arXiv:2611.33129v1 [quant-ph] 24 Nov 2026

A Koashi –Imoto 准则：Holevo 率可达的可见压缩 n

Anthony M. Polloreno*

摘要

对于一种有限无记忆量子源，其编码器已知经典标签序列。我们确定了在共享经典随机性且不共享纠缠的情况下，何时能够达到 Holevo 率。在信号系综的最大 Koashi–Imoto 分解中，当且仅当每个信号在其所占据的每个扇区的量子部分上都是纯态时，才能达到该速率。对于量子比特，这意味着所有信号要么都是纯态，要么两两对易。如果任何被占据的量子部分是混合态，那么对于所有平均局部误差足够小的编码，其速率都与 Holevo 信息保持正距离，且该结论对区块长度一致成立。为证明逆向定理，我们对一列假设存在的可见编码应用 Fawzi–Renner恢复：这些编码在局部误差趋于零时趋近 Holevo 率；随后再调用 Baghali Khanian and Winter 针对盲压缩证明的解耦界。

关键词。 Holevo信息、Koashi–Imoto 分解、共享随机性、可见压缩。

1 引言

在可见压缩中，Alice 知道 Bob 要在信号寄存器 W 上复现的状态 ω_x 的标签 x 。我们允许 Alice 发送量子消息，并与 Bob 共享经典随机性，如图 1 所示。由于一个混合态可以有多种纯态分解，她可以利用共享随机性，在同一信号的不同制备方式之间进行选择。设 X 表示源标签，在每次使用时以概率 p_x 独立抽取；设 S 表示以比特为单位的冯·诺伊曼熵。使用共同随机性的最优速率记为 R_{cr}，其单位为每个信号的量子比特数，并且下界由 Holevo信息 [1–4] 给出

$$\chi = S(\bar{\omega}) - \sum_x p_x S(\omega_x), \qquad \bar{\omega} = \sum_x p_x \omega_x. \tag{1}$$

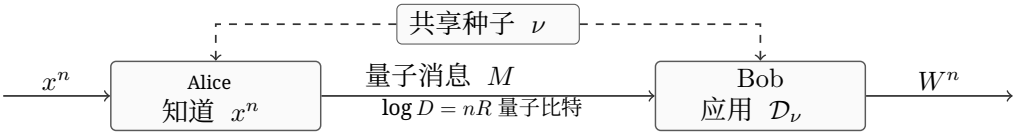

图 1：对于由 n 个源标签组成的词 x^n ，Alice 以每个信号 $R = (\log_2 D)/n$ 个量子比特的速率发送一个 D 维量子寄存器 M 。Bob 应用解码信道 $\mathcal{D}_\nu$，生成 W^n。共享种子 ν 与信源相互独立。对于每个词，我们将 Bob 的种子平均输出与 $\bigotimes_i \omega_{x_i}$ 进行比较，并对所有词的迹距离取平均。

对于纯信号，舒马赫压缩可达到 χ [5]。对易信号则可通过经典信道模拟达到相同速率：Alice 和 Bob 在共同本征基中模拟一次抽样，之后

*电子邮箱：ampolloreno@gmail.com。

Bob 制备相应的本征态 [4, 6]。Winter [4, Conj. 23] 和 Bennett 等人 [7, 预印本, Conj. 27] 猜想，共享随机性足以应对任意系综。已知压缩到子空间 [8] 以及通信与共享纠缠的合并代价 [9]的单次下界。对于盲压缩，即 Alice 接收 ω_x 但不知其标签x的情形，Koashi–Imoto（KI）分解 [10] 决定了最优速率 [11, 12]。本文使用同一分解刻画可见速率等于 χ的条件：每个占据的量子部分都必须是纯态。对于任何具有混合占据量子部分的信源，即使采用更弱的局部误差准则，逆向定理也给出一个一致间隔。

一个量子比特示例。设 $P_u = |u\rangle\langle u|$ 和 $P_v = |v\rangle\langle v|$ 是图 2(c)中偏心弦的纯态端点。考虑这条弦上的两个不同混合态 $\omega_x = (1 - t_x)P_u + t_x P_v$, $x \in \{0, 1\}$。直接对这些信号进行舒马赫压缩，每个信号的代价为 $S(\bar{\omega})$ 个量子比特 [5]。另一种方法是让$U \in \{u, v\}$ 记录一个采样端点，其中 $\Pr(U = v \mid X = x) = t_x$。借助共享随机性，Alice 和 Bob 可以模拟 U，代价为每个信号 $C = I(X : U)$ 比特，即源标签与端点之间的互信息

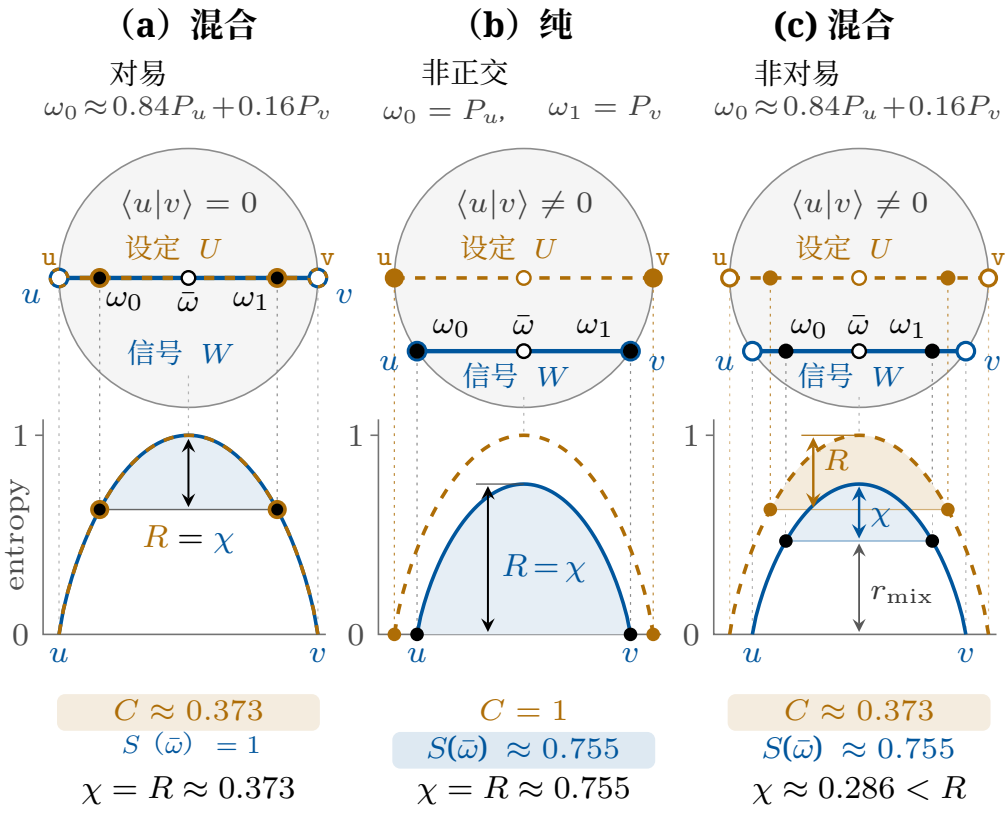

图2：两个等概率标签沿弦的熵。在每个面板中，$t_1 = 1 - t_0$，其中 (a) 和 (c) 中为$t_0 = (1 - \sqrt{8/17})/2$，(b) 中为 $t_0 = 0$。重叠度 $|\langle u|v\rangle|$ 在 (a) 中为零，在 (b) 和 (c) 中为$2\sqrt{2}/5$。虚线直径表示经典寄存器 U 在其自身基下的情况。实线弦表示物理量子比特 W。点状辅助线标出相应曲线上每个标签的熵。从标签熵的平均值升至峰值的部分，在虚线上给出 $C = I(X : U)$，在实线上给出 $\chi = I(X : W)$。高亮部分标示所示两种方案中代价较低者，即 $R = \min\{C, S(\bar{\omega})\}$。(a) 和 (b) 中，$R = \chi$。(c) 中，$r_{\mathrm{mix}} = S(W|X)$，且所示差值 $R - \chi$从上方界定最优差距 $R_{\mathrm{cr}} - \chi$。定理 1 证明，对于这一混合的非对易对，最优差距为正。

。Alice 可以将每个比特作为一个量子比特通过正交基发送，Bob 则在 W上制备端点状态。由于其制备仅取决于 U，条件互信息 $I(X\colon W|U)$ 为零。结合 $\chi = I(X\colon W)$，由链式法则可得

$$C = I(X:U) = I(X:UW) = \chi + I(X:U|W).$$

因此，等号 $C = \chi$意味着 $I(X\colon U|W) = 0$，从而无论标签是 [15]中的哪一个，都能仅凭量子比特通过一个信道恢复联合端点记录和量子比特。

每个端点投影算子都是两个不同混合态的仿射组合。根据线性性，恢复信道必须保留每个纯端点并附上其标签。根据内积的保持性质，一个保留两个非正交纯态的等距变换会为两者留下相同的辅助态 [16, 命题 7。2]。 U 中所需的标签彼此正交，因此 $C > \chi$。

图 2(c) 中的端点协议代价较低，其代价比 χ 高出约 0.087 个每个信号的量子比特。Soljanin 在另一种量子比特分解中发现了类似的超额 [13,例 1]。绘出的超额从上方界定了 $R_{\mathrm{cr}} - \chi$。定理 1 证明了这对状态的 $R_{\mathrm{cr}} - \chi > 0$。由于纯解码块可能具有混合边缘态，逆向定理在考察单个位置时会保留先前的量子输出。补充材料给出了一般速率公式（定理 5），并给出一个系综，其中两个副本的每信号分解代价严格低于一个副本（定理 13）。

2 模型与等式判据

该系综定义了经典-量子（cq）状态 $\sigma_{XW} = \sum_x p_x |x\rangle\langle x| \otimes \omega_x$，其有限字母表为$\mathcal{X}$, $p_x > 0$，且 W 为有限维。因此 $\chi = I(X\colon W)_\sigma$。我们用 H表示香农熵。除非另有说明，所有对数均以 2 为底。

对于由 n 个独立标签组成的块，Alice 发送一个状态 $m_{x^n,\ \nu}$，该状态属于一个 D维寄存器 M，而 Bob 应用一个解码信道 $\mathcal{D}_\nu$。他们共享的种子 ν 与 X^n相互独立，且没有其他通信或共享纠缠。对种子取平均后，得到解码态$\tau_{X^n W^n}$，其源先验分布和条件输出为 $\mathbb{E}_\nu \mathcal{D}_\nu(m_{x^n,\ \nu})$。令 $d(a,\ b) = \frac{1}{2}\|a - b\|_1$，全局误差和平均局部误差为

$$\delta = d(\tau_{X^n W^n}, \sigma_{XW}^{\otimes n}), \qquad \delta_{\mathrm{loc}} = \frac{1}{n}\sum_i d(\tau_{X_i W_i}, \sigma_{XW}) \le \delta. \tag{2}$$

在每个单点边缘态中，保留标签 X_i，并对其余标签取平均。Baghali Khanian、Kuroiwa 和 Leung [17] 给出了正平均局部失真下无辅助可见压缩的正则化速率公式。编码速率为 $R = (\log D)/n$ 个量子比特/信号。更确切地说，R_{cr}是满足 $n \to \infty$和 $\delta \to 0$的序列中 lim sup R的下确界。

整个族 $\{\omega_x\}$决定了 W [10]的最大 Koashi–Imoto 分解。在带有参考系统 [18, 的表述中，定理 14], 这里的参考系统是 X。我们将 W 限制在 $\bar{\omega}$的支撑上。在每个位置测量支撑投影算子，并将互补结果替换为支撑上的一个固定态，不会改变任何目标态，且会同时降低两种误差。同一个正交分解 $W = \bigoplus_j Q_j \otimes N_j$ 将每个信号表示为

$$\omega_x = \bigoplus_j p(j|x)\, \rho_{jx} \otimes \xi_j. \tag{3}$$

在扇区 j 中，量子部分 Q_j （核心）上的状态 ρ_{jx} 以及扇区概率 $p\,(j|x)$可以依赖于 x。由于无需扰动即可读取扇区 J，Bob 可以丢弃 N_j，并恢复

它在固定态 ξ_j 下的局部状态。因此，约化信源 JQ 具有相同的速率和 Holevo信息。取 $\dim Q = \max_j \dim Q_j$，并将每个 Q_j 等距嵌入 Q。经典寄存器 J 记录扇区，得到约化状态

$$\sigma_{XJQ} = \sum_{x,j} p_x p(j|x) |x,j\rangle\langle x,j| \otimes \rho_{jx}.$$

写出 $q_j = \sum_x p_x p(j|x)$。对于 $q_j > 0$，令 $p(x|j) = p_x p(j|x)/q_j$ 和 $\bar{\rho}_j = \sum_x p(x|j)\rho_{jx}$。熵链式法则给出

$$\chi = I(X:J) + S(Q|J) - S(Q|XJ), \tag{4}$$

其中 $S(Q|XJ) = \sum_{x,\ j} p_x p(j|x) S(\rho_{jx})$。

定理 1。 在拥有无限共享随机性的情况下，当且仅当 ρ_{jx} 对每个 (x,j)均为纯状态，其中 $p_x p(j|x) > 0$。一般而言，

$$\chi \le R_{\mathrm{cr}} \le \chi + S(Q|XJ). \tag{5}$$

如果其中一个状态是混合状态，则存在仅取决于信源的 ϵ、$\delta_0 > 0$，使得在每个区块长度下满足 $\delta_{\mathrm{loc}} \le \delta_0$ 的每个编码都有 $R \ge \chi + \epsilon$。

作为比较，无辅助的最优盲压缩率为 $R_{\mathrm{blind}} = H(J) + S(Q|J)$ [11,12]。减去（4）得到

$$R_{\mathrm{blind}} - \chi = H(J|X) + S(Q|XJ).$$

因此，给定标签后对扇区的不确定性，或已占用量子部分内的混合度，都足以造成盲压缩的速率差距。在可见模型中，Alice 和 Bob 可以以速率$I(X:J)$模拟该扇区。定理 1 表明，此时已占用量子部分内存在混合度是出现速率差距的必要且充分条件。

对于量子比特，非对易系综有一个扇区，其 $Q = W$；而对易系综的量子部分均为一维。因此，这一判据解释了图 2 中的三个例子。

Koashi 和 Imoto 的界 [19] 已经给出了无需共享种子时的等式条件：当 x 确定 j且ρ_{jx} 为纯态时。此时，给定 x后，扇区仍可能是随机的。例如，考虑三能级量子态$\omega_x = \frac{1}{2}|e\rangle\langle e| \oplus \frac{1}{2}|\psi_x\rangle\langle\psi_x|$，其中 $|e\rangle$是擦除标志，而 $|\psi_0\rangle$，$|\psi_1\rangle$是彼此不同的非正交量子比特态。一个公平硬币决定是否发生擦除，而压缩未被擦除的纯信号，每个信源信号需要$\chi = \frac{1}{2} S(\sum_x p_x |\psi_x\rangle\langle\psi_x|)$。此处 $H(J|X) = 1$，因此盲压缩每个信号要多花一个量子比特。

3 定理 1 的证明

3.1 通过扇区模拟实现可达性

Hayden、Jozsa 和 Winter 将经典信道模拟与纯态信源的条件 Schumacher 压缩结合起来，见 [16, 第 4 节3]。我们将扇区索引作为模拟变量。在已知 x^n 的情况下，Alice 使用共享种子与 Bob 模拟条件扇区分布 $\prod_i p(j_i|x_i)$。他们获得相同的 j^n，且 (X^n, J^n) 的联合分布与 $p_{XJ}^{\otimes n}$ 之间的全变差为 $\eta_n \to 0$。对于每个信源信号，模拟使用 $I(X:J) + o(1)$ 个通信比特，这些比特以正交态发送；同时使用 $H(J|X) + o(1)$ 个共享比特，见 [4,定理 9 和注释 10]。式 (3) 中的界 $H(J|X) \le \sum_x p_x S(\omega_x)$ 也符合 Winter 的共享随机性预算。

在理想定律下，扇区为 j 的位置构成一个信源，其标签分布为 $p(x|j)$，平均态为 $\bar{\rho}_j$。Alice 和 Bob 按扇区对这些位置分组，并在每组中以高于

$S(\bar{\rho}_j)$ 的任意速率进行舒马赫压缩。对于混合 ρ_{jx}，Alice 可以从其谱分解中抽取一个纯状态。对该抽样取平均可恢复目标态，并且只会降低平均迹距离误差。Bob 恢复原始顺序，并在每个位置附加 ξ_j 。

每个扇区中的位置比例依概率收敛于 q_j。因此，对于任意 $a > 0$，在典型扇区字符串上，一个大小为 $\lceil n[S(Q|J)+a] \rceil$ 量子比特的固定量子寄存器就足够了。对于其余字符串，Bob 使用固定输出。扇区数量有限，因此它们的平均块误差之和趋于零，而代入模拟的扇区分布至多使全局误差增加 η_n 。因此，总速率可以趋近于 $I(X\colon J) + S(Q|J) = \chi + S(Q|XJ)$；当所有占用的$\rho_{jx}$都是纯态时，该速率等于 χ。

3.2 一般块码的逆向定理

读取任意解码块的各个扇区并丢弃 N_j ，只会减少误差。根据引理 [20, ，我们首先通过细化共享种子，使编码消息变为纯态。对于每个种子，为每个可能的源词抽取一个谱分量，并将整张表纳入种子中。该表与实际源词无关，而取平均后会重现原始输出。对于固定的n 和 D，解码后的元组位于由纯编码族和解码器产生的元组所组成的紧集的凸包中，因此 Carath´eodory 定理给出了一个有限种子 ν。

对于每个扇区结果 j^n，在经典寄存器 U 中，除了 ν 和 j^n，还保留约化解码器的克劳斯指标。给定 X^n 和 U 后，解码块 Q^n 为纯态。由数据处理、种子的独立性以及 D 维的 Holevo界 [1] ，可得

$$\begin{aligned} I(X^n : UQ^n) &= I(X^n : U) + S(Q^n|U) \\ &\le I(X^n : M|\nu) \le \log D. \end{aligned} \tag{6}$$

均匀分布地选择一个块位置 i ，使其独立于信源和种子，并令 $X = X_i$、 $J = J_i$ 和 $Q = Q_i$。因此， X 具有原始源分布。将前序量子输出纳入 $Z = (i,\ U,\ Q_{<i})$ ，并用固定纯态填充未使用的槽位。由凸性，所得状态 γ 满足 $d\ (\gamma_{XJQ},\ \sigma_{XJQ}) \le \delta_{\mathrm{loc}}$。于是得到

$$R \ge I(X : JQZ)_\gamma, \tag{7}$$

$$R \ge I(X : J)_\gamma + S(Q|JZ)_\gamma. \tag{8}$$

事实上，由标签的独立性，对任意 B，都有 $I\ (X^n\colon\ B) \ge \sum_i I\ (X_i\colon\ B)$ 。取 $B = UQ^n$ 后，在项 i 中保留 $UQ_{<i}Q_i$，也会在 U 中保留 J_i。取平均即得 (7)，因为 X 独立于 i。取 $B = U$ 后，保留 J_i 可得 $I\ (X^n\colon\ U)\ /n \ge I\ (X\colon\ iJ)\ _\gamma \ge I\ (X\colon\ J)\ _\gamma$。由于 U 包含 J^n，由链式法则可得 $S\ (Q^n|U)\ /n = S\ (Q|JZ)\ _\gamma$。将这些估计代入 (6)，即可证明 (8)。

3.3 混合量子部分的正间隙

现在我们证明，存在混合量子部分时，即使局部误差趋于零，编码码率也无法趋近于 χ。将 $\Delta = R - I(X\colon JQ)_\gamma$记为超出解码后 Holevo信息的部分。由 (7) 可得，$\Delta \ge 0$。利用互信息链式法则以及 $S(Q|JZ) = S(Q|J) - I(Q\colon Z|J)$，我们可以将 (7)–(8) 表示为

$$\begin{aligned} I(X : Z|JQ)_\gamma &\le \Delta, \\ I(Q : Z|J)_\gamma &\ge S(Q|XJ)_\gamma - \Delta. \end{aligned} \tag{9}$$

由于 $\delta_{\mathrm{loc}} \to 0$， $I\ (X\colon\ JQ)\ _\gamma \to \chi$，因此 $\Delta \ge 0$给出了 Holevo下界。如果一个具有 $S\ (Q|XJ)\ _\sigma > 0$ 的信源没有一致间隔，那么某些编码将具有 $\delta_{\mathrm{loc}} \to 0$ 和 $R \le \chi + o(1)$，从而 $\Delta \to 0$。第一个

不等式允许仅作用于 JQ的信道，从 XJQ近似再现联合状态 $XJQZ$。由于 X 记录了标签且未受到影响，同一个信道必须适用于每个具有正概率的标签。第二个不等式要求这个相同的辅助系统 Z 保留能够说明扇区内混合情况的关联。

用上标 j 表示以 $J = j$为条件。在源概率为 $q_j > 0$的每个扇区中，解码后的概率趋于 q_j 和 $\gamma^j_{XQ} \to \sigma^j_{XQ}$。由于 $I(X:\ Z|JQ)\gamma$ 是非负扇区项的平均值，因此 $I(X:Z|Q)_{\gamma^j} \to 0$。扇区测量将解码后的 Q 置于嵌入空间 Q_j 中，并以 $J = j$为条件。对于序列中的每个编码，Fawzi–Renner 恢复定理 [21] 给出一个信道 $\mathcal{R}_j : Q_j \to Q_j Z$ ，使得

$$d\big(\gamma^j_{XQZ}, (\mathrm{id}_X \otimes \mathcal{R}_j)(\sigma^j_{XQ})\big) \longrightarrow 0, \tag{10}$$

其中，收缩性使我们可以将源边缘态用作输入。记 $\beta^j_{XQZ} = (\mathrm{id}_X \otimes \mathcal{R}_j)(\sigma^j_{XQ})$。则 $\beta^j_{XQ} \to \sigma^j_{XQ}$ 在迹距离意义下成立。

Baghali Khanian and Winter 对近似保源信道 [12]在环境中遗留的关联给出了上界。我们应用他们预印本中的定义 5 和引理 6 的第 3、5 部分，取参考系统 X。根据 (3) 的极大性，条件源 σ^j_{XQ} 只有一个 Koashi–Imoto 扇区，且冗余部分平凡。在这种情况下，他们的 $J_\varepsilon(\sigma^j_{XQ})$ 是满足以下条件的等距映射 $Q_j \to Q_j E'$ 上的 $I(Q:\ E')$ 的最大值：其 XQ 输出与 σ^j_{XQ}的保真度至少为 $1 - \varepsilon$。他们的引理给出$J_\varepsilon(\sigma^j_{XQ}) \to J_0(\sigma^j_{XQ}) = 0$，其值为 $\varepsilon \to 0$。

将 $\mathcal{R}_j$ 扩展为等距变换 $Q_j \to Q_j ZE$，于是 ZE 是其边缘信道到 Q_j的环境。最小环境的维数至多为 $(\dim Q_j)^2$，并且可以等距嵌入 ZE，因此该界对每个 $\dim Z$都适用。 XQ 边缘态为 β^j_{XQ}，其与 σ^j_{XQ} 的保真度趋于一。因此，丢弃 E 后，根据数据处理可得 $I(Q:\ Z)_{\beta^j} \to 0$。由于 $S(Q|Z)$的连续性界仅取决于 $\dim Q$ 和迹距离 [22,23]，方程（10）将这一极限传递到 γ^j。对各扇区取平均得到 $I(Q:\ Z|J)_\gamma \to 0$，而（9）要求其下极限至少为 $S(Q|XJ)_\sigma > 0$。这证明了局部差距和全局判据。 □

致谢

作者感谢 Chloe Rossin 和 Bandit Rossin Polloreno 进行有益的交流。作者使用 ChatGPT（OpenAI）修改稿件、推导并核验第 3 节中的证明，以及准备图表。

补充材料

本补充材料推导了一般速率公式，阐释了其结构和纠缠解释，并给出了非可加性的证明。正文中定理 1 的证明独立于这些结果。

模型与分解代价

在第 2 节的信源模型中，独立标签 $x \in \mathcal{X}$ 与 $p_x > 0$ 指定了 W上的 d维状态 ω_x 。用 $\sigma_{XW} = \sum_x p_x |x\rangle\langle x| \otimes \omega_x$ 表示经典量子态（cq），并令 $\chi = I(X:W)_\sigma$。除非另有说明，所有对数均以 2 为底； S、 H和 h_2 分别表示冯·诺依曼熵、香农熵和二元熵。范数 $\|\cdot\|_1$ 为迹范数， $D(\rho\|\sigma)$表示量子相对熵。

一个 (n, D) 编码使用独立的共享种子 ν、 D维空间上的消息态 $m_{x^n,\nu}$ ，以及映射到 W^n的解码信道 $\mathcal{D}_\nu$。其速率为 $R = (\log D)/n$，全局误差为$\delta = \frac{1}{2}\|\tau - \sigma^{\otimes n}\|_1$，其中 τ是对种子取平均后的解码经典量子态。令 R_{cr}为满足 $n \to \infty$ 和 $\delta \to 0$的编码序列的极限上速率下确界。

在 (3) 的最大 Koashi–Imoto (KI) 分解 [10] 中，我们称扇区 j 的量子部分 Q_j 为其核心。记

$$C_Q = S(Q|J) = \sum_j q_j S(\bar{\rho}_j),$$

$$r_{\mathrm{mix}} = S(Q|XJ) = \sum_{x,j} p_x p(j|x) S(\rho_{jx}).$$

其中 $q_j = \sum_x p_x p(j|x)$ 和 $\bar{\rho}_j = q_j^{-1} \sum_x p_x p(j|x) \rho_{jx}$对 $q_j > 0$成立。于是 $\chi = I(X:J) + C_Q - r_{\mathrm{mix}}$。定理 1 给出 $\chi \le R_{\mathrm{cr}} \le \chi + r_{\mathrm{mix}}$，且当且仅当 $r_{\mathrm{mix}} = 0$时取等号 $R_{\mathrm{cr}} = \chi$。

定义 2（分解代价）。一个分解由有限经典变量 U、概率 $p(u|x)$ 和状态 φ_{xu}组成，其中 $\omega_x = \sum_u p(u|x)\varphi_{xu}$。其代价为 $I(X:U) + S(W|U)$，定义在

$$\sigma_{XUW} = \sum_{x,u} p_x p(u|x) |x\rangle\langle x| \otimes |u\rangle\langle u| \otimes \varphi_{xu}. \tag{11}$$

令 $F(\sigma)$ 为这些代价的下确界。同一定义适用于任意有限 cq 系综，包括块系综。

引理 3 (纯原子与达到性**)。** 定义 $F(\sigma)$ 的最小值可由纯 φ_{xu}达到，并且 U至多取 $|\mathcal{X}|d^2 + 1$ 个值。

证明。将 $\varphi_{xu} = \sum_k r(k|x,u) |\psi_{xuk}\rangle\langle\psi_{xuk}|$写成。给定 u，按照分布 $\prod_x r(k_x|x,u)$ 独立于 X地抽取整个元组 $V = (k_x)_{x\in\mathcal{X}}$，并使用原子 $|\psi_{xuk_x}\rangle\langle\psi_{xuk_x}|$。这保持了信号，并给出 $I(X:UV) = I(X:U)$ 以及 $S(W|UV) \le S(W|U)$。

纯条件 cq 态 $\rho = \sum_x q_x |x\rangle\langle x| \otimes |\psi_x\rangle\langle\psi_x|$ 在维数为 $|\mathcal{X}|d^2 - 1$的仿射空间中构成一个紧集。令 $c(\rho) = S(W)_\rho - H(X)_\rho$。一个分解的代价为 $H(X)_\sigma + \sum_u p_u c(\rho_u)$，其中 $\sum_u p_u \rho_u = \sigma$。因此，我们在 $\{(\rho, c(\rho))\}$的凸包中，将 (σ, t) 的最后一个坐标最小化。该凸包是紧的，维数至多为 $|\mathcal{X}|d^2$，因此最小值存在，而 Carath´eodory 定理至多使用 $|\mathcal{X}|d^2 + 1$ 个点。 □

对于每一种分解，

$$I(X:U) + S(W|U) = \chi + I(X:U|W) + S(W|XU). \tag{12}$$

两个超额项均为非负数，因此 $F(\sigma) \geq \chi$。对于纯原子，其代价为 $I(X\colon UW)$：标志和信号共同持有的关于标签的信息。

B 精确全局速率

命题 4 (由共享变量构造的编码). 每一种分解都能以其代价实现 :

$$R_{\mathrm{cr}} \leq I(X:U) + S(W|U). \tag{13}$$

特别地， $R_{\mathrm{cr}} \leq F(\sigma)$。

定理 5 (速率公式). 序列 $F(\sigma^{\otimes n})$ 是次可加的，并且

$$R_{\mathrm{cr}} = \lim_{n\to\infty} \frac{F(\sigma^{\otimes n})}{n} = \inf_n \frac{F(\sigma^{\otimes n})}{n}. \tag{14}$$

对于任意具有全局误差 $\delta \leq \frac{1}{2}$ 的(n, D) 编码，令 $\varepsilon = \sqrt{2\delta}$，可得

$$\begin{aligned} R \geq \frac{F(\sigma^{\otimes n})}{n} - 2\varepsilon \log(|\mathcal{X}|d) \\ - \frac{2(1+\varepsilon)}{n}\, h_2\!\left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right). \end{aligned} \tag{15}$$

B.1 可达性

命题 *4* 的证明。 使用第 3 [16] 节中的相同条件编码方案。利用共享随机性 [14, ，双方以渐近趋近于 $I(X\colon U)$ 比特的速率，在给定 X 的条件下模拟 U。参见定理 II.1]。双方都知道模拟出的词，且它与 X^n 的联合分布在全变差意义下趋近于理想乘积分布。对于一个被占用的标志 u，条件源现在由状态 φ_{xu} 构成，其概率为 $p(x|u)$。其平均态为 $\bar{\varphi}_u = \sum_x p(x|u)\varphi_{xu}$。按标志对位置分组，并在每组内应用舒马赫压缩，渐近所需代价为每个信号 $\sum_u p(u)S(\bar{\varphi}_u) = S(W|U)$ 量子比特。在理想定律下，对标志取平均后，每个词对应的信号均为原始乘积信号。与扇区编码中的典型性和迹距离估计相同，可得全局误差趋于零。

□

对于 KI 分解，取 $U = (j, k)$，其中 k 是从给定的 j 中独立抽样的 ξ_j 特征向量指标，而原子 $\rho_{jx} \otimes |k\rangle\langle k|$ 支撑于扇区 j 上。其代价为 $I(X\colon J) + C_Q = \chi + r_{\mathrm{mix}}$。因此 $F(\sigma) \leq \chi + r_{\mathrm{mix}}$；结合 (12)，当所有占据的核心均为纯时，可得 $F(\sigma) = \chi$。

B.2 逆向定理与连续性

对于全局重构准则，每个编码都会导出一个代价不高于原分解的分解，并且该代价关于解码系综连续。

引理 6 (私有量子部分). 对于在 XU上为经典的 $XUWK$ 状态，其在XW上的边缘态为 σ，

$$F(\sigma) \leq I(X:U) + S(WK|U). \tag{16}$$

证明。对 WK应用引理 3 的纯化细化。它给出一个细化后的标志 V，使得给定 X 时 WK 为纯态，V 且

$$I(X:V)+S(WK|V)\le I(X:U)+S(WK|U).$$

在正交归一基中测量 K，并将测量结果记为 k。现在，标志 $(V,\ k)$ 给出了 σ 的纯原子分解。其代价以互信息表示，满足

$$F(\sigma)\le I(X:VkW)\le I(X:VKW)=I(X:V)+S(WK|V).$$

该不等式是测量下的数据处理；等式则利用了给定 $X,\ V$ 时 WK 的纯度。结合这两个公式即可证明该结论。□

引理 7（编码诱导分解）。若 $\tau_{X^nW^n}$ 是某个（$n,\ D$）编码的种子平均解码态，则 F（τ）$\le$对数 D。

证明。固定 $n,\ D$ 时，解码态的元组构成一个紧集：它们是紧编码参数集和信道参数集的连续像。因此，Carathéodory 定理可将任意种子平均替换为有限凸组合，同时保持解码态不变。将每个解码器扩张为 $V_\nu:\ M\to W^nK$，并填充至具有一个环境 K。由引理 6，取 $X=X^n$ 和 $U=\nu$，可得$F(\tau)\le I(X^n\colon\nu)+S(W^nK|\nu)\le$ 对数 D。事实上，种子与 X^n 相互独立，且给定 ν 时 W^nK 的状态是平均消息的等距像。□

引理 8 (固定先验下的连续性)。设 σ 和 σ' 是定义在 $\underline{W}$ 上的系综，具有相同的标签和概率，并且 $\delta=\frac12\|\sigma-\sigma'\|_1\le\frac12$。令 $\varepsilon=\sqrt{2\delta}$，

$$\begin{aligned}|F(\sigma)-F(\sigma')|\le{}&2\varepsilon\log(|\mathcal{X}|\dim W)\\&+2(1+\varepsilon)h_2\left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right).\end{aligned}\tag{17}$$

证明。对于 σ'的任意分解，写作 $\tau'_x=\sum_u p'(u|x)|u\rangle\langle u|\otimes\varphi'_{xu}$，并在 UWE上选取其纯化 $|\Psi'_x\rangle$，其中 E足够大。此纯化也纯化了 ω'_x。令 $\delta_x=\frac12\|\omega_x-\omega'_x\|_1$，于是 $\sum_x p_x\delta_x=\delta$。由乌尔曼定理和保真度–迹距离不等式 [24]，可得 $|\Psi_x\rangle$ 在相同空间上对 ω_x的一个纯化，使得

$$\tfrac12\||\Psi_x\rangle\langle\Psi_x|-|\Psi'_x\rangle\langle\Psi'_x|\|_1\le\sqrt{2\delta_x}.$$

对 E 偏迹，并在两个纯化中对 U 进行退相干。将这些操作应用于 $|\Psi'_x\rangle$，得到 τ'_x，它在 U上是经典的。将这些操作应用于 $|\Psi_x\rangle$，则得到 ω_x的一个经典-量子扩展 τ_x。由收缩性可知，$\underline{XUW}$ 上的两个扩展之间的迹距离至多为 $\sum_x p_x\sqrt{2\delta_x}\le\varepsilon$。

它们的代价为 $H(X)-H(X|U)+S(W|U)$，且具有相同的 $H(X)$。将条件熵连续性界 [23] 应用于 X 和 W，即可得到式 (17) 的右侧；这两个界都不依赖于 dim U。对 σ' 的分解取最小值，并交换两个系综。□

定理 *5* 的证明。乘积分解给出 $F(\sigma^{\otimes(n+m)})\le F(\sigma^{\otimes n})+F(\sigma^{\otimes m})$。因此，这个非负次可加序列满足

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F(\sigma^{\otimes n})}{n}=\inf_n\frac{F(\sigma^{\otimes n})}{n}.$$

将命题 4 应用于由 n 个字母组成的块，可知 $R_{\rm cr}$ 不大于该下确界中的每一项。

反过来，一个全局误差为 $\delta\le1/2$ 的（$n,\ D$）编码，根据引理 7，具有 $\frac12\|\tau-\sigma^{\otimes n}\|_1=\delta$ 和 F（τ）$\le nR$。应用字母表为 $\mathcal{X}^n$、信号空间为 W^n 的引理 8，然后除以 n。这就是有限误差界（15）。其修正项随 δ 消失，并且对 $n\ge1$ 均匀成立，从而证明反向不等式和速率公式。□

C 分解代价的结构

引理 6 的两个推论确定了联合编码在混合量子核心中可能带来的节省。

命题 9（部分可加性）。对于任意两个系综，

$$\chi(\sigma_1) + F(\sigma_2) \le F(\sigma_1 \otimes \sigma_2) \le F(\sigma_1) + F(\sigma_2). \tag{18}$$

特别地，如果任一因子只有纯占据核心，则 F 在乘积上是可加的。

证明。对于乘积信源的任意分解 U，由标签的独立性和链式法则可得

$$\begin{aligned} I(X_1X_2:U) + S(W_1W_2|U) &= I(X_2:UX_1) + S(W_1W_2|UX_1) + I(X_1:UW_1W_2) \\ &\ge F(\sigma_2) + \chi(\sigma_1). \end{aligned}$$

前两项根据引理 6，以 UX_1 作为标志、以 W_1 作为私有系统，给出 $F(\sigma_2)$ 的上界。根据数据处理，最后一项至少为 $I(X_1 : W_1) = \chi(\sigma_1)$。取最小值得到下界；乘积分解给出上界。如果任一因子只有纯占据核心，则其 KI 构造的代价为 χ，因此上下界相等；如有需要，可交换两个因子。

□

命题 10（扇区分裂）。对于分解 (3)，令 $\sigma_j = \{p(x|j)\ \ \rho_{jx}\}$ 为核心系综，其中 $p(x|j) = p_x p(j|x)\,/q_j$。则

$$F(\sigma) = I(X:J) + \sum_j q_j F(\sigma_j), \tag{19}$$

$$F(\sigma) - \chi(\sigma) = \sum_j q_j \big[F(\sigma_j) - \chi(\sigma_j)\big].$$

这些恒等式不需要分解的极大性。

证明。对于上界，将核心系综与扇区 j 的分解结合起来，并在给定 j 的条件下，独立于 x 对 ξ_j 的特征向量指标进行采样。对于下界，从纯原子开始，测量扇区 j，并将结果记录在标志中。每个条件原子仍然是纯的，且信源平均值保持不变。代价不会增加：在对 W 应用信道后，它从 $I(X:UW)$ 变为 $I(X:UJW)$。将新的代价明确写出可得

$$I(X:J) + \sum_j q_j \big[I(X:U|J=j) + S(Q_jN_j|U,J=j)\big] \ge I(X:J) + \sum_j q_j F(\sigma_j).$$

这里，在每个带有私有系统 N_j 的扇区内应用引理 6。最后，$\chi(\sigma) = I(X:J) + \sum_j q_j \chi(\sigma_j)$ 给出了第二个恒等式。 □

因此，所有超出 Holevo 量的部分都存在于核心中。

D 纠缠蒸馏的诠释

令 σ_{XE} 与 σ_{XW} 在任意纯化 $|\Psi\rangle_{XWE}$ 中互补。尽管 X 在 σ_{XW} 中是经典的，但在这个互补状态中未必是经典的。用 $D_{A\to B}$ 表示从 A 到 B、通过经典通信进行的单向可蒸馏纠缠，用 $D_{\leftrightarrow}$ 表示双向可蒸馏纠缠，两者的单位均为纠缠比特。

纯化可以在 E 中存储经典标签的一个副本，同时存储每个信号的纯化。通过对 E施加局部等距变换，这可将 σ_{XE} 置于预测量形式，从而适用 Coles 蒸馏恒等式 [25, 定理 4]。对于从 E 到 X的通信，我们将 Devetak 和 Winter 的单向公式 [26] 特化到同一状态。

推论 11。 对于上述互补状态，

$$R_{\mathrm{cr}} = H(X) - D_{E\to X}(\sigma_{XE}), \tag{20}$$

$$D_{X\to E}(\sigma_{XE}) = D_{\leftrightarrow}(\sigma_{XE}) = H(X) - \chi, \tag{21}$$

$$R_{\mathrm{cr}} - \chi = D_{X\to E}(\sigma_{XE}) - D_{E\to X}(\sigma_{XE}). \tag{22}$$

证明。从 E 到 X的通信。令 $D^{(1)}_{E\to X}$ 为 Devetak–Winter 公式中的单拷贝仪器优化 [26,定理 13]。将 E 上的仪器细化为每个结果对应一个 Kraus 算子，只会提高其平均相干信息，这由条件熵的凹性可知。此时条件全局状态均为纯态，目标函数为

$$\sum_u p_u \big[S(X)_{\rho^u} - S(W)_{\rho^u}\big], \qquad \sum_u p_u \rho^u_{XW} = \sigma_{XW}.$$

反过来，为每个 ρ^u选取一个纯化 $|\psi_u\rangle_{XWE'}$。向量$\sum_u \sqrt{p_u}|u\rangle|\psi_u\rangle$ 是 σ_{XW}的纯化。取足够大的 E'，由纯化的唯一性可得一个等距变换 $E \to UE'$。测量 U即可实现该分解。在每个 ρ^u 中对 X 进行退相干，不会改变其平均状态及其 W边缘态，同时会增大 $S(X)_{\rho^u}$。通过在 E上施加新的仪器来实现这些新分量。因此，优化可限于经典-量子分解，且 $D^{(1)}_{E\to X}(\sigma_{XE}) = H(X) - F(\sigma)$。对该等式进行正则化并应用定理 5，即可证明（20）。

从 X 到 E的通信。哈希不等式 [26] 在此方向上达到了相干信息$S(E) - S(XE) = H(X) - \chi$。对于预测量状态，Coles 定理 [25,定理 4]给出了纠缠相对熵的相同值，而该值从上界限制了双向蒸馏 [27]。这证明了第二个等式，相减即可得到第三个等式。 □

因此，定理 1 刻画了这两个方向何时具有相等的可蒸馏纠缠。单拷贝公式 F 恰好在 $D_{E\to X}(\sigma_{XE}) = D^{(1)}_{E\to X}(\sigma_{XE})$ 时达到最优。

E 正则化是必要的

下面的蕴含关系将把一个熵见证转化为某个系综的严格非可加性。其证明（包括依赖标签的支撑空间）见附录 G。

引理 12 (乘积最优性)。 若 $F(\sigma_1 \otimes \sigma_2) = F(\sigma_1) + F(\sigma_2)$，则每个在 X_1X_2 上为经典态的状态 τ，其边缘态为 σ_1、σ_2，且具有纯条件信号，均满足

$$F(\sigma_1) + F(\sigma_2) \le I(X_1 : X_2)_\tau + S(W_1W_2)_\tau. \tag{23}$$

我们将随机酉方法用于研究最小输出熵的非可加性 [28, 29]。对于没有共享随机性或纠缠的可见压缩，Horodecki [30] 将最优速率表示为对信号扩展进行正则化极小化。Hayashi [31] 证明该速率等于 $\lim_{n\to\infty} E_P(\sigma_{XW}^{\otimes n})/n$，其中 E_P 是纯化纠缠。Chen 和 Winter [32] 给出了 E_P 非可加性的数值证据，Baghali Khanian 和 Negari [33] 则证明这一性质适用于一类可分Werner态。即使经过优化的相干信息值仍保持可加性 [34]，静态通信—纠缠权衡中也会出现相关的集体优势。

定理 13（非可加性）。对于所有充分大的整数 k，存在一个有限维数 D以及作用于 $\mathbb{C}^D$ 上的实正交矩阵 $O_1, \ldots, O_k$，使得下列系综满足 $F(\sigma^{\otimes 2}) < 2F(\sigma)$。令 $p = 24/\ln k$，并取均匀分布的标签 $x = (i, s) \in \{1, \ldots, k\} \times \{\pm 1\}$。对于 $v \in \mathbb{C}^D$，等距变换 $V_x : \mathbb{C}^D \to \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^D$ 和信号 ω_x 定义如下

$$V_x v = \sqrt{1-p}|0\rangle \otimes v + \sqrt{p}|1\rangle \otimes sO_i v, \qquad \omega_x = V_x V_x^\dagger / D.$$

因此 $R_{\mathrm{c}} \quad {}_{\mathrm{r}}(\sigma) < F(\sigma)$，因此一般而言，定理 *5* 中的正则化不能去除。

证明。在整个证明中，我们使用自然对数；所有熵、相对熵以及 F 都一并重新缩放。记 $h(t) = -t \log t - (1-t)\log(1-t)$。

信道。Collins定理 [29, 预印本，定理 3.1] 给出：对于充分大有限维数中的每个固定 k，都存在酉矩阵 U_i，使得 $N_U(\rho) = k^{-1}\sum_i U_i \rho U_i^\dagger$ 满足

$$\operatorname{Tr} N_U(\rho)^2 \le \frac{1}{k}\left(1 + \frac{10}{k}\right) \quad \text{for every state } \rho. \tag{24}$$

事实上，当维数趋于无穷时，对于纯输入，其互补Gram矩阵与I/k的Hilbert–Schmidt距离至多为$(3 + o(1))/k$，且这一结论对纯输入均匀成立。对于纯输入，它与 $N_U(\rho)$具有相同的非零谱，并且纯度具有凸性。令 O_i 为 U_i 在两倍维空间中的实化，记为 D。在与 $U_i \oplus U_i$等价的表示下，其互补Gram矩阵是对应于 U 和 $\bar{U}$的Gram矩阵的凸组合。因此，$N(\rho) = k^{-1}\sum_i O_i \rho O_i^\dagger$ 满足相同的纯度界，而且仍然对每个复输入成立。

一个副本。x 标签对应的每个纯原子都属于$\operatorname{ran} V_x$。固定一个纯原子分解的条件系综，其标签权重为 q_x，单位向量为 ψ_x，平均值为 $\rho = \sum_x q_x V_x |\psi_x\rangle\langle\psi_x| V_x^\dagger$。令

$$\rho' = \sum_x q_x |\psi_x\rangle\langle\psi_x|, \qquad \tau = \sum_{i,s} q_{i,s} O_i |\psi_{i,s}\rangle\langle\psi_{i,s}| O_i^\dagger,$$

并令 $D_q = D(q\|u)$，其中 u 在 $2k$ 标签上服从均匀分布。代价的条件贡献为 $D_q + S(\rho)$。简写为 $A = D_q + S(\rho')$。比较具有块 $q_x|\psi_x\rangle\langle\psi_x|$ 和$u_x\rho'$的经典-量子态。它们的相对熵为 A。应用受控酉算子 O_i 并忽略标签，根据数据处理可得$D(\tau\|N(\rho')) \le A$。由 $\eta = N(\rho')$，恒等式

$$S(\tau) + 2D(\tau\|\eta) = D\left(\tau \middle\| \frac{\eta^2}{\operatorname{Tr}\eta^2}\right) - \log \operatorname{Tr}\eta^2$$

因此，(24)意味着

$$S(\tau) + 2A \ge \log k - \log(1 + 10/k). \tag{25}$$

令 Δ 使第一个二维因子退相干，并设 $C(\rho) = D(\rho\|\Delta\rho)$。Th en

$$S(\rho) = h(p) + (1-p)S(\rho') + pS(\tau) - C(\rho).$$

将标签分组成符号对 $(i,\ +)$、$(i,\ -)$，权重分别为 $w_i = q_{i,\,+} + q_{i,\,-}$。省略权重为 $w_i = 0$ 的符号对。对于每个剩余的符号对，设 $\theta_i = q_{i,\,+}/w_i$ 且 $c_i = |\langle \psi_{i,\,+} | \psi_{i,\,-} \rangle|$；对于权重为零的标签，任选一个单位向量。令 $s(\theta,\ c)$ 表示权重为 θ、$1-\theta$ 且绝对重叠为 c 的两个纯态的混合态的熵。该符号对的相干性为 $h(p) + s(\theta_i,\ c_i) - s(\theta_i,\ (1-2p)c_i)$。此外，标签链式法则与熵凹性给出

$$A \geq \sum_i w_i [\log 2 - h(\theta_i) + s(\theta_i, c_i)].$$

相对熵的联合凸性和引理 14 现在给出

$$C(\rho) \leq (1-3p)A + \varepsilon(p), \tag{26}$$

对于 $0 < p \leq 1/64$，其中 $\varepsilon(p) = 3p(4p)^{1/(4p)}$。代入 (26) 得到

$$D_q + S(\rho) \geq h(p) + p[S(\tau) + 2A] + pD_q - \varepsilon(p).$$

应用 (25)，舍弃 $pD_q \geq 0$，并取平均可得

$$F(\sigma) \geq h(p) + p\log k - p\log(1 + 10/k) - \varepsilon(p). \tag{27}$$

双副本见证态。我们使用共轭信道构造 [28, 35] 中的最大纠缠输入。在 O_i 为实数的基下，令 $|\Omega\rangle = D^{-1/2}\sum_{r=1}^{D} |r,\ r\rangle$。令 τ 为具有相互独立的均匀分布标签 $x,\ y$ 以及条件纯信号 $(V_x \otimes V_y)|\Omega\rangle$ 的经典量子态。两个边缘系综都是 σ。相互独立的符号使两个标志退相干，从而得到四个权重为 $(1-p)^2,\ p(1-p)\ p(1-p)\ p^2$ 的块。第一个块是纯的；中间的块是 k 个纯态的混合。在最后一个块中，k 相同索引的项由于 $(O_i \otimes O_i)|\Omega\rangle = |\Omega\rangle$ 而重合。将它们分组后，一个结果的概率为 $1/k$，其余 $k^2 - k$ 个结果的概率均为 $1/k^2$。它们的香农熵 $(2 - 1/k)\log\ k$ 为该块熵的上界。因此

$$S(W_1 W_2)_\tau \leq 2h(p) + 2p\log k - p^2(\log k)/k. \tag{28}$$

比较。对于 $p = 24/\log\ k$，最终有 $p \leq 1/64$，并且

$$\frac{\varepsilon(p)}{p/k} = 3k(4p)^{1/(4p)} = 3\exp\left[\left(1 - \frac{\log(\log k/96)}{96}\right)\log k\right] \longrightarrow 0.$$

在 (27)–(28) 中使用 $\log(1 + 10/k)\ \leq 10/k$ 得到

$$2F(\sigma) - S(W_1 W_2)_\tau \geq \frac{4p}{k} - 2\varepsilon(p) > 0$$

对于充分大的 k。由于见证态标签彼此独立，引理 12 排除了乘积相等性，而次可加性给出 $F(\sigma^{\otimes 2}) < 2F(\sigma)$。恢复二进制单位后，定理 5 给出了速率不等式。

□

根据引理 8，严格不等式在足够小的扰动 $\omega_x \mapsto (1-\delta)\omega_x + \delta I/(2D)$ 下仍然成立。因此，也可以将这些信号选为实的满秩信号，并具有公共谱。该构造使用了较大的维数。对于图 2(c) 中的量子比特对，其布洛赫向量可取为 $0.8\hat{}z$ 和 $0.8\hat{}x$，要证明可加性则需要单独的论证。

F A 标量相干性估计

本节中的所有对数均为自然对数。令 $h(t) = -t\log t - (1-t)\log(1-t)$，采用端点约定 $0\log 0 = 0$，并令 $s(\theta, c)$ 表示权重为 θ，$1-\theta$ 且绝对重叠为 c 的两个纯态的混合态的冯·诺伊曼熵。

引理 14. 对于 $0 < p \le 1/64$，令 $\varepsilon(p) = 3p(4p)^{1/(4p)}$。对于每个 $\theta, c \in [0,1]$，

$$h(p) + s(\theta,c) - s(\theta,(1-2p)c) \le (1-3p)\big[\log 2 - h(\theta) + s(\theta,c)\big] + \varepsilon(p). \tag{29}$$

证明。设 $a = 1-2p$ 和 $b = 1-a^2 = 4p(1-p)$。令 λ 为两个状态张成空间上混合态的较小特征值；若二者相同，则取 $\lambda = 0$，并令 $z = (2\theta-1)^2$。于是 $0 \le \lambda \le (1-\sqrt{z})/2$ 并且

$$s(\theta,c) = h(\lambda), \qquad s(\theta,ac) = d(\lambda,z) := h\left(\frac{1-\sqrt{a^2(1-2\lambda)^2+bz}}{2}\right).$$

标签不平衡。令

$$A(z) = h(p) - d(0,z), \qquad B(z) = \log 2 - h\left(\frac{1-\sqrt{z}}{2}\right) = \log 2 - h(\theta).$$

对于 $g(z) =$反双曲正切$(\sqrt{z})/\sqrt{z}$，其中 $g(0) = 1$，

$$A'(z) = \tfrac{b}{2} g(a^2+bz), \qquad B'(z) = \tfrac{1}{2} g(z), \qquad g'(z) = \frac{(1-z)^{-1} - g(z)}{2z} \le \frac{1}{2(1-z)}.$$

最后一个不等式使用了 $g(z) \ge 1$。从 z 积分到 a^2+bz 可得

$$g(a^2+bz) \le g(z) + \tfrac{1}{2}\log(1/b) \le [1 + \tfrac{1}{2}\log(1/b)]g(z).$$

由于 $A(0) = B(0) = 0$，我们有 $A \le \alpha B$，其中 $\alpha = b[1 + \frac{1}{2}\log(1/b)]$。定义 α 的函数在 $0 < b \le 1$ 上递增，且 $b \le 1/16$，因此

$$\alpha + 3p \le \frac{1 + 2\log 2}{16} + \frac{3}{64} < 1.$$

因此 $A(z) \le (1-3p)B(z)$。

混合度。对于可容许的 $0 \le \lambda \le p$，令 $r = \sqrt{a^2(1-2\lambda)^2 + bz}$。由于 $1-2\lambda \ge a$、$a^2 \le r \le 1$ 和 $a^3 \ge 3/4$，

$$\partial_\lambda d = \frac{a^2(1-2\lambda)}{r}\log\frac{1+r}{1-r} \ge a^3 \log\frac{1+a^2}{1-a^2} \ge L_p := \tfrac{3}{4}\log\frac{1}{4p}.$$

d 关于 λ 的单调性现在给出 $d(\lambda, z) - d(0, z) \ge L_p \min\{\lambda, p\}$ 在整个可容许区间内成立。从其左侧减去右侧 (29) 中的第一项，至多得到

$$3ph(\lambda) - L_p \min\{\lambda, p\}.$$

对于 $\lambda \le p$，这至多为

$$\max_{0\le t\le 1}\{3ph(t) - L_p t\} = 3p\log(1 + e^{-L_p/(3p)}) \le 3p(4p)^{1/(4p)}.$$

对于 $\lambda \ge p$，它位于 m 成本为 $3p\log 2 - L_p p \le 0$，因为 $L_p \ge 3\log 2$。端点由连续性得到。 □

G 产品最优性引理的证明

Shor [36, 第 6] 节和 Pomeransky [37, 第 IV] 节使用支撑泛函，从形成纠缠的可加性推导出强超可加性。我们将他们的论证用于分解代价 F。在最优乘积原子处，支撑界的一阶导数根据两个边缘界确定该分解代价。该论证适用于任一对数底，但必须始终保持一致。省略先验概率为零的标签，并令 $S_x = \operatorname{supp}\,\omega_x$、$T_y = \operatorname{supp}\,\omega'_y$ 分别表示两个系综。我们在这些依赖标签的支撑空间上证明引理 12。

将第一个系综的一个最优纯原子分解写为 $z_{xu} = \sqrt{p(x,\ u)}|\varphi_{xu}\rangle \in S_x$，并令 Z_u 以这些向量为列。对于块 $A_x = p_x\omega_x$，定义

$$\begin{aligned} G(A) &= \min_{\sum_u z_{xu}z_{xu}^\dagger = A_x} \sum_u g(Z_u), \\ g(Z) &= -\operatorname{Tr} ZZ^\dagger \log ZZ^\dagger + \sum_x \|z_x\|^2 \log \|z_x\|^2. \end{aligned} \tag{30}$$

对于归一化块，$G(A) = F(\sigma_1) - H(X_1)$。由引理 3 可知极值可以取到。同一公式在固定空间 S_x 上的正块锥上定义了一个有限的凸且正齐次函数。事实上，取 m 个标签并令 $T = \sum_x \operatorname{Tr} A_x$，

$$-T\log m \le G(A) \le 0;$$

将分解进行拼接并缩放即可证明凸性和齐次性。

每个 A_x 在 S_x上都是正定的，因此 A 位于该锥的相对内部，并且存在一个支撑泛函。齐次性随后给出作用于 S_x 上的厄米算子 K_x，使得

$$\begin{aligned} G(A) &= \sum_x \operatorname{Tr} K_x A_x, \\ g(Z) &\ge \sum_x z_x^\dagger K_x z_x \quad (z_x \in S_x). \end{aligned} \tag{31}$$

为说明归一化，在 tA 处针对 t 的两侧应用支撑不等式。第二个不等式则通过在秩一块 $(z_x z_x^\dagger)_x$上检验 G 得到。

每个最优原子都使（31）取等号：其非负松弛量的平均值为零。函数 g即使在奇异的 $ZZ^\dagger$处也连续可微，因为 $s^2\log s^2$ 在零点处连续可微。原子代价与其线性下界之差在那里取得零这一最小值。对 S_x 作变分并求其导数，得到

$$K_x z_x = P_x\big[(\log\|z_x\|^2 - \log ZZ^\dagger)z_x\big], \tag{32}$$

其中 P_x 投影到 S_x上。矩阵对数作用于其支撑上；对于零列，梯度项连续取值为零。以同样的方式，为第二个系综选取支撑算子族 K'_y 和最优矩阵 Z'_v。

若 F 在乘积上可加，则乘积矩阵 $Z_u \otimes Z'_v$ 对其而言是最优的。$S_x \otimes T_y$上存在支撑算子族 J_{xy}。将（32）应用于乘积原子，并在支撑上使用张量积对数，得到

$$J_{xy}(z_{xu}\otimes z'_{yv}) = (K_x \otimes I_{T_y} + I_{S_x}\otimes K'_y)(z_{xu}\otimes z'_{yv}).$$

由于 $\sum_u z_{xu}z_{xu}^\dagger = A_x$ 在 S_x上正定，向量 z_{xu} 张成 S_x。同样，z'_{yv} 张成T_y。因此 $J_{xy} = K_x\otimes I_{T_y} + I_{S_x}\otimes K'_y$ 在 $S_x\otimes T_y$上。

将见证态的条件向量写作 $\sqrt{q_{xy}}|\psi_{xy}\rangle$。边缘分解的正性要求它们属于 $S_x \otimes T_y$。将 (31) 应用于 J 对应的这个单原子，并使用其给定的边缘态，可得

$$S(W_1W_2)_\tau - H(X_1X_2)_\tau \geq G(A) + G(A').$$

将 $H(X_1)$ 与 $+H(X_2)$ 相加即可证明（23）。 □

参考文献

[1] A. S. Holevo。量子通信信道传输的信息量的界。*Probl. Inf. Transm.*，9(3):177–183，1973。[2] M. Horodecki。混态系综所承载的量子信息压缩界限。《物理评论 *A*》，57:3364–3369，1998。[3] H. Barnum、C. M. Caves、C. A. Fuchs、R. Jozsa 和 B. Schumacher。混态系综的量子编码。*J. Phys. A*，34:6767–6785，2001。[4]A. Winter。概率分布与密度算符信源的压缩。arXiv:quant-ph/0208131，2002。[5] B. Schumacher。量子编码。《物理评论 *A*》，51:2738–2747，1995。[6] W. D¨ur、G. Vidal 和 J. I. Cirac。对易混态的可见压缩。《物理评论 *A*》，64:022308，2001。[7] C. H. Bennett、P. Hayden、D. W. Leung、P. W. Shor 和 A. Winter。量子态远程制备。*IEEE Trans. Inf. Theory*，51:56–74，2005。arXiv:quant-ph/0307100。[8] R. Jain、J. Radhakrishnan 和 P. Sen。通过消息压缩得到通信复杂度中的直和定理。载于*Automata, Languages and Programming (ICALP 2003)*，*Lecture Notes in Computer Science*第2719卷，第300–315页。Springer，2003。[9] S. Bab Hadiashar 和 A. Nayak。单次压缩的纠缠代价。*Quantum*，4:286，2020。[10] M. Koashi 和 N. Imoto。不扰动部分已知量子态的操作。《物理评论 *A*》，66:022318，2002。arXiv:quant-ph/0101144。[11] M. Koashi 和 N. Imoto。量子混态信号的可压缩性。《物理评论快报》，87:017902，2001。[12]Z. Baghali Khanian 和 A. Winter。有无纠缠辅助的一般混态量子数据压缩。*IEEE Trans. Inf. Theory*，68:3130–3138，2022。arXiv:1912.08506。[13] E. Soljanin。通过发送经典信息压缩量子混态信源。*IEEETrans. Inf. Theory*，48:2263–2275，2002。[14] P. Cuff。分布式信道综合。*IEEE Trans. Inf. Theory*，59:7071–7096，2013。[15] Patrick Hayden、Richard Jozsa、D´enes Petz 和 Andreas Winter。满足量子熵强次可加性等式的状态结构。《数学物理通讯》，246:359–374，2004。

[16] P. Hayden、R. Jozsa 和 A. Winter。量子数据压缩中量子资源与经典资源的权衡。*J. Math. Phys.*，43:4404–4444，2002。[17] Z. Baghali Khanian、K. Kuroiwa 和 D. Leung。混态的率失真理论。*IEEETrans. Inf. Theory*，71:1077–1095，2025。[18]Z. Baghali Khanian。混态压缩的强逆定理界。arXiv:2206.09415，2022。[19] M. Koashi 和 N. Imoto。无误差时量子信息不可压缩。《物理评论快报》，89:097904，2002。[20] M. Hayashi。量子定长纯态源编码的指数。《物理评论 *A*》，66:032321，2002。[21] O. Fawzi 和 R. Renner。量子条件互信息与近似马尔可夫链。《数学物理通讯》，340:575–611，2015。[22] R. Alicki 和 M. Fannes。量子条件信息的连续性。*J. Phys. A: Math.Gen.*，37(5):L55–L57，2004。[23] A. Winter。量子熵的紧均匀连续性界：条件熵、相对熵距离与能量约束。《数学物理通讯》，347:291–313，2016。[24] C. A. Fuchs 和 J. van de Graaf。量子力学状态的密码学可区分性度量。*IEEE Trans. Inf. Theory*，45:1216–1227，1999。[25] Patrick J. Coles。量子关联层级的崩塌将熵不确定性与纠缠生成联系起来。《物理评论 *A*》，86:062334，2012。[26] I. Devetak 和 A. Winter。从量子态中蒸馏秘密密钥和纠缠。*Proc. R. Soc. A*，461:207–235，2005。[27] E. M. Rains。可蒸馏纠缠的界。《物理评论 *A*》，60:179–184，1999。[28] M. B. Hastings。利用纠缠输入实现通信容量的超可加性。*NaturePhys.*，5:255–257，2009。[29] B. Collins。Haagerup不等式与最小输出熵的可加性违背。*Houston J. Math.*，44(1):253–261，2018。arXiv:1603.00577。[30] M. Horodecki。混合信号态的最优压缩。《物理评论 *A*》，61:052309，2000。[31] M. Hayashi。混态的最优可见压缩率由纯化纠缠决定。《物理评论 *A*》，73:060301(R)，2006。[32] Jianxin Chen 和 Andreas Winter。纯化纠缠的非可加性（毫无合理怀疑）。arXiv:1206.1307，2012。[33] Zahra Baghali Khanian 和 Amir-Reza Negari。Werner态的纯化纠缠：典范纯化与非可加性。arXiv:2610.03630，2026。[34]Anthony M. Polloreno。量子通信中的选择性遗忘。未发表手稿，2026年11月20日。

[35] P. Hayden 和 A. Winter. 关于所有 $p > 1$ 的最大 p-范数乘法性猜想的反例. 《数学物理通讯》, 284:263–280, 2008.[36] P. W. Shor. 量子信息论中可加性问题的等价性 . 《数学物理通讯》 , 246:453–472, 2004.[37] A. A. Pomeransky. 形成纠缠的强超可加性可由其可加性推出. 《物理评论 A》, 68:032317, 2003.