arXiv:2611.33125v1 [math.AT] 24 Nov 2026

预因子化代数的非形式性

COLINE EMPRIN 和 ALEX TAKEDA

Abstract. 我们在 $\mathbb{R}^m$ 上的局部常值预因子化代数的上同调上构造了一个泊松括号，该括号在每个维度 $m \geqslant 2$中都提供了形式性的障碍。我们的构造将形式性的带色障碍序列与链接球面结合起来，并推广了 Bruinsma、Schenkel 和 Vicedo 的二维括号。借助这一构造，我们将他们关于李代数因子化包络的非形式性定理扩展到了所有高维。我们还为李代数的因子化包络、它们的紧化以及到 L_∞-代数的推广、自由 BF 型理论、高阶阿贝尔 Chern–Simons 理论及其紧化建立了新的非形式性结果。

Contents

1. 引言 1
2. 形式性的障碍序列 4
3. 局部常值预因子化代数 7
4. 因子化包络 17
5. 对称配对 25
参考文献 30

1. Introduction

预因子化代数是与流形相关联的一类代数对象，旨在为量子场论的局部可观测量提供一个框架 [CG17，CG21]。这些对象将这样一种理念公理化：量子场论为时空中的每个区域赋予可观测量，而互不相交区域之间的包含关系则产生相应可观测量空间之间的运算。在此处考虑的情形中，这些区域是光滑嵌入的开圆盘，而预因子化代数 $\mathfrak{F}$为每个开圆盘赋予一个上链复形 $\mathfrak{F}(D)$ D，并配备相容的运算，将支集位于互不相交圆盘中的可观测量组合成支集位于较大圆盘中的可观测量。由上链复形给出的可观测量空间自然地出现在量子场论量子化的 Batalin–Vilkovisky 形式中，其中微分可以反映规范对称性的存在。

等价地，我们考虑某个带色运算子上的上链复形中的代数 $\mathcal{P}_M$，该运算子编码了嵌入于 M 中的圆盘构型。对这样的代数取上同调，会得到一个取值于分次向量空间的预因子化代数 $\mathrm{H}\mathfrak{F}$ 。一般而言，这个上同调预因子化代数 $\mathrm{H}\mathfrak{F}$ 无法捕捉 $\mathfrak{F}$ 所携带的全部同伦信息。粗略地说，它只记住了两个可观测量如何通过简单乘积结合，而没有记住当它们的支集相互移动时彼此之间如何关联。

Date：2026年11月25日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 18M70、18N40、17B55、81T45、81T70。

预因子化代数 $\mathfrak{F}$ 称为 形式的，如果它与 $\mathrm{H}\mathfrak{F}$（赋予其诱导的 $\mathcal{P}_M$-代数结构）之间存在一串预因子化代数的拟同构；在这些特殊情形下，$\mathrm{H}\mathfrak{F}$确实记住了 $\mathfrak{F}$的全部同伦信息。将 Dimitrova [Dim12], Bruinsma、Schenkel 和 Vicedo 的形式化方法应用于这一情形，他们得到了预因子化代数 ϑ_2 形式性的第一个阻碍类 [BSV24]。一个尤其值得关注的情形是 局部常值 预因子化代数：其中每个圆盘的包含都诱导一个拟同构。因此，其上同调为每个圆盘赋予一个同构于 $H = \mathcal{H}\mathfrak{F}(\mathbb{R}^m)$ 的值。在这种情况下，当环境维数为 $m = 2$时，他们从 ϑ_2 中提取出一个次数为 -1

$$L^{(2)} \colon H \otimes H \to H \ ,$$

这使得 H 成为一个 (-1)-移位泊松代数。李括号可以从几何上理解为二维中的一种链接运算：将一个可观测量沿着链接圆移动到另一个可观测量处。他们证明，映射 $L^{(2)}$ 不为零意味着类 ϑ_2不为零，因此 $\mathfrak{F}$是非形式的。

本文旨在探究预因子化代数形式性的高维阻碍类，并围绕以下问题展开：拓扑理论（以局部常值预因子化代数的形式表述）除了上同调乘积和链接运算之外，还包含多少额外数据？

引理 3.8 中考察的例子表明，链接不变量 $L^{(2)}$ 并未捕捉到全部阻碍。在这个例子中，我们从一个具有非平凡三重 Massey 乘积的微分分次代数出发，给出一个任意维数下的局部常值前分解代数，它始终具有 $\vartheta_2 \neq 0$ 在任意空间维数下，但其中 $L^{(2)} = 0$ 在二维中。

要系统地回答促使我们提出这一问题，第一步是弄清一般预因子化代数的形式性有哪些高阶障碍类，即使不假设局部常值也如此。在 Kaledin [Kal07], Lunts [Lun10],以及 Melani 和 Rubi´o [MR19], 的工作基础上，第一作者将 Kaledin 类推广到了带色运算子上的代数 [Emp26]。这一构造为每个预因子化代数关联一个上同调类，即其 Kaledin 类；当且仅当$\mathcal{F}$是形式的时，该类才消失。其最初的截断还原了 Dimitrova 的类 $\mathcal{F}$。本文遵循 ϑ_2Emp [的归纳方法，通过对 Kaledin 类进行逐次截断来研究高阶障碍。若25]消失，便可定义下一个形式性障碍，$\vartheta_m \circ \vartheta_{m+1}$

对于局部常值预因子化代数，高阶障碍类 ϑ_m 使我们能够将 [BSV24] 的括号构造推广到任意维数。对于所有 $m \geqslant 2$，我们用一个环绕圆盘的 $(m-1)$-球面取代环路，并用圆盘包含链对其加以描述。通过更系统地描述圆盘偏序集与构型空间上同调之间的关系，我们得到了以下高维推广。

定理 （命题 3.12 和定理3.13）。 设 $\mathfrak{F}$ 是定义在 $\mathbb{R}^m$上的局部常值前分解代数，并且满足 $m \geqslant 2$, 使得 $\vartheta_2 = \cdots = \vartheta_{m-1} = 0$。

(1) $\mathrm{H}\mathfrak{F}(\mathbb{R}^m)$ 带有一个次数为 $1-m$ 的泊松括号 $L^{(m)}$，由 ϑ_m确定；*(2)* 如果 $L^{(m)}$ 非零，则 $\mathfrak{F}$ 不是形式的。

我们计算了若干类例子中的这个李括号，并利用这些计算证明了一大类由自由构造得到的预因子化代数具有非形式性。

因子化包络。局部李代数的因子化包络由其紧支集截面的 Chevalley–Eilenberg 链构造而成 [CG17，第 3 节。6]。对于有限维李代数 $\mathfrak{g}$ 在 $\mathbb{R}$或 $\mathbb{C}$上的情形，其因子化包络由其上的对称代数给出

$$\mathfrak{g} \otimes \Omega^{\bullet}_{\mathbb{R}^m}$$

配备通常的对称乘积。我们在定理 4.7中证明，其李括号 $L^{(m)}$ 由 $(-1)^m$ 乘以由 $\mathfrak{g}$ 的李括号诱导的移位泊松括号给出，因此当 $\mathfrak{g}$ 为非阿贝尔时非零。我们将这一构造推广到无曲率的 $\mathcal{L}_\infty$-代数，此时也有类似的计算；我们在下列定理中概述这些情形下的结果。

定理 (推论 4.8、定理 4.9 和命题 4.12**).** 设 $m \geqslant 2$。

(i) 对于次数为零的有限维实或复李代数 $\mathfrak{g}$，其在 $\mathbb{R}^m$ 上的因子化包络是形式的，当且仅当 $\mathfrak{g}$ 是阿贝尔的。对于沿任意非空闭流形 N从 $\mathbb{R}^m \times N$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的推前，同一判据也成立。(ii) 对于定义在 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$上的无曲率 L_∞-代数 $\mathfrak{g}$，若其在 $H^\bullet(\mathfrak{g})$ 上的诱导李括号非零，则 $\mathfrak{g}$在 $\mathbb{R}^m$上的因子化包络非形式。

具有对称配对的自由理论。一个复形 V，若赋有适当次数的闭分次对称配对，则可按照 [GRW22第3节1]中自由 Batalin–Vilkovisky 可观测量的构造，在 $\mathbb{R}[\hbar]$上产生一个多项式预因子化代数。其李括号 $L^{(m)}$ 完全由 V上同调上的诱导配对确定，如下所示：

定理 （定理5.1）。 设 V 是一个带有闭对称配对的上链复形

$$B_V : V \otimes V \to \mathbb{R}[m+1] \ ,$$

其中 $m \geqslant 2$。与之关联的、在$\mathbb{R}^m$上以 $\mathbb{R}[\hbar]$为系数的自由 *Batalin–Vilkovisky* 可观测量的多项式模型 $\mathfrak{F}_V$，作为实预前因子化代数，当且仅当上同调上的诱导配对为零时是形式的。

这适用于自由 BF 理论 [CR01、CMR18]，高阶阿贝尔 Chern–Simons 理论[GRW22，第5节4]，，以及它们在非空闭有向流形上的紧化。对于 $\mathbb{R}^2 \times S^1$ 上的线性 Chern–Simons 理论，配备其标准实配对，我们重新得到 [BSV24定理51]中的计算结果。

人工智能使用声明。本文的结构和概念思想均在未使用人工智能工具的情况下形成。之后，我们使用人工智能工具提出示例，例如命题 3.8 中的反例，以及小节 4.2和5.2中的应用，并纠正论证中的错误、简化证明。通过这一过程产生的所有陈述均已由人工核查。

致谢。 我们谨向 Victor Carmona 致谢，感谢他与我们进行了富有成效的交流。第一作者获得了 G¨oran Gustafsson 自然科学与医学研究基金会的资助，该资助通过 Alexander Berglund 的 2024 年 G¨oran Gustafsson 奖提供。第二作者获得了 Knut and Alice Wallenberg基金会和 IMPA 的资助。

2. Obstruction sequences to formality

本节回顾文献 [Emp25] 中建立的带色运算子上的代数形式性的阻碍序列。这一理论将在第 3 节应用于光滑流形 M 的前因子化歌剧。

2.1. 带色运算子及其代数。

我们首先回顾带色运算子的定义及其相关的同伦相容代数，旨在统一记号和约定。更多细节请参阅 [LV12、War21、BSV24]。固定一个颜色集合 C，并设 $\Bbbk$为一个特征为零的域。

定义 2.1（带色运算子与代数）。 一个 C-带色微分分次运算子 $\mathcal{P}$ 由上链复形 $\mathcal{P}(c, c)$ 构成，这些复形由输出颜色 c和输入轮廓 $c = (c_1, \dots, c_n)$ 索引。它配备了置换输入及其颜色的对称群作用、闭合的零次单位 $1_c \in \mathcal{P}(c, c)$，以及部分复合映射

$$\circ_i \colon \mathcal{P}(c, \underline{c}) \otimes \mathcal{P}(c_i, \underline{d}) \longrightarrow \mathcal{P}(c, \underline{c} \circ_i \underline{d}) \ ,$$

其中 $c \underline{\circ_i} d$ 是通过将 d替换为 c中的 c_i 而得到的轮廓。这些结构映射与微分可交换，并满足结合公理、单位公理和等变性公理。态射$f\colon \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ 是与置换、单位和复合相容的一族上链映射：

$$\mathcal{P}(c, \underline{c}) \to \mathcal{Q}(c, \underline{c}) \ .$$

对于一族复形 $A = (A_c)_{c \in C}$，其自同态运算子由下式给出

$$\mathrm{End}_A(c, \underline{c}) = \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(A_{c_1} \otimes \cdots \otimes A_{c_n}, A_c) \ ,$$

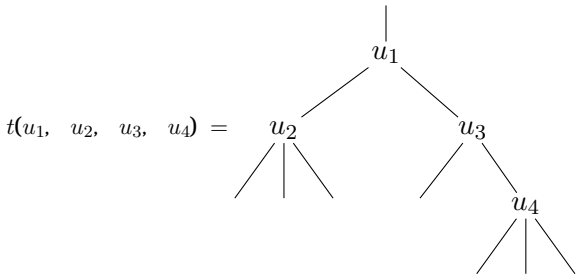
其复合由代入给出。 A 上的 $\mathcal{P}$-代数结构 是一个 C-带色微分分次运算子之间的态射 $\alpha\colon \mathcal{P} \to \mathrm{End}_A$。

从现在起，固定一族 $A = (A_c)_{c \in C}$ 以及一个集中于零次并配备增广 $\epsilon\colon \mathcal{P} \to I$ 的 C-带色运算子 $\mathcal{P}$，其中 I 是 C 上的单位运算子，且 $I(c, c) = \Bbbk 1_c$。记 $\mathcal{P} := \ker \epsilon$ 为增广理想。

定义 2.2（巴构造）。 $\mathcal{P}$ 的巴构造 是余幂零微分分次余运算子

$$B\mathcal{P} = \left(T^c\left(\overline{\mathcal{P}}[1]\right), d_{B\mathcal{P}}\right) \ .$$

这里 T^c 表示余自由余幂零带色余运算子：其元素可表示为带编号输入和带色边的有根树，树的（内部）顶点由 $\mathcal{P}[1]$ 中的元素装饰，且输入与输出颜色相匹配。装饰按顶点处的对称群作用取商。对于如下装饰树，记作 $t(u_1, \dots, u_r)$



装饰树的权 是其顶点数，由此得到权分解：

$$B\mathcal{P} = I \oplus \bigoplus_{r \geqslant 1} (B\mathcal{P})^{(r)} \ .$$

微分 $d_{B\mathcal{P}}$ 是对内部边进行收缩所得的带符号和，并使用 $\mathcal{P}$的部分复合，将相邻的两个装饰复合起来，参见 [LV12，第 5.8 和 6.5–6 节。6]以及 [War21，第 2 节。6]。

定义 2.3 (卷积微分分次李代数)。 带颜色的卷积复形 x

$$\mathfrak{g}_A := \mathrm{Hom}_C\big(\overline{B\mathcal{P}}, \mathrm{End}_A\big) \ ,$$

由所有颜色剖面上的分次映射族构成，并且在输入的置换作用下保持等变。其微分定义为

$$\partial\alpha = d_{\mathrm{End}_A} \circ \alpha - (-1)^{|\alpha|}\alpha \circ d_{B\mathcal{P}} \ .$$

前李乘积 $\alpha \star \beta$ 在树 T 上通过每次切割一条内部边来计算。对于每次切割，将 α 作用于包含根的部分，并将 β 作用于脱离子树，然后在切割处的输入端将第二个运算插入第一个运算。对所有切割取带符号的和，得到前李乘积 [LV12，第 6 节。4]。分次交换子

$$[\alpha, \beta] = \alpha \star \beta - (-1)^{|\alpha||\beta|}\beta \star \alpha$$

使 $\mathfrak{g}_A$ 成为一个微分分次李代数。 $B\mathcal{P}$ 上的顶点权重在 $\mathfrak{g}_A$上诱导出一个完备的权分解，其分量 $\alpha^{(r)}$ 是将 α 限制到具有 r 个顶点的树上所得。前李乘积将权重相加；在微分中，由 d_A 诱导的项保持权重，而由 $d_{B\mathcal{P}}$ 诱导的项使权重增加一。

定义 2.4 （$\mathcal{P}_\infty$-代数结构）。 一个微分分次 $\mathcal{P}_\infty$-代数（A, α）由 $\mathfrak{g}_A$ 中的一个一阶 Maurer–Cartan 元素给出，即

$$\partial\alpha + \alpha \star \alpha = 0 \ .$$

若对 $r \geqslant 2$， $\alpha^{(r)} = 0$成立，则该结构称为严格的；等价地，它由一个 $\mathcal{P}$-代数结构诱导。对于另一个族 B，记

$$\mathrm{End}^A_B(c, \underline{c}) := \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(A_{c_1} \otimes \cdots \otimes A_{c_n}, B_c) \ .$$

一个 ∞-态射 $f\colon (A, \alpha) \rightsquigarrow (B, \beta)$ 是以下空间中的一个零次元素

$$\mathfrak{a}^A_B := \mathrm{Hom}_C\big(B\mathcal{P}, \mathrm{End}^A_B\big) \ ,$$

满足

$$\partial f = f \star \alpha - \beta \circledcirc f \ .$$

这里，微分 ∂ 和 $\star$ 的定义与 $\mathfrak{g}_A$ 中的相同，而 $\beta \circledcirc f$ 则是对 T 分解为一个根子树及嫁接到其输入上的子树所得的各项求和。将 f 作用于每个输入子树，并将所得运算插入到 β 在根子树上的取值中，同时带上 Koszul 符号。若 $f^{(0)}$ 在每种颜色上都是拟同构，则它是一个 ∞-拟同构。

Remark 2.5. 如果对于所有 $r \geqslant 1$ 都有 $f^{(r)} = 0$ ，则 ∞-态射是严格的 $\mathcal{P}$-代数态射 .

2.2. **形式性的障碍类**。 设 $(A,\ \alpha)$ 是一个 $\mathcal{P}$-代数，并令 α_* 表示 $H := H(A)$ 上诱导的结构。回顾一下，若 $(A,\ \alpha)$ 可通过一串 $\mathcal{P}$-代数态射连接到 $(H,\ \alpha_*)$，且这些态射在每种颜色上都是拟同构，则称其为形式的。为构造形式性的障碍，我们使用同伦传递，在 H 上得到一个极小的 $\mathcal{P}_\infty$-结构。其权重一分量恢复出 α_*，而其更高分量则产生逐次障碍。由于 $\Bbbk$ 是一个域，我们可以在每种颜色上选取一个强变形收缩

$$H \underset{p}{\overset{i}{\rightleftarrows}} A \circlearrowright h$$

其中 i 和 p 是上链映射，而 h 的次数为 -1，并且

$$pi = \mathrm{id}_H \ , \qquad d_A h + h d_A = ip - \mathrm{id}_A \ , \qquad hi = ph = h^2 = 0 \ .$$

LV12 的同伦传递构造 [LV12，第 10.3–10 节。4] 按颜色分别适用，因为其树公式只涉及沿匹配颜色进行的复合，参见 [War21，第 2 节。8]。

定理 2.6 （同伦传递）。存在一个诱导的 $\mathcal{P}_\infty$-结构 (H, β)，使得i 可扩展为一个 ∞-拟同构

$$i_\infty \colon (H, \beta) \rightsquigarrow (A, \alpha) \ .$$

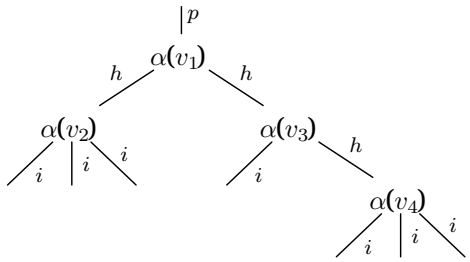
代数 (H, β) 是 极小模型 (A, α) 的一个，在 ∞-同构意义下唯一。

转移结构由 [LV12第 10 节的树公式给出。3]其中， β 的权 1 分量恢复了诱导在上同调上的代数结构。事实上，对于一个由悬置 sv装饰的花冠 $v \in \mathcal{P}(c, \ c)$，我们有

$$\beta^{(1)}(sv) = p_c \, \alpha(v)\big(i_{c_1} \otimes \cdots \otimes i_{c_n}\big) = \alpha_*(v) \ .$$

高阶分量在同样的装饰树上计算。对于 $T = t(u_1, \ldots, \ u_r)$，记作 $u_j = sv_j$。为计算 $\beta^{(r)}(T)$，我们在顶点 j处应用 $\alpha(v_j)$，将 i 置于输入处，将 h 置于每条内部边上，并将 p置于输出处，然后与悬置及 Koszul 符号复合。对于上述树，这给出如下运算

$$\beta\big(t(u_1, u_2, u_3, u_4)\big) =$$



这样的转移结构可能取决于所选的收缩。形式性要探究的是，是否存在一种极小模型的选择，使得所有高阶运算都消失。控制这一问题的复形是由 α_*扭曲的卷积微分分次李代数，

$$\mathfrak{g}_H^{\alpha_*} \coloneqq (\mathfrak{g}_H, \partial_{\alpha_*}, [-,-]) \ , \qquad \partial_{\alpha_*} \coloneqq \partial + [\alpha_*, -] \ .$$

在这里，我们将 α_* 与其次数一、权一的扭曲余链对应，该余链由 $sv \mapsto \alpha_*(v)$ 给出，并在更高权上取零。随后， [Emp25] 的障碍序列理论给出以下结果。

命题 2.7 (非形式性判据)。 设 $r \geqslant 2$。若对于 $2 \leqslant k < r$， $\beta^{(k)} = 0$ ，则$\partial_{\alpha_*}\left(\beta^{(r)}\right) = 0$; 若该类

$$\vartheta_r \coloneqq \left[\beta^{(r)}\right] \in H^1\left(\mathfrak{g}_H^{\alpha_*}\right)$$

非零，则(A, α) 不是形式的。

证明。 这由 [Emp25、命题 2.18 和 2。33] 在带色情形下得出。 □

对于 $r = 2$，类 ϑ_2 恰好与 Dimitrova 的典范类 [Dim12（定理 4）2], 在 [BSV24的带色表述中（第 2 节）7]相一致。

3. Locally constant prefactorization algebras

现在，我们将上一节的障碍理论应用于 $\mathbb{R}^m$上的局部常值前因子化代数。我们回顾 [BSV 24] 的二维泊松括号，并利用链接球面将其构造推广到高维。在适当的消失假设下，这将在上同调上给出一个次数为 $1-m$的泊松括号，其非消失性意味着非形式性。

3.1. **预因子化歌剧与代数。** 我们首先回顾光滑流形上的预因子化代数的定义，进一步细节参见 [CG17，CG21] 。

定义 3.1（预因子化歌剧）。 设 M 是一个维数为 m 的光滑流形。令 $\mathcal{D}_M$ 表示与 $\mathbb{R}^m$ 微分同胚的 M 的开子集的集合。预因子化歌剧$\mathcal{P}_M$ 是如下定义的 $\mathcal{D}_M$-带色运算子。对于 $D=(D_1,\ldots\ldots,D_n)$ 和 $D\in\mathcal{D}_M$，令

$$\mathcal{P}_M(D,\underline{D})=\begin{cases}\mathbb{R}\left[\iota_{\underline{D}}^{D}\right], & D_i\subseteq D \text{ for all } i \text{ and } D_i\cap D_j=\varnothing \text{ for } i\neq j,\\ 0, & \text{otherwise,}\end{cases}$$

其中，$\mathbb{R}[\iota_{\underline{D}}^{D}]$ 是一个集中在零次数、由 $\iota_{\underline{D}}^{D}$ 生成的上链复形。对称群作用定义为

$$\iota_{\underline{D}_\sigma}^{D}=\iota_{(D_{\sigma(1)},\ldots,D_{\sigma(n)})}^{D},$$

歌剧复合定义为

$$\gamma\left(\iota_{\underline{D}}^{D};\iota_{\underline{D}_1}^{D_1},\ldots,\iota_{\underline{D}_n}^{D_n}\right)=\iota_{(\underline{D}_1,\ldots,\underline{D}_n)}^{D}.$$

Th单位**1**： $I\to\mathcal{P}_M$ 和增广 ϵ： $\mathcal{P}_M\to I$ 分别定义为

$$1_D=\iota_D^D\in\mathcal{P}_M(D,D)\quad\text{and}\quad\epsilon\left(\iota_{D'}^{D}\right)=\begin{cases}1_D, & D'=D,\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

定义 3.2（预因子化代数）。 设 $\mathcal{P}_M$ 是光滑流形 M上的前因子化歌剧。定义在 M上的预因子化代数是 $\mathcal{P}_M$上的代数。若对每个圆盘包含 $D\subseteq D'$，其结构映射

$$\mathfrak{F}\left(\iota_D^{D'}\right):\mathfrak{F}(D)\xrightarrow{\simeq}\mathfrak{F}(D')$$

是一个拟同构。

3.2. **定义在 $\mathbb{R}^m$ 上的局部常值预因子化代数。** 设 $\mathfrak{F}$是定义在 $\mathbb{R}^m$ 上的局部常值预因子化代数 $m\geqslant 1$。设i,p,h) 是$\mathfrak{F}$ 到 $\mathrm{H}\mathfrak{F}$的强变形收缩。设 (H,β) 是定理 2.6给出的后者上的转移结构。根据定义，圆盘包含在上同调上诱导同构：

$$s_D\coloneqq\mathrm{H}\mathfrak{F}\left(\iota_D^{\mathbb{R}^m}\right):\mathrm{H}\mathfrak{F}(D)\xrightarrow{\cong}H,$$

将每个圆盘上的上同调与 H 相认：$=\mathrm{H}\mathfrak{F}(\mathbb{R}^m)$。正如 [BSV24], 中所指出的，同构 s_D 可用于改进强变形收缩的一般选择，~并在常值族 β 上得到一个转移结构 H。

引理 3.3 ([BSV24，引理 3.6])。 这些映射

$$\widetilde{i}_D=i_Ds_D^{-1},\qquad\widetilde{p}_D=p_{\mathbb{R}^m}\mathfrak{F}\left(\iota_D^{\mathbb{R}^m}\right),\qquad\widetilde{h}_D=h_D-\widetilde{i}_D\widetilde{p}_Dh_D$$

定义从 $\mathfrak{F}$ 到常值前预因子化代数 H的强变形收缩。

~于是，常值族 H上有两种不同的转移结构： β，以及通过沿着 s_D简单地转移 β 而得到的收缩^ β，并带有一个共同的严格结构

$$\mu_{\underline{D}} \coloneqq s_D \mathrm{H}\mathfrak{F}\big(\iota_{\underline{D}}^{D}\big)\left(s_{D_1}^{-1} \otimes \cdots \otimes s_{D_n}^{-1}\right), \qquad \underline{D} = (D_1, \ldots, D_n) .$$

该严格结构具有如下刻画：

命题 3.4 ([BSV24，命题 3.5])。

(1) 对于 $m \geqslant 2$，运算 μ_D 取决于输入圆盘的数量 n，但与其位置无关。将每个这样的运算记为 μ_n，则族 $(\mu_n)_{n\geqslant 0}$ 在 H 上定义了幺元分次交换结合代数结构。*(2)* 对于 $m = 1$，运算 μ_D 还取决于区间的顺序，因此确定的是 H 上的幺元结合代数结构。

—

~转移结构 β 沿改进的缩回转移后，其高权运算具有更好的性质。下述命题将 [BSV24，命题 3.7]中的部分结果推广到更高的权。

命题 3.5。 对于每个 $r \geqslant 2$，分量 $\widetilde{\beta}^{(r)}$

（*i*）它在出射圆盘中为常数，即对所有圆盘 $D \subseteq \mathbb{R}^m$，我们有

$$\widetilde{\beta}^{(r)}\big(t\left(\iota_{\underline{D}}^{D}; T_1, \ldots, T_n\right)\big) = \widetilde{\beta}^{(r)}\left(t\left(\iota_{\underline{D}}^{\mathbb{R}^m}; T_1, \ldots, T_n\right)\right).$$

（*ii*）它在根顶点为一元根的树上取值为零，即对所有圆盘 $D \subset D'$

$$\widetilde{\beta}^{(r)}\left(t\left(\iota_{D}^{D'}; T_0\right)\right) = 0 .$$

（*iii*）如果 $k \geqslant 2$ *and* $\beta^{(r)} = 0$ *for* $2 \leqslant r < k$，那么 $\widetilde{\beta}^{(r)} = 0$ 位于相同范围内，且对于

$$T = t\left(\iota_{\underline{D}}^{D}; T_1, \ldots, T_n\right)$$

权为 k 时，我们有

$$\widetilde{\beta}^{(k)}(T) = \widehat{\beta}^{(k)}\left(t\left(\iota_{\underline{D}}^{\mathbb{R}^m}; T_1, \ldots, T_n\right)\right) - \sum_{\mathrm{wt}(T_i)=k-1} \mu_{\underline{D}} \circ_i \widehat{\beta}^{(k)}\left(t\left(\iota_{D_i}^{\mathbb{R}^m}; T_i\right)\right).$$

这里 T_i 的输出为 D_i，且该和至多包含一项。

证明。 性质（i）和（ii）可由树公式及以下恒等式推出

$$\widetilde{p}_D \mathfrak{F}\big(\iota_{\underline{D}}^{D}\big) = p_{\mathbb{R}^m} \mathfrak{F}\left(\iota_{\underline{D}}^{\mathbb{R}^m}\right), \qquad \widetilde{p}_{D'} \mathfrak{F}\left(\iota_{D}^{D'}\right) \widetilde{h}_D = \widetilde{p}_D \widetilde{h}_D = 0 .$$

性质 $k = 2$ （iii）的情形对应于 [BSV24，(3.18)]，，其推广到更高~权如下。沿转移树的内部边展开 h_D 的表达式，得到一个由切割集合索引的带符号和。如果某个集合产生一个含有 a 个顶点的根分量，以及含有 b_1，……，b_q 个顶点的非根分量，那么相应的^项是由 β 的分量以如下权

$$a\ , \quad b_1 + 1, \ldots, b_q + 1 .$$

由于 $\widehat{\beta}^{(r)} = 0$ 当且仅当 $\beta^{(r)} = 0$，该假设意味着权为 2、……、$k-1$ 的项均为零。在权为 k时，只可能剩下两类项：空切割，以及将一个权为 $k-1$ 的子树与根顶点分开的单次切割。它们的贡献为

$$\widehat{\beta}^{(k)}\left(t\left(\iota_{\underline{D}}^{\mathbb{R}^m}; T_1, \ldots, T_n\right)\right) \quad \text{and} \quad -\mu_{\underline{D}} \circ_i \widehat{\beta}^{(k)}\left(t\left(\iota_{D_i}^{\mathbb{R}^m}; T_i\right)\right),$$

证明所需的公式。 □

在我们的许多论证中，我们关注的是那些不依赖于分量的具体形式 $\widetilde{\beta}^{(k)}$、而只依赖于其上同调类的不变量。原则上，这需要证明所讨论的不变量在任何形如 $\partial_\mu\chi$的上链上都为零。事实证明，只需考虑 χ满足某个归一化条件的情形即可。这推广了 [BSV24，注释 38]中的讨论。

定义 3.6。 在 $\mathfrak{g}_H^\mu$ 中，支集位于正权重上的齐次上链，若其取值与出射圆盘无关，且在具有一元根顶点的树上取值为零，则称为规范化的 。

引理 3.7。 微分 ∂_μ 保持规范化上链。此外，设 α、α' 是支集位于权重 $k\geqslant 2$ 上的规范化一度余循环。若

$$[\alpha]=[\alpha'] \quad in \quad H^1\big(\mathfrak{g}_H^\mu\big)\ ,$$

则存在 一个支集位于权重 $k-1$ 上的规范化零次上链 χ，使得 t

$$\alpha'-\alpha=\partial_\mu\chi\ .$$

证明。 设 χ 是次数为 q 的规范化上链。对于 $D\subsetneq D'$，设 T_1 的输出为 D，设 T_2 是输出为 D' 的同一棵树，并令 $W=t(\iota_D^{D'};T_1)$。回顾一下，

$$\partial_\mu\chi=(-1)^{q+1}\chi\circ d_{B\mathcal{P}}+\mu\star\chi-(-1)^q\chi\star\mu\ .$$

在 $\mu\star\chi$ 中，只有新根下方的切割有贡献：由于 $\mu_1=\mathrm{id}_H$，它给出 $(-1)^q\chi(T_1)$。 $\chi\star\mu$ 的每一项都为零，因为 χ 是在单叉根树上求值的。同样，唯一非零的巴收缩是紧邻新根下方的那一个，它给出带符号 $+1$ 的 T_2 。因此

$$(\partial_\mu\chi)(W)=(-1)^q\big(\chi(T_1)-\chi(T_2)\big)\ . \tag{1}$$

右侧由 χ 的归一化性质而为零。因此， $\partial_\mu\chi$ 在单叉根树上为零；由于 ∂_μ 提高权，权为一时为零也随之成立。上述恒等式只用到了在单叉根树上为零这一性质。将其应用于 $\partial_\mu\chi$ 并利用 $\partial_\mu^2\chi=0$ ，即可证明它与出射圆盘无关。因此， $\partial_\mu\chi$ 是归一化的。

现在选取一个权为 $k-1$ 的零度上链 ξ，使得 $\partial_\mu\xi=\alpha'-\alpha$。对于输出为 D 的树 T，令

$$\eta(T)=\begin{cases}\xi\big(t(\iota_D^{\mathbb{R}^m};T)\big)\ , & D\subsetneq\mathbb{R}^m\ ,\\ 0\ , & D=\mathbb{R}^m\ ,\end{cases}$$

再次先排列添加的根。于是 η 的次数为 -1 ，权为 $k-2$。对于 $k=2$，我们暂时使用完整的卷积复形，包括余增广项，如 [BSV24，(2.39)]所述。其微分的平方仍为零，并且 $\partial_\mu\eta$ 具有正权。令$\chi=\xi+\partial_\mu\eta$，于是 $\partial_\mu\chi=\alpha'-\alpha$。对于输出为 $D\subsetneq\mathbb{R}^m$的单叉根树 T，展开微分可得

$$(\partial_\mu\xi)\big(t(\iota_D^{\mathbb{R}^m};T)\big)=\xi(T)+(\partial_\mu\eta)(T)=\chi(T)\ .$$

添加的根贡献 $\xi(T)$，其余各项给出 $\partial_\mu\eta(T)$。左侧为零，因为 $\alpha'-\alpha$ 已归一化。若 $T=t\left(\iota_E^{\mathbb{R}^m};S\right)$ 的输出为 $\mathbb{R}^m$，那么所有在输出为该值的树上求值 η 的项都为零。只剩下根作用：

$$(\partial_\mu\eta)(T)=-\eta(S)=-\xi(T)\ .$$

因此 χ在所有单叉根树上均消失。最后，将（1）应用于 χ（其微分已归一化），即可证明其与出射圆盘无关。因此， χ 是归一化的。□

3.3. **二维中的 BSV 泊松括号。** 设 $\mathfrak{F}$是 $\mathbb{R}^2$上的局部常值预因子化代数，并记 $H = \mathrm{H}\mathfrak{F}(\mathbb{R}^2)$。考虑形式性的第一个障碍$\vartheta_2$，如命题2.7中所述。正如 [BSV24第 3 节所解释的，4], 这个障碍与一个具体的二元不变量相关，其构造如下。我们选择圆盘

$$D = \phi(B_2(0)) \ , \qquad \widetilde{D} = \phi(B_1(0)) \ ,$$

其中 $\phi : \overline{B_2(0)} \to \mathbb{R}^2$ 是一个光滑嵌入，而 $B_r(0)$ 是半径为 r 的开球。在D内，选取四个圆盘 D_1^1、D_2^1、D_1^2、D_2^2，使其满足

$$D_1^1 \cup D_2^1 \subseteq D_1^2 \cap D_2^2 \ , \qquad (D_1^2 \cup D_2^2) \cap \widetilde{D} = \varnothing \ .$$

假设 $D_1^2 \cup D_2^2$ 在 $\widetilde{D}$ 周围形成一个环带，其中 D_1^1 和 D_2^1 分别位于 $D_1^2 \cap D_2^2$ 的两个不同连通分支中。

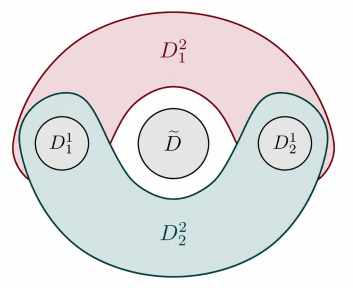


FIGURE 1. 定义二维括号 $L^{(2}$ 的圆盘配置).

沿其四个嵌入对 $\widetilde{\beta}^{(2)}$ 求值，得到交错和

$$\begin{aligned} L^{(2)} := \widetilde{\beta}^{(2)}\left(t\left(\iota^{D}_{(D_1^2,\widetilde{D})}, \iota^{D_1^2}_{D_1^1}\right)\right) - \widetilde{\beta}^{(2)}\left(t\left(\iota^{D}_{(D_1^2,\widetilde{D})}, \iota^{D_1^2}_{D_2^1}\right)\right) \\ + \widetilde{\beta}^{(2)}\left(t\left(\iota^{D}_{(D_2^2,\widetilde{D})}, \iota^{D_2^2}_{D_2^1}\right)\right) - \widetilde{\beta}^{(2)}\left(t\left(\iota^{D}_{(D_2^2,\widetilde{D})}, \iota^{D_2^2}_{D_1^1}\right)\right) . \end{aligned}$$

每个求和项都是一个权重二运算，因此 $L^{(2)}: \ H^{\otimes 2} \to H$ 的次数为 -1。交错和抵消了归一化余边界的贡献，并且 $L^{(2)}$ 仅取决于 ϑ_2，根据[BSV24，命题 3。10]。它也与选定取向的圆盘配置无关，见 [BSV24，引理 3。11]。结合 H 上诱导的乘积， $L^{(2)}$ 定义了一个$\mathbb{P}_2$-代数结构，见 [BSV24，定理 3。12], 并给出了一个具体的非形式性判据

$$L^{(2)} \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \vartheta_2 \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathfrak{F} \text{ is not formal.}$$

让我们通过一个反例证明，上述蕴含关系的逆命题并不成立。考虑如下微分分次代数:

$$A = \Lambda(x, y, z) \ , \ |x| = |y| = |z| = 1 \ , \ dx = dy = 0 \ , \ dz = xy \ .$$

这个微分分次代数 存在一个同伦收缩，其中 $i: \ H \hookrightarrow A$ 是作为子空间的包含映射

$$\langle 1, x, y, xz, yz, xyz \rangle \ ,$$

投影 $p: A \to H$ 将 xy 和 z 映为零，并将其他基元素映为它们的等价类；对于其他基元素，我们有 $h(xy) = -z$ 和 $h = 0$。微分分次代数 A 是具有非零马西积的代数的经典例子：一阶等价类的乘积为零，即 $H^1H^1 = 0$，因此 $[xy] = 0$ 和 $[yy] = 0$，但存在一个非平凡的三重积

$$[x, y, y] = [zy] = -[yz]$$

它使 A 不可能是形式的。我们将 $\mathfrak{F}$ 定义为 $\mathbb{R}^m$上的常值预因子化代数，对于 $m \geqslant 1$，它为每个圆盘 D赋值 $\mathfrak{F}(D) = A$ 。

命题 3.8。对于每个 $m \geqslant 1$，我们都有 $\vartheta_2 \neq 0$。在不变量 $L^{(2)}$ 有定义的维数 $m = 2$中，尽管如此，仍有 $L^{(2)} = 0$。

证明。在二维情形下，定义 $L^{(2)}$ 的四项均为零：一元结构映射都是恒等映射，因此相应的转移运算含有因子 $hi = 0$。现在我们证明，对于每个 $m \geqslant 1$，都有 $\vartheta_2 \neq 0$ 。在固定的圆盘 D 内，选取三个两两不相交的圆盘 E_1，E_2，E_3，再选取一个包含 E_1，E_2 且与 E_3 不相交的圆盘 D_{12}，以及一个包含E_2，E_3 且与 E_1不相交的圆盘 D_{23}。在一维情形下，按顺序 $E_1 < E_2 <E_3$ 选取区间。采用根优先顶点顺序，令

$$T_L = t\big(\iota^{D}_{(D_{12},E_3)}, \iota^{D_{12}}_{(E_1,E_2)}\big) \ , \qquad T_R = t\big(\iota^{D}_{(E_1,D_{23})}, \iota^{D_{23}}_{(E_2,E_3)}\big) \ .$$

在这些树上计算 $\widetilde{\beta}^{(2)}$ 并将所得映射作用于 $[x] \otimes [y] \otimes [y]$，我们得到

$$\widetilde{\beta}^{(2)}(T_L)([x],[y],[y]) = p\big(h(xy)y\big) = p(-zy) = [yz] \neq 0 \ ,$$

而

$$\widetilde{\beta}^{(2)}(T_R)([x],[y],[y]) = 0 \ ,$$

因此 $\widetilde{\beta}^{(2)}$ 不可能是恰当的，因为这将意味着这两项相等。 □

3.4. 高维泊松括号。在本节中，我们将$L^{(2)}$ 的构造推广到每个维数 $m \geqslant 2$。令 $\mathfrak{F}$ 为定义在 $\mathbb{R}^m$上的局部常值前分解代数，并记 $H \coloneqq \mathrm{H}\mathfrak{F}(\mathbb{R}^m)$。假设

$$\widetilde{\beta}^{(2)} = \cdots = \widetilde{\beta}^{(m-1)} = 0 \ .$$

~ ~令我们固定 $\mathbb{R}^m$ 中的圆盘 $D = \phi(B_2(0))$ 和 $D = \phi(B_1(0))$，以及 $\mathscr{D}(D;\, D)$ 中圆盘所成的偏序集

$$D \setminus \overline{\overline{D}} \ ,$$

按包含关系排序。这些圆盘构成可缩开集的一个基。经典覆盖引理，参见例如 [DKS23，附录 A.7，引理 A。1], 给出

$$H_{m-1}\big(N_\bullet \mathscr{D}(D;\widetilde{D});\mathbb{R}\big) \cong H_{m-1}\big(D \setminus \overline{\overline{D}};\mathbb{R}\big) \cong \mathbb{R} \ ,$$

因为补集与 $S^{m-1} \times$（1，2）微分同胚。我们将正~生成元记作 $[S^{m-1}]$，它由包围 D的向外定向球面表示。

定义 3.9（交叉多胞体圆盘构型）。一个交叉多胞体圆盘构型 $\mathcal{C}$~由圆盘 D_1^r，$D_2^r \in \mathscr{D}$（D；D）组成，其中 $1 \leqslant r \leqslant m$，满足

$$D_1^1 \cap D_2^1 = \varnothing \ , \qquad D_1^{r-1} \cup D_2^{r-1} \subsetneq D_j^r \quad (2 \leqslant r \leqslant m,\ j \in \{1,2\}) \ .$$

其关联循环为

$$z_{\mathcal{C}} \coloneqq \sum_{\varepsilon \in \{1,2\}^m} (-1)^{|\varepsilon|} \big[D^1_{\varepsilon_1} \subsetneq \cdots \subsetneq D^m_{\varepsilon_m}\big] \ , \qquad |\varepsilon| \coloneqq \#\{r \mid \varepsilon_r = 2\} \ .$$

我们称 $\mathcal{C}$ 为正向定向的，如果 $[z_{\mathcal{C}}] = [S^{m-1}]$。

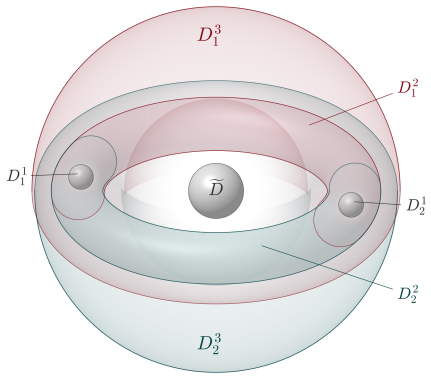


FIGURE 2. 三维中的交叉多胞体圆盘构型。

例如，下图展示了三维中的一种此类构型。在三个层级各选取一个圆盘，即可得到 $z_{\mathcal{C}}$的八个项。

每个圆盘链定一棵树，其一元叶子记录这些包含关系，而二元根将 D_r 与 D 在 D 中组合：

$$T(D_1,\dots,D_r) \coloneqq t\left(\iota^{D}_{(D_r,\widetilde{D})}, \iota^{D_r}_{D_{r-1}},\dots,\iota^{D_2}_{D_1}\right).$$

我们从根沿一元分支向下排列顶点。

定义 3.10（高维运算）。对于正向定向构型 $\mathcal{C}$，定义二元运算

$$L^{(m)}_{\mathcal{C}} \coloneqq \sum_{\varepsilon\in\{1,2\}^m} (-1)^{|\varepsilon|}\widetilde{\beta}^{(m)}\left(T(D^1_{\varepsilon_1},\dots,D^m_{\varepsilon_m})\right).$$

该和遍历了每一层选取一个圆盘的所有 2^m 种选择。每一项都是作用于 H 上的次数为 $1-m$的二元运算。

为了比较构型，我们将该和解释为单纯上链在$z_{\mathcal{C}}$上的取值。设 $f\in\mathfrak{g}_H$ 的次数为 q，权为 $r\geqslant 1$。为了在圆盘链上定义 $\lambda(f)$，我们按如下方式计算 f 在相应树上的取值

$$\langle\lambda(f),[D_1\subsetneq\cdots\subsetneq D_r]\rangle \coloneqq f\left(T(D_1,\dots,D_r)\right),$$

对 $\mathscr{D}(D;\ D)$中的所有圆盘链。由于由 r个圆盘组成的链是一个（$r-1$）-单形，$\lambda(f)$是一个取值于作用在 $r-1$上的次数为 H的二元运算的（$q-r$）-单纯上链。由线性性，$f=\widetilde{\beta}^{(m)}$ 给出定义 3.10中的交错和：

$$L^{(m)}_{\mathcal{C}} = \left\langle \lambda\left(\widetilde{\beta}^{(m)}\right), z_{\mathcal{C}}\right\rangle.$$

命题 3.11。设 $f\in\mathfrak{g}^{\mu}_H$ 的次数为 q，支集在权 $r\geqslant 1$上，且在具有一元根的树上取值为零。那么

$$\lambda(\partial_\mu f) = (-1)^{q+r+1}\delta\lambda(f) \tag{2}$$

并且 $\lambda(\widetilde{\beta}^{(m)})$ 是一个单纯上闭链。对于一个权为 $m-1$ 的规范化零次上链 χ，

$$\lambda\left(\widetilde{\beta}^{(m)}+\partial_\mu\chi\right)-\lambda\left(\widetilde{\beta}^{(m)}\right) = (-1)^m\delta\lambda(\chi)\ .$$

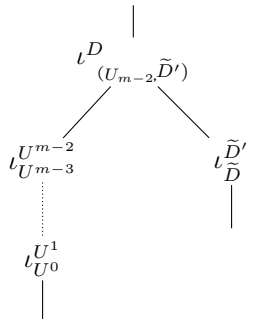
证明。计算 $\partial_\mu f$ 在与 $U_0 \subsetneq \cdots \subsetneq U_r$ 相关联的树上的取值，其中内部边从根开始编号为 $k = 0$、.....、$r-1$。收缩边 k 会删除 U_{r-k}，其横线符号 $(-1)^k$ 给出卷积微分中的系数 $(-1)^{q+1+k}$。项 $\mu \star f$ 为零，因为它在具有一元根的树上取值为 f。在 $-(-1)^q f \star \mu$ 中，唯一删除 U_0 的项使用$\mu_1 = \mathrm{id}_H$。将 μ 移过这两个 r 奇数顶点装饰会产生 $(-1)^r$，从而得到系数 $(-1)^{q+r+1}$。提出这个系数后，恰好剩下单纯形边界符号，从而证明（2）。取 $(q,r) = (1,m)$ 和 $(q,r) = (0,m-1)$，即可分别得到这两个推论。□

命题 3.12。运算 $L_{\mathcal{C}}^{(m)}$ 与正向定向构型$\mathcal{C}$无关，包括圆盘 D 和 $\widetilde{D}$。所得运算 $L^{(m)}$ 仅取决于

$$\vartheta_m := \left[\widetilde{\beta}^{(m)}\right] \in H^1(\mathfrak{g}_H^\mu) \ .$$

特别地，$L^{(m)} \neq 0$ 蕴含 $\vartheta_m \neq 0$，因而蕴含 $\mathfrak{F}$的非形式性。

证明。固定 D，D，由命题 3.11可知，该上链是闭的，因此其配对仅取决于正向链接类 $[z_{\mathcal{C}}]$。为改变圆盘，我们也允许任意一个外圆盘 D 包含光滑嵌入的闭圆盘 D。关于 D 的变化不变，是因为 $\widetilde{\beta}^{(m)}$ 与出射圆盘无关。对于内圆盘，令 $\widetilde{D} \subsetneq \widetilde{D}'$ 并将两个相应的上链（记为 λ 和 λ'）限制到 $D \setminus D'$的圆盘偏序集上。定义一个单纯形（$m-2$）上链 κ，令其在 $U_0 \subsetneq \cdots \subsetneq U_{m-2}$ 上的取值为 $\widetilde{\beta}^{(m)}$ 在以下树上的求值：



我们规定符号如下：先排列根，再排列第一条分支上的顶点，最后排列第二条分支上的顶点。在左侧分支上多添一个单价顶点的类似树上计算 $\partial_\mu \widetilde{\beta}^{(m)} = 0$，得到

$$0 = (-1)^{m-1}\big(\delta\kappa + \lambda - \lambda'\big) \ .$$

第一条分支上的各项给出余边界，而第二条分支上的各项则比较两个内圆盘。因此，$\lambda' - \lambda = \delta\kappa$，这证明了结果与 D的选择无关。

对于任意一对构型，选取同心圆盘 $E \subset B$，使其 E 包含两个圆盘的闭包 D。我们可以将出射圆盘扩大到 B，并将其他每个圆盘与 E进行比较，利用 $B \setminus E$中的一个正循环，从而证明所有圆盘选择的独立性。最后，表示同一类的两个归一化权-m 上链相差一个 $\partial_\mu \chi$，其中 χ为次数零且权为 $m-1$，根据引理 3.7。由（2），它们的单纯上链相差一个余边界，并且与链接类的配对相同。特别地，$\vartheta_m = 0$蕴含 $L^{(m)} = 0$，因此由命题 2.7可得非形式性断言。□

定理 3.13。 运算 $L^{(m)}$ 定义了一个次数为 $1-m$ 的泊松括号，作用于结合、含单位且交换的代数 (H, μ_2)。具体而言，它满足

$$(i)\quad L^{(m)}\tau = (-1)^m L^{(m)}\ ,\quad (ii)\quad L^{(m)}(\mathrm{id}\otimes\mu_2) = \mu_2(L^{(m)}\otimes\mathrm{id}) + \mu_2(\mathrm{id}\otimes L^{(m)})(\tau\otimes\mathrm{id})\ ,\quad (iii)\quad L^{(m)}(\mathrm{id}\otimes L^{(m)}) + L^{(m)}(\mathrm{id}\otimes L^{(m)})\tau_{(123)} + L^{(m)}(\mathrm{id}\otimes L^{(m)})\tau_{(132)} = 0\ .$$

这里所有置换都通过对称编织作用。

证明。对于 $n = 2,\ 3$，考虑乘积胞腔

$$\sigma = \prod_{i=1}^{n} [U_i^0 \subsetneq \cdots \subsetneq U_i^{p_i}]\ ,$$

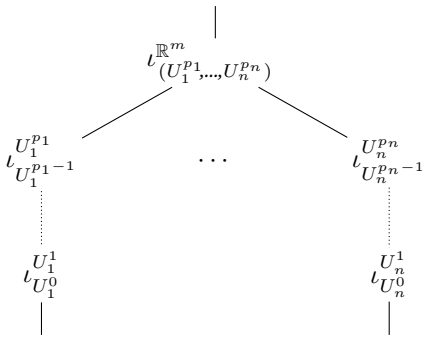
其最大圆盘两两不相交。它们构成一个多重单纯集合，其对角线是由两两不相交圆盘的有序 n- 元组构成的偏序集的神经。根据 Eilenberg–Zilber 定理，它们的全链复形配上边界算子

$$\partial\sigma = \sum_i (-1)^{p_1+\cdots+p_{i-1}} \partial_i\sigma\ ,$$

其中 ∂_i 表示第 i 个因子的单纯边界，该复形计算这个神经的同调。采用与我们处理圆盘链时相同的覆盖论证，并将其应用于乘积开集$U_1 \times \cdots \times U_n$，可将该神经的同调与构形空间 $H_*(\mathrm{Conf}_n(\mathbb{R}^m); \mathbb{R})$ 的同调等同起来。对于权为 $r \geqslant 1$ 的齐次上链 $f \in \mathfrak{g}_H$，在这个乘积胞腔复形上定义一个上链如下：

$$\langle \lambda_n(f), \sigma\rangle = (-1)^{\sum_{i<j} p_i p_j} f(T_\sigma)\ ,\qquad \sum_i p_i = r-1\ .$$

这里 T_σ 是如下有根树：



我们通过先排列根，再按照输入顺序排列各分支（每个分支从根到叶）来确定符号。注意，在巴构造中，重新排列两个分支会产生交换乘积胞腔中相应因子的符号 $(-1)^{p_i p_j}$，因此这些上链在输入的置换下是等变的。

现在令 f 为一个次数为 q、权为 r的上链，它在具有一元根的树上取值为零，并将 $\partial_\mu f$ 作用于 T_σ，其中 $\sum_i p_i = r$。与命题 3.11中一样，项 $\mu\star f$ 为零，而对每个 U_i^a，都有一个删除该项的项，它们来自收缩或来自 $f\star\mu$。所有这些项的符号均为 $(-1)^{q+1+p_1+\cdots+p_i+a}$；考虑到当 λ_n 减少一时，$-1)^{r-p_i}$会改变为 $(\ p_i\ ,$ 最终符号为 $(-1)^{q+r+1}$，因此得到：

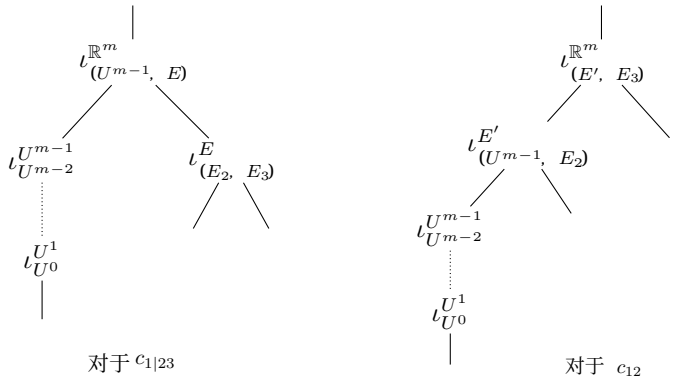
$$\lambda_n(\partial_\mu f) = (-1)^{q+r+1}\delta\lambda_n(f)\ . \tag{3}$$

特别地，在权为 $r = m$ 时， $\lambda_n(\widetilde{\beta}^{(m)})$ 是闭的。为证明对称性陈述 *(i)*，我们考察元数为 $n = 2$ 的情形，此时与正向链接类 $[z_{\mathcal{C}}]$ 配对得到运算 $L^{(m)}$。交换输入会在 $\mathsf{Conf}_2(\mathbb{R}^m) \simeq S^{m-1}$ 上诱导对跖映射，其次数为 $(-1)^m$，因此由等变性可得 $L^{(m)}$ 的对称性（带有该符号）。

对于莱布尼茨恒等式，固定互不相交的圆盘 E_2， E_3 作为输入 2，3，并令 $c_{1|23}$， c_{12}， c_{13} 分别为输入 1 的正向定向的交叉多胞体循环与 $[E_2] \times [E_3]$ 的乘积，其中输入 1 分别包围两个固定圆盘、仅包围 E_2 或仅包围 E_3。它们满足

$$[c_{1|23}] = [c_{12}] + [c_{13}] \quad \text{in } H_{m-1}(\mathrm{Conf}_3(\mathbb{R}^m); \mathbb{R}) \ .$$

将这些循环与中间圆盘一同选定：对于 $c_{1|23}$，取一个圆盘 E ，它包含$E_2 \cup E_3$ ，且与所有“移动圆盘”互不相交，也就是说，与附属于输入 1 的圆盘链中出现的圆盘互不相交。对于 c_{12}，我们选取一个圆盘 E' ，它包含 E_2 和移动圆盘，且与 E_3 不相交；对于 c_{13}，我们做同样的事，但交换标签 2、3。对以下树求 $\partial_\mu \widetilde{\beta}^{(m)} = 0$ 的值，其中 $U^0 \subsetneq \cdots \subsetneq U^{m-1}$ 遍历该循环的各条链，并将结果求和。



在这两种情况下，删除一元链中一个圆盘所得的项，正如命题3.12的证明中一样，都是将上链作用于循环所得的余边界，因此为零。对于 $c_{1|23}$，收缩二元顶点之间的边会产生 $(-1)^{m-1}\langle \lambda_3(\widetilde{\beta}^{(m)})\ c_{1|23}\rangle$，而断开$\iota^{E}_{(E_2,E_3)}$会产生 $(-1)^m L^{(m)}(\mathrm{id} \otimes \mu_2)$。对于 c_{12}，收缩会产生 $\langle \lambda_3(\widetilde{\beta}^{(m)})\ c_{12}\rangle$，而项 $\mu \star \widetilde{\beta}^{(m)}$ 会产生 $-\mu_2(L^{(m)} \otimes \mathrm{id})$。 c_{13} 上的值可由 c_{12}上的值在输入 2 和 3 的换位下的等变性得到。因此

$$\begin{aligned}
\langle \lambda_3(\widetilde{\beta}^{(m)}), c_{1|23} \rangle &= L^{(m)}(\mathrm{id} \otimes \mu_2) \ , \\
\langle \lambda_3(\widetilde{\beta}^{(m)}), c_{12} \rangle &= \mu_2(L^{(m)} \otimes \mathrm{id}) \ , \\
\langle \lambda_3(\widetilde{\beta}^{(m)}), c_{13} \rangle &= \mu_2(\mathrm{id} \otimes L^{(m)})(\tau \otimes \mathrm{id}) \ .
\end{aligned}$$

三个循环之间的同调关系现在给出了莱布尼茨恒等式。

对于雅可比，权-$2m$Maurer–Cartan 方程为

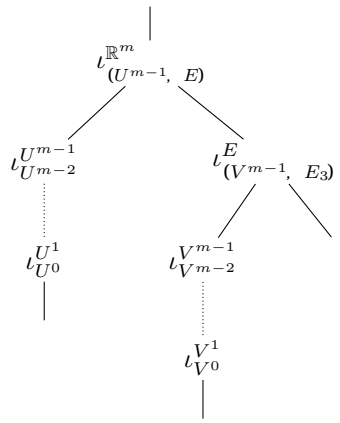
$$\partial_\mu \widetilde{\beta}^{(2m-1)} = -\widetilde{\beta}^{(m)} \star \widetilde{\beta}^{(m)} \ .$$

由于右侧在带有一元根的树上消失，引理 3.7 证明中的归一化计算应用于一阶后，可以将 $\widetilde{\beta}^{(2m-1)}$ 改为一个 ∂_μ-余边界，使其在那里也消失。将所得上链记为 b，它将满足上述同一方程。在每个 T_σ上计算微分时，每个切分都有一个完全是一元的分量，因此 $\lambda_3(b)$ 根据（3）是闭的。

设 $C_{23} = z_U \times z_V \times [E_3]$ 为两个正向定向的交叉多胞体循环的乘积，其中 z_U围绕圆盘 E，z_V 围绕圆盘 E_3，且位于 E内部，外部循环在前。几何上，它表示为

$$(u, v) \longmapsto (Ru, \rho v, 0) \ , \qquad (u, v) \in S^{m-1} \times S^{m-1} \ , \quad R > 2\rho > 0 \ .$$

对将两个二叉根链嫁接而成的树求值：将内侧的链嫁接到外侧链的第二个输入端，具体如下：



我们通过先排列外部根及其一元分支，再排列内部根及其一元分支来固定符号。删除任一一元链中的圆盘所得到的项，与之前一样，是链的乘积上的某个上链的余边界；将其作用于乘积循环 $z_U \times z_V$ 后，这些项便消失。其余项则收缩或切断二元顶点之间的边，得到

$$\langle \lambda_3(b), C_{23} \rangle = (-1)^{m-1} L^{(m)}(\mathrm{id} \otimes L^{(m)}) \ .$$

计入符号后；相对收缩符号被 λ_3 中的因子 $(-1)^{(m-1)^2}$ 抵消，而切割项则带有符号 $(-1)^m$。

接下来，我们研究这个几何循环与其循环平移之间的关系。在线性子空间的单位球面中

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in (\mathbb{R}^m)^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\} \ ,$$

去除三个碰撞球面周围彼此不相交的小管状邻域。剩下的紧致定向流形有三个边界分支。在 $x_2 = x_3$ 周围，平移到 $x_3 = 0$ 将该边界分支识别为

$$(u, v) \mapsto (Ru + \tfrac{\rho}{2} v, \rho v, 0) \ , \qquad R > 2\rho > 0 \ .$$

去除 $\frac{\rho}{2} v$ 后，可得到到 C_{23} 的无碰撞同伦。循环置换保持环境定向，并置换边界分支，因此三个比较符号相同。由此

$$[C_{23}] + [(123)_* C_{23}] + [(132)_* C_{23}] = 0 \ .$$

与闭上链 $\lambda_3(b)$ 配对，并利用前面对 C_{23} 的计算，即可证明雅可比恒等式。最后，为证明幺正性，将莱布尼茨恒等式应用于 $1 \cdot 1$，得到 $L^{(m)}(x, \mathbf{1}) = 0$，而对称性则在第一个输入中给出相同结果。□

4. Factorization envelopes

Bruinsma、Schenkel 和 Vicedo 研究了 $\mathbb{R}^m$上的李代数的因子化包络，并计算了其在二维 [BSV24，第 4] 节中的泊松括号。我们将这一计算推广到高维，并证明对于 $m \geqslant 2$，当且仅当该李代数为阿贝尔时，该包络是形式的。对于沿非空闭流形的紧化，同样的刻画也成立。对于 L_∞-代数的包络，我们通过证明上同调上的非零诱导李括号蕴含非形式性，推广了这一结果。

4.1. **李代数的因子化包络。** 在本小节中， $\mathfrak{g}$是一个集中在零次的有限维实或复李代数，我们在同一个域上取微分形式。我们将 [CG17第 3 节中的因子化包络构造6] 应用于局部李代数 $\mathfrak{g} \otimes \Omega^\bullet_{\mathbb{R}^m}$。它在圆盘 D 上的取值为 Chevalley–Eilenberg链复形

$$\mathfrak{U}^{(m)}_{\mathfrak{g}}(D) = \big(\mathrm{Sym}\big((\mathfrak{g} \otimes \Omega^\bullet_c(D))[1]\big), d_{\mathrm{dR}}[1] + d_{\mathrm{CE}}\big) .$$

结构映射将紧支撑形式延拓为零，并将所得单项式相乘。从现在起，我们在公式中省略这些零延拓映射。

我们使用 [BSV24第 4 节中的收缩。1]。对于每个圆盘 D，一个积分为一的紧支撑顶形式 ω_D 代表 $H^m_c(D)$ 的生成元。存在一个作用于紧支撑形式上的同伦 k_D ，满足

$$d_{\mathrm{dR}} k_D(\omega) + k_D(d_{\mathrm{dR}}\omega) = \omega - \omega_D \int_D \omega \ , \qquad k_D(\omega_D) = 0 \ , \qquad k_D^2 = 0 \ .$$

在关于线性生成元的情形下，移位德拉姆复形的包含映射、投影和同伦为

$$i_D(a) = a \otimes \omega_D \ , \qquad p_D(a \otimes \omega) = a \int_D \omega \ , \qquad h_D(a \otimes \omega) = a \otimes k_D(\omega) \ .$$

映射 i_D 和 p_D 可延拓为乘积，而对于同伦 h_D ，我们使用对称化张量技巧。我们用 d_{CE}扰动微分，得到扰动后的映射

$$\widehat{p}_D = \sum_{j \geqslant 0} p_D (d_{\mathrm{CE}} h_D)^j \ , \qquad \widehat{h}_D = \sum_{j \geqslant 0} h_D (d_{\mathrm{CE}} h_D)^j \ .$$

两个求和在每个单项式上都只有有限项，而且 $d_{\mathrm{CE}} i_D = 0$ ，因为两个顶形式的楔积为零。因此，包含映射 i_D 以及 H 上的零微分给出一个逐对象的收缩：$= \mathrm{Sym}(\mathfrak{g}[1-m])$

$$H \underset{\widehat{p}_D}{\overset{i_D}{\rightleftarrows}} \mathfrak{U}^{(m)}_{\mathfrak{g}}(D) \circlearrowleft \widehat{h}_D$$

$\widehat{\ }$与第 3.2 节中一样， β 表示沿这些收缩进行的传递，并将其传输到常值$\widetilde{\ }$族 H，而 β 表示沿改进的收缩进行的传递。

定理 4.1 （[BSV24，第 4]节。

(1) 对于 $m = 1$，$\mathrm{Sym}(\mathfrak{g})$ 上的严格转移乘积是 *Gutt*星乘积。所有更高阶分量均消失，且 $\mathfrak{U}^{(1)}_{\mathfrak{g}}$是形式的。*(2)* 在每个维数 $m \geqslant 2$下，$\mathrm{Sym}(\mathfrak{g}[1-m])$ 上的严格转移乘积是通常的分次交换乘积。*(3)* 对于 $m = 2$， $L^{(2)}$ 是次数为 -1 的泊松括号，其在生成元上的特征为

$$L^{(2)}(a, b) = [a, b] \ .$$

现在我们将这些计算推广到高维。对称次数限制了可能出现转移运算的权，从而得到以下结果。

命题 4.2. 设 $m \geqslant 2$。只有在以下情况下，转移分量 $\widehat{\beta}^{(r)}$ 才可能非零：

$$r = 1 + q(m-1) \ ,$$

对某个 $q \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$成立。同样的结论也适用于 $\widetilde{\beta}^{(r)}$，特别地，我们有

$$\widehat{\beta}^{(2)} = \cdots = \widehat{\beta}^{(m-1)} = 0 \ , \qquad \widetilde{\beta}^{(2)} = \cdots = \widetilde{\beta}^{(m-1)} = 0 \ .$$

证明。 H 中一个对称次数为 n的单项式，其上同调度数为 $n(m-1)$。因此，对于总共含有 n 个生成元的输入，一个权为 r 的运算，其输出次数为 $n(m-1)+1-r$。在 $\widehat{\beta}^{(r)}$中，每次出现 d_{CE} 都会将两个生成元替换为一个。所有其他映射都保持生成元的数量不变。因此，一个含有 q 次出现的非零项必须满足

$$n(m-1) + 1 - r = (n-q)(m-1) \ .$$

由此得到 $r = 1 + q(m-1)$，同样的次数计数论证也适用于 $\widetilde{\beta}^{(r)}$。 □

命题 4.3. 设 $m \geqslant 2$。如果 $\mathfrak{g}$ 是阿贝尔的，那么对每个 $r \geqslant 2$都有 $\widehat{\beta}^{(r)} = \widetilde{\beta}^{(r)} = 0$，因此$\mathfrak{U}\mathfrak{g}^{\mathbb{R}^m}$是形式的。

^证明。 如同前一个命题的证明，在 β 的任何非零贡献中，我们必须有 $r-1 = q\,(m-1)$，其中 q 是 d_{CE}出现的次数，因此当 $r \geqslant 2$ 时，我们必须有 $q \geqslant 1$；由于 $d_{\mathrm{CE}} = 0$ 当 $\mathfrak{g}$ 为阿贝尔时，这意味着结果为零。关于~的类似 β 陈述则由引理 3.5得到。 □

推论 4.4。 对于 $m \geqslant 2$ 以及一个具有 m 个顶点的树 T，$\widehat{\beta}^{(m)}(T)$ 中唯一可能非零的项，在每条内部边上都有 h，在出边上有 $p\,d_{\mathrm{CE}}h$。

证明。 根据命题 4.2，恰好有一次 d_{CE}出现。如果它位于内部边 e上，令 T_e 为 e下方的子树，其具有 s 个顶点。在到达 d_{CE}之前，至多有 $s \leqslant m-1$ 次同伦：其中一次在 e 上，另有 $s-1$ 次在 T_e的内部边上。由 d_{CE} 配对的两个形式，其总次数从 $2m$开始，因此只有在至少经过 m次同伦后，它们的楔积才可能非零，所以 d_{CE} 必须位于出边上。 □

在本节余下部分，我们假设 $m \geqslant 2$。现在我们将[BSV24、引理 4.8 和定理 4 的计算10]推广到权 m。设

$$\{-,-\}_{(1-m)} \colon H^{\otimes 2} \longrightarrow H$$

be 由其在线性单项式上的取值所确定的次数为 $1-m$ 的泊松括号 s

$$\{a,b\}_{(1-m)} = [a,b] \ , \qquad a,b \in \mathfrak{g} \ .$$

我们考虑定义 $L^{(m)}$ 时所使用的那类圆盘排列，它由一个圆盘链给出

$$D^1 \subsetneq D^2 \subsetneq \cdots \subsetneq D^m$$

~与 $D^m \subset D$ 和 $D^m \cap D = \varnothing$。记作

$$T(D^\bullet; \widetilde{D}) \coloneqq t\left(\iota^{D}_{(D^m,\widetilde{D})}, \iota^{D^m}_{D^{m-1}}, \ldots, \iota^{D^2}_{D^1}\right)$$

相应的线性 m-顶点树，即 $T(D^1, \ldots\ldots, D^m)$，采用第 3.4节的记号。推论 4.4 由此可得

$$\widetilde{\beta}^{(m)}\big(T(D^\bullet;\widetilde{D})\big) = p_{\mathbb{R}^m} d_{\mathrm{CE}} h_{\mathbb{R}^m} \circ \mathfrak{U}\mathfrak{g}^{\mathbb{R}^m}\left(\iota^{\mathbb{R}^m}_{(D^m,\widetilde{D})}\right) \circ \left(h_{D^m}\cdots h_{D^2} i_{D^1} \otimes i_{\widetilde{D}}\right) - \mu_2 \circ_1 \left(p_{\mathbb{R}^m} d_{\mathrm{CE}} h_{\mathbb{R}^m} h_{D^m}\cdots h_{D^2} i_{D^1}\right). \tag{4}$$

现在我们设

$$\alpha_{D^\bullet} \coloneqq k_{D^m} k_{D^{m-1}} \cdots k_{D^2}(\omega_{D^1}) \in \Omega^1_c(D^m)\ .$$

引理 4.5。 对于所有的 A、$B \in H$，线性树 T（$D^\bullet$；D）上的运算为

$$\widetilde{\beta}^{(m)}\big(T(D^\bullet;\widetilde{D})\big)(A\otimes B) = \varphi_0^{(m)}\big(T(D^\bullet;\widetilde{D})\big)\{A,B\}_{(1-m)}\ ,$$

也就是说，它等于泊松结构乘以一个数值因子

$$\varphi_0^{(m)}\big(T(D^\bullet;\widetilde{D})\big) \coloneqq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^m}\left(k_{\mathbb{R}^m}(\alpha_{D^\bullet}) \wedge (\omega_{\widetilde{D}} + \omega_{\mathbb{R}^m}) + (-1)^m k_{\mathbb{R}^m}(\omega_{\widetilde{D}}) \wedge \alpha_{D^\bullet}\right)$$

该数值因子与 $\mathfrak{g}$无关。

对于 $m = 2$，这正是 [BSV24，（4.44）], 其中数值因子函数简单记作 φ_0。

证明。 我们先考虑 A, B 为线性的情形，分别表示为 $a, b \in \mathfrak{g}$。内部同伦 $m-1$ 将

$$a \otimes \omega_{D^1} \quad \text{into} \quad a \otimes \alpha_{D^\bullet}\ ,$$

并且所需等式可通过简单计算得出。对于一般的单项式 A, B，次数条件迫使所有同伦 m 都作用于由唯一的 d_{CE} 选定的一对因子上。经过抵消后，唯一保留下来的项位于 $\widetilde{\beta}^{(m)}$ 的第一项中，并且其中 d_{CE} 作用于 A 的一个因子和 B 的一个因子；每个内部同伦都作用于第一个输入的同一因子，将该形式变为 $\alpha_{D^\bullet}$。输出同伦给出的系数与作用于生成元时相同。对这些因子对求和并赋予适当的符号，恰好得到李括号的双导子延拓 $\{A,B\}_{(1-m)}$。□

在二维情形中，这是 [BSV24, (4.44)]中的标量。现在我们证明，在任意维数下，对交叉多胞体构型中的这些标量交替求和，具有一种几何解释，它确定了这些标量的大小和符号，使其不依赖于选择。

引理 4.6. 对于正定向交叉多胞体构型 $\mathcal{C}$ 如定义 3.9中所述，给定 $T_\varepsilon = T(D^1_{\varepsilon_1}, \ldots, D^m_{\varepsilon_m})$，有

$$\sum_{\varepsilon\in\{1,2\}^m} (-1)^{|\varepsilon|}\varphi_0(T_\varepsilon) = (-1)^m\ .$$

证明。 对于每棵树 T_ε，记 $\alpha_\varepsilon \coloneqq k_{D^m_{\varepsilon_m}} \cdots k_{D^2_{\varepsilon_2}}(\omega_{D^1_{\varepsilon_1}}) \in \Omega^1_c(\mathbb{R}^m)$，并递归地定义

$$\eta_1 \coloneqq \omega_{D^1_1} - \omega_{D^1_2} \in \Omega^m_c(\mathbb{R}^m)$$

并且，对于 $2 \leqslant r \leqslant m$，

$$\eta_r \coloneqq \left(k_{D^r_1} - k_{D^r_2}\right)\eta_{r-1}\ .$$

我们注意到，我们有

$$\eta_m = \sum_{\varepsilon\in\{1,2\}^m} (-1)^{|\varepsilon|}\alpha_\varepsilon\ ,$$

并且 η_r 对 $1 \leqslant r \leqslant m$是闭的；根据 η_1 是闭的且积分为零这一事实，可以通过归纳法证明这一点。现在我们用以下符号表示

$$c = \sum_{\varepsilon \in \{1,2\}^m} (-1)^{|\varepsilon|} \varphi_0^{(m)}(T_\varepsilon)$$

数值 我们要计算的值。利用上述定义，我们将其改写为

$$c = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^m} \left(\phi(\omega_{\widetilde{D}} + \omega_{\mathbb{R}^m}) + (-1)^m k_{\mathbb{R}^m}(\omega_{\widetilde{D}}) \wedge d_{\mathrm{dR}} \phi \right) ,$$

并利用同伦 $k_{\mathbb{R}^m}$ 以及斯托克斯定理，得到

$$c = \int_{\mathbb{R}^m} \phi \, \omega_{\widetilde{D}} \, .$$

我们还可以通过将形式 $\omega_{\widetilde{D}}$ 移离 ϕ的支集来改写这个积分。令

$$U_r \coloneqq D_1^r \cup D_2^r \, , \qquad 1 \leqslant r \leqslant m \, , \qquad U \coloneqq U_m \, ,$$

使得 $U_{r-1} \subset D_1^r \cap D_2^r$ 与 $\mathrm{supp}(\eta_r) \subset U_r$。选取一个包含$D$的开欧氏球 B。由于 $d_{\mathrm{dR}} \phi = \eta_m$ 的紧支集包含于 U中，函数 ϕ 在 $\mathbb{R}^m \setminus \mathrm{supp}(\eta_m)$的每个连通分支上为常数；也就是说，它在 B 之外以及其边界的一个邻域上为零，并且在 $\widetilde{D}$上取常值。现在我们选取一个形式 $\xi \in \Omega_c^{m-1}(\mathbb{R}^m)$，使得

$$d_{\mathrm{dR}} \xi = \omega' - \omega_{\widetilde{D}} \, ,$$

其中 ω' 支集位于 B之外。注意， ξ 在 $X = D \setminus D$上是闭的。于是我们得到

$$c = \int_{\mathbb{R}^m} \phi \left(\omega' - d_{\mathrm{dR}} \xi \right) = (-1)^{m-1} \int_{\mathbb{R}^m} \xi \wedge \eta_m \, ,$$

利用斯托克斯公式，并注意到 $\mathrm{supp}(\omega') \cap \mathrm{supp}(\phi) = \varnothing$，即可得到。我们将通过把上面的积分与一个在对应于构型 $\mathcal{C}$的交叉多胞体边界上的积分联系起来，计算该积分。

交叉多胞体的几何实现：现在我们来对圆盘链作几何实现。在构型中出现的每个圆盘 V 中选取一点 p_V，并将每个单形$\sigma = [V_0 \subsetneq \cdots \subsetneq V_q]$ 实现为一个光滑奇异链 $S(\sigma)$，其在 V_q中具有紧支集，顶点位于各点 p_V，且与微分相容，即：

$$S[V_i] = p_{V_i} \, , \qquad \partial S(\sigma) = S(\partial \sigma) \, .$$

利用每个圆盘的可缩性，可以按维数归纳法选取这些链。现在我们用这些链对交叉多胞体作几何实现。令 $Z_1 = p_{D_1^1} - p_{D_2^1}$ 并

$$B_j^r \coloneqq \sum_{\varepsilon \in \{1,2\}^{r-1}} (-1)^{|\varepsilon|} S\left[D_{\varepsilon_1}^1 \subsetneq \cdots \subsetneq D_{\varepsilon_{r-1}}^{r-1} \subsetneq D_j^r \right] \, , \qquad Z_r \coloneqq B_1^r - B_2^r \, ,$$

对于所有 $2 \leqslant r \leqslant m$和 $j \in \{1,2\}$。每个 B_j^r都是一个支集在 D_j^r中的（$r-1$）-链，我们计算

$$\partial B_j^r = (-1)^{r-1} Z_{r-1} \, .$$

从几何上看，第一步得到两条端点相同的路径，接下来得到两个填充由此产生的循环的曲面，以此类推。特别地，最高维链的带符号和为

$$Z_m = S(z_{\mathcal{C}}) \, ,$$

~其中， $z_{\mathcal{C}} \in C_{m-1}(N_\bullet \mathscr{D}(D;\, D))$ 是与交叉多胞体边界相对应的圆盘链循环。注意， $\mathcal{C}$ 的正向意味着 Z_m 表示 X中围绕 D 的~正向链接类。

迭代斯托克斯公式：我们断言，对于开集 $U_r = D_1^r \cup D_2^r$ 上的每个闭 $(r-1)$-形式 θ，都有

$$\int_{U_r} \theta \wedge \eta_r = \int_{Z_r} \theta \ .$$

我们对 r 使用归纳法证明此结论。对于 $r=1$，函数 θ 在每个圆盘D_j^1上都是常数，因此

$$\int_{U_1} \theta\,(\omega_{D_1^1} - \omega_{D_2^1}) = \theta(p_{D_1^1}) - \theta(p_{D_2^1}) = \int_{Z_1} \theta \ .$$

对于 $r \geqslant 2$，由于每个 D_j^r 都是可缩的，我们可以选取 $\lambda_j \in \Omega^{r-2}(D_j^r)$，使得 $d_{\mathrm{dR}}\lambda_j = \theta|_{D_j^r}$；利用斯托克斯公式可得

$$\begin{aligned}\int_{U_r} \theta \wedge \eta_r &= \int_{D_1^r} d_{\mathrm{dR}}\lambda_1 \wedge k_{D_1^r}(\eta_{r-1}) - \int_{D_2^r} d_{\mathrm{dR}}\lambda_2 \wedge k_{D_2^r}(\eta_{r-1}) \\ &= (-1)^{r-1} \int_{U_{r-1}} (\lambda_1 - \lambda_2) \wedge \eta_{r-1} \ .\end{aligned}$$

由此通过归纳法得出所需的恒等式。将此恒等式应用于上面由斯托克斯公式得到的 c 的表达式，其中取 $r=m$ 和 $\theta = \xi|_{U_m}$，可得

$$c = (-1)^{m-1} \int_{Z_m} \xi = (-1)^{m-1} \int_E (\omega' - \omega_{\widetilde{D}}) = (-1)^m \ ,$$

~其中 E 是满足 $D \Subset E \Subset D$ 的光滑圆盘。上式成立，是因为 ξ 在 X 上是闭的，且 Z_m 表示正向链接类，并与光滑圆盘 E的边界同调等价。□

定理 4.7。 令 $m \geqslant 2$。与因子化包络 $\mathfrak{Ug}^{\mathbb{R}^m}$ 相关的不变量与 $\mathrm{Sym}(\mathfrak{g}[1-m])$ 上的规范次数 $1-m$ 泊松括号相关，且

$$L^{(m)} = (-1)^m \{-,-\}_{(1-m)} \ .$$

因此，如果 $\mathfrak{g}$ 是非阿贝尔的，权 m 就是转移结构中第一个非零的高阶权。

证明。 将 $\widetilde{\beta}^{(m)}$ 在线性树上的公式对交叉多胞体循环求和，并应用引理 4.6，得到

$$L^{(m)} = (-1)^m \{-,-\}_{(1-m)} \ .$$

当 $\mathfrak{g}$ 为非阿贝尔时，该式非零，由命题 $[\widetilde{\beta}^{(m)}] \neq 0$可知 $[\widetilde{\beta}^{(m)}] \neq 0$，根据命题 3.12。结合命题 4.2，即可证明关于第一个非零高阶权的断言。□

对于 $m \geqslant 3$， $\mathfrak{Ug}^{\mathbb{R}^m}$ 的一阶类在 [BSV24第 4 节中被证明为零。3], 而非平凡的高阶障碍类则在 [BSV24第 1]节中得到预期；引理 4.7 证实了这一点，即对于权 m的非阿贝尔 $\mathfrak{g}$。总之，结合引理4.3 与引理4.7，我们得出：

推论 4 .8. 设 $m \geqslant 2$。对于因子化包络 $\mathfrak{Ug}^{\mathbb{R}^m}$，以下各项等价 :

(1) $\mathfrak{g}$是阿贝尔的，

(2) $L^{(m)} = 0$，*(3)*

$\mathfrak{Ug}^{\mathbb{R}^m}$ 是形式的。

4.2. 的因子化包络代数。现在，我们将上一小节的讨论推广到这样的情形： $\mathfrak{g}$表示一个任意的（无曲率） L_∞-代数，其运算为 ℓ_k ，次数为 $2-k$，微分为 ℓ_1。这不仅涵盖了上文考察的情形，也涵盖了任意微分分次李代数；后者可视为高阶运算 $\ell_k = 0$ 在$k \geqslant 3$时平凡的 L_∞-代数。与经典情形类似，其包络为

$$\mathfrak{U}_{\mathfrak{g}}^{(m)}(D) = \big(\mathrm{Sym}\big((\mathfrak{g} \otimes \Omega_c^\bullet(D))[1]\big), d_{\mathrm{lin}} + \delta\big) , \qquad \delta = \sum_{k \geqslant 2} d_k \ . \tag{5}$$

此处的 d_{lin} 由移位张量微分诱导，而 d_k 是 Chevalley–Eilenberg项，它将 k 生成元替换为它们的 ℓ_k-运算。另一个区别是，为了遵循符号约定，需要追踪内部次数：对于齐次的 a, $b \in \mathfrak{g}$，二元微分为

$$d_2\big((a \otimes \omega)(b \otimes \eta)\big) = (-1)^{|a| + |\omega|_{\mathrm{dR}}(|b|+1)} \ell_2(a,b) \otimes \omega \wedge \eta \ ,$$

将移位的 Chevalley–Eilenberg 符号与 b 和 ω的 Koszul 符号结合起来。选取一个强变形收缩 $(i_{\mathfrak{g}}, p_{\mathfrak{g}}, h_{\mathfrak{g}})$，将 $\mathfrak{g}$ 收缩到其上同调，并采用以下符号约定

$$\ell_1 h_{\mathfrak{g}} + h_{\mathfrak{g}} \ell_1 = \mathrm{id} - i_{\mathfrak{g}} p_{\mathfrak{g}} \ ,$$

并将线性收缩

$$\begin{aligned} i_D(a) &= i_{\mathfrak{g}}(a) \otimes \omega_D \ , \\ p_D(a \otimes \omega) &= p_{\mathfrak{g}}(a) \int_D \omega \ , \\ h_D(a \otimes \omega) &= (-1)^{|a|} a \otimes k_D(\omega) + h_{\mathfrak{g}}(a) \otimes \omega_D \int_D \omega \ . \end{aligned}$$

通过同样的对称化张量技巧，将其扩展到未扰动复形 $\big(\mathrm{Sym}((\mathfrak{g} \otimes \Omega_c^\bullet(D))[1]) \ d_{\mathrm{lin}}\big)$。与之前一样，积分在微分形式次数 m之外均为零。虽然 $h_{\mathfrak{g}}$ 遵循相反的符号约定，但移位确保所得同伦满足

$$d_{\mathrm{lin}} h_D + h_D d_{\mathrm{lin}} = i_D p_D - \mathrm{id} \ ,$$

正如第 2 节所要求的，并满足侧条件。

由于 d_k 将对称次数降低 $k-1$，同调扰动引理适用于δ，并将 d_{CE} 替换为 δ，即可通过相同公式得到收缩。如同上一小节，由于 δ 的每一项都会在 D 上楔积至少两个顶次形式，因此 $\delta i_D = 0$。因此，包含映射保持不变，转移微分为零，并且在每个圆盘 D 上，

$$H\mathfrak{U}_{\mathfrak{g}}^{(m)}(D) \cong \mathrm{Sym}\big(H^\bullet(\mathfrak{g})[1-m]\big) \ .$$

从现在起，令 $m \geqslant 2$。按照 [BSV24第 4 节2] 的论证，底层的严格预因子化代数结构就是 Sym 上的分次交换乘积$\big(H^\bullet(\mathfrak{g})[1-m]\big)$。下面的定理推广了上一小节的结果。证明方法相同，只是现在元素具有多个次数，而且$\mathfrak{g}$ 的收缩会带来额外的同伦。

定理 4.9。 对于 $m \geqslant 2$，式 (5) 的原始传递与改进的传递满足

$$\widehat{\beta}^{(2)} = \cdots = \widehat{\beta}^{(m-1)} = 0 \ , \qquad \widetilde{\beta}^{(2)} = \cdots = \widetilde{\beta}^{(m-1)} = 0 \ ,$$

且相应的高阶泊松不变量为

$$L^{(m)} = (-1)^m \{-,-\}_{(1-m)} \ ,$$

其中，$\mathrm{Sym}(H^\bullet(\mathfrak{g})[1-m])$ 上的次数为 $1-m$ 的李括号由

$$\{a,b\}_{(1-m)} = (-1)^{(m-1)|a|}\ell_2^H(a,b)\ , \qquad a,b\in H^\bullet(\mathfrak{g})\ ,$$

作为双导子。这里， ℓ_2^H 是 $H^\bullet(\mathfrak{g})$上的诱导李括号，定义为

$$\ell_2^H(a,b) = p_{\mathfrak{g}}\ell_2(i_{\mathfrak{g}}a, i_{\mathfrak{g}}b)\ .$$

因此，若 $\ell_2^H\neq 0$，权 m 是第一个非零的高权，且 $[\widetilde{\beta}^{(m)}]\neq 0$。

证明。证明的第一部分采用了引理4.2证明中的另一种次数计数论证，以涵盖 Chevalley–Eilenberg 微分中的所有项，以及 $\mathfrak{g}$的收缩同伦。

考虑 $\widehat{\beta}^{(r)}$的微扰展开中的一个求和项。令 q_k 表示 d_k出现的次数，令 u和 v 分别表示 $h_{\mathfrak{g}}$ 和德拉姆同伦的次数（也就是说，对于某个圆盘 E， k_E ）。这些同伦对每条内部边各出现一次，并且每次应用 d_k时也出现一次，因此

$$u+v = r-1+\sum_{k\geqslant 2} q_k\ .$$

每个 d_k 都保持底空间形式次数总和不变，并移除 $k-1$ 个因子，而只有德拉姆同伦会降低该次数。由于输入是 m-形式的乘积，且只有当所有剩余因子的底空间形式次数均为 m时，最终投影才非零，因此德拉姆同伦的次数必须满足

$$v = m\sum_{k\geqslant 2}(k-1)q_k\ ,$$

得到

$$r-1 = \sum_{k\geqslant 2}\big((k-1)m-1\big)q_k + u\ .$$

如果 $r<m$，则每个 q_k 都消失，因此所有同伦都是系数同伦。对于 $r\geqslant 2$，最低内部边上的同伦作用于 $i_{\mathfrak{g}}$的像，而该项消失，这是因为 $h_{\mathfrak{g}}i_{\mathfrak{g}}=0$。 ~命题 3.5 对 β给出了同样的消失结果。

证明的其余部分与上一小节中的证明方式相同，唯一的区别在于应用同伦时所产生的符号。对于齐次的 $a\in H^\bullet(\mathfrak{g})$，令 $A = i_{\mathfrak{g}}(a)$。于是

$$h_{D^m}\cdots h_{D^2}(A\otimes\omega_{D^1}) = (-1)^{(m-1)|a|}A\otimes\alpha_{D^\bullet}\ .$$

这说明了移位系数括号中的整体符号。唯一需要进行的微分几何计算与之前相同，即引理 4.6。
□

推论 4.10。令 $m\geqslant 2$，并考虑 (5) 上的无曲率 L_∞-代数 $\mathfrak{g}$的因子化包络，其中采用上述构造的改进的传递。如果 $L^{(m)}=0$，等价地 $\ell_2^H=0$，那么 $\widetilde{\beta}^{(m)}=0$。

证明。根据前一定理证明中的权重计数恒等式，每个保留下来的 $\widehat{\beta}^{(m)}$ 项都恰好包含一个 d_2 ，且不含系数同伦。因此，对于任意单项式输入，其系数部分包含

$$p_{\mathfrak{g}}\ell_2(i_{\mathfrak{g}}a, i_{\mathfrak{g}}b) = \ell_2^H(a,b)$$

对于所选的两个生成元因子，而其他每个系数都不变地传递到上同调中。因此 $\ell_2^H=0$蕴含 $\widehat{\beta}^{(m)}=0$，且命题 3.5 给出 $\widetilde{\beta}^{(m)}=0$。与 $L^{(m)}=0$ 的等价性由定理 4.9得到。□

Remark 4.11。 当 $\ell_2^H = 0$时，推论4.10 给出 $\widetilde{\beta}^{(m)} = 0$，但这并不意味着分量 $\widetilde{\beta}^{(r)}$ 对于 $r > m$是平凡的，因为它们可能取决于高阶 L_∞ 运算。这是本情形与 $\mathfrak{g}$ 为普通李代数时的情形之间的根本区别。当存在高阶结构时，我们无法直接推广引理4.8中的“当且仅当”陈述。

4.3. 紧化因子化包络。我们希望将上一小节专门化到物理学中特别感兴趣的一种情形，其中微分分次李代数由下式给出

$$\mathfrak{g} \otimes \Omega^\bullet(N), \quad [X \otimes \alpha, Y \otimes \beta] = [X, Y] \otimes \alpha \wedge \beta \ ,$$

其中 N 是一个闭流形，且 $\mathfrak{g}$ 是一个集中在零次、有限维的李代数。该微分分次李代数的因子化包络（5）可视为总空间 $\mathfrak{g}$ 上的 $\mathbb{R}^m \times N$ 平凡纤维丛因子化包络的推前的多项式模型；换言之，这是沿 N紧化的理论。具体而言，它由下式给出：

$$\mathfrak{U}^{(m)}_{\mathfrak{g},N}(D) = \big(\mathrm{Sym}\big((\mathfrak{g} \otimes \Omega^\bullet(N) \otimes \Omega^\bullet_c(D))[1]\big), d_{\mathrm{lin}} + d_{\mathrm{CE}}\big) \, .$$

取一个强变形收缩（i_N， p_N， h_N），将 $\Omega^\bullet(N)$ 收缩到其上同调，并令 $d_N h_N + h_N d_N = \mathrm{id} - i_N p_N$，再赋予 $V_N = \mathfrak{g} \otimes H^\bullet_{\mathrm{dR}}(N)$ 李括号

$$[X \otimes [\alpha], Y \otimes [\beta]]_\cup = [X, Y] \otimes [\alpha \wedge \beta] \ .$$

Then

$$H\mathfrak{U}^{(m)}_{\mathfrak{g},N} \cong \mathrm{Sym}\left(V_N[1-m]\right) \ .$$

展开定理4.9，我们得到 $\widetilde{\beta}^{(r)}$ 在 $2 \leqslant r < m$ 时消失，并且

$$L^{(m)} = (-1)^m \{-,-\}_{(1-m)} \ ,$$

其中，右侧的双导子由 N 的上同调类的杯积确定，具体为

$$\{X \otimes [\alpha], Y \otimes [\beta]\}_{(1-m)} = (-1)^{(m-1)|\alpha|} [X, Y] \otimes [\alpha \wedge \beta] \ .$$

我们注意到，在固定 $\mathfrak{g}$ 和沿基底 $\mathbb{R}^m$的“德拉姆同伦” k_D后， $\widetilde{\beta}^{(m)}$ 仅通过上述李括号依赖于纤维 N。这由引理 4.10证明中的论证可得。注意，在该论证中，为刻画 $L^{(m)}$ 对N的依赖性，完全不需要关于此流形的形式性假设，其马西积也从未出现。此外，引理 4.8 的等价性延伸到紧化：

命题 4.12。 设 $m \geqslant 2$，且 N 非空。则以下各项等价：

(1) $\mathfrak{g}$是阿贝尔的；*(2)* $L^{(m)} = 0$；*(3)* 紧化因子化包络 $\mathfrak{U}^{(m)}_{\mathfrak{g}\,N}$ 是形式的。

此外，若 $\mathfrak{g}$ 是阿贝尔的，则对每个 $r \geqslant 2$都有 $\widehat{\beta}^{(r)} = \widetilde{\beta}^{(r)} = 0$。

证明。如果 $\mathfrak{g}$ 是阿贝尔的，则 $\mathfrak{g}\otimes\Omega^\bullet(N)$ 的李括号为零，因此在引理 4.9 的证明中的权重计数里，每个 q_k 都为零，并且其中针对 $r < m$ 给出的论证适用于每个权重$r \geqslant 2$。这证明了最后一个断言，从而得到形式性。根据引理 3.12，形式性意味着 $L^{(m)} = 0$。最后，如果对于某个 X， $Y \in \mathfrak{g}$有 $[X, Y] \neq 0$，那么 $\{X\otimes[1], Y\otimes[1]\}_{(1-m)} = [X, Y]\otimes[1]$非零，因为 $[1] \neq 0$ 在 $H^0_{\mathrm{dR}}(N)$ 中，所以根据引理 4.9 有 $L^{(m)} \neq 0$。□

Remark 4.13. 对于非阿贝尔的 $\mathfrak{g}$，包络 $\mathfrak{U}^{(m)}_{\mathfrak{g}\,N}$ 永远不是形式的，而这一点已经可由 $L^{(m)}$ 检测出来，与 N无关。然而，高权重分量可能取决于 N的高阶结构。在引理 4.9 的证明中的权重计数里，系数同伦 h_N 只有在含有 $q_2 \geqslant 2$的项中才可能存留下来。最先出现的此类项的权重为 $2m$，其中有 $q_2 = 2$ 和 $u = 1$，并涉及闭形式α、β、γ的表达式 $p_N\big(h_N(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma\big)$，三重 Massey 乘积 N正是由此构造出来的。例如，Heisenberg 幂零流形具有非平凡的三重 Massey 乘积 [（FM04，第 2]节）；其极小模型是引理 3.8 中的代数 A；我们猜想，该流形与某个非阿贝尔李代数（例如 $\mathfrak{sl}_2$）一起，给出了一个例子，其中这一 Massey 乘积在权重$2m$处即可被检测出来。

5. Symmetric pairings

现在我们来考察第二类例子。它与上一节研究的因子化包络构造非常相似，但微分的扰动来自一个配对，也就是说，它是一种将两个生成元收缩为一个标量的运算（而前一类例子中的扰动来自线性项）。这一构造的特例给出了与自由 BF 型理论、阿贝尔 Chern–Simons 理论及其紧化相关联的预因子化代数。为更贴近物理学文献，我们添入一个上同调次数为零的形式参数 $\hbar$。这样一来，可观测量和所有转移运算都定义在 $\mathbb{R}[\hbar]$上。

5.1. 由对称配对得到的预因子化代数。 固定 $m \geqslant 1$，并令 V 为一个配备了闭分次对称配对的上链复形

$$B_V \colon V \otimes V \longrightarrow \mathbb{R}[m+1]\ ,$$

该配对允许退化。也就是说，我们有一个满足以下条件的标量配对

$$B_V(v,w) = (-1)^{|v||w|} B_V(w,v)\ , \qquad B_V(d_V v, w) + (-1)^{|v|} B_V(v, d_V w) = 0\ ,$$

并且我们注意到，非零配对要求 $|v| + |w| = -m - 1$。

对于每个圆盘 D，我们考察 V 值形式的空间 $\mathcal{E}_V(D) = V \otimes \Omega^\bullet_c(D)$，其配备了“线性”微分

$$d_{\mathrm{lin}}(v \otimes \alpha) = d_V v \otimes \alpha + (-1)^{|v|} v \otimes d_{\mathrm{dR}} \alpha$$

以及由 B_V 诱导的配对

$$B_D(v \otimes \alpha, w \otimes \beta) = (-1)^{|\alpha||w|} B_V(v,w) \int_D \alpha \wedge \beta.$$

这是一个次数为一的闭分次对称配对，我们将其扩展到

$$\Delta_V(\xi_1 \cdots \xi_a) = \sum_{i<j} (-1)^{\epsilon_{ij}} B_D(\xi_i, \xi_j) \prod_{k \neq i,j} \xi_k\ ,$$

其中 $(-1)^{\epsilon_{ij}}$ 是将 ξ_i, ξ_j 按此顺序移到最前面所需的 Koszul 符号。这个二阶算子在常数和线性生成元上为零，并满足

$$\Delta_V^2 = 0, \qquad d_{\mathrm{lin}} \Delta_V + \Delta_V d_{\mathrm{lin}} = 0\ .$$

因此，对于每个圆盘 D，

$$\mathfrak{F}_V(D) \coloneqq (\mathrm{Sym}(\mathcal{E}_V(D))[\hbar], d_{\mathrm{lin}} + \hbar \Delta_V)$$

是一个上链复形。我们将其在 $\hbar = 0$ 处的特化解释为 D 上的经典可观测量复形，并将 $\hbar\Delta_V$ 解释为对微分的 BV 量子修正。

与因子化包络的示例一样，我们可以通过在 $\mathbb{R}[\hbar]$ 上使用零延拓和对称乘法，将上述复形构造成一个预因子化代数。注意，对于扰动后的微分，这些映射仍然是上链映射：二阶算子 Δ_V 只有在对两个形式进行配对时才可能不再是导子，但由于它总是作用于具有不相交支集的形式，这种失效会消失。

令 $W = H^\bullet(V)$，并选择从 V 到 W 的收缩 (i_V, p_V, h_V)，其中

$$d_V h_V + h_V d_V = i_V p_V - \mathrm{id} \ ,$$

如第 2节中的情形，以及第 k_D 节中的德拉姆同伦 4。在线性复形上取

$$\begin{aligned} i_D(v) &= i_V(v) \otimes \omega_D \ , \\ p_D(v \otimes \omega) &= p_V(v) \int_D \omega \ , \\ h_D(v \otimes \omega) &= (-1)^{|v|+1} v \otimes k_D(\omega) + h_V(v) \otimes \omega_D \int_D \omega \ , \end{aligned}$$

从而如所需，我们有

$$d_{\mathrm{lin}} h_D + h_D d_{\mathrm{lin}} = i_D p_D - \mathrm{id} \ .$$

我们使用相同的张量技巧将这些映射扩展到对称幂，并用$\widehat{\ }$量子修正 $\hbar\Delta_V$进行扰动。所得映射 $\widehat{p}_D, h_D$ 由与之前相同的展开式给出，其中以 $\hbar\Delta_V$ 替换 d_{CE}。包含映射保持不变，转移微分为零： $\Delta_V i_D = 0$，因为 D 上的两个顶形式楔积为零。因此，

$$H\mathfrak{F}_V(D) \cong \mathrm{Sym}(W[-m])[\hbar]$$

且预因子化代数 $\mathfrak{F}_V$ 是局部常值的。

$\widehat{\ }$ $\widetilde{\ }$关于其传递 β 和 β，与因子化包络的例子一样，维数$m = 1$ 与 $m \geqslant 2$ 情形不同。我们先关注后者，稍后再回到一维的情形。

定理 5.1。 对于 $m \geqslant 2$，原始传递分量和改进的传递分量 $\widehat{\beta}^{(r)}$ 和 $\widetilde{\beta}^{(r)}$ 只有在以下条件下才可能非零:

$$r = 1 + q(m-1) \ , \qquad q \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0} \ .$$

严格乘积 $\widetilde{\beta}^{(1)}$ 是$\mathrm{Sym}(W[-m])[\hbar]$上的通常乘积，而相应的高阶泊松不变量是在$\mathrm{Sym}(W[-m])[\hbar]$ 上的 $\mathbb{R}[\hbar]$-双线性、次数为 $1-m$ 的双导子，其在线性单项式上的取值决定了它。

$$L^{(m)}(v, w) = \hbar(-1)^{m|v|} B_W(v, w) \ ,$$

其中 $B_W(v,w) := B_V\big(i_V(v)\ i_V(w)\big)$ 是 W上的诱导配对，它与 i_V 的选择无关，因为 B_V 是闭的。如果 $B_W \neq 0$，则权-m 阻碍类非零，这是首个非零的高权次数。

证明。 整个证明与前面的例子完全相同，因此这里只指出其中的差异。首先，系数标签始于 $\mathsf{im}(i_V)$。乘积将它们保留为独立因子，而收缩会移除成对的标签，因此没有任何运算会产生新的系数标签。因此，任何包含 h_V 的项都会消失。

权限制可通过与引理 4.2 中类似的次数计数得出；对于 $r = 1$，不存在收缩，因此得到通常的乘积。至于不变量的符号，线性树计算给出

$$\widetilde{\beta}^{(m)}(T)(v,w) = \hbar(-1)^{m+m|v|}\varphi_0^{(m)}(T)B_W(v,w)\ ,$$

因此，对一个正定向交叉多胞体构型求和再次归结为引理 4.6中的计算，从而得到所述公式。根据 $L^{(m)}$的双导子性质，利用定理3.13，我们将其推广到一般的单项式输入。□

我们注意到这一情形与上一节中的例子之间存在一个根本差异：~正如上面的证明所论证的，β 的任何分量都与内部同伦 h_V的选择无关。因此，它们都不可能依赖于 W上的高阶结构。另一种理解这一点的方式是使用下面的结果。

命题 5.2。 赋予 W 其诱导配对 B_W 和零微分。任意一组闭代表元 $i_V\colon\ W \to V$ 都会诱导预因子化代数 $\mathfrak{F}_W \xrightarrow{\simeq} \mathfrak{F}_V$之间的逐对象拟同构。

证明。 我们有 $B_V(i_V v,\ i_V w) = B_W(v,\ w)$，因此 $\mathrm{Sym}(i_V \otimes \mathrm{id})$ 的 $\mathbb{R}[\hbar]$-线性延拓与线性微分、收缩以及预因子化映射相交换，从而给出一个预因子化代数态射

$$\mathfrak{F}_W \to \mathfrak{F}_V\ ,$$

剩下的只需验证拟同构。可以按照对称次数进行过滤，并逐个检查每个分次分量，因为收缩会使该次数降低二，而每个相关分次分量上的映射都是拟同构的有限对称幂。□

换言之，我们构造的弱等价类型只取决于 $H^\bullet(V)$ 及其配对，即使超出这个首个不变量 $L^{(m)}$ 也是如此。因此，如果 W 上的诱导配对为零，那么 $\mathfrak{F}_V$ 就是一个形式预因子化代数。

在剩下的情形 $m = 1$中，配对进入乘积本身；类比因子化包络的情形（其中我们得到 Gutt 星乘积，将对称代数变形为 $\mathfrak{Ug}$），这里我们得到一个 Moyal 星乘积。

命题 5.3。 在维数为 $m = 1$时，对于所有 $r \geqslant 2$，高阶分量 $\widetilde{\beta}^{(r)}$ 都消失，并且$\mathfrak{F}_V$ 是形式的。对于位于 D_2左侧的 D_1， H 上的严格乘积是分次 *Moyal* 乘积

$$f \star_{\mathrm{M}} g = \mathrm{mult} \circ \exp\left(\frac{\hbar}{2}\partial_\Pi\right)(f \otimes g)\ , \qquad \Pi(\bar{v},\bar{w}) = (-1)^{|v|+1}B_W(v,w)\ .$$

这里mult 表示对称乘法，而 ∂_Π 表示对 f 的一个生成元与 g 的一个生成元使用 Π 进行收缩，并计入 *Koszul* 符号的求和。两个生成元的交换子为

$$\bar{v} \star_{\mathrm{M}} \bar{w} - (-1)^{(|v|+1)(|w|+1)}\bar{w} \star_{\mathrm{M}} \bar{v} = \hbar\,\Pi(\bar{v},\bar{w})\ .$$

Thus 这个结合乘积对由 Π确定的常值泊松括号进行量子化 .

证明。 乘积映射 $\mu_{(D_1,D_2)}$ 定义为

$$\mu_{(D_1,D_2)}(f,g) = \widehat{\beta}\big(\iota^{\mathbb{R}}_{D_1,D_2}\big)(f,g) = \widehat{p}_{\mathbb{R}}((f \otimes \omega_1)(f \otimes \omega_2))\ ,$$

其中 $\omega_j = \omega_{D_j}$。令 C 为 $\mathrm{Sym}(\mathcal{E}_V(\mathbb{R}))[\hbar]$ 上的二阶算子，在二次单项式上的定义为 $C(\xi\eta) = \Delta_V h_{\mathbb{R}}(\xi\eta)$，并按照 Δ_V 的定义，对所有成对项求和，将其扩展到高次单项式。因此，我们得到如下表达式

$$\widehat{p}_{\mathbb{R}} = \sum_{j\geqslant 0} \hbar^j p_{\mathbb{R}} C^j$$

对于扰动后的投影。记 $F_j(t) = k_{\mathbb{R}}(\omega_j) = \int_{-\infty}^{t} \omega_j$，于是我们利用对称化同伦和分部积分计算得出：

$$C\big((v\otimes\omega_1)(w\otimes\omega_2)\big) = \frac{1}{2}(-1)^{|v|+1} B_W(v,w)\int_{\mathbb{R}} \big(F_1\omega_2 - F_2\omega_1\big) = \frac{1}{2}\,\Pi(\bar{v},\bar{w})\ ,$$

因为 $F_1 = 1$ 在 D_2 上，且 $F_2 = 0$ 在 D_1上。同一公式表明，C 在携带相同形式的两个生成元上消失。注意，最后一个映射 $p_{\mathbb{R}}$ 将剩余的顶次形式积分为 1；随后，通过匹配作用于对称幂的求和 $\sum_{j\geqslant 0} C^j$ 与作用于张量的 $\exp(\hbar\,\partial_\Pi/2)$ 的对称系数，即可得到所需的乘积表达式。□

下面给出一些具体例子。取一个辛向量空间 $(\mathfrak{a},\kappa)$，得到一个复形 $V = \mathfrak{a}[1]$，其上有一个次数为 $m+1=2$的对称配对 $B_V = \kappa$。在这种情况下，

$$H = \mathrm{Sym}(\mathfrak{a})[\hbar] \quad \text{and} \quad \Pi = \kappa\ ,$$

因此（H，$\star$）是（$\mathfrak{a}$，κ）的 Weyl代数，从而得到拓扑量子力学的可观测量复形 [GRW22，第5节。1]。

类似地，对于 闭定向曲面 Σ，带有配对的复形 $V = \Omega^\bullet(\Sigma)[2]$

$$B_V(\alpha_2,\beta_2) = \int_\Sigma \alpha\wedge\beta$$

描述紧化到一条直线上的阿贝尔Chern–Simons理论，而该命题给出了 $H^\bullet(\Sigma)[1]$ 的 Weyl代数，其配对由庞加莱对偶诱导，见 [GRW22，第5.3节。3]。

5.2. **自由BF理论**。本节研究的带配对复形构造的一个例子类别来自 BF型理论 [Hor89、CR01]。更确切地说，我们考虑带有移位 k 的 [CMR18，第 3], 节中的阿贝尔 BF 理论的推广，其域取值于

$$\Omega^\bullet(M)[n-k-1]\oplus\Omega^\bullet(M)[k]\ ,$$

其中 M 是一个维数为 n的流形。我们将在 $M = \mathbb{R}^m\times N$上考虑该理论的多项式模型，并将其紧化到一个维数为 $d = n-m$的闭光滑流形 N上。取整数 s，t，满足 $s+t = n+1$，并选取一个有限维向量空间 $\mathfrak{a}$。我们考虑系数复形

$$V = (\mathfrak{a}\otimes\Omega^\bullet(N))[s]\oplus(\mathfrak{a}^\vee\otimes\Omega^\bullet(N))[t]\ ,$$

在每个单独的直和项上的配对均为零，其他情况下则由下式确定：

$$B_V(x\otimes\alpha_s,\lambda\otimes\beta_t) = (-1)^{t|\alpha|}\lambda(x)\int_N \alpha\wedge\beta\ .$$

注意，这个配对的次数为 $s+t-d = m+1$，因此我们可以考虑预因子化代数 $\mathfrak{F}_V$。该预因子化代数的上同调为

$$H\mathfrak{F}_{\mathrm{BF}}^{N;s,t} \cong \mathrm{Sym}\big(\mathfrak{a}\otimes H^\bullet_{\mathrm{dR}}(N)[s-m]\oplus\mathfrak{a}^\vee\otimes H^\bullet_{\mathrm{dR}}(N)[t-m]\big)[\hbar]\ .$$

对于 $m \geqslant 2$，定理 5.1 给出了它的高阶泊松不变量，其在线性单项式上的取值为

$$L^{(m)}(x \otimes [\alpha], \lambda \otimes [\beta]) = \hbar(-1)^{(t-m)|\alpha|+ms}\lambda(x)\int_N \alpha \wedge \beta \ ,$$

并且在来自同一加项的配对上取零。因此，对于 $\mathfrak{a} \neq 0$，我们在每个基底维数 $m \geqslant 2$下都得到一个非零的首个不变量。

若改为 $m = 1$，使得 $\dim N = n - 1$，则引理 5.3 适用，我们得到一个形式的预因子化代数，其严格乘积为莫亚尔变形严格乘积。由于 $(s-1)+(t-1) = \dim N$，庞加莱对偶将 $\mathfrak{a}^\vee \otimes H^\bullet_{\mathrm{dR}}(N)[t-1]$ 识别为

$$U = \mathfrak{a} \otimes H^\bullet_{\mathrm{dR}}(N)[s-1] \ ,$$

并将 Π 与该空间上的典范配对联系起来（相差一个符号）。我们通过取 k，将此与 [CMR18] 在 $M = N \times \mathbb{R}$ 上的 $s = n-k$-移位阿贝尔 BF 理论联系起来；令 $t = k+1$，则 $H\mathfrak{F}_V$是 $U \oplus U^\vee$的 Weyl代数，即与“空间切片” T^*U相关联的余切空间 N的量子化。

对于通常的 BF 理论，我们取 $k = 1$，因此 $M = N \times \mathbb{R}$ 上的零次域成为一个联络一形式和一个（$n-2$）形式。所得代数恰好是 $T^*H^1(N;\ \mathfrak{a})$ 的 Weyl代数，即阿贝尔 BF 理论在 M [Hor89]上的约化相空间。

5.3. 高阶阿贝尔 Chern–Simons 理论及其紧化。 最后，我们考察具有对称配对的复形在某些特定维数下才有意义的构造特例。我们取

$$n = 4\ell + 3 \ , \quad s = (n+1)/2 = 2\ell + 2 \ ,$$

并令 $(\mathfrak{a},\ \kappa)$ 为一个具有非退化对称配对的有限维向量空 g.

高阶阿贝尔 Chern–Simons 理论 [GRW22] 的域为 $\mathfrak{a} \otimes \Omega^\bullet(-)[s-1]$；将其紧化在一个非空的闭有向流形 N 上，其维数为 $d = n - m$，得到带有如下配对的系数复形

$$V = (\mathfrak{a} \otimes \Omega^\bullet(N))[s] \ , \qquad B_V(x \otimes \alpha, y \otimes \beta) = \kappa(x,y)\int_N \alpha \wedge \beta \ .$$

由于 s是偶数且 $2s - d = m + 1$，这是一个具有所需次数和对称性的配对。所得预因子化代数 $\mathfrak{F}^{N,\ \mathfrak{a}}_{\mathrm{CS}}$ 是高阶阿贝尔 Chern–Simons 理论推前的多项式模型。

定理5.1 给出

$$H\mathfrak{F}^{N,\mathfrak{a}}_{\mathrm{CS}} \cong \mathrm{Sym}\big(\mathfrak{a} \otimes H^\bullet_{\mathrm{dR}}(N)[s-m]\big)[\hbar] \ ,$$

配备移位后的庞加莱配对

$$L^{(m)}(x \otimes [\alpha], y \otimes [\beta]) = \hbar(-1)^{(s-m)|\alpha|}\kappa(x,y)\int_N \alpha \wedge \beta \ .$$

现在我们将这一情形与 [BSV24 第 5] 节所分析的情形进行比较。对于 $n = 3$，$m = 2$，$N = S^1$ 以及带有其标准配对的 $\mathfrak{a} = \mathbb{R}$，这给出 $L^{(2)}([1],\ [dt]) = \hbar$，其中 $\int_{S^1} dt = 1$，从而在 $\hbar = 1$ 处恢复了他们的定理 5.1。当我们取 $N =$pt 上的平凡紧化时，在上同调层面得到常值族

$$\mathrm{Sym}(\mathfrak{a}[-(2\ell+1)])[\hbar] \ ,$$

其第一个不变量为 $L^{(n)}(x,\ y) = \hbar\kappa(x,\ y)$。对于 $n = 3$，这是 $\mathbb{R}^3$ 上的阿贝尔Chern–Simons理论，其一阶类消失。正如该文献中所预期的，确实存在非平凡的高阶障碍类，即权为三的类 $L^{(3)} = \hbar\kappa \neq 0$。

References

[BSV24] S. Bruinsma、A. Schenkel 和 B. Vicedo. 预因子化代数的普适一阶马西积. *Communications in Mathematical Physics*, 405(9):206, 2024. arXiv: 2307.04856. [CG17] K. Costello 和 O. Gwilliam. *Factorization Algebras in Quantum Field Theory*. 新数学专著丛书第 31 卷. 剑桥大学出版社，剑桥，2017. DOI: 10.1017/ 9781316678626.[CG21] K. Costello 和 O. Gwilliam. *Factorization Algebras in Quantum Field Theory*. 新数学专著丛书第 41 卷. 剑桥大学出版社，剑桥，2021. DOI: 10.1017/ 9781316678664.[CMR18] A. S. Cattaneo、P. Mnev 和 N. Reshetikhin. 带边流形上的微扰量子规范理论. *Comm. Math. Phys.*, 357(2):631–730, 2018. arXiv: 1507.01221. [CR01] A. S. Cattaneo 和 C. A. Rossi. 巴塔林–维尔科维斯基形式中的高维 BF 理论：BV 作用量与广义威尔逊环. *Comm. Math. Phys.*, 221(3):591–657, 2001. arXiv: math/0010172.[Dim12] B. Dimitrova. *Obstruction theory for operadic algebras*. 博士论文，波恩莱茵弗里德里希－威廉大学，2012. https://hdl.handle.net/20.500.11811/5307. [DKS23] T. Dyckerhoff、M. Kapranov 和 Y. Soibelman. 黎曼曲面上的反常层作为米尔诺层. *Forum of Mathematics, Sigma*, 11:e92, 2023. arXiv: 2012.11388. [Emp25] C. Emprin. 同伦等价的阻碍序列. *preprint*, 2025. arXiv: 2509.17895. [Emp26] C. Emprin. Kaledin 类与形式性判据. *Advances in Mathematics*, 507:111376, 2026. arXiv: 2404.17529.[FM04] M. Fernández 和 V. Muñoz. 关于非形式的单连通流形. *Topology Appl.*, 135(1–3):111–117, 2004. arXiv: math/0212141. [GRW22] O. Gwilliam、E. Rabinovich 和 B. R. Williams. 因子化代数与阿贝尔 CS/WZW 型对应. *Pure Appl. Math. Q.*, 18(4):1485–1553, 2022. arXiv: 2001.07888. [Hor89] G. T. Horowitz. 精确可解的微分同胚不变理论. *Comm. Math. Phys.*, 125(3):417–437, 1989. DOI: 10.1007/BF01218410. [Kal07] D. Kaledin. 关于族中的形式性的若干评论. *Mosc. Math. J.*, 7:643–652, 2007. arXiv: math/ 0509699.[Lun10] V. A. Lunts. DG代数的形式性（据 Kaledin）. *Journal of Algebra*, 323(4):878–898, 2010. arXiv: 0712.0996v4.[LV12] J.-L. Loday 和 B. Vallette. *Algebraic operads* 346 *Grundlehren der Mathematischen* , volu *Wissenschaften* 2012 10 1007 978 3 642 30362 3 me of . 施普林格，. DOI: . / - - - - . [MR19] V. Melani 和 M. Rubio. 歌剧上代数的形式性判据. , : – . arXiv: . v .[War21] B. Ward. 图同调的马西积. *IMRN*, 2022(11):8086–8161, 01 2021. arXiv: 1903. 12055v3.

Coline Emprin, Department of Mathematics, Stockholm University, SE-106 91, Sweden*Email address*: coline.emprin@math.su.seAlex Takeda, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 22460-320, Rio de Janeiro, Brazil *Email address*: alex.takeda@impa.br