arXiv:2611.33131v1 [math.CV] 24 Nov 2026

马尔可夫集 Green 函数的赫尔德连续性

LEOKADIA BIALAS-CIEZ 和 RAFAŁ PIERZCHAŁA

摘要。设 K 是 $\mathbb{C}^N$ 的非空紧子集。我们证明，其 Green函数（因而 Siciak 极值函数）是赫尔德连续的，当且仅当多项式的一阶导数在 K 上满足马尔可夫不等式。由马尔可夫不等式推出相应 Green函数的赫尔德连续性，解决了逼近论与多复势理论交叉领域一个长期悬而未决的问题。次数为 n 时，马尔可夫界 An^m 给出所有小于 $1/m$ 的赫尔德指数。在一个复变量的情形下，它给出的指数恰为 $1/m$ 。证明通过比较 K 的两个邻域的极值函数来完成。对于 $N>1$ ，我们使用 Hörmander定理，即从一点进行全纯延拓的定理。对于 $N=1$ ，则利用最大值原理进行比较。

1. 马尔可夫不等式与赫尔德不等式

我们要研究紧集上的马尔可夫不等式如何 $K\subset\mathbb{C}^N$ 控制附近的多项式增长K。Siciak极值函数 V_K 刻画了这种增长。若 K 满足指数为1的马尔可夫不等式，直接计算表明 V_K 在 $\mathbb{C}^N$ [3, 7]上是Lipschitz连续的。另见推论2.4。当马尔可夫指数大于1时，情况又会如何呢?

1990年，Pleśniak提出了两个问题 [19, 第116页，公开问题 1° 和 2°] ，涉及 $K\subset\mathbb{R}^N$ 满足马尔可夫不等式的紧集。他用我们的记号询问 V_K 在 $\mathbb{C}^N$ 上是否连续（等价地， K 是否是 L-正则的），尤其询问 K 是否为非多极集。他还要求给出一个不具备赫尔德连续性性质（HCP）的此类集合的例子。在他的Oberwolfach报告中， [21, 第 13] 页，他再次讨论了单变量情形中的 L-正则性和正对数容量问题。Siciak询问了 L-正则性以及 $\mathbb{R}^N$ 和 $\mathbb{C}^N$ [24, 中的紧 Markov 集的正容量问题，见第447—448], 页；还询问了平面中的HCP问题，见 [25, 第 219]页。Levenberg询问 $\mathbb{C}^N$ 中的紧 Markov 集是否具有HCP、是否为 L-正则的，以及对于 $N>1$是否为非多极集，见 [13, 第135页，问题 6]。另见[1, 2, 3, 7, 18]。

Pleśniak [20] 构造了实直线上的一个 L-正则 Cantor 集，但其 Markov 不等式不成立。另见 [12, 例 5.1]。关于三分 Cantor 集满足 HCP 和 Markov 不等式的证明见 [4], ，该证明回答了 Pleśniak 的另一个问题。对于实直线上的某些类 Cantor 集， [5, 28]证明了它们与 HCP 等价。正如 [所示，每个平面 Markov 集都是非极性的。

6]。Bialas-Ciez 和 Eggink [8]证明了实直线上的紧 Markov 子集以及复平面中满足局部 Markov 不等式的紧集具有 L- 正则性。

我们通过证明 $\mathbb{C}^N$中的每个非空紧 Markov 集都具有 HCP 来回答这些问题。因此，它是 L-正则且非多极的。在一维情形下，它具有正的对数容量。因此，Pleśniak 第二个问题中所寻求的例子并不存在。

Baran 和 Bialas-Ciez 通过 V. Markov 不等式 [1,定义 2.5 和定理 2.9]刻画了 HCP。对于次数为 n 的多项式，它将每个 k 阶偏导数界定为多项式范数的 $M^k n^{mk}/(k!)^{m-1}$ 倍，其中 $M>0$ 和 $m\geq 1$ 固定。对于$m>1$ 和 $k\geq 2$，该阶乘改进了迭代一阶导数界 $M^k n^{mk}$。我们的主定理仅假设一阶导数不等式。

2020 数学主题分类。主要分类：32U35，41A17。次要分类：30C85。关键词和短语。Markov 不等式，Green函数，Siciak 极值函数，赫尔德连续性。

关于多变量中的非多极性问题，另请参见 [17, 定理 1 之后的内容。12]。如果一个非空紧马尔可夫集 $K \subset \mathbb{R}^N$ 可定义于实数域的 o-极小扩张中，那么 $K =$内部$_{\mathbb{R}^N} K$ [18, 定理 1。15]。特别地， K 是非多极的。

定义与记号

全文中， K 是 $\mathbb{C}^N$的一个非空紧子集，其中 $N \geq 1$。

- 我们在 $\mathbb{C}^N$上使用欧几里得范数 $|\cdot|$。以 a 为中心、半径为 $s > 0$的开球记为 $B(a, s)$。
- 对于 $r \geq 0$， K 的闭 r邻域为
$$K_r = \{z \in \mathbb{C}^N : \operatorname{dist}(z, K) \leq r\}.$$
- 对于 K上的连续标量值或向量值函数 f，记作
$$\|f\|_K = \max_{x \in K} |f(x)|.$$
- 我们记 $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$和 $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$。对于 $n \in \mathbb{N}_0$，$\mathcal{P}_n$ 表示总次数不超过 n的复多项式空间。变量的个数由上下文确定。
- 记 $\partial_j = \partial/\partial z_j$。对于 $v \in \mathbb{C}^N$， P 的复梯度和方向导数分别为
$$\nabla P = (\partial_1 P, \ldots, \partial_N P), \qquad D_v P = \sum_{j=1}^N v_j \partial_j P.$$
- 对于 $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$和 $h \in \mathbb{C}^N$，我们采用如下记号
$$D^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_N^{\alpha_N}, \qquad h^\alpha = h_1^{\alpha_1} \cdots h_N^{\alpha_N}, \qquad |\alpha| = \sum_{j=1}^N \alpha_j, \qquad \alpha! = \prod_{j=1}^N \alpha_j!.$$

定义 1.1（马尔可夫不等式）。如果存在常数 $A > 0$，使得 K 满足指数为 $m \geq 1$的马尔可夫不等式，或者说 K 是指数为 m的马尔可夫集，则称之为

$$\|\nabla P\|_K \leq A n^m \|P\|_K \qquad (n \in \mathbb{N},\ P \in \mathcal{P}_n). \tag{1}$$

显然，(1) 等价于存在常数 $M > 0$ 使得，对于相同的 m，

$$\|D^\alpha P\|_K \leq M^{|\alpha|} n^{m|\alpha|} \|P\|_K \qquad (n \in \mathbb{N},\ P \in \mathcal{P}_n,\ \alpha \in \mathbb{N}_0^N).$$

原型是 A. A. Markov 在区间 $I = [-1, 1]$上的经典不等式。对于每个次数至多为 n的单变量多项式 p，

$$\|p'\|_I \leq n^2 \|p\|_I.$$

不等式（1）在分析中有许多应用，尤其是在逼近论中。关于多项式逼近和光滑函数的延拓，参见 [13, 15, 18, 19]。关于多项式及全纯像上的不等式，参见 [16, 17]。

定义 1.2（Siciak 极值函数，又称（多复）Green函数）。对于 $z \in \mathbb{C}^N$，令

$$V_K(z) = \sup\left\{\frac{\log|P(z)|}{n} : n \in \mathbb{N},\ P \in \mathcal{P}_n,\ \|P\|_K \leq 1\right\}. \tag{2}$$

此处 $\log 0 = -\infty$。 V_K 的上半连续正则化为

$$V_K^*(z) = \limsup_{w \to z} V_K(w).$$

Siciak 极值函数是多复势理论的主要工具之一 [9, 11,13, 14, 22, 23]。常数多项式 1 表明 $V_K \geq 0$，而（2）给出 $V_K = 0$ 在 K 上。Lelong 类 $\mathcal{L}$（$\mathbb{C}^N$）由定义在 u 上的多重次调和函数组成 $\mathbb{C}^N$，且存在常数 C_u 使得

$$u(z) \leq \log(1 + |z|) + C_u \qquad (z \in \mathbb{C}^N).$$

根据 Siciak极值定理 [23, 定理 4。12], 对于每个 $z \in \mathbb{C}^N$ ，我们有

$$V_K(z) = \sup\{u(z) : u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^N),\ u(x) \le 0 \text{ for every } x \in K\}.$$

假设 $N = 1$ 且 K 是非极性的，即具有正的对数容量。设K_∞ 为包含 ∞的 $(\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus K$ 的连通分支。则 V_K 在 $\mathbb{C} \setminus K$上是调和的。在 K_∞ 的每个有限点处，它与 K_∞ 的以无穷远处为极点的Green函数一致 [23,第7.1项和第7.2]项。

定义 1.3 （多重极性）. 集合 $E \subset \mathbb{C}^N$ 是多重极的，如果存在 $\mathbb{C}^N$上的拟多重次调和函数 u ，满足 $u \not\equiv -\infty$，使得对每个 $x \in E$都有 $u(x) = -\infty$ 。

紧集 K 是多重极的当且仅当 $V_K^* \equiv +\infty$ [23, 推论3.9和定理3.10]。若 K 是非多极的，则 V_K^* 是$\mathcal{L}(\mathbb{C}^N)$中的局部有界拟多重次调和函数。因此其复Monge–Ampère测度在Bedford和Taylor [14,第 28]页的意义下有定义。该测度支撑在 K [14, 第 33],页上，即,

$$\left(dd^c V_K^*\right)^N = 0 \qquad \text{on } \mathbb{C}^N \setminus K.$$

定义 1.4 (L-正则性)。 若 V_K 在 $\mathbb{C}^N$ 上有限且连续，则集合 K 是 L-正则的。

根据 Siciak [23, 命题 6.1]， K 是 L-正则的，当且仅当 V_K 在每个 $a \in K$ 处连续，也就是说,

$$\lim_{\substack{z \to a \\ z \in \mathbb{C}^N}} V_K(z) = 0 \qquad (a \in K).$$

定义 1.5 （赫尔德连续性性质）。 对于 $0 < \gamma \le 1$，若存在 $B, r_0 > 0$ 使得，则集合 K 具有指数为 γ 的赫尔德连续性性质，记作 HCP(γ),

$$V_K(z) \le B \operatorname{dist}(z, K)^\gamma \qquad (z \in K_{r_0}). \tag{3}$$

估计式（3）等价于 V_K 在 $\mathbb{C}^N$上的赫尔德连续性，指数为 γ 。事实上，（3）表明其在 K的每一点连续。于是 K 是 L-正则的，且 $V_K \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^N)$。我们使用 Siciak 命题 3.5]中的 Błocki 平移论证。将（$(\cdot + h)$（2）归一化后得到

$$V_K(z + h) - V_K(z) \le \max_{a \in K} V_K(a + h) \qquad (z, h \in \mathbb{C}^N).$$

对于 $|h| \le r_0$，由（3）可知右侧至多为 $B|h|^\gamma$ 。对于 $|h| > r_0$，由于 V_K 的增长性以及 K 的紧致性，右侧至多为 $C+\log(1+|h|)$，因此至多为 $C'|h|^\gamma$。交换 z 与 $z + h$ 即可得到赫尔德估计。反过来，取 K 上距离 z最近的一点即可。

主要定理

定理 1.6. 非空紧集 $K \subset \mathbb{C}^N$ 满足某个 m的马尔可夫不等式，当且仅当它满足某个 γ的赫尔德连续性性质。更精确地说，(3) 推出(1)，其中 $m = 1/\gamma$。反之，若 (1) 以常数 $A > 0$ 和 $m \ge 1$成立，则对每个$0 < r \le 1/2$ 以及每个 $z \in K_r$,

$$V_K(z) \le C r^{1/m} \left(\log \frac{e}{r}\right)^{1-1/m}, \tag{4}$$

其中 C仅依赖于 N, A, m 和 直径 K。若 $N = 1$，则对每个 $z \in \mathbb{C}$,

$$V_K(z) \le \frac{1 + \log 8}{1 - 2^{-1/m}} \left(A \operatorname{dist}(z, K)\right)^{1/m}. \tag{5}$$

对每个 $0 < \gamma < 1/m$ ，(4) 的右端为 $O(r^\gamma)$ ，因为 $r \to 0^+$。取 $r = \operatorname{dist}(z, K) > 0$ ，可得在 K附近有 (3)。特别地， K 是 L-正则且非多极。

推论1.7。 令 $m_*(K)$ 为可容许马尔可夫指数的下确界，令 $\gamma^*(K)$为可容许赫尔德指数的上确界。对于马尔可夫集 $K \subset \mathbb{C}^N$ ，有

$$\gamma^*(K) = \frac{1}{m_*(K)}.$$

在 [3, 第 637] 页中有人观察到，当时已知的所有例子都表明了这一恒等式。事实上，对于每个可容许的 γ 以及每个可容许的 m，定理1.6 中的两个蕴含关系给出

$$m_*(K) \le 1/\gamma, \qquad \gamma^*(K) \ge 1/m.$$

若 $N > 1$ 且（1）成立，其中 $m = m_*(K) > 1$，我们的证明无法确定 K 是否具有 HCP（$1/m$）。

证明 （3）蕴含（1）。为确保论证完整，我们回顾标准证明。取 $x \in K$，$n \ge 1$ 以及 $P \in \mathcal{P}_n$，使得 $\|P\|_K \le 1$。令 $\rho = r_0 n^{-1/\gamma}$。对于每个坐标向量 e_j，（2）和（3）给出

$$|P(x + \zeta e_j)| \le \exp(nB\rho^\gamma) = \exp(Br_0^\gamma) \qquad (|\zeta| = \rho).$$

柯西估计给出

$$|\partial_j P(x)| \le \frac{\exp(Br_0^\gamma)}{\rho}, \qquad |\nabla P(x)| \le \frac{\sqrt{N}}{r_0}\exp(Br_0^\gamma)n^{1/\gamma}.$$

通过缩放可证明（1）。若 $\|P\|_K = 0$，则对 P的每个数乘应用相同的界。 □

2. 两个邻域的比较

引理 2.1. 对于每个 $t > 0$，函数 V_{K_t} 在 $\mathbb{C}^N$ 上有限且为多重次调和函数。此外，它满足以下估计。

(i) 对于每个 $a \in K$ 和 $z \in \mathbb{C}^N$,

$$0 \le V_{K_t}(z) \le \max\left\{0, \log\frac{|z-a|}{t}\right\}.$$

特别地，取 $K = \{a\}$，我们得到：对于每个 $n \in \mathbb{N}$、$P \in \mathcal{P}_n$ 和 $z \in \mathbb{C}^N$,

$$|P(z)| \le \max\left\{1, \frac{|z-a|^n}{t^n}\right\}\|P\|_{\overline{B(a,t)}}. \tag{6}$$

(ii) 对于每个 z、$h \in \mathbb{C}^N$,

$$\left|V_{K_t}(z+h) - V_{K_t}(z)\right| \le \log\left(1 + \frac{|h|}{t}\right). \tag{7}$$

证明。 （i）由球的极值函数的 Siciak 公式得出 [23, 第 179 页，条目 2。6] 以及 $B(a, t) \subset K_t$。

对于（ii），我们使用 Błocki 平移论证（参见 [26, 命题 3。5]）。对于 $x \in K_t$ 取 $a \in K$ 使得 $|x - a| \le t$。在 6 处应用（$x + h$ 并对 $x \in K_t$取上确界，我们得到

$$\|P(\cdot + h)\|_{K_t} \le \left(1 + \frac{|h|}{t}\right)^n \|P\|_{K_t}.$$

对 (2) 中翻译后的多项式进行归一化，得到

$$V_{K_t}(z+h) \le V_{K_t}(z) + \log\left(1 + \frac{|h|}{t}\right).$$

交换 z 和 $z + h$ 得到 (7)。由 (i) 和 (7)， V_{K_t} 有限且连续。因此$V_{K_t} = V^*_{K_t}$。由于此正则化是有限的，定义 1.3 后的注记表明， K_t是非多极的，并且 V_{K_t} 是多重次调和的。□

对于 $t > 0$，令

$$b_K(t) = \sup_{z \in K_t} V_{K_{t/2}}(z).$$

该量衡量了K的两个邻域之间极值函数的增长。

引理 2.2. 对于每个 $r > 0$ 和 $z \in \mathbb{C}^N$,

$$V_K(z) \le V_{K_r}(z) + \sum_{j=0}^{\infty} b_K(2^{-j}r). \tag{8}$$

证明。 若 $P \in \mathcal{P}_n$ 且 $\|P\|_{K_{t/2}} \le 1$，则 $\|P\|_{K_t} \le e^{nb_K(t)}$。因此，对于每个 $z \in \mathbb{C}^N$，

$$V_{K_{t/2}}(z) \le V_{K_t}(z) + b_K(t).$$

对于 $q \ge 1$，将此不等式应用于 $t = 2^{-j}r$、 $0 \le j < q$并相加。我们得到

$$V_{K_{2^{-q}r}}(z) \le V_{K_r}(z) + \sum_{j=0}^{q-1} b_K(2^{-j}r).$$

当 $s \downarrow 0$时， V_{K_s}递增至 V_K。事实上， $\|P\|_{K_s} \downarrow \|P\|_K$，因此在 K上范数至多为1的每一个 P都是这些多项式的极限

$$\frac{P}{\max\left\{1, \|P\|_{K_s}\right\}},$$

每一个在 K_s上范数至多为1。在（2）中取上确界并令 $q \to \infty$ 即可证明（8）。□

对于 $n \in \mathbb{N}$，令

$$M_n(K) = \sup\{\|\nabla P\|_K : P \in \mathcal{P}_n,\ \|P\|_K \le 1\}.$$

若 $M_n(K) < \infty$，则

$$\|\nabla P\|_K \le M_n(K)\|P\|_K \qquad (P \in \mathcal{P}_n).$$

引理 2.3。 如果 $M_n(K) < \infty$，那么对每个 $t \ge 0$ 和 $P \in \mathcal{P}_n$，

$$\|P\|_{K_t} \le e^{tM_n(K)}\|P\|_K. \tag{9}$$

证明。 固定 $z \in K_t$，选取距离 z最近的 $a \in K$，并令 $h = z - a$。对于 $Q \in \mathcal{P}_n$，由柯西–施瓦茨不等式和 $M_n(K)$ 的定义可得

$$\|D_h Q\|_K \le |h|\,\|\nabla Q\|_K \le |h| M_n(K)\|Q\|_K.$$

由于 $D_h Q \in \mathcal{P}_n$，迭代可得

$$\|D_h^j P\|_K \le (|h|M_n(K))^j \|P\|_K \qquad (1 \le j \le n).$$

令 $g(\zeta) = P(a + \zeta h)$，其中 $\zeta \in \mathbb{C}$。由链式法则， $1 \le j \le n$ 时 $g^{(j)}(0) = D_h^j P(a)$。由泰勒公式可得

$$P(z) = g(1) = P(a) + \sum_{j=1}^{n} \frac{D_h^j P(a)}{j!}.$$

取绝对值，并利用前面的界和 $|h| \le t$，可得

$$|P(z)| \le \left(1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{(|h|M_n(K))^j}{j!}\right)\|P\|_K \le e^{tM_n(K)}\|P\|_K. \qquad \square$$

由（9），每个马尔可夫集都确定了多项式。事实上，如果 P 在.....上恒为零 K，那么它在每个 K_t 上都恒为零。

推论 2.4. 假设 $A > 0$ 满足

$$\|\nabla P\|_K \le An\|P\|_K \qquad (n \in \mathbb{N},\ P \in \mathcal{P}_n).$$

那么，对于每个 z、 $w \in \mathbb{C}^N$，

$$V_K(z) \le \log(1 + A\,\mathrm{dist}(z, K)), \qquad |V_K(z) - V_K(w)| \le \log(1 + A|z - w|).$$

证明。 固定一个单位向量 $v \in \mathbb{C}^N$。我们对 n 进行归纳法，证明

$$|P(a + rv)| \le (1 + Ar)^n \|P\|_K \qquad (P \in \mathcal{P}_n,\ a \in K,\ r \ge 0).$$

对于 $n = 0$，结论显然成立。假设结论对 $n - 1$ 成立，其中 $n \ge 1$。令 $Q = D_v P$。于是 $Q \in \mathcal{P}_{n-1}$，并且

$$\|Q\|_K \le \|\nabla P\|_K \le An\|P\|_K.$$

对于每个 $t \in \mathbb{R}$，

$$\frac{d}{dt} P(a + tv) = Q(a + tv).$$

从 0 积分到 r，并将归纳假设应用于 Q，得到

$$|P(a+rv)| \le \|P\|_K + \int_0^r |Q(a+tv)|\,dt$$
$$\le \|P\|_K\left(1 + An\int_0^r (1+At)^{n-1}\,dt\right) = (1+Ar)^n\|P\|_K.$$

因此，对于每个 $h \in \mathbb{C}^N$，

$$\|P(\cdot+h)\|_K \le (1+A|h|)^n\|P\|_K.$$

按照引理 2.1（ii）的证明，对式（

$$V_K(w+h) \le V_K(w) + \log(1+A|h|).$$

首先取 $w \in K$，可知 V_K 在 $\mathbb{C}^N$ 上是有限的。对于任意 z，$w \in \mathbb{C}^N$，令 $h = z - w$，并交换 z 和 w。这就得到第二个估计。取最接近 z 的 $w \in K$，即可得到第一个估计。□

推论 2.4 是众所周知的情形 $m = 1$。关于无界补分支是正则的平面集合，参见 Toókos 和 Totik [27]。关于利用泰勒公式证明利普希茨连续性，参见 [7, 定理 5。3] 以及 [3,第 637–638]页。半径为 $R > 0$ 的闭圆盘上达到该界，其中 $\mathbb{C}$，且 $A = 1/R$。

对于 $m > 1$，相同的归纳法可适用于次数 n，其中以 An^{m-1} 代替 A。取 n 次方根后，因子 $1 + Arn^{m-1}$ 在 n 任意固定距离处均无界$r = \operatorname{dist}(z, K) > 0$。定理 1.6 的目标是证明，(1) 仍蕴含 V_K 具有任意指数 $0 < \gamma < 1/m$的赫尔德连续性。

3. 多变量情形下的估计

为证明下一个引理，我们应用 Hörmander 延拓定理 [10, 定理 4.4。3]。

引理 3.1。设 $s > 0$, $k \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{C}^N$ 和 $W = V_{K_s}$。存在 $Q \in P_{k+3N}$ 使得$Q(y) = e^{kW(y)}$ 并且，对于每个 $w \in \mathbb{C}^N$,

$$|Q(w)| \le C_N\left(1 + \frac{2k|w-y|}{s}\right)^{3N} e^{kW(w)}.$$

常数 $C_N \ge 1$ 仅取决于 N。

证明。令 $\delta = s/(2k)$ 并令 $\varphi(\xi) = 2kW(y+\delta\xi)$。由引理 2.1，$\varphi$ 是多重次调和的，并且对于 ξ, $\eta \in \mathbb{C}^N$,

$$|\varphi(\xi) - \varphi(\eta)| \le 2k\log\left(1 + \frac{|\xi-\eta|}{2k}\right) \le |\xi - \eta|.$$

因此，Hörmander 条件 (4.4.7) 成立，且振荡常数等于 1 [10, 第 95–96] 页。在他的定理 4.4.3 的公式 (4.4.9) 中，取子空间 $\Sigma = \{0\}$，其复余维数为 N，并令 $u(0) = e^{\varphi(0)/2}$。在此子空间上积分可得

$$\int_\Sigma |u|^2 e^{-\varphi}\,d\sigma = |u(0)|^2 e^{-\varphi(0)} = 1.$$

因此，我们得到一个整函数 G，满足 $G(0) = u(0)$，使得

$$\int_{\mathbb{C}^N} |G(\eta)|^2 e^{-\varphi(\eta)}(1+|\eta|^2)^{-3N}\,dV(\eta) \le (9\pi e)^N,$$

其中 dV 表示勒贝格测度。

固定 $\xi \in \mathbb{C}^N$。对于 $\eta \in B(\xi, 1)$，我们有

$$\varphi(\eta) \le \varphi(\xi) + 1, \qquad 1 + |\eta|^2 \le 1 + (|\xi|+1)^2 \le 2(1+|\xi|)^2.$$

$|G|^2$ 在球 $B(\xi,1)$ 上的平均值不等式给出

$$|G(\xi)|^2 \le \frac{1}{\operatorname{vol}(B(0,1))}\int_{B(\xi,1)} |G(\eta)|^2\,dV(\eta) \le C_N^2(1+|\xi|)^{6N}e^{\varphi(\xi)}.$$

定义

$$Q(w) = G\Big(\frac{w-y}{\delta}\Big) \qquad (w \in \mathbb{C}^N).$$

于是 $Q(y) = e^{kW(y)}$，由前面的不等式可得 Q的所述界。取 $a \in K$。由引理 2.1(i),

$$e^{W(w)} \le \max\Big\{1, \frac{|w-a|}{s}\Big\}, \qquad |Q(w)| \le M(1+|w|)^{k+3N},$$

其中 M 与 w无关。刘维尔定理的多项式增长形式给出$Q \in \mathcal{P}_{k+3N}$。□

证明 (4)。对于 $m = 1$，由推论 2.4 以及 $\log(1+Ar) \le Ar$即可得到断言。设 $m > 1$。取 $0 < t \le 1/2$，令 $s = t/2$ 并取 $y \in K_t$。记 $D =$ 直径 K。对于$x \in K$，有 $V_{K_s}(x) = 0$ 且 $|x-y| \le D + t$。因此，引理 3.1 中的多项式满足

$$\|Q\|_K \le C_N\Big(1 + \frac{4k(D+t)}{t}\Big)^{3N}.$$

由于 $Q \in \mathcal{P}_{k+3N}$，公式（9）和（1）给出

$$e^{kV_{K_s}(y)} = |Q(y)| \le e^{At(k+3N)^m}\|Q\|_K.$$

取对数并对 $y \in K_t$取上确界，得到

$$b_K(t) \le \frac{At(k+3N)^m}{k} + \frac{1}{k}\Big[\log C_N + 3N\log\Big(1 + \frac{4k(D+t)}{t}\Big)\Big].$$

选择

$$\ell(t) = \log\frac{e}{t}, \qquad k = \left\lceil \Big(\frac{\ell(t)}{t}\Big)^{1/m} \right\rceil.$$

不等式

$$k + 3N \le (1+3N)k, \qquad k \le 2\Big(\frac{\ell(t)}{t}\Big)^{1/m}$$

这些不等式给出了第一项的界 $C_{N,\,A,\,m}t^{1/m}\ell(t)^{1-1/m}$。对于第二项，利用 $t \le 1/2$ 和$k \ge 1$ 可得

$$\log\Big(1 + \frac{4k(D+t)}{t}\Big) \le \log(1 + 4(D+1)) + \log k + \log(1/t) \le C_{m,D}\ell(t).$$

下界 $k \ge (\ell(t)/t)^{1/m}$ 现在给出了 $C_{N,\,m,\,D}t^{1/m}\ell(t)^{1-1/m}$，作为第二项的一个界。

现在固定 $0 < r \le 1/2$ 和 $z \in K_r$。于是 $V_{K_r}(z) = 0$。此外，

$$\ell(2^{-j}r) = \ell(r) + j\log 2 \le (1+j)\ell(r).$$

代入引理2.2 得到

$$V_K(z) \le C_{N,A,m,D}\, r^{1/m}\ell(r)^{1-1/m}\sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j/m}(1+j)^{1-1/m}.$$

该级数收敛，从而证明了（4）。 □

4. 复直线上的初等证明

（5）的证明。固定 $t > 0$ 和 $n \in \mathbb{N}_0$。令 $s = t/2$。我们先证明

$$(n+1)V_{K_s}(\xi) \le Atn^m + \log 8 \qquad (\xi \in K_t). \tag{10}$$

对于 $\xi \in K_s$，这由 $V_{K_s}(\xi) = 0$ 得出。固定 $\xi \in K_t \setminus K_s$，并选取距离 ξ 最近的 $a \in K$。我们声称，存在有限多个 $x_i \in K$ 和 $c_i \in \mathbb{C}$，它们取决于 t，n，ξ，使得

$$F(\xi) = \sum_i c_i F(x_i) \quad (F \in \mathcal{P}_n), \qquad \sum_i |c_i| = e^{Atn^m}. \tag{11}$$

对 $\zeta \in \mathbb{C}$，令 $X(\zeta) = (1, \zeta, \ldots\ldots, \zeta^n)$。令 H 为 $\mathbb{C}^{n+1}$ 中紧集的凸包

$$\left\{e^{i\theta} X(x) : x \in K,\ 0 \le \theta \le 2\pi\right\}.$$

集合 H 是紧的。我们证明 $y = e^{-Atn^m} X(\xi)$ 属于 H。反设不然，并选取距离 y 最近的 $q \in H$。对于 $v = (v_0, \ldots\ldots, v_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$，令

$$L(v) = \operatorname{Re} \sum_{j=0}^{n} \overline{y_j - q_j}\, v_j.$$

对于每个 $v \in H$，线段 $q + \tau(v-q)$、$0 \le \tau \le 1$ 都包含在 H 中。因此，$\tau \mapsto |y - q - \tau(v-q)|^2$ 在 $[0,1]$ 上的 $\tau = 0$ 处取得最小值。它在该处的右导数为 $-2(L(v) - L(q))$，所以 $L(v) \le L(q)$。此外，$L(y) - L(q) = |y-q|^2 > 0$。

考虑多项式 $\phi(\zeta) = \sum_{j=0}^{n} y_j - q_j\, \zeta^j$。对于每个 $x \in K$，我们有

$$|\phi(x)| = \max_{0 \le \theta \le 2\pi} \operatorname{Re}\big(e^{i\theta}\phi(x)\big) = \max_{0 \le \theta \le 2\pi} L\big(e^{i\theta} X(x)\big) \le L(q).$$

由于 $y_j = e^{-Atn^m} \xi^j$，可得

$$\|\phi\|_K \le L(q) < L(y) = e^{-Atn^m} \operatorname{Re} \phi(\xi) \le e^{-Atn^m} |\phi(\xi)| \le \|\phi\|_K.$$

对于 $n \ge 1$，最后一个不等式由（9）和（1）得出。对于 $n = 0$，这是因为ϕ 为常数。矛盾证明了 $y \in H$。因此

$$e^{-Atn^m} X(\xi) = \sum_i \lambda_i e^{i\theta_i} X(x_i), \qquad \lambda_i \ge 0, \qquad \sum_i \lambda_i = 1.$$

令 $c_i = e^{Atn^m} \lambda_i e^{i\theta_i}$。则 $\sum_i |c_i| = e^{Atn^m}$。比较坐标，对于 1、x……、x^n，得到（11）中的第一个恒等式，从而根据线性性，对每个 $F \in \mathcal{P}${v26'>均成立。

对于 $w \in \mathbb{C} \setminus K$ 集

$$g(w) = \sum_i c_i \frac{\xi - x_i}{w - x_i}, \qquad h(w) = \frac{\xi - a}{w - a}\, g(w). \tag{12}$$

Then

$$h(\xi) = g(\xi) = \sum_i c_i = 1.$$

对于 $0 \le j < n$，将（11）应用于 $(\xi - x)x^j$，视其为关于 x的多项式。得到

$$\sum_i c_i (\xi - x_i) x_i^j = 0.$$

由于 $(w^n - x^n)/(w-x)$ 是关于 x 的多项式，当 $n \ge 1$ 时，其次数小于 n，因此这些恒等式给出

$$w^n g(w) = \sum_i \frac{c_i(\xi - x_i) x_i^n}{w - x_i}.$$

对于 $n = 0$，这就是 g 的定义。因此，$g(w) = O(|w|^{-n-1})$ 和 $h(w) = O(|w|^{-n-2})$ 在无穷远处。

对于 $w \in \partial K_s$ 和 $x \in K$，我们有 $|w-a|,\ |w-x| \ge s$。由于 $|\xi - a| \le t = 2s$ 和

$$|\xi - x| \le |w-x| + |w-a| + |\xi - a|,$$

我们得到

$$\frac{|\xi - a|}{|w-a|} \frac{|\xi - x|}{|w-x|} \le 2\frac{|\xi - a|}{s} + \frac{|\xi - a|^2}{s^2} \le 8.$$

因此 $|h(w)| \le 8e^{Atn^m}$ 在 ∂K_s上。固定 $d \in \mathbb{N}$和 $P \in \mathcal{P}_d$，使得 $\|P\|_{K_s} \le 1$。函数 $P^{n+1} h^d$ 在 $\mathbb{C} \setminus K_s$ 上全纯，并且在无穷远处趋于零。在 ∂K_s 上，其模至多为$(8e^{Atn^m})^d$。选取一个圆盘，使其内部包含 K_s 和 ξ，且边界上也满足相同的界。最大值原理表明，在圆盘去掉 K_s 后包含 ξ的连通分支上，该界仍然成立。由于 $h(\xi) = 1$,

$$|P(\xi)|^{n+1} \le \left(8e^{Atn^m}\right)^d.$$

取对数，除以 d并对所有这样的 d 和 P 取上确界，得到（10）。为完成证明，令 $n=\lfloor$（At）$^{-1/m}\rfloor$。于是

$$At n^m \le 1, \qquad \frac{1}{n+1} \le (At)^{1/m}.$$

由（10），对于每个 $\xi \in K_t$，我们有

$$V_{K_s}(\xi) \le (1+\log 8)(At)^{1/m}.$$

对 $\xi \in K_t$ 取上确界，得到

$$b_K(t) \le (1+\log 8)(At)^{1/m}. \tag{13}$$

固定 $z \in \mathbb{C}$。如果 $z \in K$，则（5）的两边都为零。否则令 $r = \operatorname{dist}(z,\ K)$。于是 V_{K_r}（z）$=0$，而（8）和（13）给出

$$V_K(z) \le (1+\log 8)(Ar)^{1/m} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j/m} = \frac{1+\log 8}{1-2^{-1/m}}(Ar)^{1/m}. \qquad \square$$

推论 4.1（乘积）。设 $K = E_1 \times \cdots \times E_N$，其中每个 $E_j \subset \mathbb{C}$ 非空且紧。如果 K 满足（1），常数为 $A>0$ 和 $m \ge 1$，则对于每个 $z \in \mathbb{C}^N$，

$$V_K(z) \le C_m \big(A \operatorname{dist}(z,K)\big)^{1/m}, \qquad C_m = \frac{1+\log 8}{1-2^{-1/m}}.$$

证明。对一个坐标中的多项式进行检验，可在每个 E_j 上得到（1），且具有相同的 A，m。由 Siciak 乘积公式 [23, 命题 5。9] 和（5），

$$V_K(z) = \max_j V_{E_j}(z_j) \le C_m \max_j \big(A \operatorname{dist}(z_j,E_j)\big)^{1/m} \le C_m \big(A \operatorname{dist}(z,K)\big)^{1/m}. \qquad \square$$

致谢

在准备本稿件期间，作者使用 ChatGPT (OpenAI) 进行语言润色，并探索简化某些数学论证的可能性。作者对该工具提供的建议进行了严格审查，并对其中一些建议进行了大幅修改或完全替换。所有数学陈述和证明均由作者独立核验，作者对本作品的内容承担全部责任。

参考文献

[1] M. Baran 和 L. Bialas-Ciez，格林函数的赫尔德连续性与马尔可夫兄弟不等式，Constr. Approx. 40 (2014), 121–140.[2] M. Baran 和 L. Bialas-Ciez，关于多元多项式的一些极值问题，Dolomites Res. Notes Approx. 17 (2024), no. 3, 114–126.[3] M. Baran、L. Bialas-Ciez 和 B. Milówka，关于 Markov 不等式中的最佳指数，Potential Anal. 38 (2013), 635–651.[4] L. Bialas 和 A. Volberg，Cantor三分集的马尔可夫性质，Studia Math. 104 (1993), 259–268.[5] L. Bialas-Ciez，Cantor型集合的马尔可夫性质与格林函数赫尔德连续性的等价性，East J. Approx. 1 (1995), 249–253.[6] L. Bialas-Ciez，$\mathbb{C}$中的马尔可夫集不是极性集，Bull. Polish Acad. Sci. Math. 46 (1998), 83–89.[7] L. Bialas-Ciez，格林函数的光滑性与马尔可夫型不等式，Banach Center Publ. 92 (2011), 27–36.[8] L. Bialas-Ciez 和 R. Eggink，复平面中马尔可夫集与 m完全集的 L-正则性，Constr. Approx. 27 (2008), 237–252.[9] J.-P. Demailly，多复变函数势论，CIMPA讲座，尼斯，1989；为特伦托会议增补，1992.[10] L. Hörmander，多复变函数复分析导论，第3版修订版，North-Holland Mathematical Library，第7卷，North-Holland，阿姆斯特丹，1990.[11] M. Klimek，多复势理论，London Math. Soc. Monogr. (N.S.)，第6卷，Clarendon Press，牛津，1991.

[12] M. Kosek，Joukowski与Green，切比雪夫与Julia，Dolomites Res. Notes Approx. 14 (2021), 59–65.[13] N. Levenberg，$\mathbb{C}^N$中的逼近，Surv. Approx. Theory 2 (2006), 92–140.[14] N. Levenberg，关于加权多位势理论的十讲，Dolomites Res. Notes Approx. 5 (2012), 特刊，1–59.[15] W. Pawłucki 和 W. Pleśniak，具有多项式尖点的集合上的马尔可夫不等式与 C$^\infty$ 函数，Math. Ann. 275 (1986), 467–480.[16] R. Pierzchała，马尔可夫不等式与多项式映射，Math. Ann. 366 (2016), 57–82.[17] R. Pierzchała，全纯映射的几何与多复变格林函数的赫尔德连续性，Math. Ann. 379 (2021), 1363–1393.[18] R. Pierzchała，多项式不等式、o-极小性与Denjoy–Carleman类，Adv. Math. 407 (2022), Art. 108565.[19] W. Pleśniak，马尔可夫不等式与 C^∞ 函数延拓算子的存在性，J. Approx. Theory 61 (1990), 106–117.[20] W. Pleśniak，一个不具有马尔可夫性质的康托正则集，Ann. Polon. Math. 51 (1990), 269–274.[21] W. Pleśniak，马尔可夫不等式与 C^∞ 函数的延拓，载于《复分析中的构造方法》，MathematischesForschungsinstitutOberwolfach，会议报告5/1991，第13页。[22] J. Siciak，关于某些极值函数及其在多复变解析函数理论中的应用，Trans. Amer. Math. Soc. 105 (1962), 322–357.[23] J. Siciak，$\mathbb{C}^N$中的极值多重次调和函数，Ann. Polon. Math. 39 (1981), 175–211.[24] J. Siciak，允许多项式不等式的 $\mathbb{R}^n$ 中的紧集，Trudy Mat. Inst. Steklov. 203 (1994), 441–448；亦以英文发表于Proc. Steklov Inst. Math. 203 (1995), 361–366.[25] J. Siciak，复平面上的维纳型正则性判据，Ann. Polon. Math. 66 (1997), 203–221.[26] J. Siciak，$\mathbb{C}^n$中的维纳型充分条件，Univ. Iagel. Acta Math. 35 (1997), 47–74.[27] F. Toókos 和 V. Totik，马尔可夫不等式与格林函数，Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl. 76 (2005), 91–102.[28] V. Totik，Cantor集的马尔可夫常数，Acta Sci. Math. (Szeged) 60 (1995), 715–734.

数学与计算机科学学院，雅盖隆大学，乌雅谢维察街6号，30-348 克拉科夫，波兰电子邮件地址：leokadia.bialas-ciez@uj.edu.pl

数学与计算机科学学院，雅盖隆大学，乌雅谢维察街6号，30-348 克拉科夫，波兰电子邮件地址：rafal.pierzchala@uj.edu.pl