子行列式中，我们将其分为模和相位：

$$N \ln\det D = N \ln|\det D| + iN\Delta. \tag{14}$$

行列式通过热核（Schwinger 固有时间）方法计算，

$$\ln\det D = -\frac{1}{2}\int_{1/\Lambda^2}^{\infty}\frac{ds}{s}\;\mathrm{Tr}\; e^{-s\hat{D}^2}, \qquad \hat{D} = i\gamma_5 D, \tag{15}$$

ˆ 按背景场的导数展开。选择 D 可确保矢量流守恒，这是量子色动力学所要求的 [27], ，并且反常与Bardeen的结果一致。

4.3 行列式的两部分，两种物理

行列式的模 $\ln|\det D|$ 描述介子的动力学：π介子动能项、四导数项，以及矢量介子和轴矢量介子的耦合与质量，例如 $m_A^2 - m_V^2 = 6\bar{H}^2$ [19]。在长波长下，π介子作用量为

$$S = \int d^4x \left[\tfrac{1}{2}F_\pi^2\;\mathrm{tr}(L^\mu L_\mu) + \frac{N(d_4 - d_6)}{16}\;\mathrm{tr}\,[L_\mu, L_\nu]^2 + \frac{Nd_5}{16}\;\mathrm{tr}\,(L_\mu L^\mu)^2\right] + N\,\Gamma_{WZW} + \cdots, \tag{16}$$

其中有 $L_\mu = i(\partial_\mu U)U^\dagger$。第一个四阶导数项是斯基尔姆项；第二个是一个附加项，因此所得结果是一个具有孤子解的广义斯基尔姆模型。系数 d_i 由夸克圈计算得到，是 $\bar{H}^2/\Lambda^2$的函数；它们取决于截断和正则化器的选择，因此并非普适的。

相位 Δ相比之下，给出了 WZW项 $N\Gamma_{WZW}$，其系数与 H、截断和正则化器无关。它是普适的，完全由反常决定，并承载重子数和所有反常过程。正如我们将在第6节看到的，这种依赖调节器的模与普适相位之间的划分，类似于 Berry 对动力学相位和几何相位的划分。

4.4 相位由反常决定

相位在局部手征旋转下并不保持不变，因为费米子测度并非 [15]。由于我们的正则化保持矢量流守恒，相位的变化与 Bardeen 反常（4）一致。限制在 π介子场上，

$$G_a\,(i\Gamma) = \frac{1}{48\pi^2}\,\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\ \mathrm{tr}\left(t_a\,L_\mu L_\nu L_\rho L_\sigma\right), \tag{17}$$

其中， G_a 在构型空间 $U(x)$ [18]上生成 $U(n)$ 旋转。正如 Witten 强调的那样，这个方程无法积分为一个局域的四维作用量。但是，Wess–Zumino 一致性条件是构型空间 [19], 上的零曲率条件，因此该方程可以沿构型空间中的任意路径积分，且结果与路径无关。这里的构型空间是场构型 $U(x)$ 所构成的黎曼流形，其度量为

$$ds^2 = \int d^4x\ \mathrm{tr}\left(dU\,dU^\dagger\right). \tag{18}$$

4.5 沿构型空间中的路径积分反常

取一条路径 $U(x,\ s)$， $s\in[0,1]$，从 $U=1$ 到所关注的构型，其中 $\Gamma(0)=0$。沿着这条路径，令 $L_s = i(\partial_s U)U^\dagger$，方程（17）变为

$$\frac{d\Gamma}{ds} = \frac{1}{48\pi^2}\int d^4x\ \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\ \mathrm{tr}\left(L_s\,L_\mu L_\nu L_\rho L_\sigma\right). \tag{19}$$

坐标 $(s,\ x)$ 扫出一个由时空 S^4 围成的五维圆盘 D^5 ，所得结果就是 Witten 公式 [18],

$$\Gamma = -\frac{1}{240\pi^2}\int_{D^5} d\Sigma^{ijklm}\ \mathrm{tr}\left(L_iL_jL_kL_lL_m\right). \tag{20}$$

被积函数是闭的，因此结果与路径无关； $\pi_5(SU(3)) = \mathbb{Z}$ 使 $e^{iN\Gamma}$仅在 N为整数时才是单值的，而这里 N 是颜色数。由于实表示不存在反常，两种味时没有 WZW项。因此，WZW项是由夸克推导出来的，而非预先假定的。

4.6 相位承载的内容

重子数。重子流为

$$B_\mu = -\frac{i}{N}\ \mathrm{tr}\left(\frac{\delta}{\delta L_\mu}+\frac{\delta}{\delta R_\mu}\right)\ln\det D. \tag{21}$$

模在矢量规范变换下保持不变，因此只有相位有贡献。在长波长下 [18, 19]

$$B_\mu = -\frac{1}{24\pi^2}\,\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\ \mathrm{tr}\left(\partial^\nu UU^{-1}\partial^\rho UU^{-1}\partial^\sigma UU^{-1}\right), \tag{22}$$

一个拓扑流：重子数等于绕数 [22, 24], ，重子是式（16）的孤子。

反常过程。 在费米子理论中对夸克电荷 Q 进行规范化，会自动产生规范化 WZW 项，进而产生 $\pi^0\to\gamma\gamma$ 以及其他流代数反常，这与Witten [17]的结果一致。

修正后的高斯定律。 反常项修正了构型空间上的高斯定律约束 [19], 这是相位表现得如同联络的第一个迹象。

简而言之，夸克的一切性质中，能够在长距离下保留下来的普适系数，都蕴含在行列式的相位中。

5 集体坐标与重子量子数

对于孤子的集体坐标而言，相位决定了重子 [20] 的自旋、统计性质和味多重态；另见 [28, 29]。考虑作用量

$$S(U) = N\big[S_0(U) + \Gamma(U)\big], \tag{23}$$

其中， S_0 是 Skyrme作用量， Γ 是 WZW项。在大 N 时， $1/N$ 扮演 $\hbar$（即 WKB参数）的角色，而孤子则通过 Gervais和Sakita 的集体坐标方法 [30]，进行量子化；该方法可追溯到 Wentzel 的强耦合理论 [31]。写作

$$U(t,\mathbf{x}) = \Omega(t)\, U_0(\mathbf{x})\, \Omega^{-1}(t), \tag{24}$$

其中， U_0 是重子数为一、嵌入于 $SU(3)$ 中的刺猬解，且 $\Omega(t) \in SU(3)$。由于 U_0 与超荷 $Y = \frac{1}{3}\mathrm{diag}(1,\,1,\,-2)$ 对易，Ω 和 Ωh（其中 $h = e^{i\epsilon Y}$）描述的是同一构型：集体坐标空间为 $SU(3)/U(1)$，我们将其视为带有局域 $U(1)$ 对称性的 $SU(3)$。

将此 U 代入 $S(U)$，得到集体坐标拉格朗日量

$$L = -\tfrac{1}{2} I_{cd}\, \mathrm{Tr}(t_c \omega_R)\, \mathrm{Tr}(t_d \omega_R) - \frac{N}{48\pi^2}\, \mathrm{Tr}(\omega_R K), \qquad \omega_R = \Omega^{-1}\dot{\Omega}, \tag{25}$$

其中， I_{cd} 是转动惯量张量，而 $K \propto \mathrm{diag}(1,\,1,\,0)$由雏形子的重子密度构成。第二项来自 WZW 项。它对速度呈线性，正如 [20], 所指出的，“对重子波函数施加了一个至关重要的边界条件”：即 $U(1)$规范条件

$$Y_R = \frac{N}{3} \tag{26}$$

该条件约束波函数的右超荷。

5.1 重子量子数

由于转动惯量张量在超荷方向上有一个零特征值，系统受到约束。在哈密顿形式中，该约束写作 $Y_R = N/3$。用 [20], 的话来说，这“类似于规范理论中对物理态施加的高斯约束”：它源于用八个变量描述七维空间$SU(3)/U(1)$时引入的局域 $U(1)$对称性。物理波函数满足

$$\hat{Y}_R\, \psi(\Omega) = \frac{N}{3}\, \psi(\Omega), \qquad e^{i\alpha \hat{Y}_R} \psi(\Omega) = \psi(\Omega\, e^{i\alpha Y}). \tag{27}$$

由于 $e^{6\pi i Y} = 1$，这些意味着 $\psi(\Omega) = e^{2\pi i N}\psi(\Omega)$，而单值性要求 $N \in \mathbb{Z}$.

该系统是一个广义对称陀螺：变量空间为 $SU(3)$，而 $\Omega \to V\Omega W$ 具有对称性，其中 $V \in SU(3)$（味）和右侧作用的 W $SU(2) \times U(1)$ 子群是对称群，其 $SU(2)$ 部分与空间旋转等同。波函数是 $D^{pq}_{\alpha\beta}(\Omega)$ 的矩阵元，属于 $SU(3)$ 表示 $D(p,q)$，其中 $\beta = (I, I_3, Y)$ 标记味，而 $\alpha = (I', I'_3, Y')$ 标记自旋和右超荷。没有 WZW项时，只有$Y' = 0$ 允许存在。有了它，只有满足 $Y' = N/3$ 的态能够保留下来：波函数

并非定义在 $SU(3)/U(1)$ 上的函数，而是其上电荷为 $N/3$的线丛的截面，也就是说，是单极球谐函数 [32],，相当于$D^{j}_{m,q}$，对应于单极子场中电荷为 $q = eg$ 的粒子。通过 $SU(3)$ 的表示论可得 [20]

$$p - q = N + 3l, \qquad I_3' = \frac{N}{2} + k, \qquad l, k \in \mathbb{Z}. \tag{28}$$

第一个条件表明，允许的味表示的三重态等于 N 模 3；第二个条件表明， N 为奇数时重子是费米子， N为偶数时重子是玻色子。对于 $N = 3$ ，只出现三重态为零的表示：最低的是味八重态，其中 $Y' = 1$ 要求自旋$1_{\ 2}$；以及自旋为$3_{\ 2}$的十重态。这些恰好就是实验中观测到重子所具有的表示。

哈密顿量是二次卡西米尔算符之和。令 C_1、 C_2 为两个独立的转动惯量， C_{pq} 为 D（p, q）的二次卡西米尔算符，则能量为 [20]

$$E(p, q; I') = \Big(\frac{1}{C_1} - \frac{1}{C_2}\Big) I'(I' + 1) + \frac{1}{C_2}\Big(C_{pq} - \frac{N^2}{12}\Big), \tag{29}$$

由此可得核子和 Δ的

$$M_N = M_{\mathrm{cl}} + \frac{3}{4}\Big(\frac{1}{C_1} + \frac{2}{C_2}\Big), \qquad M_\Delta = M_{\mathrm{cl}} + \frac{3}{4}\Big(\frac{5}{C_1} + \frac{2}{C_2}\Big), \tag{30}$$

因此 $M_\Delta - M_N = 3/C_1$。这里， M_{cl} 的量级为 N ，而 $1/C_{1,2}$ 的量级为 $1/N$。这种分工颇具启发性：几何项确定量子数，而动力学部分通过 C_1 和 C_2确定质量。正如 [20], 所强调的，WZW项“承载着‘全局’且‘与长度尺度无关’的信息”，并且独立于描述重子核心的密度场 H。

这将 Wentzel 对 π介子–核子系统的集体坐标模型推广到了味 $SU(3)$，并加入了 WZW项；该模型的内部对称群是同位旋 $SU(2)$。 [31],

用下一节的语言来说，式（25）中的 WZW项是集体坐标空间上的贝里联络。写作 $\omega_R = i\omega^a t_a$，它为（$N/\sqrt{6}$） ω^8，其曲率正比于 $f_{8bc}\,\omega^b \wedge \omega^c$，仅在 b 时非零，$c \in \{4, 5, 6, 7\}$：它定义在 $SU(3)/U(2) \cong \mathbb{CP}^2$上。因此，孤子在空间中的拓扑荷转化为其集体坐标空间中的贝里磁通。

6 贝里相位联络

6.1 Berry 的几何相位

考虑一个依赖于缓慢变化参数$\mathbf{R}(t)$ 的哈密顿量 $H(\mathbf{R})$，以及一个非简并能级 $|n,\ \mathbf{R}\rangle$。在参数空间中沿闭合回路 C 绝热演化时， [1],

$$|\psi(T)\rangle = e^{i\gamma_n(C)}\, e^{-\frac{i}{\hbar}\int_0^T E_n\, dt}\, |\psi(0)\rangle, \qquad \gamma_n(C) = \oint_C \mathcal{A}_n, \qquad \mathcal{A}_n = i\langle n|\nabla_{\mathbf{R}}\, n\rangle \cdot d\mathbf{R}. \tag{31}$$

$\mathcal{A}_n$ 是参数空间上的 $U(1)$联络，而相位 $|n\rangle \to e^{i\chi(\mathbf{R})}|n\rangle$ 的改变是一种规范变换。贝里相位 γ_n 模 2π是规范不变的；根据斯托克斯定理，它等于曲率 $\mathcal{F}_n = d\mathcal{A}_n$ 穿过任意以 C为边界的曲面的磁通。Simon 将其识别为线丛 [33], 的全纯，而 Wilczek 和 Zee 则为简并能级 [34]给出了非阿贝尔推广。

6.2 规范示例：磁场中的自旋

设 $H = -\mu \mathbf{B} \cdot \mathbf{S}$ 表示自旋 s。下面两幅图都使用同一族态，即沿单位向量$\hat{\mathbf{n}}$指向的自旋相干态 $|\hat{\mathbf{n}}\rangle$，其中 $\langle \hat{\mathbf{n}}|\mathbf{S}|\hat{\mathbf{n}}\rangle = s\hat{\mathbf{n}}$。关键恒等式是，对于 S^2上的任意闭合回路$\hat{\mathbf{n}}(t)$,

$$i \oint \langle \hat{\mathbf{n}}| \tfrac{d}{dt} |\hat{\mathbf{n}}\rangle \, dt = -s\,\Omega, \tag{32}$$

其中 Ω 是所围成的立体角。曲率对应于强度为 s的磁单极子；由于 Ω 仅定义到 $\Omega \to \Omega - 4\pi$为止，单值性要求 $2s \in \mathbb{Z}$。

Berry 的图像。 磁场 $\mathbf{B}(t)$ 以相对于拉莫尔进动频率 $\mu|\mathbf{B}|$缓慢得多的速度绕一闭合回路转动。一个从基态开始的自旋会保持对齐，$\hat{\mathbf{n}}(t) = \mathbf{b}(t) = \mathbf{B}/|\mathbf{B}|$，并获得一个动力学相位加上几何相位 $-s\Omega$，其中 Ω 是 $\mathbf{b}$ 扫过的立体角。在 $\mathbf{B}$ 空间中，磁单极子位于 $\mathbf{B} = 0$ 处，此处 $2s+1$ 能级发生交叉。

路径积分。 这里 $\hat{\mathbf{n}}(t)$ 是积分变量，每条路径的权重为 e^{iS}，其中

$$S[\hat{\mathbf{n}}] = \int i\langle \hat{\mathbf{n}}|\partial_t \hat{\mathbf{n}}\rangle \, dt + \int \mu s\, \mathbf{B}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dt. \tag{33}$$

第一项是 $0+1$维的韦斯–祖米诺项，在圆盘上可写为 $s\int_{D^2} \hat{\mathbf{n}}\cdot(\partial_t \hat{\mathbf{n}} \times \partial_\tau \hat{\mathbf{n}})$：它是每条路径的贝里相位。正是这一项使 $\hat{\mathbf{n}}$ 成为量子自旋，其中允许$2s+1$ 态以及半整数 s。经典路径是拉莫尔进动。

这两种图景之间的联系如下：Berry 缓慢旋转的场在 $\hat{}$ 的求和 $\hat{}$ 中选取一条路径，$\mathbf{n}(t) = \mathbf{b}(t)$，沿着这条路径，韦斯–祖米诺项就是 Berry 的相位 $-s\Omega$。一般而言， [35, 36, 37] 在绝热（Born–Oppenheimer）近似下积分掉快自由度时，慢变量的有效作用量会获得一个与速度成线性的项， $i\langle 0|\partial_t|0\rangle$这就是贝里联络；当其曲率具有磁单极子的形式时，它无法在全局范围内写成局域项，因此是一个韦斯–祖米诺项，其系数是量子化的。

6.3 术语表

第4 节的夸克行列式恰好符合这一模式。快自由度是¯狄拉克海中的夸克，它们因 H而具有能隙；慢变量是手征场 $(\mathbf{x}\ t)$；而 WZW 项是费米子真空的几何相位 $|\Omega[U]\rangle$，它随 U 变化。表 2总结了这种对应关系。

贝里绝热相位	**手征背景中的夸克**
$H(\mathbf{R})$，缓慢变化的参数$\mathbf{R}(t)$	狄拉克算子 $D[U]$，缓慢变化的 $U(\mathbf{x}\ t)$
参数空间$\mathbf{R}$	构型空间 $\mathcal{M}$ =映射空间$(S^3, SU(N_f))$
非简并能级 $\|n,\ \mathbf{R}\rangle$	费米子真空 $\|\Omega[U]\rangle$，由能隙隔开 $\bar{H}$
联络 $\mathcal{A}_n = i\langle n|\nabla_{\mathbf{R}}\, n\rangle$	U（1）上的联络 $\mathcal{M}$
曲率 $\mathcal{F}_n = d\mathcal{A}_n$	施温格项
贝里相位 $\gamma_n = \oint_C \mathcal{A}_n = \iint \mathcal{F}_n$	$\det D$ 的相位： D^5 上的 WZW项
动力学相位 $\int E_n\, dt$	模 ln $\|\det\ D\|$（依赖正则化器）
规范不变 mod 2π；量子化通量	$\pi_5(SU(3)) = \mathbb{Z}$； $N_c \in \mathbb{Z}$

表 2：贝里相位与夸克行列式。

具体来说，考虑第4节的方程（19），这是 Dhar 和 Wadia 积分的方程 [18], ，他们选择的时空为 $S^3 \times S^1$，且时间具有周期性。静态构型

$U(\mathbf{x})$ 于是是 $\mathcal{M}=\mathrm{Map}(S^3,\ SU(N_f))$ 中的一个点，而时间演化 $U(\mathbf{x}\ t)$ 是 $\mathcal{M}$中的一条闭合回路。在（19）中，除 L_s之外， ϵ-张量的四个指标中恰有一个是时间指标，因此

$$\Gamma=\int_0^1 ds\oint dt\ \mathcal{F}_{st},\qquad \mathcal{F}_{st}\propto\int_{S^3} d^3x\ \epsilon^{ijk}\ \mathrm{tr}\left(L_s\,L_t\,L_iL_jL_k\right):\tag{34}$$

Γ 是回路族 $s\mapsto U(\mathbf{x}\ t;\ s)$ 扫过的曲面上的磁通，由对 S^3积分五形式 $\mathrm{tr}(dU\,U^{-1})^5$ 得到的定义在 $\mathcal{M}$ 上的二形式$\mathcal{F}$ 给出。这就是 Berry 公式$\gamma=\iint\mathcal{F}$。Witten 五维圆盘是在 $\mathcal{M}$中扫过的曲面，而 N 的量子化可由 $\pi_2(\mathcal{M})=\pi_5(SU(3))=\mathbb{Z}$推出：它是场空间中的一个磁单极子。Dhar–Wadia 推导 [18], 于 1983 年 9 月提交，比 Berry 的论文于 1984 年 3 月发表早了几个月，因此这是一次早期的场论计算，计算的是多体 Berry 相位，只是当时尚无相应的术语；韦斯–祖米诺项与 Berry 相位之间的明确联系则是后来才建立的 [35, 36, 38, 37]。

7 WZW项作为构型空间中的贝里–威尔逊环

构型空间上的联络可以完全显式地表示为 [21]。我们在 $1+1$维空间中使用 $G=SU(2)$；该构造可推广到 $SU(N)$ 以及 $3+1$维空间。

7.1 流代数、施温格项与一个 $U(1)$ 规范联络

设构型空间为 $\mathcal{M}=$映射空间$(S^1,\ G),\quad x\mapsto U(x)$。带有施温格项的流代数写作

$$[L_0^\alpha,L_0^\beta]=i\lambda^2 f_{\alpha\beta\gamma}L_0^\gamma+i\alpha f_{\alpha\beta\gamma}L_1^\gamma,\qquad [L_0^\alpha(x),L_1^\beta(y)]=i\lambda^2 f_{\alpha\beta\gamma}L_1^\gamma+\tfrac{\lambda^4}{2}\,\delta^{\alpha\beta}\partial_x\delta(x-y),\tag{35}$$

其中 $4\pi\alpha\lambda^{-2}=k\in\mathbb{Z}$ （ $\delta(x-y)$ 的局部因子被略去）。我们利用 $U(1)$ 联络 $A^\alpha(U(x))$ 在 $\mathcal{M}$ 上来实现流：

$$l_0^\alpha(x)=\pi^\alpha(x)-A^\alpha,\qquad \pi^\alpha=\mathrm{tr}\left(t^\alpha U\frac{\partial}{\partial U}\right),\qquad l_1^\alpha=\mathrm{tr}\left(t^\alpha\,\partial_x U\,U^{-1}\right),\tag{36}$$

其规范变换为 $A\to A+\delta\phi$。对于 $\delta_{\alpha x}U(y)=t^\alpha U(y)\ \delta(x-y)$，规范不变场强为

$$F_{\alpha x,\beta y}=i\,\delta_{\alpha x}A_{\beta y}-i\,\delta_{\beta y}A_{\alpha x}-f_{\alpha\beta\gamma}A_{\gamma x}\,\delta(x-y),\tag{37}$$

并且协变导数 l_0^α 不对易：

$$[l_0^\alpha(x),l_0^\beta(y)]=-if_{\alpha\beta\gamma}\,l_0^\gamma\,\delta(x-y)+i\,F_{\alpha x,\beta y}.\tag{38}$$

当且仅当以下条件成立时，流代数才会重现

$$F_{\alpha x,\beta y}=\frac{k}{4\pi}\,f_{\alpha\beta\gamma}\,l_1^\gamma\,\delta(x-y).\tag{39}$$

也就是说，施温格项是构型空间上一个 U（1）规范场的曲率：贝里曲率。

7.2 贝里–威尔逊环

这个联络沿闭曲线 $t \mapsto U(x,\ t)$ 在 $\mathcal{M}$ 上的全纯，用 Berry 的语言来说是贝里相位，用规范理论的语言来说是威尔逊环；我们称之为 贝里–威尔逊环。利用斯托克斯定理和（39），

$$\begin{aligned}\Phi &= \oint dt \int_0^{2\pi} dx\ A_\alpha\, l_t^\alpha = \int_0^1 ds \oint dt \int dx\ F_{\alpha\beta}\, l_t^\alpha l_s^\beta \\ &= \frac{k}{12\pi}\int_D d^3x\, \epsilon^{ijk}\ \mathrm{tr}\left(\partial_i U U^{-1}\partial_j U U^{-1}\partial_k U U^{-1}\right),\end{aligned} \tag{40}$$

即 WZW项，其归一化方式使得 $\mathcal{M}$ 中任意闭曲面上的磁通为 $2\pi k$。[1]在薛定谔表象中，波泛函携带相位

$$\Psi[\{U(x)\},T] \sim \exp\left(i\int^T dt \int dx\, A_a\, \dot\theta^a\right), \tag{41}$$

而沿闭曲线绕行一周时，它的变化量为 $e^{i\Phi}$：波泛函携带流代数的射影表示，该表示编码在拓扑非平凡的 $U(1)$ 规范场中。势 A 必然具有狄拉克型奇点，而 k 则是 $\mathcal{M}$上“磁单极子”的量子化电荷。这是第 5节中集体坐标构造的场论版本。表 3总结了这种对应关系。

流代数	$U(1)$ $\mathcal{M}$**上的规范理论**	**贝里**
$l_0 = \pi - A$	协变导数	绝热动量
施温格项	场强 F	贝里曲率
WZW项	贝里–威尔逊环	贝里相位
能级 k	磁单极子荷	$2s$对于自旋

表 3：构型空间上的 $U(1)$ 规范理论中的流代数。

7.3 欧拉角中的联络

为了明确展示磁单极子，用欧拉角参数化 $U \in SU(2)$，

$$U = e^{i\alpha t_3}e^{i\beta t_2}e^{i\gamma t_3}, \qquad t_a = \sigma_a/2, \qquad \beta\in[0,\pi],\ \alpha\in[0,2\pi),\ \gamma\in[0,4\pi). \tag{42}$$

WZ 三形式与 Haar测度成正比，并具有一个狄拉克型二形式势：

$$\frac{ik}{8\pi}\sin\beta\ d\alpha\wedge d\beta\wedge d\gamma = dB, \qquad B = \frac{ik}{8\pi}(1-\cos\beta)\ d\gamma\wedge d\alpha. \tag{43}$$

$\mathcal{M}$ 上的联络为 $A_a(x) = B\big(X_a,\ \partial_x U\big)$，其中 $X_a U = it_a U$是生成向量场。具体而言，用撇号表示 ∂_x，

$$\begin{aligned}A_1(x) &= -\frac{ik}{8\pi}\tan\frac{\beta}{2}\cos\alpha\left(\alpha' + \cos\beta\,\gamma'\right),\\ A_2(x) &= +\frac{ik}{8\pi}\tan\frac{\beta}{2}\sin\alpha\left(\alpha' + \cos\beta\,\gamma'\right),\\ A_3(x) &= -\frac{ik}{8\pi}(1-\cos\beta)\,\gamma'.\end{aligned} \tag{44}$$

[1]这修正了 [21], 最终表达式中的一个 2 倍因子，其中系数 $k/24\pi$ 出现；场强（39）以及第7.3 节中的显式势都对应于 $k/12\pi$。

势在 $\beta = 0$ 处正则，在 $\beta = \pi$处奇异；后者是圆 $U_{11} = 0$上的一条狄拉克弦。贝里–威尔逊环路相位可化为一个局部二维积分，积分区域是由 (t, x) 扫过的条带：

$$\Phi = \frac{k}{8\pi} \int dt \int_0^{2\pi} dx \, (1 - \cos\beta) \left(\dot{\gamma}\, \alpha' - \dot{\alpha}\, \gamma' \right). \tag{45}$$

势 $B \propto (1 - \cos\beta)\, d\gamma \wedge d\alpha$ 是狄拉克势 $A_\phi \propto (1 - \cos\theta)$的类似物，其弦位于负轴上。取 $(-1 - \cos\beta)$可将弦移至 $\beta = 0$；这两种取法在交叠区域上相差一个规范变换，因此 A 是 $\mathcal{M}$ 上的一个非平凡$U(1)$丛的联络。总磁通为 $2\pi k$，而 $e^{i\Phi}$ 的单值性要求 $k \in \mathbb{Z}$：狄拉克量子化。

8 总结

我们总结要点。

1. ABJ反常解决了 π^0 难题，并统计了色荷。

2. 反常具有拓扑性质，并且在一圈层面是精确的（阿德勒–巴丁定理）；受一致性条件（韦斯–祖米诺）约束；等于狄拉克算子的指标密度（Fujikawa；Atiyah– Singer）；在重整化群下保持不变（’t Hooft）。Witten 的整体表述将手征群 $SU(N_f)$ 的 WZ项量子化，并与带电粒子在磁单极子场中运动的情形作出了重要类比。3. 积掉有能隙夸克后得到 WZW项，其普适系数为 N_c：它是 det D的相位，与依赖调节器的模 [18, 19]清晰分离。4. 在孤子的集体坐标上，WZW项施加 $Y_R = N_c/3$；重子波函数是单极球谐函数，这决定了它们的自旋、统计性质和味多重态 [20]。5. 费米子行列式的相位是贝里相位。施温格项是构型空间上一个 $U(1)$ 联络的曲率，而 WZW项是其贝里–威尔逊环 [21]。6. 反常系数的量子化就是场空间中磁单极子的狄拉克量子化。

9 未涵盖的主题

反常这一课题范围广泛，本文无法涵盖许多重要进展。我们按主题列出其中一些，并对每项略作说明。

与物理学同步发展的数学。

- 阿蒂亚–辛格指标定理 [16], 于1963年提出，并于1968年得到证明，时间几乎与Adler、Bell和Jackiw的研究同时。我们只用到了它最简单的推论：反常就是狄拉克算子的局部指标密度。

- 阿蒂亚–帕托迪–辛格定理 [42], 将指标定理推广到带边界流形，并引入 η-不变量，用以衡量狄拉克算子的谱不对称性。它是现代处理全局反常和反常流入的理论基础。

- *Witten* 指标 [43]。在具有超荷 Q和费米子数 $(-1)^F$的超对称理论中，Witten 指标 $\Delta = \mathrm{Tr}\,(-1)^F e^{-\beta H}$只有零能态会对其作出贡献，因为非零能态在 Q的作用下配对为玻色子和费米子，并相互抵消。因此，它与 β 无关，且在理论的平滑形变下保持不变，正如指标一样；当它非零时，超对称性未被破缺。对于流形上的超对称量子力学，它化为狄拉克算子的指标；在德拉姆情形下，则化为欧拉示性数，由此得到阿蒂亚–辛格定理 [44]的一个超对称性证明。它是非零模在 γ_5 作用下配对这一现象的量子力学对应物；我们在第3节中利用这一点建立了反常与指标之间的联系。

- 族指标定理与行列式线丛 [45, 46, 47]。对于由背景场参数化的狄拉克算子族，行列式是参数空间上线丛的一个截面，该线丛带有自然联络和曲率。这为我们此前非正式使用的费米子真空的贝里联络提供了严格的数学基础。

规范反常的哈密顿图景。 在哈密顿表述中，背景规范场中的手征费米子真空在模去规范变换后的规范场空间上定义了一个线丛。于是，高斯定律生成元无法闭合，出现施温格项 [39], ，而规范反常则表现为该线丛沿规范轨道的非平凡贝里曲率或全纯 [40, 41, 38]。这是第7节构造在规范场方面的对应形式。

跨维度的反常。

- 下降方程： $d = 2n$ 维中的反常源自 $d+2$ 维中的特征类 Tr F^{n+1}，并通过 $d+1$ 维中的陈–西蒙斯形式下降而来。于是，韦斯–祖米诺一致性条件自动成立，而 WZW 项则是纯规范场上的陈–西蒙斯形式。

- 反常流入 [48]：局域在 d维缺陷或边界上的手征费米子反常，由体区中的 $(d+1)$ 维陈–西蒙斯项抵消。这样一来，Witten 五维圆盘就不再仅仅是一种手段。

引力与弦。

- 引力反常。 Alvarez-Gaum´e 和 Witten [49] 证明，与引力耦合的手征场、自旋-$\frac{1}{2}$和自旋-$\frac{3}{2}$费米子以及自对偶张量场，会在 $d = 4k+2$ 维中违反广义协变性，并计算了这些纯引力反常。在四维中不存在纯引力微扰反常，但混合引力–规范反常（包含两个引力子顶点和一个规范流）必须抵消；在标准模型中，这就是表 $\sum Y = 0$ 1中的条件。我们没有进一步讨论引力反常。

- *Green–Schwarz*机制 [50]。在十维I型超弦理论中，规范反常和引力反常只有在规范群为 $SO(32)$时才会抵消，这依赖于一个涉及反对称张量场的反项；同一机制也适用于 $E_8 \times E_8$。这一发现开启了第一次超弦革命。

- 全局反常，其中 Witten 的 $SU(2)$ 反常 [12] 是典型例子：含有奇数个费米子双重态的理论是不一致的，尽管它不存在微扰反常。

凝聚态物理及其他领域。

- 量子霍尔效应。Thouless、Kohmoto、Nightingale 和 den Nijs [51] 证明，满带的霍尔电导等于（e^2/h）乘以布里渊区内布洛赫态贝里曲率的第一陈数。手征边缘模承载$1+1$ 维度反常，而来自体区的流入会将其抵消。

- 外尔半金属中的外尔节点是动量空间中贝里曲率的磁单极子，手征反常会导致负磁阻等可观测效应；还有手征磁效应和反常流体动力学，其中反常决定输运系数。

- 现代观点将 't Hooft 反常视为高一维中的可逆场论，并探讨其在广义对称性研究中的作用。

谨以此文献给迈克尔·贝里。他提出的几何相位为众多此类思想提供了共同的语言。

致谢

感谢 Avinash Dhar、R. Shankar 和 Sanjay Jain 与我合作完成了第4节和第5 节的内容。本手稿由 Avinash Dhar 仔细审阅，在此向他致谢。感谢 ICTS-TIFR 举办“《相、焦散与混沌：经典与量子方面》”的组织者 Jon Keating、Sthitadhi Roy、Joseph Samuel、Pragya Shukla 和 Supurna Sinha 邀请我作此次演讲，也感谢 Joseph Samuel 鼓励我承担这场演讲，介绍其中涵盖的广泛主题。我谨此感谢 ICTS-TIFR 印孚瑟斯基金会霍米·巴巴讲席提供的支持。

参考文献

[1] M. V. Berry，绝热变化伴随的量子相位因子，《伦敦皇家学会会刊A辑》**39**（1984）45。[2] **2** J. Steinberger，《物理评论》**76** （1949年）1180。[3] D. G. Sutherland，《核物理B》**2** （1967）433；M. Veltman，《皇家学会会刊A辑》**301** （1967）107。[4] J. Schwinger，论规范不变性与真空极化，《物理评论》**82**（1951年）664。[5] J. S. Bell 和 R. Jackiw，《新科学》A辑 **60** （1969）47。[6] S. L. Adler，《物理评论》**177** （1969）2426。[7] S. L. Adler 和 W. A. Bardeen，《物理评论》**182** （1969）1517。[8] W. A. Bardeen，《物理评论》**184** （1969）1848。[9] J. Wess 和 B. Zumino，《物理学快报B》**37** （1971）95。[10] D. J. Gross 和 R. Jackiw，《物理评论D辑》**6** （1972）477。[11] C. Bouchiat、J. Iliopoulos 和 Ph. Meyer，《物理学快报B》**38** （1972）519。[12] E. Witten，《物理学快报B》**117** （1982）324。[13] G. 't Hooft，《物理评论快报》**37** （1976）8。

[14] G. ’t Hooft，载于《规范理论的最新进展》，卡尔热塞，1979年，G. ’t Hooft 等编（纽约：Plenum，1980）。[15] K. Fujikawa，《物理评论快报》42（1979）1195；《物理评论D辑》21（1980）2848。[16] M. F. Atiyah 和 I. M. Singer，《数学年刊》87（1968）484。[17] E. Witten，《核物理B》223（1983）422；《核物理B》223（1983）433。[18] A. Dhar 和 S. R. Wadia，《南部–约纳-拉西尼奥模型：适用于中间长度尺度量子色动力学的有效拉格朗日量》，《物理评论快报》52（1984）959。[19] A. Dhar、R. Shankar 和 S. R. Wadia，《南部–约纳-拉西尼奥型有效拉格朗日量：反常与低能大-N 量子色动力学的非线性拉格朗日量》，《物理评论D辑》31（1985）3256。[20] S. Jain 和 S. R. Wadia，《大-N 重子：SU(3)手征模型中拓扑孤子的集体坐标》，《核物理B》258（1985）713。[21] S. R. Wadia，《流代数、一个 $U(1)$ 规范理论与韦斯–祖米诺–维滕模型》，《理论与实验物理进展》2021，doi:10.1093/ptep/ptab021。[22] J. Goldstone 和 F. Wilczek，《物理评论快报》47（1981）986。[23] A. P. Balachandran、G. Marmo、V. P. Nair 和 C. G. Trahern，《物理评论D辑》25（1982）2713。[24] A. P. Balachandran、V. P. Nair、S. G. Rajeev 和 A. Stern，《物理评论快报》49（1982）1124。[25] E. D’Hoker 和 E. Farhi，《核物理B》248（1984）59；《核物理B》248（1984）77。[26] Y. Nambu 和 G. Jona-Lasinio，《物理评论》122（1961）345。[27] C. Vafa 和 E. Witten，《核物理B》234（1984）173。[28] E. Guadagnini，《核物理B》236（1984）35。[29] P. O. Mazur、M. A. Nowak 和 M. Prasza-lowicz，《物理学快报B》147（1984）137。[30] J.-L. Gervais 和 B. Sakita，《物理评论D辑》11（1975）2943。[31] G. Wentzel，《赫尔维蒂卡物理学学报》13（1940）269。[32] T. T. Wu 和 C. N. Yang，《核物理B》107（1976）365。[33] B. Simon，《全纯、量子绝热定理与贝里相位》，《物理评论快报》51（1983）2167。[34] F. Wilczek 和 A. Zee，《物理评论快报》52（1984）2111。[35] M. Stone，《物理评论D辑》33（1986）1191。[36] I. J. R. Aitchison，《波兰物理学报B辑》18（1987）207。[37] R. Jackiw，《原子与分子物理评论》21（1988）71。[38] A. J. Niemi 和 G. W. Semenoff，《物理评论快报》55（1985）927。[39] L. D. Faddeev，《物理学快报B》145（1984）81。[40] P. Nelson 和 L. Alvarez-Gaum´e，《数学物理通讯》99（1985）103。[41] H. Sonoda，《核物理B》266（1986）410。[42] M. F. Atiyah、V. K. Patodi 和 I. M. Singer，《剑桥哲学学会数学会刊》77（1975）43。[43] E. Witten，《超对称性破缺的约束》，《核物理B》202（1982）253。

[44] L. Alvarez-Gaum´e, 《超对称性与阿蒂亚–辛格指标定理》, 《数学物理通讯》**90**（1983）161。[45] M. F. Atiyah 和 I. M. Singer, 《美国国家科学院院刊》**81**（1984）2597。[46] D. Quillen, 《泛函分析及其应用》**19** （1985）31。[47] J.-M. Bismut 和 D. S. Freed, 《数学物理通讯》**106** （1986）159。[48] C. G. Callan 和 J. A. Harvey, 《核物理B》**250** （1985）427。[49] L. Alvarez-Gaum´e 和 E. Witten, 《核物理B》**234**（1984）269。[50] M. B. Green 和 J. H. Schwarz, 《物理学快报B》**149** （1984）117。[51] D. J. Thouless、M. Kohmoto、M. P. Nightingale 和 M. den Nijs, 《二维周期势中的量子化霍尔电导》, 《物理评论快报》**49** （1982）405。