极端Reissner-Nordstr¨om几何中的标量扰动：新方法的应用

Giorgio Di Russo[1], Davide Fioravanti[2], Francesco Olivi[2], Marco Rossi[3]
[1] *School of Fundamental Physics and Mathematical Sciences, Hangzhou Institute for Advanced Study, UCAS, Hangzhou 310024, China*
[2] *Sezione INFN di Bologna, Dipartimento di Fisica e Astronomia, Università di Bologna, Via Irnerio 46, 40126 Bologna, Italy*
[3] *Dipartimento di Fisica dell'Università della Calabria and INFN, Gruppo collegato di Cosenza, Arcavacata di Rende, 87036 Cosenza, Italy*
（日期：2026年11月25日）

我们研究了一个粒子沿圆轨道绕四维极端Reissner-Nordstr¨om黑洞运动时发出的标量辐射。具体而言，我们计算了标量波向无穷远传播及穿过事件视界所携带的能量通量，以及作用于粒子上的标量自力，并将所有这些量表示为后牛顿展开。我们的能量通量结果与文献中此前的数值结果一致。为求解径向波动方程，我们采用并检验了两种不同的解析方法：第一种是所谓的*kink method*，这是一种源自量子可积性的新型替代方法；第二种是Mano-Suzuki-Takasugi方法。结果完全一致，凸显了扭结方法作为研究黑洞时空中波传播的补充工具的潜力。

arXiv:2611.33123v1 [hep-th] 24 Nov 2026

I. 引言

当一个沿预定轨迹运动的带标量荷粒子在弯曲时空中与其自身产生的标量场耦合时，就会出现标量自力（SSF）效应。该场满足一个达朗贝尔型波动方程，其源项在粒子所在位置处具有奇异性。这一框架为一个更为复杂的问题提供了简化模型：小质量粒子在背景时空中运行，而该背景时空的几何又受到粒子自身存在的影响，从而产生引力扰动。在引力情形下，粒子与其自身产生的场之间的相互作用会导致引力自力（GSF）（参见例如文献 [1] 及其中的参考文献）。

尽管后一个问题具有更大的物理意义，但前一个问题更易于处理，尽管二者具有相似的概念方法和计算工具。因此，标量自力（SSF）计算常被用作引力自力（GSF）问题的试验场，使人们能够识别并解决同样会出现在更一般引力情形中的技术难题。关于这一主题的文献十分丰富。除了奠定弯曲时空中自力理论基础的开创性工作 [2–8], 之外，后续还有大量研究考察了黑洞背景中的自力效应，尤其是 Schwarzschild 和 Kerr 时空 [9–30]。

近年来，SSF 技术已被用于研究弱场区域 [31, 32], 施瓦西时空中的径向落入，并将所得预测结果与在多极后闵可夫斯基（MPM）形式 [32, 33]下推导出的相应结果进行比较。关于 MPM 形式的综述，参见参考文献 [34] 。这些方法还被推广到四维以上的高维时空，并应用于五维爱因斯坦-麦克斯韦理论的特定解，即拓扑星和 W-孤子 [35–40]。关于这些解的一般性讨论，参见参考文献 [41, 42]。尽管这些构型是在五维空间中表述的，但从具有额外非紧致空间维度的意义上说，它们并不是真正的高维构型，因为其中一个空间方向已被紧致化。不过，SSF 技术也已应用于真正的五维施瓦西-唐格赫利尼时空，从而为研究高维黑洞背景中的自力效应 [43]提供了一个框架。

自力研究计划传统上依赖于后牛顿（PN）近似，该近似假设引力场较弱且速度处于非相对论范围。这主要是因为黑洞微扰理论中产生的径向微扰方程通常属于Heun类方程——即 Heun 方程（HE）及其合流极限 [44] ——而目前尚无已知的一般闭式解。然而，对这些方程进行直接的 PN 展开不足以保持正确的边界条件，即 In 解在视界处为纯入射波，而 Up 解在无穷远处为纯出射波。大约三十年前，Mano、Suzuki 和 Takasugi 提出了首个系统性方法来克服这一困难，使得可以在后牛顿区域展开合流 Heun 方程（CHE）的解，同时一致地施加适当的

边界条件；该方法随后在 [46] 中得到改进和扩展。

近年来，人们发展出其他解析方法，以厘清这一庞大的研究主题。例如，参考文献 [47, 48] 利用量子 Seiberg-Witten 曲线与黑洞微扰理论中出现的 CHE 之间的对应关系，从而运用强大的瞬子演算技术，在合适的展开方案中构造解。这种方法的一个关键优势在于，波函数的某些贡献能够以非微扰方式纳入

所有后牛顿阶，从而改善所得后牛顿级数的收敛性。利用这种方法，我们计算了粒子绕 Schwarzschild黑洞作圆轨道运动时辐射出的通量，精度达到 30 后牛顿阶，大幅超越了此前仅限于 22 后牛顿阶的最佳成果 [49]。

在这一背景下，超对称规范理论与量子可积理论之间建立了一种新的对应关系 [50]，并为瞬子耦合带来了微扰性以及非微扰性结果。随后，这一对应关系在 [51] 中被转译并应用于黑洞理论。具体而言，被称为热力学 Bethe Ansatz（TBA）的高效非线性积分方程能够计算准正规模和许多引力因子。此外， [52]通过揭示前势可在常微分方程（ODE）理论中被唯一确定，进一步发展了可积性方法。 [53]还发展了所谓的扭结方法，为构造Heun类方程的解以及计算前势、许多引力因子（无需使用 TBA）和 Love数提供了系统框架。这一新方法直接从微分方程出发，通过借助特殊多项式，在某一阶上精确求解相应的 Riccati 方程（针对量子动量），从而构造 Floquet 解及其他解。尽管这一方法的发展显然适用于任意 Heun类方程，但 [53]针对修正Mathieu方程（MME）、CHE 和 HE 本身给出了一些细节，并由此提供了一种类似 MST 的解。相反，在下文中，扭结方法将专门用于双合流 Heun 方程（DCHE）。

本文研究带标量荷粒子沿极端 Reissner-Nordstr¨om（eRN）黑洞时空中的圆形赤道轨道运动时所受的标量自力（SSF）效应 [54–58]。此前，文献 [59], 对这一问题进行了研究，其中通过将所得表达式专门化到 $Q = M$ 来处理极端情形。本文采用完全不同的策略，直接在极端几何中求解径向微扰方程。由于两个视界合流，微分方程变为不同形式，即双合流 Heun 方程（DCHE）。这种表述使我们能够直接在极端时空中施加适当的边界条件，并为计算标量自力及相关能量通量提供独立的解析框架。

为此，我们将发展并比较扭结方法，以及将MST方法推广至eRN 时空中径向方程的做法。这些结果将被证明彼此一致，并最终与文献[60]中报告的数值结果相符。我们的后牛顿表达式再现了这些数值，其残差按截断阶数所预期的方式缩放，并且它们恒等地满足能量平衡关系 $F_t = \Gamma\ \dot{E}^{\infty} + \dot{E}^{H}$ ()。据我们所知，本文给出的结果因此是首个可靠的 eRN 时空中标量通量、自场和自力的解析后牛顿表达式。

本文结构安排如下。第二节研究有质量粒子在 eRN 时空中的运动，推导测地线方程并分析圆形轨道。为完整研究测地线运动，并着眼于未来的研究方向，我们还考察双曲轨迹并计算相应的散射角。这项分析将使我们能够回顾该时空的一种显著对称性；这一对称性最初由 Couch and Torrence [61–65], 发现，至今仍鲜为人知，也未得到充分理解。第三节采用所谓的扭结方法和类MST方法分析径向波动方程，并对其进行适当调整以适用于双合流 Heun 方程（DCHE）。我们证明这两种方法得到的解等价，从而为解析结果提供独立的交叉验证。第四节推导绕行粒子对应的标量源项，该源项在 eRN 时空中的标量场方程中起驱动作用。第五节计算标量辐射向无穷远和视界传输的辐射能通量。第六节计算作用于粒子的标量自力，并分析其在 eRN 时空中的性质。第七节给出标量自力的结果，并讨论其在 eRN 时空中的意义。最后，第八节报告一些总结性思考并展望未来工作。本文采用自然单位制 $G = c = 1$。

¨II. 极端 Reissner-Nordstrom 类时测地线

考虑 eRN 时空，其线元用标准类Schwarzschild坐标（t， r， θ， ϕ）表示为

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{Q}{r}\right)^2 dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{Q}{r}\right)^2} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right). \tag{2.1}$$

四速度可用共轭动量表示为

$$\begin{aligned} u^t &= \frac{dt}{d\tau} = \frac{r^2 E}{(r-Q)^2}, \\ u^r &= \frac{dr}{d\tau} = \frac{(r-Q)^2 P_r}{r^2}, \\ u^\theta &= \frac{d\theta}{d\tau} = \frac{P_\theta}{r^2}, \\ u^\phi &= \frac{J}{r^2 \sin^2\theta}, \end{aligned} \tag{2.2}$$

其中 E 和 J 分别是守恒能量和角动量，而另外两个正则动量则受到哈密顿质量壳条件的约束

$$\mathcal{H} = g^{\mu\nu} P_\mu P_\nu = -\mu^2. \tag{2.3}$$

前一个关系式可解为

$$P_r^2\frac{(r-Q)^2}{r^2}-\frac{r^2E^2}{(r-Q)^2}+\mu^2+\frac{P_\theta^2}{r^2}+\frac{J^2}{r^2\sin^2\theta}=0\,. \tag{2.4}$$

通过引入卡特常数[66]，实现径向运动与角向运动的分离

$$\begin{aligned}&P_\theta^2+\frac{J^2}{\sin^2\theta}=K^2\,,\\&P_r^2=Q_r(r,E)=\frac{r^4E^2}{(r-Q)^4}-\frac{K^2+r^2\mu^2}{(r-Q)^2}\,.\end{aligned} \tag{2.5}$$

由于该几何具有球对称性，我们可以不失一般性地关注赤道面内的运动

$$\theta=\frac{\pi}{2},\quad P_\theta=0,\quad K=J\,. \tag{2.6}$$

A. 类双曲线测地线

经典转向点定义为径向速度的反转点，即通过关系式$Q_r(r,E)=0$确定。

尽管前一个条件可以解析求解，但引入冲击参数更为方便

$$b=\frac{J}{\sqrt{E^2-\mu^2}}\,, \tag{2.7}$$

并在冲击参数较大的区域展开这些根。该展开对应于后闵可夫斯基（PM）展开，其特征为 $Q/b\ll1$

$$\begin{aligned}
r_1&=b-\frac{E^2Q}{E^2-\mu^2}+\frac{E^2Q^2\left(3\mu^2-2E^2\right)}{2\left(E^2-\mu^2\right)^2b}-\frac{2E^2Q^3}{(E^2-\mu^2)b^2}+\frac{E^2Q^4\left(-40E^6+104E^4\mu^2-85E^2\mu^4+20\mu^6\right)}{8b^3\left(E^2-\mu^2\right)^4}+O\left(\frac{1}{b^4}\right),\\
r_2&=Q+\frac{EQ^2}{b\sqrt{E^2-\mu^2}}+\frac{2E^2Q^3}{(E^2-\mu^2)b^2}+\frac{EQ^4\left(10E^2-\mu^2\right)}{2\left(E^2-\mu^2\right)^{3/2}b^3}+\frac{E^2Q^5\left(14E^2-3\mu^2\right)}{\left(E^2-\mu^2\right)^2b^4}+O\left(\frac{1}{b^5}\right),\\
r_3&=Q-\frac{EQ^2}{b\sqrt{E^2-\mu^2}}+\frac{2E^2Q^3}{(E^2-\mu^2)b^2}-\frac{EQ^4\left(10E^2-\mu^2\right)}{2\left(E^2-\mu^2\right)^{3/2}b^3}+\frac{E^2Q^5\left(14E^2-3\mu^2\right)}{\left(E^2-\mu^2\right)^2b^4}+O\left(\frac{1}{b^5}\right),\\
r_4&=-b-\frac{E^2Q}{E^2-\mu^2}-\frac{E^2Q^2\left(3\mu^2-2E^2\right)}{2\left(E^2-\mu^2\right)^2b}-\frac{2E^2Q^3}{(E^2-\mu^2)b^2}-\frac{E^2Q^4\left(-40E^6+104E^4\mu^2-85E^2\mu^4+20\mu^6\right)}{8b^3\left(E^2-\mu^2\right)^4}+O\left(\frac{1}{b^4}\right),
\end{aligned} \tag{2.8}$$

其中它们的排列顺序为

$$r_1>r_2>r_3>0>r_4\,. \tag{2.9}$$

在赤道面上，偏转角定义为

$$\begin{aligned}\Delta\Phi(A,B)&=\int_A^B\frac{d\phi}{dr}dr=\int_A^B\frac{bdr}{\sqrt{\mathcal{P}_4(r,E)}}\,,\\\mathcal{P}_4(r,E)&=r^4+\frac{2Q\mu^2}{E^2-\mu^2}r^3-\left(\frac{Q^2\mu^2}{E^2-\mu^2}+b^2\right)r^2\\&\quad+2b^2Qr-b^2Q^2\\&=(r-r_1)(r-r_2)(r-r_3)(r-r_4)\,,\end{aligned} \tag{2.10}$$

其中我们使用了（2.2）。散射角定义为

$$\chi(A,B)=2\Delta\Phi(A,B)-\pi\,. \tag{2.11}$$

从无穷远到最近接点所描述的角度为

最近

$$\Delta\Phi(\infty,r_1)=\frac{2b}{\sqrt{r_{13}r_{24}}}F\left[\arcsin\sqrt{\frac{r_{24}}{r_{14}}},\frac{r_{23}r_{14}}{r_{13}r_{24}}\right], \tag{2.12}$$

其中 $F\left[\phi,\ m\right]$表示第一类不完全椭圆积分

$$F\Big[\alpha,m\Big]=\int_0^\alpha\frac{d\theta}{\sqrt{1-m\sin^2\theta}}\,, \tag{2.13}$$

并且其中 $r_{ij}=r_i-r_j$。类似地，从内转向点到事件视界的下落角 $r_H=Q$ 为

$$\Delta\Phi(r_2,Q)=-\frac{2b}{\sqrt{r_{13}r_{24}}}F\left[\arcsin\sqrt{\frac{r_{13}(r_2-Q)}{r_{23}(r_1-Q)}},\frac{r_{23}r_{14}}{r_{13}r_{24}}\right]. \tag{2.14}$$

在后牛顿展开形式中，这两个角为

$$\chi(\infty,r_1)=\pi\left[\frac{Q^2\left(6E^2-\mu^2\right)}{2b^2\left(E^2-\mu^2\right)}+\frac{3Q^4\left(70E^4-30E^2\mu^2+\mu^4\right)}{8b^4\left(E^2-\mu^2\right)^2}+\frac{5Q^6\left(924E^6-630E^4\mu^2+84E^2\mu^4-\mu^6\right)}{16b^6\left(E^2-\mu^2\right)^3}\right]$$
$$+\frac{Q\left(4E^2-2\mu^2\right)}{b\left(E^2-\mu^2\right)}+\frac{2Q^3\left(40E^6-72E^4\mu^2+33E^2\mu^4-2\mu^6\right)}{3b^3\left(E^2-\mu^2\right)^3}+\frac{1}{15b^5\left(E^2-\mu^2\right)^5}\Big(2Q^5\left(2016E^{10}$$
$$-6160E^8\mu^2+6670E^6\mu^4-2955E^4\mu^6+440E^2\mu^8-8\mu^{10}\right)\Big)+O\left(\frac{1}{b^7}\right),$$
$$\chi(Q,r_2)=\pi\Big[\frac{Q^2\left(6E^2-\mu^2\right)}{2b^2\left(E^2-\mu^2\right)}+\frac{3Q^4\left(70E^4-30E^2\mu^2+\mu^4\right)}{8b^4\left(E^2-\mu^2\right)^2}+\frac{5Q^6\left(924E^6-630E^4\mu^2+84E^2\mu^4-\mu^6\right)}{16b^6\left(E^2-\mu^2\right)^3}\Big]$$
$$+\frac{4EQ}{b\sqrt{E^2-\mu^2}}+\frac{8Q^3\left(10E^3-3E\mu^2\right)}{3b^3\left(E^2-\mu^2\right)^{3/2}}+\frac{4Q^5\left(1008E^5-560E^3\mu^2+45E\mu^4\right)}{15b^5\left(E^2-\mu^2\right)^{5/2}}+O\left(\frac{1}{b^7}\right). \tag{2.15}$$

比较式 (2.12) 和式 (2.14) 中反正弦函数的自变量，很容易证明

$$\frac{r_{24}}{r_{14}}=\frac{r_{13}(r_2-Q)}{r_{23}(r_1-Q)} \tag{2.16}$$

若 $\mu=0$。这一结果源于 Couch-Torrence（CT）对称性，该对称性意味着无质量标量探针的散射角与落入角相同。CT 对称性最初被认定为度规的 Weyl 对称性 [61]，它将视界映射到无穷远，同时保持光子球不变；光子球即无质量探针渐近趋近的不稳定圆形零测地线的轨迹。有关这一对称性的更多细节，参见参考文献 [62–65, 67]。正如第 III G 小节末尾所述，CT 对称性在此处的相关性，体现在 In 解和 Up 解的结构中。

B. 圆形测地线

圆形测地线由径向速度和径向加速度同时为零的条件确定

$$Q_r(r_c,b_c)=\partial_r Q_r(r_c,b_c)=0\,, \tag{2.17}$$

其中径向势出现在（2.5）式中。求解前述条件可得到临界半径以及相应的冲击参数

$$r_c=\frac{Q\left(2\Delta E^{2/3}+4E^2-6\mu^2+\frac{2E^{4/3}(4E^2-3\mu^2)}{\Delta}\right)}{6(E^2-\mu^2)}\,,$$
$$b_c=\frac{\mu Q\sqrt{r_c}\sqrt{r_c\left(2E^2+\mu^2\right)-\mu^2 Q}}{\sqrt{E^2-\mu^2}\sqrt{r_c-Q}\sqrt{2\mu^2 r_c-2E^2 r_c+4E^2Q-3\mu^2Q}}\,,$$
$$\Delta^3=8E^4+\frac{3}{2}E^2(\delta-15\mu)\mu-\frac{3}{2}(\delta-9\mu)\mu^3\,,$$
$$\delta^2=81\mu^2-96E^2\,. \tag{2.18}$$

在无质量探针的情况下，前述量可化简为

$$r_c=2Q,\quad b_c=4Q\,. \tag{2.19}$$

利用 $Q/r\sim v^2$ 可恢复对光速的依赖，因此 $Q\to Q\eta^2$，其中 $\eta=1/c$。同样地，$\omega r\sim v$，因此 $\omega\to\omega\eta$。在这一记号下，后牛顿展开即将物理量按 η 的级数展开。

III. 波动方程

标量波的方程

$$\Box\Phi=0,\quad \Box=\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu)\,, \tag{3.1}$$

可以通过以下试探形式进行分离

$$\Phi(t,r,\theta,\phi)=\int\frac{d\omega}{2\pi}e^{-i\omega t}R_{\ell m\omega}(r)Y_{\ell m}(\theta,\phi)\,, \tag{3.2}$$

其中，$Y_{\ell m}(\theta,\ \phi)$ 是球面上的球谐函数S_2，它们以勒让德多项式 $P_{\ell m}(\theta)$ 定义如下

$$Y_{\ell m}(\theta,\phi)=P_{\ell m}(\theta)e^{im\phi}\,. \tag{3.3}$$

分离后，我们得到

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP_{\ell m}(\theta)}{d\theta}\right)-\frac{m_\phi^2}{\sin^2\theta}P_{\ell m}(\theta)=-\ell(\ell+1)P_{\ell m}(\theta)$$
$$\left[(r-Q)\frac{d^2}{dr^2}+2\frac{d}{dr}+\frac{r^4\omega^2-\ell(\ell+1)(r-Q)^2}{(r-Q)^3}\right]R_{\ell m\omega}(r)=0\,. \tag{3.4}$$

计算复杂度完全体现在径向方程中，该方程具有双合流 Heun 方程的形式，目前尚无已知的显式闭式解。在

下文中，我们将介绍两种等价的方法，用于构造相应齐次方程的解的展开式，最终可由此得到后牛顿展开。第一种方法依赖弗洛凯理论和扭结变换。第二种方法受MST方法启发，并针对双合流 Heun 方程进行了适当调整，以在一个互补但等价的框架中构造其解。

A. 从双合流 Heun 方程到径向方程

众所周知，(3.4) 中的径向方程是一般双合流 Heun 方程的一个特例，

$$\psi''(y) = V(y)\psi(y)\,, \tag{3.5}$$

其势为

$$V(y) = e^{2\theta}\left(e^{2y}+e^{-2y}\right)+e^{\theta}(2q_1e^{y}+2q_2e^{-y})+P^2\,, \tag{3.6}$$

通过映射

$$\begin{aligned}
&y = \log\left(\frac{r}{Q}-1\right)\,,\\
&\psi(y) = \sqrt{\frac{r}{Q}-1}\;R(r)\,,\\
&q_1 = -2iQ\omega,\\
&q_2 = -2iQ\omega,\\
&e^{\theta} = -iQ\omega\,,\\
&P = \frac{1}{2}\sqrt{(1+2\ell)^2-24Q^2\omega^2}\,.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

如前所述，一般双合流 Heun 方程 (3.6) 一方面可解释为量子可积模型，另一方面可解释为具有 $\mathcal{N}_f = 2$ 个味的超对称 $SU(2)$ 规范理论，因为它是 Nekrasov-Shatashvili (NS) 极限下变形的 Seiberg-Witten 微分平方的零条件，其中包含味质量 m_j [68]、模数 $u = P^2/\hbar^2$ 和瞬子耦合 $\Lambda_2 = \hbar q_j$ $4\hbar e^{\theta}$[51]。本文尤其关注双合流 Heun 方程的入射（In）解和出射（Up）解。对于 $y \to -\infty$，In 解由以下次主导行为唯一确定：

$$\psi_{\rm in}(y) \simeq \exp\left[(-\frac{1}{2}-q_2)(\theta-y+\ln 2)-e^{\theta-y}\right]\,, \tag{3.8}$$

对于 $y \to +\infty$，Up 解由以下次主导行为唯一确定：

$$\psi_{\rm up}(y) \simeq \exp\left[(-\frac{1}{2}-q_1)(\theta+y+\ln 2)-e^{\theta+y}\right]\,. \tag{3.9}$$

由式 (3.7) 可知，极限 $y \to -\infty$对应于 $r \to Q$，因此

$$R_{\rm in}(r) = \mathcal{N}_{\rm in}\frac{1}{\sqrt{\frac{r}{Q}-1}}\psi_{\rm in}(y)\,, \tag{3.10}$$

其中 $\mathcal{N}_{\rm in}$ 适当的归一化常数满足视界处的入射边界条件，而 $y \to +\infty$ 对应于 $r \to \infty$，因此

$$R_{\rm up}(r) = \mathcal{N}_{\rm up}\frac{1}{\sqrt{\frac{r}{Q}-1}}\psi_{\rm up}(y)\,, \tag{3.11}$$

其中，归一化常数 $\mathcal{N}_{\rm up}$ 再次满足无穷远处的出射边界条件。

势 (3.6) 具有多种对称性，其中两种与我们的目标密切相关。第一种，$\hat{}\Omega_1$，作用于 $P \to -P$，且不影响 $\psi_{\rm in/up}(y)$：$\hat{}\psi_{\rm in/up}(y,\ -P) = \psi_{\rm in/up}(y,\ P)$。第二种，$\Omega_2$,的作用方式为 $y \to -y,\ q_1 \leftrightarrow q_2$，随后将 $\psi_{\rm in}(y)$与$\psi_{\rm up}(y)$互换：$\psi_{\rm in}(-y,\ q_2,\ q_1) = \psi_{\rm up}(y,\ q_1,\ q_2)$。

另一组重要的解是 Floquet 解 $\psi_{\pm}(y)$，其定义为满足准周期性

$$\psi_{\pm}(y+2\pi i) = e^{\pm 2\pi i k}\psi_{\pm}(y)\,, \tag{3.12}$$

其中 k 称为 Floquet 指数（或指数）。

通常，我们可以考虑波函数的程函形式

$$\psi(y) = \exp\left(\int^{y}\Pi(y')dy'\right)\,, \tag{3.13}$$

其中 $\Pi(y)$是量子动量，它满足 Riccati 方程

$$\Pi(y)^2+\frac{d}{dy}\Pi(y) = V(y)\,. \tag{3.14}$$

于是，我们可以将 $\Pi_{\rm in}(y)$、$\Pi_{up}(y)$ 和 $\Pi_{\pm}(y)$ 分别称为与 $\psi_{\rm in}(y)$、$\psi_{\rm up}(y)$ 和 $\psi_{\pm}(y)$ 相关联的量子动量。

B. 大 $\theta \to -\infty$：Floquet 指数

Floquet 指数 k 在我们的构造中起着核心作用，其计算公式为

$$k = \frac{1}{2\pi i}\int_{y}^{y+2\pi i}dy'\Pi_{+}(y')\,. \tag{3.15}$$

在引力情形下，我们会希望构造一些可观测量，例如后牛顿区域中定义的能量损失

$$Q \mapsto Q\eta^2, \qquad \omega \mapsto \omega\eta, \qquad \eta \to 0\,. \tag{3.16}$$

由于映射 (3.7)，可以通过 $\theta \to -\infty$ 极限在双合流 Heun 方程中研究这一情形。沿用前述 [53]，，我们可以将量子动量写成关于 e^{θ}的收敛级数

$$\Pi_{+}(y) = \sum_{n=0}^{+\infty}\Pi_{+}^{(n)}(y)e^{n\theta}\,. \tag{3.17}$$

将此试探形式代入 Riccati 方程 (3.14)，得到以下方程组

$$\sum_{m=0}^{n}\Pi_{+}^{(m)}(y)\Pi_{+}^{(n-m)}(y)+\frac{d}{dy}\Pi_{+}^{(n)}(y)=V^{(n)}(y)\,, \quad (3.18)$$

其中 $V_{(0)}(2 \quad 2y \quad V^{y}{}^{n} \quad y \quad = 0 \quad y \quad n \geq 3 \quad y \quad =$)

$= P^2$， $V_{(1)}(\,) = 2q_1e^{y}+2q_2e^{-y}$， $V_{(2)}(\,)$ cosh， $_{()}(\,)$。

对于一般的 P，解可以写成

$$\Pi_{+}^{(n)}(y)=\sum_{m=-n}^{n}r_m^{(n)}e^{my}\,, \quad (3.19)$$

并且这些常数满足递推关系 [53]

$$r_0^{(0)}=P\,, \quad (3.20)$$

$$pr_p^{(1)}+\sum_{m=0}^{1}\sum_{h=\max\{-m,\,p+m-1\}}^{\min\{m,\,p-m+1\}}r_h^{(m)}r_{p-h}^{(1-m)}=2q_1\delta_{p,1}+2q_2\delta_{p,-1}\,,\quad -1\leq p\leq 1\,, \quad (3.21)$$

$$pr_p^{(2)}+\sum_{m=0}^{2}\sum_{h=\max\{-m,\,p+m-2\}}^{\min\{m,\,p-m+2\}}r_h^{(m)}r_{p-h}^{(2-m)}=\delta_{p,-2}+\delta_{p,2}\,,\quad -2\leq p\leq 2\,, \quad (3.22)$$

$$pr_p^{(n)}+\sum_{m=0}^{n}\sum_{h=\max\{-m,\,p+m-n\}}^{\min\{m,\,p-m+n\}}r_h^{(m)}r_{p-h}^{(n-m)}=0\,,\quad -n\leq p\leq n\,,\quad n\geq 3\,. \quad (3.23)$$

e^{θ} 的低阶解为

$$\Pi_{+}^{(0)}(y)=P\,, \quad (3.24)$$

$$\Pi_{+}^{(1)}(y)=\frac{2q_2e^{-y}}{2P-1}+\frac{2q_1e^{y}}{2P+1}\,, \quad (3.25)$$

$$\Pi_{+}^{(2)}(y)=-\frac{(2P-1-2q_2)(2P-1+2q_2)e^{-2y}}{(2P-1)^2(2-2P)}+\frac{4q_1q_2}{P(1-4P^2)}+\frac{(2P+1-2q_1)(2P+1+2q_1)e^{2y}}{(2P+1)^2(2+2P)}\,. \quad (3.26)$$

由此，Floquet 指数 (3.15) 可表示为

$$k=P+\frac{4q_1q_2}{P(1-4P^2)}e^{2\theta}+\frac{-P^2(4P^2-1)^3+12P^2(4P^2-1)^2(q_1^2+q_2^2)-16(2-35P^2+60P^4)q_1^2q_2^2}{4P^3(P^2-1)(4P^2-1)^3}e^{4\theta}+O(e^{6\theta})\,, \quad (3.27)$$

且它仅接收偶数阶 n常数项的贡献。最终也可以将该关系反解，得到

$$P^2=\sum_{n=0}^{+\infty}p_2^{(n)}(k)e^{2n\theta}=k^2+\frac{8q_1q_2}{4k^2-1}e^{2\theta}+O(e^{4\theta})\,. \quad (3.28)$$

现在，如果我们尝试通过映射 (3.7) 将级数 (3.27) 表示为引力变量的形式，就会发现如下现象。当 $\ell\geq 1$ 时，计算 $\Pi_{+}^{(n)}(y)$ 至 $n=5$ 就足以将引力变量中的 Floquet 指数确定为关于 $(Q\omega)^2$，的级数，直到 $(Q\omega)^8$ 阶：

$$
\begin{aligned}
k^{(\ell=1)} &= \frac{3}{2} - 2Q^2\omega^2 - \frac{14Q^4\omega^4}{5} - \frac{2144Q^6\omega^6}{225} - \frac{67706Q^8\omega^8}{1575} + O\Big(Q^{10}\omega^{10}\Big)\,,\\
k^{(\ell=2)} &= \frac{5}{2} - \frac{6Q^2\omega^2}{5} - \frac{502Q^4\omega^4}{875} - \frac{294004Q^6\omega^6}{459375} - \frac{15685184Q^8\omega^8}{16078125} + O\Big(Q^{10}\omega^{10}\Big)\,,\\
k^{(\ell=3)} &= \frac{7}{2} - \frac{6Q^2\omega^2}{7} - \frac{3188Q^4\omega^4}{15435} - \frac{1296541Q^6\omega^6}{11344725} - \frac{13985769332Q^8\omega^8}{165099782925} + O\Big(Q^{10}\omega^{10}\Big)\,,\\
k^{(\ell=4)} &= \frac{9}{2} - \frac{2Q^2\omega^2}{3} - \frac{3016Q^4\omega^4}{31185} - \frac{10381141Q^6\omega^6}{324168075} - \frac{123632605378Q^8\omega^8}{8761290563025} + O\left(Q^{10}\omega^{10}\right)\,.
\end{aligned}
\tag{3.29}
$$

然而，当 $\ell = 0$ 时，使用 (3.27) 求引力变量中的 Floquet 指数会更加复杂，因为我们的计算表明，在展开式 (3.27) 中，每一个给定阶数 $(\omega Q)^{2n}$ 都会有无穷多项作出贡献。因此，计算 $k^{(\ell=0)}$ 的一种更简便方法是直接在引力变量中求解 Riccati 方程 (3.14)（其中 $\ell = 0$）：

$$
(\Pi^{(\ell=0)})'(y) + (\Pi^{(\ell=0)}(y))^2 = \frac{1}{4} - (\omega Q)^2 W(y), \tag{3.30}
$$

其中

$$
W(y) = e^{2y} + 4e^{y} + 6 + 4e^{-y} + e^{-2y} = \frac{(e^y+1)^4}{e^{2y}}. \tag{3.31}
$$

Floquet 指数为

$$
k^{(\ell=0)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{y}^{y+2\pi i} ds \Pi^{(\ell=0)}(s)\,. \tag{3.32}
$$

我们寻求方程 (3.30) 的一个 $2\pi i$-周期解，其级数形式为 [1]

$$
\Pi^{(\ell=0)}(y) = \Pi_0^{(\ell=0)}(y) + \sum_{n=1}^{\infty} \Pi_{2n}^{(\ell=0)}(y)(\omega Q)^{2n} \tag{3.33}
$$

然后要求每个函数 $\Pi_{2n}^{(\ell=0)}(y)$ 都是 $2\pi i$-周期的。总之，我们得到（见附录 D）

$$
\Pi_0^{(\ell=0)}(y) = \frac{1}{2}\left(\frac{e^y - e^{y_0}}{e^y + e^{y_0}}\right), \tag{3.34}
$$

带有积分常数

$$
e^{y_0} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}\,, \tag{3.35}
$$

and

$$
\Pi_{2n}^{(\ell=0)}(y) = \frac{\sum_{m=0}^{6n} g_{n,m}\, e^{my}}{e^{2ny}(e^y + e^{y_0})^{2n}} \qquad \text{for } n = 1, 2, 3, \ldots \tag{3.36}
$$

[1] 这些 $\Pi_{2n}^{(\ell=0)}(y)$ 与方程 (3.17) 中用引力变量表示的 $\Pi_{+}^{(n)}(y)$ 不同。

其中 $g_{n,\,m}$ 是逐阶计算得到的。在（3.35）中，通过（3.32），上号给出正的 Floquet k，而下号将给出 $-k$。最后，（3.32）给出

$$
k^{(\ell=0)} = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Delta k_{2n} (\omega Q)^{2n} \tag{3.37}
$$

其中

$$
\Delta k_{2n} \equiv \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi i} \Pi_{2n}^{(\ell=0)}(y)\, dy, \qquad \text{for } n \in \mathbb{N} - \{0\} \tag{3.38}
$$

可使用留数定理进行计算。我们计算到 $\Pi_8^{(\ell=0)}(y)$，得到

$$
\begin{aligned}
k^{(\ell=0)} = \tfrac{1}{2} &- 2\sqrt{5}Q^2\omega^2 - \tfrac{42Q^4\omega^4}{\sqrt{5}} - \tfrac{17536Q^6\omega^6}{45\sqrt{5}}\\
&- \tfrac{943054Q^8\omega^8}{225\sqrt{5}} + O\Big(Q^{10}\omega^{10}\Big)\,.
\end{aligned}
\tag{3.39}
$$

C. 扭结变换

观察势 (3.6) 可明显看出，$\theta \to -\infty$ 与 $y \to \pm\infty$的极限之间存在不相容性。为克服这一问题，我们必须进行所谓的 扭结变换 [53]。对于 $y < 0$，我们应进行平移 $y \to y + \theta$，并定义左扭结 函数 $\psi_<(y) = \psi(y+\theta)$、$\Pi_<(y) = \Pi(y+\theta)$ 以及 $V_<(y) = V(y+\theta)$；而对于 $y > 0$，我们应进行平移 $y \to y - \theta$，并定义右扭结 函数 $\psi_>(y) = \psi(y-\theta)$、$\Pi_>(y) = \Pi(y-\theta)$ 以及 $V_>(y) = V(y-\theta)$。

考虑关于 $\Pi_{\text{in},\,<}(y)$ 的 Riccati 方程，其中变量为左扭结变量

$$
\Pi_{\text{in},<}(y)^2 + \frac{d}{dy}\Pi_{\text{in},<}(y) = V_<(y)\,, \tag{3.40}
$$

其中 $V_<(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} V_{<}^{(n)}(y) e^{2n\theta}$，并且我们使用了将 P^2 按 k (3.28) 展开的表达式。于是，

$$
V_<^{(0)}(y) = e^{-2y} + 2q_2 e^{-y} + k^2\,, \tag{3.41}
$$

$$
V_<^{(1)}(y) = 2q_1 e^{y} + p_2^{(1)}(k)\,, \tag{3.42}
$$

$$
V_<^{(2)}(y) = e^{2y} + p_2^{(2)}(k)\,, \tag{3.43}
$$

$$
V_<^{(n)}(y) = p_2^{(n)}(k) \quad \text{for} \quad n \geq 3\,. \tag{3.44}
$$

我们可以将该解写成级数形式：

$$\Pi_{\text{in},<}(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Pi_{\text{in},<}^{(n)}(y) e^{2n\theta} \,. \tag{3.45}$$

于是，将 (3.45) 代入 (3.40)，取 $e^{2\theta}$ 的零阶项，可得

$$\Pi_{\text{in},<}^{(0)}(y)^2 + \frac{d}{dy}\Pi_{\text{in},<}^{(0)}(y) = V_<^{(0)}(y) \,. \tag{3.46}$$

通过选择以下方式实现方程 (3.8) 的渐近行为

$$\Pi_{\text{in},<}^{(0)}(y) = \frac{d}{dy} \ln\left(e^{-e^{-y}+ky} U\left(\frac{1}{2} - k + q_2, 1-2k, 2e^{-y}\right)\right) , \tag{3.47}$$

其中 U 是 Tricomi 合流超几何函数。相反，在阶数 $e^{2n\theta}$ 下，我们得到以下方程

$$\begin{aligned} &2\Pi_{\text{in},<}^{(0)}(y)\Pi_{\text{in},<}^{(n)}(y) + \tfrac{d}{dy}\Pi_{\text{in},<}^{(n)}(y) \\ &+ \sum_{m=1}^{n-1} \Pi_{\text{in},<}^{(m)}(y)\Pi_{\text{in},<}^{(n-m)}(y) = V_<^{(n)}(y) \,, \end{aligned} \tag{3.48}$$

where (see Appendix C) the solutions $\Pi_{\text{in},<}^{(n)}(y)$ are given by

$$\Pi_{in,<}^{(n)}(y) = \frac{d}{dy}\left[P_0^{(n)}(y; q_1, q_2, k) + \sum_{j=1}^{n} P_j^{(n)}(y; q_1, q_2, k) \frac{d^{j-1}}{dy^{j-1}} \Pi_{\text{in},<}^{(0)}(y) \right] , \tag{3.49}$$

with

$$P_0^{(n)}(y; q_1, q_2, k) = \sum_{m=1}^{n} l_{n0m}(q_1, q_2, k) e^{my} \,, \tag{3.50}$$

$$P_j^{(n)}(y; q_1, q_2, k) = \sum_{m=j}^{n} l_{njm}(q_1, q_2, k) e^{my} \,. \tag{3.51}$$

由于 $\Pi_{\text{in},<}(y)$ 在对称性 Ω_1，下具有不变性，因此有 $\Pi_{\text{in},<}(y, q_1, q_2, k) = \Pi_{\text{in},<}(y, q_1, q_2, -k)$，因为由 (3.27) 可知 $P \to -P$ 等价于 $k \to -k$。利用对称性 Ω_2，即可由 In 解的表达式得到 Up 解的表达式，这意味着

$$\Pi_{\text{up},>}(y, q_1, q_2, k) = -\Pi_{\text{in},<}(-y, q_2, q_1, k) \,. \tag{3.52}$$

D. 双合流 Heun 方程波函数

对于 In 解，我们有

$$\psi_{\text{in}}(y) = \psi_{\text{in},<}(y - \theta) \,, \tag{3.53}$$

其中

$$\begin{aligned} \psi_{\text{in},<}(y) &= \mathcal{N} \exp\left(\int^y \Pi_{\text{in},<}(y')dy' \right) = \\ &= \mathcal{N} \exp\left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{2n\theta} \int^y \Pi_{in,<}^{(n)}(y')dy' \right) \,, \end{aligned} \tag{3.54}$$

其中 $\mathcal{N}$ 为常数，其表达式经过选择以符合渐近行为 (3.8)，将在下文给出。利用 (3.49) 并对 $e^{\theta} \to 0$ 展开，我们得到 [53]

$$\psi_{\mathrm{in},<}(y)=\mathcal{N}\Bigg(\left[1+e^{2\theta}P_0^{(1)}(y)+e^{4\theta}\left(P_0^{(2)}(y)+\frac{1}{2}\left(P_0^{(1)}(y)\right)^2\right)+O(e^{6\theta})\right]\psi^{(0)}_{\mathrm{in},<}(y)+$$
$$+\left[e^{2\theta}P_1^{(1)}(y)+e^{4\theta}\left(P_1^{(2)}(y)+P_0^{(1)}(y)P_1^{(1)}(y)\right)+O(e^{6\theta})\right]\frac{d\psi^{(0)}_{\mathrm{in},<}(y)}{dy}+$$
$$+\left[e^{4\theta}\left(P_2^{(2)}(y)\frac{d}{dy}\Pi^{(0)}_{\mathrm{in},<}(y)+\frac{1}{2}\left(P_1^{(1)}(y)\right)^2\left(\Pi^{(0)}_{\mathrm{in},<}(y)\right)^2\right)+O(e^{6\theta})\right]\psi^{(0)}_{\mathrm{in},<}(y)\Bigg), \tag{3.55}$$

其中

$$\psi^{(0)}_{\mathrm{in},<}(y)=\exp\left(\int^y\Pi^{(0)}_{\mathrm{in},<}(y')\right)=$$
$$=e^{-e^{-y}}e^{ky}U\left(\tfrac{1}{2}-k+q_2,1-2k,2e^{-y}\right). \tag{3.56}$$

利用 (3.46) 和关系式 (C9)，我们可以看到，$\left(\Pi^{(0)}{}_{<^{\mathrm{in}}}(y)\right)^2$ 的系数被消去，因此可以将 $\psi^{(0)}{}_{\mathrm{in}\,<}(y)$ 及其导数合并写为

$$\psi_{\mathrm{in},<}(y)=\mathcal{N}\Bigg(\left[1+e^{2\theta}P_0^{(1)}(y)+e^{4\theta}\left(P_0^{(2)}(y)+\frac{1}{2}\left(P_0^{(1)}(y)\right)^2+P_2^{(2)}(y)V_<^{(0)}(y)\right)+O(e^{6\theta})\right]\psi^{(0)}_{\mathrm{in},<}(y)+$$
$$+\left[e^{2\theta}P_1^{(1)}(y)+e^{4\theta}\left(P_1^{(2)}(y)+P_0^{(1)}(y)P_1^{(1)}(y)\right)+O(e^{6\theta})\right]\frac{d\psi^{(0)}_{\mathrm{in},<}(y)}{dy}\Bigg). \tag{3.57}$$

对于 $\left(\Pi^{(0)}{}_{<^{\mathrm{in}}}(y)\right)^n$ 的各次幂，在 $e^{2n\theta}$ 的每一阶都会发生类似的抵消（我们验证了这些抵消直至 $e^{14\theta}$）。这得益于多项式 $P_m^{(n)}(y)$ 之间的一些恒等式（见附录 C），因为它们显然可以用贝尔多项式表示。这使我们猜想 [2] 的精确形式为

$$\psi_{\mathrm{in},<}(y)=\mathcal{N}\left(\mathcal{S}(y)\psi^{(0)}_{\mathrm{in},<}(y)+\hat{\mathcal{S}}(y)\frac{d\psi^{(0)}_{\mathrm{in},<}(y)}{dy}\right), \tag{3.58}$$

其中

$$\mathcal{S}(y)=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\mathcal{S}_n(y)e^{2n\theta}, \tag{3.59}$$

$$\hat{\mathcal{S}}(y)=\sum_{n=1}^{+\infty}\hat{\mathcal{S}}_n(y)e^{2n\theta}. \tag{3.60}$$

类似于（3.58）的公式将在即将发表的论文中针对合流 Heun 方程（CHE）得到证明 [69]，并推广至其他所有 Heun 方程 [70]。

由（3.50）—（3.51）和（3.57）可知，$S_n(y)$ 和 $S_n(y)$ 也是关于 e^y 的多项式，次数为 n（见附录 E）

$$S_n(y)=\sum_{m=0}^{n}s_{n,m}e^{my}, \tag{3.61}$$

$$\hat{S}_n(y)=\sum_{m=1}^{n}\hat{s}_{n,m}e^{my}. \tag{3.62}$$

然后，为满足渐近展开 (3.8)，归一化常数必须等于

$$\mathcal{N}=2^{-k}\left[1+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(s_{n,0}+\hat{s}_{n,1}\right)e^{2n\theta}\right]^{-1}. \tag{3.63}$$

那么，$\psi_{\mathrm{in},<}(y)$ 的最终表达式为

$$\psi_{\mathrm{in},<}(y)=\frac{\left(\mathcal{S}(y)\psi^{(0)}_{\mathrm{in},<}(y)+\hat{\mathcal{S}}(y)\frac{d\psi^{(0)}_{\mathrm{in},<}(y)}{dy}\right)}{2^k\left[1+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(s_{n,0}+\hat{s}_{n,1}\right)e^{2n\theta}\right]}. \tag{3.64}$$

显然，将 (3.53) 代入 (3.10) 即可得到最终表达式

$$R_{\mathrm{in}}(r)=\mathcal{N}_{\mathrm{in}}\frac{1}{\sqrt{\frac{r}{Q}-1}}\psi_{\mathrm{in},<}(y-\theta), \tag{3.65}$$

[2] 在右折 kink 情形下也应用类似的方法，只需将左折函数替换为右折函数。

其中 $\psi_{\text{in},<}(y)$ 如 (3.58) 所示。现在，利用可积性-引力映射 (3.7)，例如，我们可以写出其针对不同 ℓ 的后牛顿展开，如附录 A 所述。按照相同的步骤，我们可以将 Up 解写为

$$R_{\text{up}}(r) = \mathcal{N}_{\text{up}} \frac{1}{\sqrt{\frac{r}{Q}-1}} \psi_{\text{up},>}(y+\theta)\,. \tag{3.66}$$

为了重构$\psi_{\text{up},>}(y)$，我们指出，结合使用（3.52）与渐近行为（3.8，3.9），即可确定以下关系，将波函数的折点连接起来

$$\psi_{\text{up},>}(y,q_1,q_2,k) = \psi_{\text{in},<}(-y,q_2,q_1,k)\,. \tag{3.67}$$

ˆ于是我们可以利用 Ω_1 对称性，写出

$$\psi_{\text{up},>}(y,q_1,q_2,k) = \psi_{\text{in},<}(-y,q_2,q_1,-k)\,, \tag{3.68}$$

当参数限制为引力时，这会引发CT对称性：下文将在第IIIG小节末尾对此进行说明。我们这种新解（3.64）或（3.65）的显著优点是只包含一个超几何函数；原则上，面向未来的应用，可以尝试直接对其积分：事实上，与MST方法相比，这是一个明显的优势（参见下一节）。不过目前我们仍采用传统方法，将唯一的超几何函数以及（3.64）中的 $\mathcal{S}$、ˆ$\mathcal{S}$ 按后牛顿近似展开为通常的函数，详见附录A。最终，这些构件都可以通过积分得到，以实现我们的最终目标。尽管如此，为了检验我们的结果（3.65）和（3.66），我们现在将详细地把它们与MST结果进行匹配。正如 [53] 此前针对其他Heun类方程（修正Mathieu方程和合流Heun方程）所指出的，这确实是可行的。

E. 折点方法与 MST 方法的比较

由于 Tricomi U 函数 [53],具有某些平移性质，函数（3.56）满足以下关系

$$e^{y}\psi^{(0)}_{\text{in},<}(y;k) = -\frac{2(\frac{1}{2}-k+q_2)}{k(1-2k)}\psi^{(0)}_{\text{in},<}(y;k-1) + \frac{q_2}{\frac{1}{4}-k^2}\psi^{(0)}_{\text{in},<}(y;k) + \frac{\frac{1}{2}+k+q_2}{2k(1+2k)}\psi^{(0)}_{\text{in},<}(y;k+1)\,, \tag{3.69}$$

$$e^{y}\frac{d}{dy}\psi^{(0)}_{\text{in},<}(y;k) = \frac{2(\frac{1}{2}-k+q_2)}{1-2k}\psi^{(0)}_{\text{in},<}(y;k-1) - \frac{q_2}{\frac{1}{2}-2k^2}\psi^{(0)}_{\text{in},<}(y;k) + \frac{\frac{1}{2}+k+q_2}{2(1+2k)}\psi^{(0)}_{\text{in},<}(y;k+1)\,. \tag{3.70}$$

我们可以迭代使用这些恒等式，写出

$$\begin{aligned} e^{my}\psi^{(0)}_{\text{in},<}(y;k) &= \sum_{q=-m}^{m} \alpha_{m,q}(k)\,\psi^{(0)}_{\text{in},<}(y;k+q)\,,\\ e^{my}\tfrac{d}{dy}\psi^{(0)}_{\text{in},<}(y;k) &= \sum_{q=-m}^{m} \beta_{m,q}(k)\,\psi^{(0)}_{\text{in},<}(y;k+q)\,. \end{aligned} \tag{3.71}$$

其中系数为

将它们应用于 (3.64)，我们可以将$\psi_{\text{in},<}$ 写成类似 MST 的形式

$$\psi_{\text{in},<}(y;k) = \frac{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n(k;e^{2\theta})\,\psi^{(0)}_{\text{in},<}(y;k+n)}{2^k\left[1+\sum_{n=1}^{+\infty}(s_{n,0}+\hat{s}_{n,1})\,e^{2n\theta}\right]}\,, \tag{3.72}$$

$$C_n(k;e^{2\theta}) = \delta_{n,0} + \sum_{j=1}^{\infty} e^{2j\theta}\left[\sum_{m=0}^{j} s_{j,m}\alpha_{m,n}(k) + \sum_{m=1}^{j}\hat{s}_{j,m}\beta_{m,n}(k)\right]. \tag{3.73}$$

最后，径向入射解（3.10）的表达式为

$$R_{\text{in}}(r) = \mathcal{N}_{\text{in}} e^{-\frac{y}{2}} \frac{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n(k;e^{2\theta})\,\psi^{(0)}_{\text{in},<}(y-\theta;k+n)}{2^k\left[1+\sum_{n=1}^{+\infty}(s_{n,0}+\hat{s}_{n,1})\,e^{2n\theta}\right]}\,. \tag{3.74}$$

若在径向波动方程(3.4)中引入以下坐标

$$z = r - Q = e^{y}Q\,, \tag{3.75}$$

利用 (3.7)，我们可以写成：

$$\psi^{(0)}_{\mathrm{in},<}(y-\theta;k+n)=e^{\frac{iQ^2\omega}{z}}(-iQ^2\omega)^{-k-n}\,z^{k+n}\,U\Big(\frac{1}{2}-k-n-2iQ\omega,1-2k-2n,-\tfrac{2iQ^2\omega}{z}\Big). \tag{3.76}$$

所有首项系数 C_n 均可显式计算，前几项为

$$C_0(k;e^{2\theta})=1+\frac{16q_1q_2}{(1-4k^2)^2}e^{2\theta}+O(e^{4\theta}), \tag{3.77}$$

$$C_1(k;e^{2\theta})=\frac{q_1(\frac{1}{2}+k+q_2)}{k(1+2k)^2}e^{2\theta}+O(e^{4\theta}), \tag{3.78}$$

$$C_{-1}(k;e^{2\theta})=-\frac{4q_1(\frac{1}{2}-k+q_2)}{k(1-2k)^2}e^{2\theta}+O(e^{4\theta}). \tag{3.79}$$

接下来，我们将通过解析方法验证我们提出的新方法，并与传统的 MST 方法进行比较。

F. MST：入射解

为了求得入射径向波函数，将其写成如下形式较为方便：

$$R_{\mathrm{in}}(z)=e^{i\omega z}e^{\frac{i\omega Q^2}{z}}\frac{1}{z}f(z)\,. \tag{3.80}$$

因此，方程 (3.4) 变为：

$$\begin{aligned}0=&\,z^2f''(z)-2i\omega(Q^2-z^2)f'(z)\\&+\Big[-\ell(\ell+1)+8Q^2\omega^2+4Q\omega^2z+\frac{2(iQ^2\omega+2Q^3\omega^2)}{z}\Big]f(z)\,.\end{aligned} \tag{3.81}$$

我们将 (3.81) 拆分如下：

$$\begin{aligned}&z^2f''(z)-2iQ^2\omega f'(z)+\Big[-\nu-\nu^2+\frac{2Q^2\omega(i+2Q\omega)}{z}\Big]f(z)\\&=\Big[\ell+\ell^2-\nu-\nu^2-8Q^2\omega^2-4Q\omega^2z\Big]f(z)-2i\omega z^2f'(z)\end{aligned} \tag{3.82}$$

其中我们引入重整化角动量（RAM） ν。

RAM 是临时引入的，并应理解为满足 $\nu=\ell+\mathcal{O}(Q^2\omega^2)$。因此，在 $Q\omega\ll 1$ 的范围内，$\nu-\ell=\mathcal{O}(Q^2\omega^2)$ 是一个小量。这一选择确保方程右端整体与 $Q\omega$ 成正比，因此可将其视为一个微扰小源。

方程 (3.82) 的左侧可用合流超几何函数求解，并要求在视界处满足入射边界条件 $z=0$

$$f_\nu(z)=z^{1+\nu}U\Big(-\nu-2iQ\omega,-2\nu,-\frac{2iQ^2\omega}{z}\Big), \tag{3.83}$$

其中 U 再次表示特里科米合流超几何函数。我们对方程 (3.82) 的入射解采用的试探形式为

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_nf_{\nu+n}(z)\,. \tag{3.84}$$

右端可利用以下恒等式处理

$$\begin{aligned}z^2f'_{n+\nu}(z)&=A_1f_{n+\nu+1}(z)+A_0f_{n+\nu}(z)+A_{-1}f_{n+\nu-1}(z)\,,\\zf_{n+\nu}(z)&=B_1f_{n+\nu+1}(z)+B_0f_{n+\nu}(z)+B_{-1}f_{n+\nu-1}(z)\,,\end{aligned} \tag{3.85}$$

其中

$$\begin{aligned}A_1&=\frac{1+n+\nu-2iQ\omega}{2(1+2n+2\nu)}\,,\\A_0&=iQ^2\omega\,,\\A_{-1}&=-\frac{2Q^4\omega^2(n+\nu+2iQ\omega)}{1+2n+2\nu}\,,\\B_1&=\frac{1+n+\nu-2iQ\omega}{2(1+n+\nu)(1+2n+2\nu)}\,,\\B_0&=\frac{2Q^3\omega^2}{(n+\nu)(n+\nu+1)}\,,\\B_{-1}&=\frac{2Q^4\omega^2(n+\nu+2iQ\omega)}{(n+\nu)(1+2n+2\nu)}\,.\end{aligned} \tag{3.86}$$

利用前述恒等式，公式（3.82）可改写为如下形式的三项递推关系

$$\begin{aligned}&\frac{i\omega(1+n+\nu-2iQ\omega)^2}{(1+n+\nu)(1+2n+2\nu)}f_{n+\nu+1}(z)\\&+\Big(n(n+1)-\ell(\ell+1)+\nu(\nu+1)\\&+2n\nu+6Q^2\omega^2+\frac{8Q^4\omega^4}{(n+\nu)(1+n+\nu)}\Big)f_{n+\nu}(z)\\&-\frac{4iQ^4\omega^3(n+\nu+2iQ\omega)^2}{(n+\nu)(1+2n+2\nu)}f_{n+\nu-1}(z)=0\,.\end{aligned} \tag{3.87}$$

前述递推关系的系数可以进行移位

以获得

$$\begin{aligned}
&\alpha_n c_{n+1}+\beta_n c_n+\gamma_n c_{n-1}=0\,,\\
&\alpha_n=-\frac{4iQ^4\omega^3(1+n+\nu+2iQ\omega)^2}{(1+n+\nu)(3+2n+2\nu)}\,,\\
&\beta_n=-\ell(\ell+1)+\nu(\nu+1)+n(n+1)+2\nu n+6Q^2\omega^2\\
&+\frac{8Q^4\omega^4}{(\nu+n)(\nu+n+1)}\,,\\
&\gamma_n=\frac{i\omega(n+\nu-2iQ\omega)^2}{(n+\nu)(2n+2\nu-1)}\,.
\end{aligned}\tag{3.88}$$

前述三项关系的一致性关系为以下连分数

$$\beta_0-\frac{\alpha_{-1}\gamma_0}{\beta_{-1}-\frac{\alpha_{-2}\gamma_{-1}}{\beta_{-2}-\frac{\alpha_{-3}\gamma_{-2}}{\beta_{-3}-\dots}}}-\frac{\alpha_0\gamma_1}{\beta_1-\frac{\alpha_1\gamma_2}{\beta_2-\frac{\alpha_2\gamma_3}{\beta_3-\dots}}}=0\,.\tag{3.89}$$

前述连分数可以按小$Q\omega$的阶数逐阶求解。对于前几个角动量，我们得到 Floquet 指数与 RAM (3.29) 之间的关系

$$\nu^{(\ell)}=k^{(\ell)}-\frac{1}{2}\,,\tag{3.90}$$

已在参考文献 [30, 35,39], 中进行了详尽讨论并得到证明，其中将 k 与量子Seiberg-Witten理论的基本规范周期 $a/\hbar$对应起来。

因此，入射径向函数的最终表达式为

$$R_{\rm in}(z)=e^{i\omega z}e^{\frac{i\omega Q^2}{z}}\times\\ \sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n z^{\nu+n}U\Big(-\nu-n-2iQ\omega,-2\nu-2n,-\tfrac{2iQ^2\omega}{z}\Big)\,.\tag{3.91}$$

因此，In 解在视界处的主导行为为

$$R_{\rm in}(r)\underset{r\to Q}{\simeq}B_{\rm trans}e^{\frac{iQ^2\omega}{r-Q}}(r-Q)^{-2iQ\omega}\,.\tag{3.92}$$

其中

$$B_{\rm trans}=(-2iQ^2\omega)^{\nu+2iQ\omega}\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(-2iQ^2\omega)^n\tag{3.93}$$

显然与(3.10)中引入的类似常数 $\mathcal{N}_{in}$ 有关

$$B_{\rm trans}=\mathcal{N}_{in}Q^{2iQ\omega}\left(-\frac{1}{2iQ\omega}\right)^{\frac{1}{2}-2iQ\omega}\,,\tag{3.94}$$

随后可将其表示为 c_n 的形式如下

$$\mathcal{N}_{in}=Q^{-\frac{1}{2}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(-2i\omega Q^2)^{\frac{1}{2}+\nu+n}\,.\tag{3.95}$$

$B_{\rm trans}$ 的后牛顿展开的首项为

$$\begin{aligned}
B_{\rm trans}^{\ell=0}&=1+\Big(\pi Q\omega+2iQ\omega\log(2Q\omega)\Big)\eta^3\\
&+\frac{1}{2}\left(3\sqrt{5}-7\right)\eta^5\\
&+\Big(\frac{1}{2}\pi\left(\pi+2i\sqrt{5}\right)Q^2\omega^2-2Q^2\omega^2\log^2(2Q\omega)\\
&-2\left(\sqrt{5}-i\pi\right)Q^2\omega^2\log(2Q\omega)\Big)\eta^6+O\left(\eta^7\right)\,,\\
B_{\rm trans}^{\ell=1}&=-2iQ^2\omega\eta^5\\
&+\Big(-2i\pi Q^3\omega^2+4Q^3\omega^2\log(2Q\omega)\Big)\eta^8\\
&+O\left(\eta^9\right)\,.
\end{aligned}\tag{3.96}$$

比较 (3.74) 和 (3.91) 可知，除了一些常数前因子外，存在一个重要的不匹配，这是由整体因子 $e^{i\omega z}=\sum_h(Q\omega)^{2h}e^{h(y-\theta)}/h!$引起的；通过移位恒等式 (3.69)、(3.70) 可以将其吸收。由此比较得到关系式

$$\sum_{m'=-\infty}^{+\infty}c_{m-m'}\,(-i\omega Q^2)^{m-m'}\sum_{h=|m'|}^{+\infty}\frac{(\omega Q)^{2h}}{h!}\alpha_{h,m'}(k+m-m')=\frac{C_m(k,Q\omega)\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(-2i\omega Q^2)^n}{1+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(s_{n,0}+\hat{s}_{n,1})(-i\omega Q)^{2n}}\,.\tag{3.97}$$

我们将两边展开为 $Q\omega$ 的级数，直到 $O((Q\omega)^8)$，从而验证了 $m=0$ 。此外，对于 $m\neq 0$，令 T_m 表示 (3.97) 的左侧，我们可以验证

下面这个更简单的恒等式:

$$T_{m,0}\equiv\frac{T_m}{T_0}=\frac{C_m(k,Q\omega)}{C_0(k,Q\omega)}\equiv C_{m,0}\,.\tag{3.98}$$

再次通过展开两边的 $Q\omega$ 级数来进行这项检验，我们对前几个情形 $m=\pm1,\ \pm2,\ \pm3$ 都进行了检验

直到 $O((Q\omega)^8)$。这里我们展示这些展开式的前几阶（截至 $O((Q\omega)^5)$，以避免公式过长）：

$$\begin{aligned}
T_{1,0} &= C_{1,0} = \frac{iQ^3\omega^3}{2k^2+k} + \frac{4Q^4\omega^4}{k(2k+1)^2} \\
&+ \frac{4iQ^5\omega^5}{k\left(8k^3+12k^2-2k-3\right)} + O\left((Q\omega)^6\right) , \\
T_{-1,0} &= C_{-1,0} = \frac{4iQ^3\omega^3}{k(2k-1)} - \frac{16Q^4\omega^4}{k(2k-1)^2} \\
&+ \frac{16iQ^5\omega^5}{k\left(8k^3-12k^2-2k+3\right)} + O\left((Q\omega)^6\right) , \\
T_{2,0} &= C_{2,0} = \frac{Q^4\omega^4}{64k(k+1)^2} \\
&- \frac{iQ^5\omega^5}{4k\left(4k^3+12k^2+11k+3\right)} + O\left((Q\omega)^6\right) , \\
T_{-2,0} &= C_{-2,0} = -\frac{Q^4\omega^4}{4\left((k-1)^2k\right)} \\
&- \frac{4iQ^5\omega^5}{k\left(4k^3-12k^2+11k-3\right)} + O\left((Q\omega)^6\right) . \quad (3.99)
\end{aligned}$$

然而$T_{\pm 3,\ 0}$ 和 $C_{\pm 3,\ 0}$ 在此处未显示，因为它们的首项出现在 $(Q\omega)^6$ 的更高次幂中。

G. MST：Up 解

与 $R_{\rm in}$ 的处理方式相同，我们可以将出射解写成

$$R_{\rm up}(r) = e^{i\omega z + \frac{iQ^2\omega}{z}} g(z) . \quad (3.100)$$

将其代入波动方程 (3.4)，得到

$$\begin{aligned}
0 &= z^2 g''(z) + (2z - 2iQ^2\omega + 2i\omega z^2) g'(z) \\
&\Big[-\ell(\ell+1) + 8Q^2\omega^2 + \frac{4Q^3\omega^2}{z} + 2\omega z(i+2Q\omega) \Big] g(z) .
\end{aligned} \quad (3.101)$$

该方程可以改写为

$$\begin{aligned}
&z^2 g''(z) + 2z(1+i\omega z) g'(z) + \\
&+ \Big[-\nu(\nu+1) + 2\omega z(i+2Q\omega) \Big] g(z) \\
&= 2iQ^2\omega g'(z) + \Big[\ell(\ell+1) - \nu(\nu+1) \\
&-8Q^2\omega^2 - \frac{4Q^3\omega^2}{z} \Big] g(z) . \quad (3.102)
\end{aligned}$$

左侧的微分算子可用合流超几何函数表示为精确解：

$$g_\nu(z) = z^\nu U\Big(1+\nu-2iQ\omega, 2+2\nu, -2iz\omega\Big) . \quad (3.103)$$

受这一解的启发，我们将 Up 解设为以下级数形式

$$g(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \kappa_n g_{n+\nu}(z) . \quad (3.104)$$

归一化系数 κ_n 的选取使得展开系数 c_n 与 In 解中出现的系数一致。此外，In 解和 Up 解的 RAM 参数 ν 也相同。具体而言，我们得到

$$\kappa_n = (-4)^n Q^{2n} \omega^{2n} . \quad (3.105)$$

In 解和 Up 解在后牛顿展开中的显式表达式见附录 A。

最后请注意，CT对称性 $z \to Q^2/z$,$\nu \to -\nu - 1$ 给出了 In 解与 Up 解之间的直接映射。将 ν 依赖关系显式写出后，它对 In 解 (3.80) 中的函数 $f(z)$ 的作用为

$$\begin{aligned}
f(z;\nu) &\overset{CT}{\longmapsto} f\Big(\tfrac{Q^2}{z}; -\nu-1\Big) \\
&= Q^{-2\nu} \tfrac{c_0(-\nu-1)}{c_0(\nu)} g(z;\nu) ,
\end{aligned} \quad (3.106)$$

其中 $g(z)$ 出现在 Up 解 (3.100) 中。CT对称性下函数 $f(z)$ 与 $g(z)$ 之间的这一简单联系，从事后角度证明了 (3.80) 中存在因子 $1/z$ 的合理性（原则上，人们可能会认为可以将其吸收到 $f(z)$ 的定义中）。正如第三节 D 小节所预期的，CT对称性等价于在可积性变量中引入的对称性 (3.68)：事实上，(3.68) 用引力变量表示为

$$\psi_{\rm up}(z;\nu) = \psi_{\rm in}\left(\frac{Q^2}{z}; -\nu-1\right) , \quad (3.107)$$

因为 $q_1 = q_2 = -2iQ\omega$。

IV. 标量源

在 eRN 时空中，我们考虑无质量标量场的波动方程，该场与背景几何最小耦合，并由标量电荷密度 ρ提供源项；该电荷密度与沿由 $x^\mu = x_p^\mu(\tau)$ 参数化的世界线运动的有质量粒子相关。非齐次标量波动方程可写为

$$\Box\Phi = -4\pi\rho , \quad (4.1)$$

其中

$$\rho = q \int \frac{d\tau}{\sqrt{-g}} \delta^{(4)}(x - x_p(\tau)) . \quad (4.2)$$

这里，q 表示粒子的标量电荷。(2.17) 中给出的圆形测地线条件可以

通过求解得到比能和角动量:

$$\hat{E} = \frac{(r-Q)^{3/2}}{r\sqrt{r-2Q}}, \quad \hat{J} = \frac{r}{\sqrt{\frac{r}{Q}-2}}, \tag{4.3}$$

其中 $\hat{} E = E/\mu$ 和 $\hat{} J = J/\mu_\circ$ 对（2.2）中的运动方程进行积分，并沿由（4.3）刻画的圆轨道计算所得表达式，我们得到

$$\begin{aligned} &t = t_p(\tau) = \Gamma\tau, \quad r = r_p(\tau) = r_0, \\ &\theta = \theta_p(\tau) = \frac{\pi}{2}, \phi = \phi_p(\tau) = \Gamma\Omega\tau\,. \end{aligned} \tag{4.4}$$

这里,

$$\Gamma = \frac{r_0}{\sqrt{(r_0-Q)(r_0-2Q)}}, \quad \Omega = \frac{\sqrt{Q}\sqrt{r_0-Q}}{r_0^2}. \tag{4.5}$$

源项可以更明确地写为

$$\rho = q\int \frac{d\tau}{r^2\sin\theta}\delta^{(4)}(x-x_p(\tau))\,. \tag{4.6}$$

利用粒子沿圆轨道的世界线表达式，四维狄拉克δ函数可分解为

$$\delta^{(4)}(x-x_p(\tau))=\delta(t-\Gamma\tau)\delta(r-r_0)\delta\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\delta(\phi-\Omega t)\,. \tag{4.7}$$

对 τ 的积分可以直接求出

$$\rho = \frac{q}{r_0^2\Gamma}\delta(r-r_0)\delta\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\delta(\phi-\Omega t)\,. \tag{4.8}$$

球谐函数的完备关系

$$\delta\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\delta(\phi-\phi_0) = \sum_{\ell m} Y_{\ell m}(\theta,\phi)Y^*_{\ell m}\left(\frac{\pi}{2},\phi_0\right)\,, \tag{4.9}$$

可用于将源密度改写为

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{q}{r_0^2\Gamma}\sum_{\ell m}\delta(r-r_0)Y_{\ell m}(\theta,\phi)Y^*_{\ell m}\left(\frac{\pi}{2},\Omega t\right) \\ &= \frac{q}{r_0^2\Gamma}\sum_{\ell m}\delta(r-r_0)Y_{\ell m}(\theta,\phi)Y^*_{\ell m}\left(\frac{\pi}{2},0\right)e^{-im\Omega t} \\ &= \frac{q}{r_0^2\Gamma}\sum_{\ell m}\delta(r-r_0)Y_{\ell m}(\theta,\phi)Y^*_{\ell m}\left(\frac{\pi}{2},0\right) \\ &\times\int\frac{d\omega}{2\pi}e^{-i\omega t}2\pi\delta(\omega-m\Omega)\,. \end{aligned} \tag{4.10}$$

利用试探形式（3.2），我们有

$$\begin{aligned} \Box\Phi &= \sum_{\ell m}\int\frac{d\omega}{2\pi}e^{-i\omega t}Y_{\ell m}(\theta,\phi)\Big[\left(1-\frac{Q}{r}\right)^2 R''_{\ell m\omega}(r) + \frac{2(r-Q)}{r^2}R'_{\ell m\omega}(r) + \left(\frac{r^2\omega^2}{(r-Q)^2}-\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right)R_{\ell m\omega}(r)\Big] \\ &= -4\pi\sum_{\ell m}\int\frac{d\omega}{2\pi}e^{-i\omega t}\hat{S}_{\ell m}(\omega,r)Y_{\ell m}(\theta,\phi)\,, \end{aligned} \tag{4.11}$$

其中我们在傅里叶空间中引入了源项 e

$$\hat{S}_{\ell m}(\omega,r) = \frac{q}{r_0^2\Gamma}\delta(r-r_0)2\pi\delta(\omega-m\Omega)Y^*_{\ell m}\left(\frac{\pi}{2},0\right)\,. \tag{4.12}$$

简而言之，非齐次径向方程可写为

$$\mathcal{L}_r R_{\ell m\omega}(r) = S_{\ell m\omega}\delta(r-r_0)\,, \tag{4.13}$$

其中

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_r &= \frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r-Q}\frac{d}{dr}+\frac{r^4\omega^2}{(r-Q)^4}-\frac{\ell(\ell+1)}{(r-Q)^2}\,, \\ S_{\ell m\omega} &= 2\pi\delta(\omega-m\Omega)\bar{S}_{\ell m\omega}\,, \\ \bar{S}_{\ell m\omega} &= -\frac{4\pi q\sqrt{r_0-2Q}}{(r_0-Q)^{\frac{3}{2}}r_0}Y^*_{\ell m}\left(\frac{\pi}{2},0\right)\,. \end{aligned} \tag{4.14}$$

这里我们采用探针质量 μ 设为单位值的单位制。

定义

$$\Delta(r) = (r-Q)^2\,, \tag{4.15}$$

该方程可以使用格林函数求解

方法

$$\mathcal{L}_r G_{\ell m\omega}(r,r') = \frac{1}{\Delta(r)}\delta(r-r')\,, \tag{4.16}$$

其中我们引入了格林函数

$$G_{\ell m\omega}(r,r') = \frac{1}{W_{\ell m\omega}}\Big[R_{\rm in}(r)R_{\rm up}(r')\Theta(r'-r) + R_{\rm in}(r')R_{\rm up}(r)\Theta(r-r')\Big]\,, \tag{4.17}$$

以及常数朗斯基行列式

$$W_{\ell m\omega} = \Delta(r)\Big[R_{\rm in}(r)R'_{\rm up}(r) - R_{\rm up}(r)R'_{\rm in}(r)\Big]\,. \tag{4.18}$$

用这种表述方式，特解为

$$\begin{aligned} R_{\ell m\omega}(r) &= S_{\ell m\omega}\int dr' G_{\ell m\omega}(r,r')\Delta(r')\delta(r'-r_0) \\ &= S_{\ell m\omega}G_{\ell m\omega}(r,r_0)\Delta(r_0)\,. \end{aligned} \tag{4.19}$$

V. 辐射能量

下文中，我们将研究无质量标量波发射造成的能量损失。辐射能量可由相应的能量-动量张量计算得出；对于无质量复标量场，该张量为

$$8\pi T^{\rm scal}_{\mu\nu} = \partial_\mu\Phi^*\partial_\nu\Phi + \partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi^* - g_{\mu\nu}\partial_\lambda\Phi^*\partial^\lambda\Phi\,. \tag{5.1}$$

因此，无穷远处单位时间、单位立体角的能流为

$$\frac{d^2E^\infty}{dtd\Omega} = \lim_{r\to\infty}\left(r^2 T^{\rm scal\,r}{}_t\right)\,. \tag{5.2}$$

对于复标量场，能量-动量张量为

$$8\pi T^{\rm scal}_{rt} = \Phi^*_{,r}\Phi_{,t} + \Phi_{,r}\Phi^*_{,t}\,, \tag{5.3}$$

这意味着

$$8\pi T^{\rm scal\,r}{}_t = \frac{\Delta(r)}{r^2}\left(\Phi^*_{,r}\Phi_{,t} + \Phi_{,r}\Phi^*_{,t}\right)\,. \tag{5.4}$$

略去对时空变量的依赖，我们得到

$$\begin{aligned} \Phi &= \sum_{\ell m} Y_{\ell m}\int\frac{d\omega}{2\pi}e^{-i\omega t}R_{\ell m\omega}\,, \\ \Phi_{,t} &= \sum_{\ell m} Y_{\ell m}\int\frac{d\omega}{2\pi}(-i\omega)e^{-i\omega t}R_{\ell m\omega}\,, \\ \Phi^*_{,r} &= \sum_{\ell' m'} Y^*_{\ell' m'}\int\frac{d\omega'}{2\pi}e^{i\omega' t}\frac{d}{dr}R^*_{\ell' m'\omega'}\,, \end{aligned} \tag{5.5}$$

因此

$$\begin{aligned} r^2 T^{\rm scal\,r}{}_t &= \frac{\Delta(r)}{8\pi}\left(\Phi^*_{,r}\Phi_{,t} + \Phi_{,r}\Phi^*_{,t}\right) \\ &= \frac{\Delta(r)}{8\pi}\sum_{\ell m,\ell' m'}\int\frac{d\omega}{2\pi}\int\frac{d\omega'}{2\pi}Y_{\ell m}(\theta,\phi)Y^*_{\ell' m'}(\theta,\phi)\Big[(-i\omega)e^{-i(\omega-\omega')t}R_{\ell m\omega}(r)\frac{d}{dr}R^*_{\ell' m'\omega'}(r) \\ &\quad + (i\omega')e^{i(\omega-\omega')t}R^*_{\ell' m'\omega'}(r)\frac{d}{dr}R_{\ell m\omega}(r)\Big]\,. \end{aligned} \tag{5.6}$$

利用球谐函数的正交性质

$$\int\sin\theta d\theta d\phi Y^*_{\ell m}(\theta,\phi)Y_{\ell' m'}(\theta,\phi) = \delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'}\,, \tag{5.7}$$

我们发现

$$\begin{aligned} \frac{dE^\infty}{dt} &= \lim_{r\to\infty}\int\sin\theta d\theta d\phi r^2 T^{\rm scal\,r}{}_t \\ &= \lim_{r\to\infty}\frac{\Delta(r)}{8\pi}\sum_{\ell m}\int\frac{d\omega}{2\pi}\int\frac{d\omega'}{2\pi} \\ &\quad\times\Big[(-i\omega)e^{-i(\omega-\omega')t}R_{\ell m\omega}(r)\frac{d}{dr}R^*_{\ell m\omega'}(r) \\ &\quad + (i\omega')e^{i(\omega-\omega')t}R^*_{\ell m\omega'}(r)\frac{d}{dr}R_{\ell m\omega}(r)\Big]\,. \end{aligned} \tag{5.8}$$

由于存在 $r \to \infty$限制，此处我们只能使用 $R_{\ell m\omega}(r)$解的最终向外部分

$$R_{\ell m\omega} = \mathfrak{R}_{\ell m\omega}(r) 2\pi\delta(\omega - m\Omega)\,,$$
$$\mathfrak{R}_{\ell m\omega}(r) = \frac{R_{\rm up}(r)R_{\rm in}(r_0)}{W_{\ell m\omega}}\Delta(r_0)\bar{S}_{\ell m\omega}\,. \qquad (5.9)$$

$$\begin{aligned}\frac{dE^\infty}{dt} &= \lim_{r\to\infty}\frac{\Delta(r)}{8\pi}\sum_{\ell m}(-im\Omega)\left[\mathfrak{R}_{\ell m\omega}(r)\frac{d}{dr}\mathfrak{R}^*_{\ell m\omega}(r) - \mathfrak{R}^*_{\ell m\omega}(r)\frac{d}{dr}\mathfrak{R}_{\ell m\omega}(r)\right]_{\omega=m\Omega}\\ &= \lim_{r\to\infty}\frac{\Delta(r)}{4\pi}\sum_{\ell m} m\Omega\,\Im m\left[\mathfrak{R}_{\ell m\omega}(r)\frac{d}{dr}\mathfrak{R}^*_{\ell m\omega}(r)\right]_{\omega=m\Omega}. \qquad (5.10)\end{aligned}$$

为利用上述表达式计算能流，我们采用多极模 $\ell = 0$，1，2，3，4，5 的齐次 In 和 Up 解。对于上述每个多极模，我们得到

$$\begin{aligned}\frac{Q^2}{q^2}\frac{dE^\infty_{\ell=0}}{dt} &= 0\,,\\ \frac{Q^2}{q^2}\frac{dE^\infty_{\ell=1}}{dt} &= \frac{u^4}{3}-\frac{12}{5}u^5+\frac{2}{3}\pi u^{\frac{11}{2}}+\frac{3503}{525}u^6-\frac{77}{15}\pi u^{\frac{13}{2}}-\left(\frac{4051}{2025}-\frac{4}{9}\pi^2+\frac{2}{3}\log(4ue^{2\gamma})\right)u^7+\frac{10963}{700}\pi u^{\frac{15}{2}}+O\left(u^8\right),\\ \frac{Q^2}{q^2}\frac{dE^\infty_{\ell=2}}{dt} &= \frac{16}{15}u^5-\frac{1184}{105}u^6+\frac{64}{15}\pi u^{\frac{13}{2}}+\frac{326272}{6615}u^7-\frac{992}{21}\pi u^{\frac{15}{2}}+O\left(u^8\right),\\ \frac{Q^2}{q^2}\frac{dE^\infty_{\ell=3}}{dt} &= \frac{1367}{525}u^6-\frac{172241}{4725}u^7+\frac{16403}{1050}\pi u^{\frac{15}{2}}+O\left(u^8\right),\\ \frac{Q^2}{q^2}\frac{dE^\infty_{\ell=4}}{dt} &= \frac{114752}{19845}u^7+O\left(u^8\right),\\ \frac{Q^2}{q^2}\frac{dE^\infty_{\ell=5}}{dt} &= O\left(u^8\right), \qquad (5.11)\end{aligned}$$

其中 $u = Q/r_0$ 和 $\eta = 1$。将这些结果代入后，最终结果为

$$\frac{Q^2}{q^2}\frac{dE^\infty}{dt}=\frac{u^4}{3}-\frac{4u^5}{3}+\frac{2}{3}\pi u^{\frac{11}{2}}-2u^6-\frac{13}{15}\pi u^{\frac{13}{2}}+\left(\frac{2248}{135}+\frac{4}{9}\pi^2-\frac{2}{3}\log(4ue^{2\gamma})\right)u^7-\frac{6701}{420}\pi u^{\frac{15}{2}}+O\left(u^8\right). \qquad (5.12)$$

用变量

$$\mathcal{Y} = (Q\Omega)^{\frac{2}{3}} = \left(u^2\sqrt{\frac{1}{u}-1}\right)^{\frac{2}{3}}, \qquad u = \mathcal{Y}+\frac{1}{3}\mathcal{Y}^2+\frac{1}{3}\mathcal{Y}^3+\frac{35}{81}\mathcal{Y}^4+\frac{154}{243}\mathcal{Y}^5+\mathcal{Y}^6+\frac{10868}{6561}\mathcal{Y}^7+O\left(\mathcal{Y}^8\right), \qquad (5.13)$$

能流变为

$$\frac{Q^2}{q^2}\frac{dE^\infty}{dt} = \frac{\mathcal{Y}^4}{3}-\frac{8}{9}\mathcal{Y}^5+\frac{2}{3}\pi\mathcal{Y}^{\frac{11}{2}}-\frac{32}{9}\mathcal{Y}^6+\frac{16}{45}\pi\mathcal{Y}^{\frac{13}{2}}+\mathcal{Y}^7\left(\frac{12172}{1215}+\frac{4}{9}\pi^2-\frac{2}{3}\log(4\mathcal{Y}e^{2\gamma})\right)-\frac{9887}{630}\pi\mathcal{Y}^{\frac{15}{2}}+O(\mathcal{Y}^8). \qquad (5.14)$$

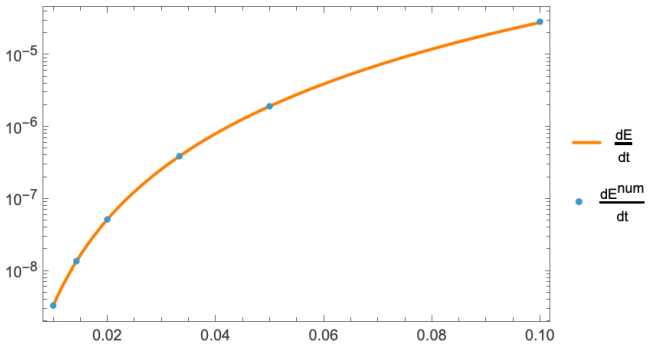
这一解析结果与参考文献 [60]，表 I 中报告的数值非常吻合，如图1所示。类似地，视界处的能流为

$$\frac{dE^H}{dt} = \frac{4\pi q^2Q^2}{\Gamma^2}\sum_{\ell m}\omega^2\left|Y_{\ell m}\left(\frac{\pi}{2},0\right)\right|^2\left.\frac{|B_{\rm trans}|^2|R_{\rm up}(r_0)|^2}{|W|^2}\right|_{\omega=m\Omega}, \qquad (5.15)$$

其中 $B_{\rm trans}$ 由式 (3.93) 给出。最终，以.....表示的视界处能流表达式为

无量纲变量 $u = Q/r_0$ 为

$$\frac{dE^H}{dt} = \frac{q^2}{Q^2}\frac{u^{10}}{3}+O\left(u^{11}\right). \qquad (5.16)$$



$\mathcal{Y}$	$\frac{dE_{数值}}{dt}$	$\frac{dE}{dt}$	误差(%)
$\frac{1}{10}$	2.8436184×10^{-5}	2.7730662×10^{-5}	2.5
$\frac{1}{20}$	1.9061791×10^{-6}	1.9031307×10^{-6}	0.16
$\frac{1}{30}$	3.8647892×10^{-7}	3.8635448×10^{-7}	0.032
$\frac{1}{50}$	5.1232128×10^{-8}	5.1229942×10^{-8}	$4.3 * 10^{-3}$
$\frac{1}{70}$	1.3475403×10^{-8}	1.3475252×10^{-8}	$1.1 * 10^{-3}$
$\frac{1}{100}$	3.2620620×10^{-9}	3.2620530×10^{-9}	$2.8 * 10^{-4}$

图1：方程 (5.12) 中 $\frac{dE}{dt}$ 无穷远处的能量通量随 $\mathcal{Y}$ 变化的情况，与 [60] 的表 I 中相同物理量的数值数据（在本图中记为 $\frac{dE_{数值}}{dt}$）进行比较。

VI. 自场

利用方程（4.19）中的定义以及方程（4.14）中的源项，我们得到标量场的以下显式表达式

$$\begin{aligned}\Phi(t,r,\theta,\phi) &= -\frac{4\pi q}{r_0}\sqrt{(r_0-2Q)(r_0-Q)} \\ &\times \sum_{\ell m} Y_{\ell m}(\theta,\phi-\Omega t)\, Y^*_{\ell m}\left(\frac{\pi}{2},0\right) \\ &\times \left.\frac{R_{\rm in}(r_0)R_{\rm up}(r)}{W}\right|_{\omega=m\Omega},\end{aligned} \tag{6.1}$$

随后可沿粒子的测地线对其进行求值

$$\begin{aligned}\Phi\left(t,r_0,\frac{\pi}{2},\Omega t\right) &= -\frac{4\pi q}{r_0}\sqrt{(r_0-2Q)(r_0-Q)} \\ \times \sum_{\ell m}\left|Y_{\ell m}\left(\frac{\pi}{2},0\right)\right|^2 &\left.\frac{R_{\rm in}(r_0)R_{\rm up}(r_0)}{W}\right|_{\omega=m\Omega}.\end{aligned} \tag{6.2}$$

A. PN贡献

这里，我们使用附录 B 中给出的后牛顿展开解来计算自场 (6.2)。在 $\omega = m\Omega$ 处计算格林函数后，对 m 求和，

$$Y_\ell(d) = \sum_{m=-\ell}^{\ell}\left|Y_{\ell m}\left(\frac{\pi}{2},0\right)\right|^2 m^d, \tag{6.3}$$

可以使用以下恒等式完成

$$\begin{aligned}\Gamma_\ell(z) &= \sum_{m=-\ell}^{\ell} e^{mz}\left|Y_{\ell m}\left(\frac{\pi}{2},0\right)\right|^2 \\ &= \frac{2\ell+1}{4\pi}e^{\ell z}{}_2F_1\left(\frac{1}{2},-\ell,1,1-e^{-2z}\right) \\ &= Y_\ell(0)+\frac{z^2}{2!}Y_\ell(2)+\dots,\end{aligned} \tag{6.4}$$

即 exp ti ytl

$$\begin{aligned}Y_\ell(0) &= \frac{1+2\ell}{4\pi}, \\ Y_\ell(2) &= \frac{(1+2\ell)}{4\pi}\frac{\ell(\ell+1)}{2}, \\ Y_\ell(4) &= \frac{(1+2\ell)}{4\pi}\frac{\ell(\ell+1)(3\ell^2+3\ell-2)}{8}, \\ Y_\ell(6) &= \frac{(1+2\ell)}{4\pi}\frac{\ell(\ell+1)(5\ell^4+10\ell^3-5\ell^2-10\ell+8)}{16}, \\ Y_\ell(8) &= \frac{(1+2\ell)}{4\pi}\frac{\ell(\ell+1)}{128}(35\ell^6+105\ell^5-35\ell^4 \\ &- 245\ell^3+168\ell^2+308\ell-272).\end{aligned} \tag{6.5}$$

由（6.2）可得，总场为

$$\Phi_{\rm orb} = \Phi\left(t,r_0,\frac{\pi}{2},\Omega t\right) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\Phi_\ell, \tag{6.6}$$

其中

$$
\begin{aligned}
\Phi_\ell &= \frac{q}{r_0}\Bigg[1-\frac{Q\left(2\ell^2+2\ell-3\right)}{2r_0(2\ell-1)(2\ell+3)}\eta^2-\frac{Q^2\left(46\ell^4+92\ell^3-146\ell^2-192\ell-135\right)}{8r_0^2(2\ell-3)(2\ell-1)(2\ell+3)(2\ell+5)}\eta^4 \\
&- \frac{Q^3\left(2192\ell^{10}+10960\ell^9-10612\ell^8-108208\ell^7-55486\ell^6+258302\ell^5+72316\ell^4-434034\ell^3-223765\ell^2+57625\ell+158550\right)}{16r_0^3(\ell-1)(\ell+2)(2\ell-5)(2\ell-3)(2\ell-1)(2\ell+1)^2(2\ell+3)(2\ell+5)(2\ell+7)}\eta^6 \\
&- \frac{\eta^8}{128r_0^4(\ell-2)(\ell-1)(\ell+2)(\ell+3)(2\ell-7)(2\ell-5)(2\ell-3)(2\ell-1)^2(2\ell+1)^2(2\ell+3)^2(2\ell+5)(2\ell+7)(2\ell+9)} \\
&\times \Bigg(Q^4\left(431840\ell^{16}+3454720\ell^{15}-3941488\ell^{14}-88048016\ell^{13}-93804730\ell^{12}+738985588\ell^{11}+1331726978\ell^{10}\right. \\
&- 2625564848\ell^9-7043577122\ell^8+46349876\ell^7+11130261886\ell^6+9509138576\ell^5+2774854877\ell^4+1376346346\ell^3 \\
&- \left.1819131831\ell^2-2683841832\ell+1097904780\right)\Bigg)\Bigg]+O\left(\eta^{10}\right). \qquad (6.7)
\end{aligned}
$$

然而，模态求和在粒子的世界线上求值时发散。因此，我们需要减去奇异场，其由下式给出

$$
\begin{aligned}
B &= \frac{q}{r_0}\Bigg(1-\frac{Q}{4r_0}\eta^2-\frac{23Q^2}{64r_0^2}\eta^4-\frac{137Q^3}{256r_0^3}\eta^6-\frac{13495Q^4}{16384r_0^4}\eta^8 \\
&- \frac{85601Q^5}{65536r_0^5}\eta^{10}+O\left(\eta^{11}\right)\Bigg). \qquad (6.8)
\end{aligned}
$$

正则化场通过从完整场中减去奇异场获得

$$
\Phi^{\ell}_{\rm orb,reg}=\Phi_\ell-B\,. \qquad (6.9)
$$

然而，对于 ℓ =0、1、2、3，所得的量仍然发散。这些多极矩对应的奇异行为为

$$
\begin{aligned}
&\Phi^{\ell=0}_{\rm orb,reg} \underset{\ell\to0}{\sim} -\frac{3qQ^5\eta^{10}}{r_0^6\ell}\,, \\
&\Phi^{\ell=1}_{\rm orb,reg} \underset{\ell\to1}{\sim} \frac{q}{\ell-1}\left(\frac{2Q^3\eta^6}{3r_0^4}-\frac{19Q^4\eta^8}{5r_0^5}+\frac{16229Q^5\eta^{10}}{2100r_0^6}\right), \\
&\Phi^{\ell=2}_{\rm orb,reg} \underset{\ell\to2}{\sim} \frac{q}{\ell-2}\left(\frac{32Q^4\eta^8}{15r_0^5}-\frac{2032Q^5\eta^{10}}{105r_0^6}\right), \\
&\Phi^{\ell=3}_{\rm orb,reg} \underset{\ell\to3}{\sim} \frac{q}{\ell-3}\frac{2734Q^5\eta^{10}}{525r_0^6}\,. \qquad (6.10)
\end{aligned}
$$

为达到 $\mathcal{O}(\eta^{10})$的精度，我们计算 $\ell \geq 4$的后牛顿模态求和，而缺失的 $\ell=0$，1、2、3贡献将单独计算，并通过类MST方法或折点方法加入结果中，这两种方法给出的公式等价。后牛顿解得到的贡献

因此为

$$
\begin{aligned}
\Phi^{PN}_{\rm orb,reg} &= \sum_{\ell=4}^{\infty}\Phi^{\ell}_{\rm orb,reg} \\
&= \frac{q}{Q}\Bigg[\frac{u^2}{21}-\frac{73u^3}{3696}+\left(\frac{563008939}{302702400}-\frac{3\pi^2}{16}\right)u^4 \\
&+ \left(\frac{15\pi^2}{64}-\frac{227852437}{110702592}\right)u^5 \\
&+ \left(-\frac{18792665465071}{14490969292800}-\frac{411\pi^2}{1024}\right)u^6+O\left(u^7\right)\Bigg], \qquad (6.11)
\end{aligned}
$$

其中，我们引入了无量纲变量 $u=Q/r_0$，并设定 $\eta=1$。

$\ell=0$，1，2，3 的贡献为

$$\begin{aligned}
\Phi^{\ell=0}_{\rm orb,reg} &= -\frac{q}{Q}\left[\frac{u^2}{4}+\frac{17u^3}{64}+\frac{71u^4}{256}+\frac{4553u^5}{16384}+\frac{16543u^6}{65536}\right]\\
&+ O\left(u^7\right),\\
\Phi^{\ell=1}_{\rm orb,reg} &= \frac{q}{Q}\left[\frac{3u^2}{20}-\frac{375u^3}{448}+u^4\left(-\frac{2}{3}\log(4ue^{2\gamma})\right.\right.\\
&+ \left.\frac{660521}{241920}\right)+u^5\left(\frac{19}{5}\log(4ue^{2\gamma})\right.\\
&- \left.\left.\frac{4505808767}{851558400}\right)-\frac{2}{3}\pi u^{11/2}\right.\\
&+ \left.u^6\left(-\frac{16229\log(4ue^{2\gamma})}{2100}-\frac{14609007485231}{1549836288000}\right)\right]\\
&+ O\left(u^7\right),\\
\Phi^{\ell=2}_{\rm orb,reg} &= \frac{q}{Q}\left[\frac{u^2}{28}+\frac{155u^3}{1344}-\frac{6870587u^4}{4435200}\right.\\
&+ u^5\left(-\frac{32}{15}\log(16ue^{2\gamma})+\frac{931740638683}{77491814400}\right)\\
&+ \left.u^6\left(\frac{2032}{105}\log\left(16ue^{2\gamma}\right)-\frac{3245104626823}{61993451520}\right)\right]\\
&+ O\left(u^7\right),\\
\Phi^{\ell=3}_{\rm orb,reg} &= \frac{q}{Q}\left[\frac{u^2}{60}+\frac{5u^3}{704}+\frac{4859977u^4}{26906880}-\frac{228533021221u^5}{77491814400}\right.\\
&+ u^6\left(-\frac{2734}{525}\log(4ue^{2\gamma})+\frac{1446260281189181}{41402769408000}\right.\\
&- \left.\left.\frac{729\log(3)}{70}\right)\right]+O\left(u^7\right).
\end{aligned}\tag{6.12}$$

综上，轨道上自场的最终结果为

$$\begin{aligned}
\Phi_{\rm orb} &= -\frac{q}{Q}\left[u^3+u^4\Big(\frac{3\pi^2}{16}-\frac{53}{18}+\frac{4}{3}\log(2)\right.\\
&+ \left.\frac{2}{3}\log(ue^{2\gamma})\Big)+u^5\Big(\frac{14}{15}\log(2)-\frac{521}{360}-\frac{15}{64}\pi^2\right.\\
&- \left.\frac{5}{3}\log(ue^{2\gamma})\Big)+\frac{2}{3}\pi u^{\frac{11}{2}}+u^6\Big(-\frac{77}{12}\log\left(e^{2\gamma}u\right)\right.\\
&+ \left.\frac{411\pi^2}{1024}+\frac{9539}{336}+\frac{729\log(3)}{70}-\frac{10823\log(2)}{210}\Big)\right]\\
&+ O\Big(u^7\Big).
\end{aligned}\tag{6.13}$$

用（5.13）中的变量 $\mathcal{Y}$ 表示，自场为

$$\begin{aligned}
\Phi_{\rm orb} &= -\frac{q}{Q}\left[\mathcal{Y}^3+\mathcal{Y}^4\left(-\frac{35}{18}+\frac{3\pi^2}{16}+\frac{2}{3}\log(4\mathcal{Y}e^{2\gamma})\right)\right.\\
&+ \mathcal{Y}^5\Big(-\frac{4123}{1080}+\frac{\pi^2}{64}+\frac{64\log(2)}{15}\\
&- \frac{7}{9}\log\left(4e^{2\gamma}\mathcal{Y}\right)\Big)+\mathcal{Y}^6\Big(\frac{7397}{336}+\frac{395\pi^2}{1024}\\
&- \frac{9952\log(2)}{315}+\frac{729\log(3)}{70}\\
&- \left.\frac{283}{36}\log\left(4e^{2\gamma}\mathcal{Y}\right)\Big)+\frac{2}{3}\pi\mathcal{Y}^{\frac{11}{2}}+O\left(\mathcal{Y}^7\right)\right].
\end{aligned}\tag{6.14}$$

VII. 标量自力

标量自力描述了粒子自身的正则标量场对其运动产生的反作用。在当前框架中，由于它是规范不变的，因此它代表一个具有物理意义且可与可观测量联系起来的量。其定义为

$$F_\alpha(x^\mu)=q\nabla_\alpha\Phi(x^\mu).\tag{7.1}$$

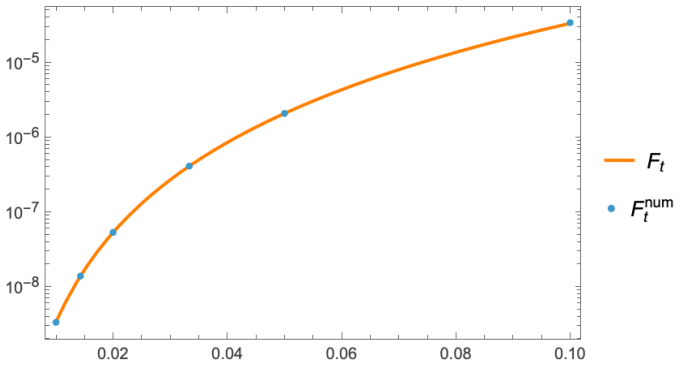
对 m 求和后，大 ℓ 时的发散部分由下式消去

$$F^{\rm reg}_\alpha=\sum_\ell\left[\frac{1}{2}\Big(F^\ell_{\alpha,R}+F^\ell_{\alpha,L}\Big)-B_\alpha\right],\tag{7.2}$$

其中 $F^\ell_{\alpha,\ R,\ L}$ 表示各模的极限 $r\to r_0^\pm$，而B_α 为正则化参数，其表达式为

$$\begin{aligned}
B_t &= B_\phi=0\\
B_r &= -\frac{q^2}{131072r_0^7}\Big[65536r_0^5+16384\eta^2Qr_0^4\\
&+ 5120\eta^4Q^2r_0^3-13056\eta^6Q^3r_0^2-43004\eta^8Q^4r_0\\
&- 93271\eta^{10}Q^5\Big]+O\left(\eta^{11}\right).
\end{aligned}\tag{7.3}$$

自力的正则化分量（其中考虑了 MST 类解的 $\ell=0$,1, 2, 3 项贡献）为



$\mathcal{Y}$	$F_{\text{数值}t}$	F_t	误差（%）
$\frac{1}{10}$	3.3739003×10^{-5}	3.3004323×10^{-5}	2.2
$\frac{1}{20}$	2.0644552×10^{-6}	2.0612469×10^{-6}	0.16
$\frac{1}{30}$	4.0712045×10^{-7}	4.0699831×10^{-7}	0.030
$\frac{1}{50}$	5.2830590×10^{-8}	5.2828240×10^{-8}	$4.4*10^{-3}$
$\frac{1}{70}$	1.3772312×10^{-8}	1.3772148×10^{-8}	$1.2*10^{-3}$
$\frac{1}{100}$	3.3119508×10^{-9}	3.3119411×10^{-9}	$3.0*10^{-4}$

图 2：将方程 (7.6) 中的 F_t 作为 $\mathcal{Y}$ 的函数与相同物理量的数值数据进行比较（在此图中记为 F_t^{num}）；后者出现在 [60] 的表 IV 中。

$$
\begin{aligned}
\frac{Q^2}{q^2}F_t &= \frac{u^4}{3}-\frac{5}{6}u^5+\frac{2\pi}{3}u^{\frac{11}{2}}-\frac{77}{24}u^6+\frac{2\pi}{15}u^{\frac{13}{2}}+u^7\left(\frac{25483}{2160}-\frac{2}{3}\log(4ue^{2\gamma})+\frac{4\pi^2}{9}\right)-\frac{1097\pi}{70}u^{\frac{15}{2}}+O\left(u^8\right),\\
\frac{Q^2}{q^2}F_r &= u^5\left(\frac{3\pi^2}{32}-\frac{2}{9}-\frac{2}{3}\log(4ue^{2\gamma})\right)+u^6\left(-\frac{9\pi^2}{128}-2\gamma+\frac{203}{15}-\frac{128}{15}\log(2)-\log(4ue^{2\gamma})\right)\\
&\quad-\frac{2\pi}{3}u^{\frac{13}{2}}+u^7\left(\frac{1263\pi^2}{2048}-\frac{30487}{1260}+\frac{2496}{35}\log(2)-\frac{2187}{70}\log(3)+\frac{181}{12}\log(4ue^{2\gamma})\right)+O\left(u^8\right),\\
F_\phi &= -\frac{F_t}{\Omega}\,.
\end{aligned}
\tag{7.4}
$$

为简化记号，下文省略上标“reg”。这里，我们令 $\eta=1$，并引入无量纲变量 $u=Q/r_0$。

作为使用 (7.4)、(5.12) 和 (5.16) 进行的一致性检验，涉及自力耗散分量 F_t 的下列恒等式成立

$$
F^t=\Gamma\left(\frac{dE^\infty}{dt}+\frac{dE^H}{dt}\right). \tag{7.5}
$$

用 (5.13) 中的变量 $\mathcal{Y}$ 表示，我们有

$$
\begin{aligned}
\frac{Q^2}{q^2}F_t &= \frac{\mathcal{Y}^4}{3}-\frac{7\mathcal{Y}^5}{18}+\frac{2}{3}\pi\mathcal{Y}^{11/2}-\frac{283\mathcal{Y}^6}{72}+\frac{61}{45}\pi\mathcal{Y}^{13/2}+\mathcal{Y}^7\left[\frac{80407}{19440}+\frac{4\pi^2}{9}-\frac{2}{3}\log(4\mathcal{Y}e^{2\gamma})\right]-\frac{16687\pi\mathcal{Y}^{15/2}}{1260}+O\left(\mathcal{Y}^8\right),\\
\frac{Q^2}{q^2}F_r &= \mathcal{Y}^5\left[-\frac{2}{9}+\frac{3\pi^2}{32}-\frac{2}{3}\log(4\mathcal{Y}e^{2\gamma})\right]+\mathcal{Y}^6\left[\frac{1747}{135}+\frac{11\pi^2}{128}-\frac{128\log(2)}{15}-\frac{19}{9}\log\left(4e^{2\gamma}\mathcal{Y}\right)\right]-\frac{2}{3}\pi\mathcal{Y}^{13/2}\\
&\quad+\mathcal{Y}^7\left[\frac{15473}{11340}+\frac{4525\pi^2}{6144}+\frac{5696\log(2)}{105}-\frac{2187\log(3)}{70}+\frac{1213}{108}\log\left(4e^{2\gamma}\mathcal{Y}\right)\right]+O\left(\mathcal{Y}^8\right).
\end{aligned}
\tag{7.6}
$$

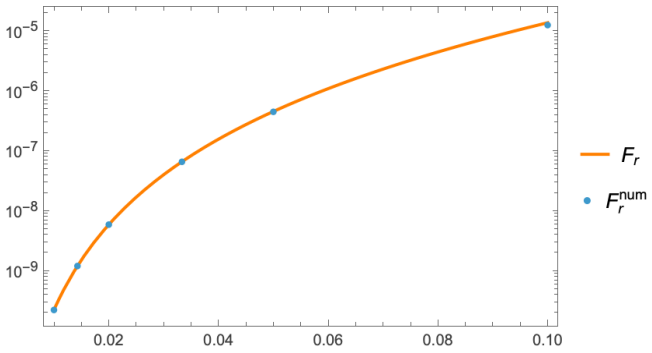
F_t 和 F_r 的解析结果分别与文献 [60] 的表 IV 和表 V 中报告的数值一致。这些比较结果见图 2 和图 3。

VIII. 总结

本文研究了在 eRN 时空中沿圆形测地线运动的带标量荷有质量粒子所发射的无质量标量波，以及该粒子所受的标量自力。我们的分析利用极端情形下径向波动方程的特殊数学结构，为在后牛顿展开范围内及其之外研究这些现象提供了系统的解析框架。

径向波动方程。

主要困难在于求解齐次径向方程，该方程具有双合流 Heun 方程的形式，通常不存在已知的显式闭式解。为克服这一障碍，我们提出了两种方法，以精确展开形式构造其解。第一种方法也称为扭结方法，受量子可积性理论启发；第二种则是针对双合流 Heun 方程进行适当调整的 MST 启发的方法，



$\mathcal{Y}$	$F_{\text{数值}r}$	F_r	误差（%）
$\frac{1}{10}$	1.2431961×10^{-5}	1.3610515×10^{-5}	9.5
$\frac{1}{20}$	4.4425415×10^{-7}	4.5053371×10^{-7}	1.4
$\frac{1}{30}$	6.5123254×10^{-8}	6.5410349×10^{-8}	0.44
$\frac{1}{50}$	5.8352086×10^{-9}	5.8409972×10^{-9}	0.10
$\frac{1}{70}$	1.1898372×10^{-9}	1.1902762×10^{-9}	0.037
$\frac{1}{100}$	$2.1981670 \times 10^{-10}$	$2.1984508 \times 10^{-10}$	0.013

图3：将方程（7.6）中的 F_r 作为 $\mathcal{Y}$ 的函数，与表V中 [60]给出的同一物理量的数值数据进行比较（该数据在图中记为 F_r^{num}）。

两种方法各有优势。这两种互补的表述为径向解提供了解析描述，并使我们能够系统地提取后牛顿展开。通过比较这两种表述，还可以建立 RAM 与 Floquet 指数之间的简明关系，而这一关系在扭结方法中显而易见。

我们运用这一框架计算了标量波传向无穷远和视界的能量通量。此外，我们还计算了沿圆形测地线的正则化标量场。所得解析通量与文献中的数值数据高度吻合。我们还得到了标量自力各分量的后牛顿表达式，发现它们与 [60] 中相应的数值结果高度一致。

与参考文献 [59]，中的分析相比，本研究旨在为研究 eRN 时空中的标量自力提供一种全新且互补的方法框架。

eRN 问题的另一个有用特征是其 CT对称性，它将时空的视界区域与渐近区域联系起来。这种对称性体现在径向解的结构中，并为其解析构造（3.68）提供了额外的一致性检验。

本文提出的方法为进一步研究开辟了多条途径。特别是，扭结方法可按 [53]中的表述推广至更一般的轨道构型，并用于研究辐射可观测量和标量自力的高阶后牛顿贡献。更广泛地说，扭结方法与受MST启发的方法之间的一致性表明，这些技术或可为其他径向方程具有类 Heun 形式的黑洞几何中的波动和自力问题提供有用的解析工具。扭结方法的一个显著优势是，它仅以一个超几何函数的形式表示（入射解对应 (3.64)、(3.65)，出射解对应 (3.66)、(3.67)），而 MST 形式体系则涉及无穷多个平移超几何函数构成的级数。因此，通过对这一闭式超几何表达式积分，直接计算能量损失 (5.8)、(5.9)，从而避免展开被积函数，是未来研究的一条有前景的途径。

本文的所有主要结果，包括辐射通量、自力，以及 $\ell = 0, \ldots, 5$ 阶的 $O(\eta^{10})$ 后牛顿展开 In 解和 Up 解，都汇集在作为辅助文件提供的 Mathematica笔记本中。

附录A： $R_{\text{in}}(r)$ 和 $R_{\text{up}}(r)$的后牛顿展开

在本附录中，我们给出 $R_{\text{in}}(r)$ 和 $R_{\text{up}}(r)$ 在 $\ell = 0,1,2$ 阶的后牛顿展开。这些展开分别通过扭结方法（第 IIID 小节）和 MST方法（第 III F 和第 IIIG 小节）的公式获得。对于前者，我们使用了（3.64）—（3.67）；对于后者，则使用了（3.80）和（3.100）。
由这两种方法得到的展开完全一致，共同结果如下所列：

$$
\begin{aligned}
R_{\rm in}^{(\ell=0)}(r) &= \frac{1}{2}\left(3\sqrt{5}-5\right)+\eta^2\Big[\frac{1}{12}\left(5-3\sqrt{5}\right)r^2\omega^2\Big]+\eta^3\Big[-\frac{10i\left(7+3\sqrt{5}+2\left(9+4\sqrt{5}\right)\gamma\right)Q\omega}{105+47\sqrt{5}}\Big]\\
&+\eta^4\Big[\frac{1}{240}\left(3\sqrt{5}-5\right)r\omega^2\left(r^3\omega^2-200Q\right)\Big]+\eta^5\Big[\frac{5iQ\omega\left(6\left(9+4\sqrt{5}\right)Q+\left(7+3\sqrt{5}+2\left(9+4\sqrt{5}\right)\gamma\right)r^3\omega^2\right)}{3\left(105+47\sqrt{5}\right)r}\Big]\\
&+\eta^6\Big[\frac{60\left(2889+1292\sqrt{5}\right)Q^2\omega^2\log\left(\frac{2Q^2\omega}{r}\right)}{33825+15127\sqrt{5}}-\frac{1}{504\left(33825+15127\sqrt{5}\right)}\Big(168\Big(-103304-46199\sqrt{5}\\
&-60\left(6460+2889\sqrt{5}\right)\gamma+60\left(2889+1292\sqrt{5}\right)\gamma^2-10\left(2889+1292\sqrt{5}\right)\pi^2\Big)Q^2\omega^2\\
&-952\left(2889+1292\sqrt{5}\right)Qr^3\omega^4+\left(2889+1292\sqrt{5}\right)r^6\omega^6\Big)\Big]+O\left(\eta^7\right)\\
R_{\rm up}^{(\ell=0)}(r) &= \frac{i(15+5\sqrt{5})}{(30+14\sqrt{5})r\omega}+\frac{\eta}{4}(5-3\sqrt{5})-\eta^2\frac{5i\left(3+\sqrt{5}\right)\left(r^3\omega^2-2Q\right)}{4\left(15+7\sqrt{5}\right)r^2\omega}+\eta^3\frac{60\left(2+\left(3+\sqrt{5}\right)\gamma\right)Q+5\left(3+\sqrt{5}\right)r^3\omega^2}{12\left(15+7\sqrt{5}\right)r}\\
&+\eta^4\Big[\frac{5i\left(24\left(3+\sqrt{5}\right)Q^2-12\left(-35-9\sqrt{5}+4\left(3+\sqrt{5}\right)\gamma-4i\left(3+\sqrt{5}\right)\pi\right)Qr^3\omega^2+\left(3+\sqrt{5}\right)r^6\omega^4\right)}{48\left(15+7\sqrt{5}\right)r^3\omega}\\
&-\frac{10i\left(3+\sqrt{5}\right)Q\omega\log(2r\omega)}{15+7\sqrt{5}}\Big]-\frac{\eta^5}{48\left(15+7\sqrt{5}\right)r^2}\Big[-240\left(2+\left(3+\sqrt{5}\right)\gamma\right)Q^2\\
&+40\left(-9-5\sqrt{5}+3\left(3+\sqrt{5}\right)\gamma\right)Qr^3\omega^2+\left(3+\sqrt{5}\right)r^6\omega^4\Big]+\eta^6\Big[\frac{20i\left(20+9\sqrt{5}\right)Q\omega\left(9Q+r^3\omega^2\right)\log(2r\omega)}{3\left(15+7\sqrt{5}\right)^2r}\\
&+\frac{1}{72\left(15+7\sqrt{5}\right)^2r^4\omega}\Big(720i\left(20+9\sqrt{5}\right)Q^3+24\Big(i\left(2055+889\sqrt{5}\right)+300i\left(9+4\sqrt{5}\right)\gamma-60i\left(20+9\sqrt{5}\right)\gamma^2\\
&+30\left(105+47\sqrt{5}\right)\pi+10i\left(20+9\sqrt{5}\right)\pi^2\Big)Q^2r^3\omega^2+10\Big(-i\left(1640+741\sqrt{5}\right)+24i\left(20+9\sqrt{5}\right)\gamma\\
&+24\left(20+9\sqrt{5}\right)\pi\Big)Qr^6\omega^4-i\left(20+9\sqrt{5}\right)r^9\omega^6\Big)\Big]+O\left(\eta^7\right)\\
R_{\rm in}^{(\ell=1)}(r) &= 2r+\eta^2\Big[-2Q-\frac{1}{5}r^3\omega^2\Big]-4i\eta^3(\gamma-1)Qr\omega+\eta^4\Big[\frac{r^5\omega^4}{140}-\frac{7}{5}Qr^2\omega^2\Big]+\eta^5\Big[\frac{2}{5}i(\gamma-1)Q\omega\left(10Q+r^3\omega^2\right)\Big]\\
&-\eta^6\frac{r\omega^2\left(-30240Q^2\log\left(\frac{2Q^2\omega}{r}\right)+504\left(189+60(\gamma-3)\gamma-10\pi^2\right)Q^2-906Qr^3\omega^2+r^6\omega^4\right)}{7560}+O\left(\eta^7\right)\\
R_{\rm up}^{(\ell=1)}(r) &= -\frac{i}{4r^2\omega^3}-\eta^2\frac{i\left(4Q+r^3\omega^2\right)}{8r^3\omega^3}+\eta^3\Big[\frac{r}{12}-\frac{(\gamma-1)Q}{2r^2\omega^2}\Big]+\eta^4\Big[\frac{i\left(-24Q^2-16Qr^3\omega^2+r^6\omega^4\right)}{32r^4\omega^3}\Big]\\
&+\eta^5\Big[-\frac{(\gamma-1)Q^2}{r^3\omega^2}+\left(\frac{1}{6}-\frac{\gamma}{4}\right)Q-\frac{1}{120}r^3\omega^2\Big]+\eta^6\Big[\left(\frac{1}{3}iQr\omega-\frac{iQ^2}{2r^2\omega}\right)\log(2r\omega)\\
&+\frac{i\left(-576Q^3+48(18+6(\gamma-3)\gamma-\pi(\pi-6i))Q^2r^3\omega^2+4(-61+24\gamma-24i\pi)Qr^6\omega^4-r^9\omega^6\right)}{576r^5\omega^3}\Big]+O\left(\eta^7\right)\\
R_{\rm in}^{(\ell=2)}(r) &= 12r^2-\frac{6}{7}\eta^2\left(28Qr+r^4\omega^2\right)-12i\eta^3(-3+2\gamma)Qr^2\omega\\
&+\eta^4\left(12Q^2-\frac{32}{7}Qr^3\omega^2+\frac{1}{42}r^6\omega^4\right)+\frac{6}{7}i\eta^5(-3+2\gamma)Qr\omega\left(28Q+r^3\omega^2\right)+\\
&+\frac{1}{13860}\eta^6r^2\omega^2\Big[-1584\Big(906+42\gamma(-18+5\gamma)-35\pi^2\Big)Q^2+4620Qr^3\omega^2-5r^6\omega^4+199584Q^2\ln\left(\frac{2Q^2\omega}{r}\right)\Big]-\\
&-\frac{1}{42}i\eta^7(-3+2\gamma)Q\omega\left(504Q^2-192Qr^3\omega^2+r^6\omega^4\right)+\\
&+\eta^8\Big[\frac{4}{35}\Big(2193+84\gamma(-18+5\gamma)-70\pi^2\Big)Q^3r\omega^2+\frac{1}{1470}\Big(12805+504\gamma(-18+5\gamma)-420\pi^2\Big)Q^2r^4\omega^4-\\
&-\frac{148}{17325}Qr^7\omega^6+\frac{1}{288288}r^{10}\omega^8-\frac{36}{35}Q^2r\omega^2\left(28Q+r^3\omega^2\right)\ln\left(\frac{2Q^2\omega}{r}\right)\Big]+\mathcal{O}\left(\eta^9\right)
\end{aligned}
\tag{A1}
$$

附录 B：PN 解

$$
\begin{aligned}
R^{\ell}_{\rm in,PN}(r) \;=\; & r^{\ell} - \eta^2 \frac{r^{\ell-1}\left(4Q\ell^2+6Q\ell+r^3\omega^2\right)}{2(2\ell+3)} + \frac{\eta^4}{8(\ell+1)(2\ell+3)(2\ell+5)}\Bigg[r^{\ell-2}\left(\ell\left(-60Q^2-180Qr^3\omega^2+r^6\omega^4\right)\right. \\
& + \left. 16Q^2\ell^5+64Q^2\ell^4-200Qr^3\omega^2+4Q\ell^3\left(11Q+2r^3\omega^2\right)-4Q\ell^2\left(16Q+5r^3\omega^2\right)+r^6\omega^4\right)\Bigg] \\
& + \eta^6\Bigg\{ -\frac{1}{48(\ell+1)(\ell+2)(2\ell+1)^2(2\ell+3)(2\ell+5)(2\ell+7)}\Bigg[r^{\ell-3}\left(-48\ell^6\left(565Q^3-Qr^6\omega^4\right)+256Q^3\ell^{10}\right. \\
& + 2176Q^3\ell^9+5248Q^3\ell^8-2496Q^3\ell^7-60480Q^2r^3\omega^2+288Q^2r^3\omega^2\left(16\ell^6+176\ell^5+760\ell^4+1640\ell^3+1849\ell^2\right. \\
& + \left. 1019\ell+210\right)\log(r)-24Q\ell^5\left(1349Q^2+96Qr^3\omega^2+9r^6\omega^4\right)+4\ell^4\left(908Q^3-6048Q^2r^3\omega^2-1009Qr^6\omega^4+r^9\omega^6\right) \\
& + 2\ell^3\left(14668Q^3-48672Q^2r^3\omega^2-6989Qr^6\omega^4+8r^9\omega^6\right)+\ell^2\left(17984Q^3-187488Q^2r^3\omega^2-18690Qr^6\omega^4+21r^9\omega^6\right) \\
& + \left.\ell\left(3360Q^3-172512Q^2r^3\omega^2-10148Qr^6\omega^4+11r^9\omega^6\right)-1904Qr^6\omega^4+2r^9\omega^6\right)\Bigg]\Bigg\}+O\left(\eta^7\right)
\end{aligned}
$$

$R^{\ell}_{\rm up,\ PN}(r) \;=\; R^{-\ell-1}$ 在, PN(r) (B1)

附录 C：计算 $P_{(n)0}(y)$、$P_1^{(n)}(y)$ 以及 $P_j^{(n)}(y)$

在本附录中，我们希望证明该方程

$$
\begin{aligned}
& 2\Pi^{(0)}_{<}(y)\Pi^{(n)}_{<}(y)+\tfrac{d}{dy}\Pi^{(n)}_{<}(y) \\
& +\sum_{m=1}^{n-1}\Pi^{(m)}_{<}(y)\Pi^{(n-m)}_{<}(y)=V^{(n)}_{<}(y)
\end{aligned}
\qquad \text{(C1)}
$$

以该式作为解

$$
\Pi^{(n)}_{<}(y)=\frac{d}{dy}\left[P^{(n)}_0(y)+\sum_{j=1}^{n}P^{(n)}_j(y)\frac{d^{j-1}}{dy^{j-1}}\Pi^{(0)}_{<}(y)\right]. \qquad \text{(C2)}
$$

）一般而言，利用（3.46）可以清楚地看出，$\Pi^{(n)}_{<}$ 的 n 阶导数可以用其幂表示为

$$
\frac{d^n\Pi^{(0)}_{<}(y)}{dy^n}=a_{n,n+1}\left[\Pi^{(0)}_{<}(y)\right]^{n+1}+\sum_{k=0}^{n-1}a_{n,k}\left[\Pi^{(0)}_{<}(y)\right]^{k} \qquad \text{(C3)}
$$

其中系数 $a_{n,\ k}$ 可通过以下递推方程计算

$$
\begin{aligned}
a_{n+1,j}=a'_{n,j}-(j-1)a_{n,j-1}+(j+1)V^{(0)}_{<}(y)a_{n,j+1} \\
j=0,1,2,\ldots,n+2
\end{aligned}
\qquad \text{(C4)}
$$

满足初始条件 $a_{1,0}\;=\;V^{(0)}_{<}(y)$ 和 $a_{1,2}\;=\;-1$。利用这一点，我们终于可以将 (C1) 写为

$$
\begin{aligned}
& \mathcal{A}_{n,n+2}[\Pi^{(0)}_{<}]^{n+2}+\mathcal{A}_{n,n+1}[\Pi^{(0)}_{<}]^{n+1}+\mathcal{A}_{n,n}[\Pi^{(0)}_{<}]^{n}+\cdots+ \\
& +\mathcal{A}_{n,1}[\Pi^{(0)}_{<}]+\mathcal{A}_{n,0}=V^{(n)}_{<}(y)
\end{aligned}
\qquad \text{(C5)}
$$

此时，我们可以设定 $\mathcal{A}_{n,m}=0$ 和 $\mathcal{A}_{n,0}=V^{(n)}_{<}(y)$，从而找出各种 $P^{(n)}_m$ 之间的一些关系。例如，对于 $n=1$，我们得到

$$
P^{(1)}_0(y)=-\frac{1}{2}\frac{dP^{(1)}_1(y)}{dy} \qquad \text{(C6)}
$$

and

$$
-\frac{1}{2}P^{(1)'''}_1(y)+2V^{(0)}_{<}(y)P^{(1)'}_1(y)+V^{(0)'}_{<}(y)P^{(1)}_1(y)=V^{(1)}_{<}(y) \qquad \text{(C7)}
$$

具有多项式解

$$
P^{(1)}_1(y)=\frac{4q_1}{4k^2-1}e^y \qquad \text{(C8)}
$$

对于 $n=2$，我们发现

$$
P^{(2)}_2(y) \;=\; \frac{P^{(1)}_1(y)^2}{2!} \qquad \text{(C9)}
$$

$$
P^{(2)}_0(y) \;=\; \frac{1}{2}\left(P^{(1)'}_1(y)^2-2P^{(2)'}_1(y)\right) \qquad \text{(C10)}
$$

and

$$
\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}P^{(2)'''}_1(y)+2V^{(0)}_{<}(y)P^{(2)'}_1(y)+V^{(0)'}_{<}(y)P^{(2)}_1(y)= \\
& =V^{(2)}_{<}(y)-F_2(y)
\end{aligned}
\qquad \text{(C11)}
$$

with

$$
\begin{aligned}
& F_2(y)=\frac{1}{2}P^{(1)}_1(y)^2V^{(0)''}_{<}(y)+P^{(1)}_1(y)'^2V^{(0)}_{<}(y)+ \\
& +2P^{(1)}_1(y)P^{(1)'}_1(y)V^{(0)'}_{<}(y)+\frac{3}{4}P^{(1)''}_1(y)^2+\frac{1}{2}P^{(1)'}_1(y)P^{(1)'''}_1(y)
\end{aligned}
\qquad \text{(C12)}
$$

具有多项式解

$$P_1^{(2)}(y) = \frac{\left(-3-48k^4+28q_1^2+8k^2(3+10q_1^2)\right)q_2}{(-1+k^2)(-1+4k^2)^3}e^y + \\ + \frac{1+16k^4-20q_1^2-8k^2(1+2q_1^2)}{4(1-4k^2)^2(-1+k^2)}e^{2y} \tag{C13}$$

对于 $n=3$，我们发现

$$\begin{aligned} P_3^{(3)}(y) &= \frac{P_1^{(1)}(y)^3}{3!} \\ P_2^{(3)}(y) &= P_1^{(1)}(y)P_1^{(2)}(y) \\ P_0^{(3)}(y) &= \frac{1}{6}\left(-\left(P_1^{(1)\prime}(y)\right)^3 + 3P_1^{(1)\prime}(y)P_1^{(2)\prime}(y) - 3P_1^{(3)\prime}(y)\right) \end{aligned} \tag{C14}$$

其中，$P_1^{(3)}(y)$ 满足该微分方程

$$-\frac{1}{2}P_1^{(3)\prime\prime\prime}(y) + 2V_<^{(0)}(y)P_1^{(3)\prime}(y) + V_<^{(0)\prime}(y)P_1^{(3)}(y) = \\ = V_<^{(3)}(y) - F_3(y) \tag{C15}$$

其中，$F_3(y)$ 根据此前计算得到的$P_1^{(2)}(y)$ $P_{(1)\,1}(y)$ 和 $V_{(0)<}(y)$ 计算得到。沿用情形 $n=1,2,3$ 中相同的策略，我们可以递归计算 $P_1^{(n)}(y)$，然后重构所有其他多项式 $P_j^{(n)}(y)$ 和 $P_{(n)\,0}(y)$，如 (C6)、(C9)、(C10)、(C14) 中所示。截至 $n=4$ 所获得的显式结果表明，多项式$P_m^{(n)}(y)$ 与 $P_{(l)\,1}(y)$ 之间存在以下组合关系：

$$P_m^{(n)}(y) := \frac{1}{m!}\hat{B}_{n,m}\left(P_1^{(1)}(y), P_1^{(2)}(y), \ldots, P_1^{(n-m+1)}(y)\right), \qquad 1 \le m \le n\,, \tag{C16}$$

$$P_0^{(n)}(y) := -\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n}\frac{(-1)^{m+1}}{m}\hat{B}_{n,m}\left(P_1^{(1)\prime}(y), P_1^{(2)\prime}(y), \ldots, P_1^{(n-m+1)\prime}(y)\right)\,. \tag{C17}$$

在（C16）—（C17）中，$\hat{}B_{n,\,m}$ 是所谓的普通贝尔多项式 [71]。

附录 D：$\ell=0$的黎卡提方程解

如果我们在级数形式（3.33）中寻找 Riccati 方程（3.30）的一般（$2\pi i$ 周期）解，则必须在最低阶满足

$$(\Pi_0^{(\ell=0)})'(y) + (\Pi_0^{(\ell=0)}(y))^2 = \frac{1}{4} \tag{D1}$$

该方程允许一般的 $2\pi i$ 周期解

$$\Pi_0^{(\ell=0)}(y) = \frac{1}{2}\left(\frac{e^y - e^{y_0}}{e^y + e^{y_0}}\right), \tag{D2}$$

其中 y_0 是一个积分常数。在（ωQ）阶[2]，我们有

$$(\Pi_2^{(\ell=0)})'(y) + 2\Pi_0^{(\ell=0)}(y)\Pi_2^{(\ell=0)}(y) = -W(y) \tag{D3}$$

其解为

$$\Pi_2^{(\ell=0)}(y) = \frac{1}{I(y)}\left[C_2 - \int_{y_0}^{y} I(s)W(s)\,ds\right], \tag{D4}$$

其中 C_2 是一个积分常数，且

$$I(y) = \exp\left(2\int_{y_0}^{y}\Pi_0^{(\ell=0)}(s)\,ds\right) = \frac{(e^y + e^{y_0})^2}{4e^{y+y_0}} \tag{D5}$$

由于 $I(y)$是 $2\pi i$-周期的，解 $\Pi_2^{(\ell=0)}(y)$为 $2\pi i$-周期的充要条件是

$$\int_y^{y+2\pi i} I(s)W(s)\,ds = 0\,, \tag{D6}$$

由此可得积分常数 y_0 的两个取值

$$e^{y_0} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}\,, \tag{D7}$$

它们对应两个不同的 Floquet 解。
在一般阶数（ωQ）^{2n} 下，我们有

$$\Pi_{2n}^{(\ell=0)\prime}(y) + 2\Pi_0^{(\ell=0)}(y)\Pi_{2n}^{(\ell=0)}(y) = G_{2n}(y), \tag{D8}$$

其中，前几个驱动项为

$$G_2(y) = -W(y), \tag{D9}$$
$$G_4(y) = -\Pi_2(y)^2, \tag{D10}$$
$$G_6(y) = -2\Pi_2(y)\Pi_4(y). \tag{D11}$$

对 (D8) 积分可得

$$\Pi_{2n}^{(\ell=0)}(y) = \frac{1}{I(y)}\left[C_{2n} + \int_{y_0}^{y} I(s)G_{2n}(s)\,ds\right], \quad \text{(D12)}$$

通过在下一阶施加周期性条件， C_{2n} 被唯一确定

$$\int_{y}^{y+2\pi i} I(s)G_{2n+2}(s)\,ds = 0. \quad \text{(D13)}$$

考虑到 $G_{2n}(y)$ 的结构，我们可以将 (D12) 改写为形式 (3.36)。

ˆ附录 E： $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{S}$

（3.61）和（3.62）在 $n = 1{,}2$ 时为

$$\mathcal{S}_1 = \frac{2q_1}{1-4k^2}e^{y} \quad \text{(E1)}$$

$$\mathcal{S}_2 = \frac{8q_1^2}{(4k^2-1)^2} + \frac{\left[3+4q_1^2+16k^4(3+8q_1^2)-24k^2(1+10q_1^2)\right]q_2}{2(k^2-1)(4k^2-1)^3}\,e^{y} + \frac{1+4q_1^2+k^2(8q_1^2-4)}{4(k^2-1)(4k^2-1)}\,e^{2y} \quad \text{(E2)}$$

and

$$\hat{\mathcal{S}}_1 = -\frac{4q_1}{1-4k^2}e^{y} \quad \text{(E3)}$$

$$\hat{\mathcal{S}}_2 = \frac{\left[-3-48k^4+28q_1^2+8k^2(3+10q_1^2)\right]q_2}{(k^2-1)(4k^2-1)^3}\,e^{y} - \frac{1-4k^2+12q_1^2}{4(k^2-1)(4k^2-1)}\,e^{2y} \quad \text{(E4)}$$

致谢

我们谨向 D. Bini、D. Gregori、A. Ger- alico、T. Manton、A. Marcian`o、S. de Jes´us Quir´os Araya、C.-H. Shen 和 A. Tokareva 致谢，感谢他们提出的宝贵讨论和建议。本研究部分得到了以下资助：GAST（INFN）、COST 行动 CaL-ISTA CA21109 和 Theory-Challenges CA22113“理论物理学的基本挑战”、MSCA CaLIGOLA 2021-SE-01-101086123、欧盟委员会网络 Gatis，以及美国国家科学基金会 NSF PHY-1748958 号资助。G.D.R. 感谢获准加入意大利国家数学物理组（GNFM）及意大利国家高等数学研究所（INDAM）。GDR 感谢台湾大学（NTU）在本研究部分工作完成期间给予的热情接待。FO 感谢欧盟下一代基金通过意大利大学与研究部（MUR）依据 PNRR 第四使命、第二组成部分、第三项投资（M.D. 630/2024）提供的资助，并感谢乌普萨拉大学在本研究工作完成期间给予的热情接待。GDR、DF 和 MR 感谢“精确技术及其应用——InTropea26”研讨会的组织者和与会者营造了激励人心的氛围，推动本研究的开展。

[1] L. Barack, 《Classical and Quantum Gravity》**26**, 213001（2009）, 0908.1664。[2] Y. Mino、M. Sasaki 和 T. Tanaka, 《物理评论D》**55**, 3457（1997）, 9606018, gr-qc/。[3] T. C. Quinn 和 R. M. Wald, 《物理评论D》**56**, 3381（1997）, gr-qc/9610053。[4] T. C. Quinn, 《物理评论D》**62**, 064029（2000）, gr-qc/0005030。[5] L. Barack、Y. Mino、H. Nakano、A. Ori 和 M. Sasaki, 《物理评论快报》**88**, 091101（2002）, gr-qc/0111001。[6] L. Barack 和 A. Ori, 《物理评论D》**64**, 124003（2001）, gr-qc/0107056。[7] S. L. Detweiler 和 B. F. Whiting, 《物理评论D》**67**, 024025（2003）, gr-qc/0202086。[8] E. Poisson, 《相对论生活评论》**7**, 6（2004）, gr-qc/0306052。[9] L. M. Burko, 《Classical and Quantum Gravity》**17**, 227（2000）, gr-qc/9911042。[10] L. Barack, 《物理评论D》**62**, 084027（2000）, gr-qc/0005042。[11] L. M. Burko, 《物理评论快报》**84**, 4529（2000）, gr-qc/0003074。[12] A. G. Wiseman, 《物理评论D》**61**, 084014（2000）, gr-qc/0001025。[13] H. Nakano、Y. Mino 和 M. Sasaki, 《理论物理进展》**106**, 339（2001）, gr-qc/0104012。[14] L. M. Burko 和 Y. T. Liu, 《物理评论D》**64**, 024006（2001）, gr-qc/0103008。[15] L. Barack 和 A. Ori, 《物理评论D》**66**, 084022（2002）, gr-qc/0204093。[16] S. L. Detweiler、E. Messaritaki 和 B. F. Whiting, 《物理评论D》**67**, 104016（2003）, gr-qc/0205079。[17] H. Nakano、N. Sago 和 M. Sasaki, 《物理评论D》**68**, 124003（2003）, gr-qc/0308027。[18] W. Hikida、S. Jhingan、H. Nakano、N. Sago、M. Sasaki 和 T. Tanaka, 《理论物理进展》**111**, 821（2004）, gr-qc/0308068。[19] L. M. Diaz-Rivera、E. Messaritaki、B. F. Whiting 和 S. L. Detweiler, 《物理评论D》**70**, 124018（2004）, gr-qc/0410011。[20] W. Hikida、H. Nakano 和 M. Sasaki, 《Classical and Quantum Gravity》**22**, S753（2005）, gr-qc/0411150。[21] A. C. Ottewill 和 B. Wardell, 《物理评论D》**77**, 104002（2008）, 0711.2469。[22] R. Haas, 《物理评论D》**75**, 124011（2007）, 0704.0797。[23] T. Damour, 《物理评论D》**81**, 024017（2010）, 0910.5533。[24] L. Barack 和 N. Sago, 《物理评论D》**81**, 084021（2010）, 1002.2386。[25] N. Warburton 和 L. Barack, 《物理评论D》**81**, 084039（2010）, 1003.1860。[26] B. Wardell、I. Vega、J. Thornburg 和 P. Diener, 《物理

评论D》85，104044（2012），1112.6355。[27] A. C. Ottewill 和 P. Taylor，《物理评论D》86，024036（2012），1205.5587。[28] I. Vega、B. Wardell、P. Diener、S. Cupp 和 R. Haas，《物理评论D》88，084021（2013），1307.3476。[29] S. Isoyama、L. Barack、S. R. Dolan、A. Le Tiec、H. Nakano、A. G. Shah、T. Tanaka 和 N. Warburton，《物理评论快报》113，161101（2014），1404.6133。[30] D. Bini、G. Di Russo 和 A. Geralico，《物理评论 D 》112，064077 （ 2025 ），2508.12046。[31] D. Bini 和 G. Di Russo（2026），2601.11186。[32] D. Bini 和 G. Di Russo（2026），2604.01699。[33] G. Di Russo 和 D. Bini，《物理评论D》114，064069（2026），2605.08798。[34] L. Blanchet，《相对论生活评论》17，2（2014），1310.1528。[35] M. Bianchi、D. Bini 和 G. Di Russo，《物理评论D》110，084077（2024），2407.10868。[36] M. Bianchi、D. Bini 和 G. Di Russo，《物理评论D》111，044017（2025），2411.19612。[37] G. Di Russo、M. Bianchi 和 D. Bini，《物理评论D》112，024002（2025），2502.21040。[38] M. Bianchi、D. Bini 和 G. Di Russo，《物理评论D》112，044008（2025），2506.04876。[39] D. Bini 和 G. Di Russo，《物理评论D》112，064008（2025），2506.14442。[40] M. Bianchi、D. Bini 和 G. Di Russo，《物理评论D》113，044028（2026），2511.01402。[41] I. Bah 和 P. Heidmann，《高能物理学报》09，147（2021），2012.13407。[42]A. Dima、P. Heidmann、M. Melis、P. Pani 和 G. Patashuri，《物理评论D》112，124056（2025），2509.18245。[43] D. Bini、G. Di Russo 和 V. Fantini，《物理评论D》114，064035（2026），2607.08280。[44] D. Consoli、F. Fucito、J. F. Morales 和 R. Poghossian，《高能物理学报》12，115（2022），2206.09437。[45] S. Mano、H. Suzuki 和 E. Takasugi，《理论物理进展》95，1079（1996），gr-qc/9603020。[46] M. Sasaki 和 H. Tagoshi，《相对论生活评论》6，6（2003），gr-qc/0306120。[47] A. Cipriani、G. Di Russo、F. Fucito、J. F. Morales、H. Poghosyan 和 R. Poghossian，《SciPost物理学》19，057（2025），2501.19257。[48] A. Cipriani、F. Fucito、C. Heissenberg、J. F. Morales 和 R. Russo（2026），2602.05766。[49] R. Fujita，《理论物理进展》128，971（2012），1211.5535。[50] D. Fioravanti 和 D. Gregori，《物理学快报B》804，135376（2020），1908.08030。[51] D. Fioravanti 和 D. Gregori，《物理评论D》112，125020（2025），2112.11434。[52] D. Fioravanti 和 M. Rossi（2024），2412.21148。[53] D. Fioravanti 和 M. Rossi（2025），2508.19960。[54] D. Bini、A. Geralico 和 R. Ruffini，《物理学快报A》360，515 2007 0608139（），gr-qc/。[55] D. Bini、A. Geralico 和 R. Ruffini，《物理评论D》75，044012 2007 0609041（），gr-qc/。[56] D. Bini、A. Geralico 和 R. Ruffini，《新西门托B》122，219 2007（）。[57] D. Bini、A. Geralico 和 R. Ruffini，《物理评论D》77，064020 2008 1408 4596（），..。[58] D. Bini、A. Geralico 和 R. Ruffini，《现代物理学国际期刊A》23，1226（2008）。[59] D. Bini、G. Carvalho 和 A. Geralico，《物理评论D》94，124028 2016 1610 02235（），..。[60] J. Castillo、I. Vega 和 B. Wardell，《物理评论D》98，024024 2018 1804 09224（），..。[61] W. E. Couch 和 R. J. Torrence，《广义相对论与引力》16，789 1984（）。[62] M. Cvetic、C. N. Pope 和 A. Saha，《高能物理学报》09，188（2021），2102.02826。[63] M. Bianchi 和 G. Di Russo，《物理评论D》105，126007（2022），2110.09579。[64] M. Bianchi 和 G. Di Russo，《物理评论D》106，086009（2022），2203.14900。[65] M. Akhond、M. Bianchi、A. Cristofaro 和 F. Riccioni（2026），2604.27815。[66] S. Chandrasekhar，*The Mathematical Theory of Black Holes*（牛津大学出版社，1998），ISBN 9780198503705，URL https://doi.org/10.1093/oso/9780198503705.001.0001。[67] M. Cvetic、C. N. Pope 和 A. Saha，《物理评论D》102，086007 2020 2008 04944（），..。[68] N. A. Nekrasov 和 S. L. Shatashvili，第265–289页（2010），0908.4052。[69] D. Fioravanti、M. Rossi 和 F. Olivi（2026），即将出版。[70] D. Fioravanti、M. Rossi 和 F. Olivi（2026），即将出版。[71] L. Comtet，*Advanced Combinatorics: The Art of Finite and Infinite Expansions*（施普林格荷兰，1974），ISBN 9789027704412。