arXiv:2611.33132v1 [math.DG] 24 Nov 2026

Ricci-flat流形的能量与拓扑

Tristan Ozuch

摘要。我们证明存在 $C>0$，使得任意完备Ricci-flat四维流形（M，g）满足

$$b_2(M)-C\leqslant\frac{1}{8\pi^2}\int_M|R_g|_g^2\,dv_g\leqslant b_2(M)+C,$$

其中 R 是曲率算子。我们不对体积增长、无穷远处的模型或曲率衰减作任何假设。由此可知，不可数多个奇异 $\mathbb{R}^4$ 不具有完备Ricci-flat度量；并且具有有限 b_2 的完备非紧超凯勒度量，其端由Sun-Zhang分类。这也为Bamler分解中永生四维Ricci流的薄部提供了信息。证明通过界定穷竭该流形的区域的边界拓扑，改进了Cheeger-Gromov和Cheeger-Tian的切割方法。

引言

在闭黎曼四维流形（M，g）上，记曲率算子 $R\colon\ \Lambda^2\to\Lambda^2$，并定义能量 $\mathcal{E}(U):=(8\pi^2)^{-1}\int_U|R|^2\,d\mathrm{vol}$。Chern-Gauss-Bonnet公式给出了能量与 M^4的拓扑之间的恒等式

$$\mathcal{E}(M)=\chi(M)+\frac{1}{8\pi^2}\int_M\left|\mathrm{Ric}-\tfrac{1}{4}\,\mathrm{Scal}\;g\right|^2 d\mathrm{vol}.$$

特别地，我们有 $\mathcal{E}(M)\geqslant\chi(M)$，且当且仅当取到最小化 $\mathcal{E}$ 的爱因斯坦度量时等号成立。这也是 Hawking 以引力瞬子 [Haw77]命名这一概念的动机之一。对于非紧致的里奇平坦四维流形，引力瞬子的定义通常假设 $\mathcal{E}(M)<+\infty$。

在本文中，我们证明，第二贝蒂数有限等价于这一有限能量条件，并回答文献中的若干悬而未决问题，例如 [LS26]。对于具有完备、非紧致且不塌缩的 里奇平坦四维流形 M，这一结果已经为人所知：[CN15] 和 [BKN89]证明其具有一个渐近于平坦锥的渐近局部欧几里得端 $\mathbb{R}^4/\Gamma$，并且在此情形下，根据 [Nak90]，$\mathcal{E}(M)=\chi(M)-\frac{1}{|\Gamma|}$。

定理 A。存在 $C>0$ 具有以下性质。设 (M,g) 是一个完备、非紧致的里奇平坦4维流形，满足 $b_2(M)<+\infty$和 $p\in M$。能量 $\mathcal{E}(M)$满足

$$b_2(M)-C\leqslant\mathcal{E}(M)\leqslant b_2(M)+C.$$

此外，若$\lim_{r\to+\infty}r^{-4}\,\mathrm{Vol}\,B_r(p)=0$，则以下结论成立。

(1) 在 M 的某个紧子集之外，有 $|R|\leqslant C\,d(\cdot,p)^{-2}$。对于每个充分大的 r，$B_{2r}(p)\setminus B_r(p)$ 都带有正秩的幂零结构，其轨道的外在直径为 $o(r)$，此处的意义参见 [*CFG*92]。*(2)* 对于每个充分大的 r，存在一个紧区域 $B_r(p)\subset Z_r\subset B_{2r}(p)$，其边界光滑 ∂Z_r，使得 $b_0(\partial Z_r)+b_1(\partial Z_r)\leqslant C$，$b_2(Z_r)\leqslant\mathcal{E}(M)+C$ 并且

$$\mathcal{E}(M)=\chi(Z_r)\in\mathbb{Z}.$$

(3)若 M 是定向的，则 ∂Z_r 的符号算子的 *eta*不变量收敛到一个有限值值 η_∞。根据 $\tau(M)$ M 的交叉形式的符号，我们得到 *Hitchin-Thorpe*不等式的以下推广，以及对 η_∞ 的一个界：

$$3\,|\eta_\infty+\tau(M)|\leqslant 2\,\mathcal{E}(M)\leqslant 2\,b_2(M)+C\qquad and\qquad 3\,|\eta_\infty|\leqslant 5\,b_2(M)+C.$$

定理 A 解决了 Sun-Zhang 和 Li-Sun [LS26, 猜想 30]的部分内容。

注。无限 在 [AKL89], [Mye87、KN94、KRWY24] 和 [Ozu26] 中发现了能量示例 .

这一结 构首先意味着，许多异 exotic 4-流形不可能承载 Ricci 平坦度量 .

推论 B。 在不可数多个异 *exotic* $\mathbb{R}^4$上不可能存在完备*Ricci-flat*度量。

注。 在 [CMM24 中，定理 1.3], Chodosh、Maximo 和 Mukherjee 排除了在不可数多个异 exotic $\mathbb{R}^4$ 上具有零 Taylor 不变量的正标量曲率完备度量 [Tay97]„ 而推论 B 则排除了 $\mathbb{R}^4$ 的光滑化上的 Ricci 平坦度量；这些光滑化包括由 [Tay97，例 5.10]所得的具有 $\gamma = +\infty$ 且 Taylor 不变量为 $\gamma > 2C$的不可数多个光滑化。

定理 A 使我们能够进一步去掉超凯勒度量分类中的假设。Chen 和 Chen [CC21]研究了曲率衰减快于二次的超凯勒四维流形，而 Sun 和 Zhang [SZ24] 则在曲率能量有限的条件下得到了端的分类。

推论 C. 每个非平坦完备非紧致超凯勒流形(M^4, g)若满足 $b_2(M) < +\infty$，则都微分同胚于某个带边界紧流形的内部，且其端在 *Sun* 和 *Zhang* [SZ24, 定理 1.2] 的分类中属于 *ALE*、*ALF*、*ALG*、*ALH*、*ALG** 或 *ALH** 。

定理 A 中的上界也适用于从其他流形上鼓泡而出的 Ricci 平坦度量。

推论 D. 存在 $C > 0$ 使得下述结论成立。设(M^4, g, p)是一个奇点集 S 有限、且在 $q \in S$ 处奇点群为 Γ_q 的完备 *Ricci* 平坦轨形。若闭带基点四维流形(N_j, g_j, p_j)在 $M \setminus S$ 的紧子集上一致光滑收敛到(M, g, p)，则有

$$\mathcal{E}(M \setminus S) + \sum_{q \in S} \left(1 - \frac{1}{|\Gamma_q|}\right) \leqslant \liminf_{j \to +\infty} b_2(N_j) + C.$$

这一结论适用于永恒Ricci流的Bamler分解[Bam20, Corollary 2.42] 薄部中的Ricci平坦吹胀极限，这是 [Bam20a, Bam23, Bam20]的紧致性与部分正则性理论的一个应用。它也适用于一个猜想中的四维带手术Ricci流，在该流中 b_2 单调不增。Ricci-flat度量已经可以在厚部分发生泡化，参见 [DO24]。

证明策略。 对于带有边界 $\partial Z = \Sigma$的紧集 $Z \subset M$ ，我们首先证明， $b_2(Z)$与 $\mathcal{E}(Z)$之差受Chern-Gauss-Bonnet公式中的几何边界项 $J(\partial Z)$以及边界 $\Sigma^3 = \partial Z$的Betti数 $b_i(\partial Z)$控制。这通过分析 M 的上同调到 Z 和 Σ的限制来证明。

接下来，我们按照 Cheeger 和 Tian [CT06，第 2-3], 节，将 Cheeger 和 Gromov [CG91] 的切割构造局部化到曲率尺度$r_{|R|}$上；这些结果提供了一种选择 Z 的方法，使得 $J(\partial Z)$受 $\int_\Sigma r_{|R|}^{-3}$ 控制。对于边界Betti数，同样的界并不成立（例如参见 $\mathbb{R} \times \mathbb{T}^3$中的有限管），因此我们转而通过调和形式和 [Li80, LS84]重数控制的局部版本，以$\int_\Sigma \frac{r_{|R|}}{\mathrm{Vol}(B_{r_{|R|}})}$控制 $b_i(\partial Z)$。

定理 A 证明的最后几步基于关键估计[CT06，定理 1.26]证明中的思路。 [CT06，定理 0.8]中的 ε-正则性估计和一项极大函数估计，使我们能够对环带 $\underline{A}$（环绕 Σ）上的 $b_i(\partial Z)$和 $J(\partial Z)$进行估计，使其不超过 $\mathcal{E}(A)^{\frac{3}{4}}$。对这一次线性界进行迭代即可证明定理 A。

注。 我们在可定向情形下撰写证明，但能量与贝蒂数估计在 M、 N 以及 N_j 不可定向时同样成立。贯穿全文，常数 C 仅依赖于维数（此处为 4），除非另有说明。其值可能逐行变化。

致谢。作者获得了 NSF 项目 DMS-2405328 的部分资助。他感谢 Richard Bamler 向他提出这个问题，并解释了该问题在 Ricci 流方面的动机。

人工智能工具的使用。大语言模型被用于查找参考文献、校对文章中的论证和语法，以及帮助弥补所引文献中的小缺漏。推论 B 的应用是由一个大语言模型提出的。

1. 几何与拓扑边界项

设 Z 是一个紧区域，其边界 Σ光滑，且它位于一个完备非紧Ricci平坦四维流形(M, g)中。对于Σ的第二基本形式II，令 $J(\Sigma) := \int_\Sigma (|R||\mathrm{II}| + |\mathrm{II}|^3)\, dA$。带边界的Chern-Gauss-Bonnet公式给出

$$|\mathcal{E}(Z) - \chi(Z)| \leqslant CJ(\Sigma). \tag{1}$$

现在我们证明， $\chi(Z)$与 $b_2(Z)$之差由其边界的拓扑所控制，因此得到以下估计。本文中的所有上同调群均取实系数。

引理 1.1. 设 Z 是一个定向四维流形 N中的紧区域，边界 Σ 光滑。假设 Z 的每个分支都与 Σ相交。于是，按照 [Car07，定义 1。3]，中的记号，将 H_c^k 记为次数k 的紧支撑上同调，我们有

$$\chi(Z) \leqslant \dim H_c^2(N) + b_0(\Sigma) + b_1(\Sigma).$$

若 Z 嵌入一个无限体积的连通完备定向四维流形 M 中，且满足$\mathrm{Ric} \geqslant 0$，则

$$b_2(Z) \leqslant \chi(Z) + b_0(\Sigma) + b_1(\Sigma).$$

证明。 令 r_k : $H^k(Z) \to H^k(\Sigma)$ 为限制。根据 [Car07 第 1.1 节，$\ker r_k$ 中的每个类都有一个支撑于 $\mathring{Z}$中的闭代表元，因此特别地，由零延拓可得 $\ker r_k \subset \mathrm{im}(H_c^k(N) \to H^k(Z))$，于是我们有

$$b_k(Z) = \dim\ker r_k + \dim\mathrm{im}\, r_k \leqslant \dim H_c^k(N) + b_k(\Sigma). \tag{2}$$

根据假设， Z 的每个分支都与 Σ 相交，因此 $b_4(Z) = 0$ 且 $b_0(Z) \leqslant b_0(\Sigma)$；又由于 Σ 是一个闭定向三维流形， $\chi(\Sigma) = 0$， $b_3(\Sigma) = b_0(\Sigma)$ 且 $b_2(\Sigma) = b_1(\Sigma)$。第一个界由 $\chi(Z) \leqslant b_0(Z) + b_2(Z)$ 以及取 $k = 2$时的 (2) 得出。

现在假设 M 连通、完备，具有 $\mathrm{Ric} \geqslant 0$，且体积为无限体积。根据 Bochner论证以及 [Car07 的推论 1.6 和 1.12]，，映射 $H_c^k(M) \to H^k(M)$ 对 $k \in \{1, 3\}$消失，因此 $\ker r_k = 0$ 且 $b_1(Z) + b_3(Z) \leqslant b_1(\Sigma) + b_0(\Sigma)$，因为 $b_k(Z) = \dim\ker r_k + \dim\mathrm{im}\, r_k$。 □

现在令 $Z \subset M$ 也嵌入到 N中。引理 1.1 与 (1) 表明

$$\mathcal{E}(Z) \leqslant \dim H_c^2(N) + b_0(\Sigma) + b_1(\Sigma) + CJ(\Sigma) \quad \text{and} \quad b_2(Z) \leqslant \mathcal{E}(Z) + b_0(\Sigma) + b_1(\Sigma) + CJ(\Sigma) \tag{3}$$

本文余下部分将对 $b_0(\Sigma) + b_1(\Sigma) + CJ(\Sigma)$ 进行估计。

2. 在曲率尺度上控制流形的拓扑

对于 $a > 0$，定义曲率尺度 $r_{|R|}$ 及其截断版本 $\ell(x)$，如 [CT06] 中所示：

$$r_{|R|}(x) := \sup\big\{t > 0,\ \sup_{B_t(x)} |R| \leqslant t^{-2}\big\} \qquad \text{and} \qquad \ell(x) := \min\{a, r_{|R|}(x)\}. \tag{4}$$

函数 ℓ 是 1-利普希茨的。对于 $c > 0$，令 $V_{c\ell}(x) := \mathrm{Vol}\, B_{c\ell(x)}(x)$。如果 $|\mathrm{II}| \leqslant C_1\ell^{-1}$ 在 Σ 上成立，那么

$$J(\Sigma) \leqslant C\int_\Sigma \ell^{-3}\, dA \leqslant C\int_\Sigma \frac{\ell(x)}{V_\ell(x)} dA(x) \tag{5}$$

其中， C 仅取决于 C_1。第一个界由 $|R(x)| \leqslant \ell(x)^{-2}$ 得出，最后一个界则由 Bishop-Gromov 不等式得出。现在我们来控制边界的拓扑。

命题 2.1。 如果在 Σ上有 $|\mathrm{II}| \leqslant C_1\ell^{-1}$，那么存在常数 $c \in (0, \frac{1}{4})$ 和 $C > 0$，它们仅取决于 C_1，使得

$$b_0(\Sigma) + b_1(\Sigma) \leqslant \int_\Sigma \frac{C}{\mathrm{Vol}_\Sigma B^\Sigma_{c\ell(x)}(x)} dA(x) \leqslant C \int_\Sigma \frac{\ell(x)}{V_\ell(x)}\, dA(x).$$

证明。 我们有 $b_0(\Sigma) \leqslant \int_\Sigma \frac{1}{\text{体积}_\Sigma B^\Sigma_{c\ell(x)}(x)} dA(x)$。固定 $x \in \Sigma$，并令 ϕ 为Σ上的一个调和 1-形式。由于 ℓ 是 1-利普希茨的，在 $\overline{B^\Sigma_{2c\ell(x)}(x)}$ 上有 $\ell \geqslant (1-2c)\ell(x)$，而 Gauss-Codazzi 方程给出在 $B^\Sigma_{2c\ell(x)}(x)$ 上 $\mathrm{Ric}(g_\Sigma) \geqslant -C\ell(x)^{-2} g_\Sigma$，并且由 Bochner 公式可得 $\Delta_\Sigma |\phi|^2 \geqslant -C\ell(x)^{-2}|\phi|^2$。因此， [Li08 的推论 3.6] 中的平均值不等式给出

$$|\phi(x)|^2 \leqslant C \frac{\|\phi\|^2_{L^2(\Sigma)}}{\mathrm{Vol}_\Sigma B^\Sigma_{c\ell(x)}(x)}. \tag{6}$$

现在考虑 Σ上调和 1-形式 ϕ_i 的一组 $L^2(\Sigma)$-正交归一基。由于 $\phi_i(x)$的张成空间秩至多为 3，我们可以进行正交基变换，使得当$i \notin \{1,2,3\}$ 时， $\phi_i(x) = 0$，同时不改变 $\sum_i |\phi_i(x)|^2$。特别地，由 (6) 可得

$$\sum |\phi_i(x)|^2 \leqslant C \frac{3}{\mathrm{Vol}_\Sigma B^\Sigma_{c\ell(x)}(x)}. \tag{7}$$

现在 $b_1(\Sigma) = \int_\Sigma \sum_i |\phi_i|^2$，由 $(\phi_i)_i$ 的正交归一性可知，因此对 Σ 上的 (7) 积分，便得到第一个不等式，与 [Li80, (2.13)] 中一样。

法向指数映射和标准体积比较给出 $V_\ell(x) \leqslant C\ell(x)\,\mathrm{Vol}_\Sigma B^\Sigma_{c\ell(x)}(x)$，无论 $c = c(C_1) > 0$ 是否具有单射性，只要其充分小即可，由此证明第二个不等式。□

3. Choice of the cut

设 (M, g) 是一个完备非紧 Ricci-flat 四维流形， $p \in M$ 且 $0 < s \leqslant r$。令

$$\rho := d(p,\cdot) - r \qquad \text{and} \qquad A' := B_{r+2s/3}(p) \setminus \overline{B_{r+s/3}(p)} = \{s/3 < \rho < 2s/3\},$$

并令 ℓ 为由 (4) 定义的函数，其中给定 $a > 0$。

引理 3.1。 存在 $C > 0$，使得以下结论成立。设 $0 < a \leqslant s/15$，并设 $w \geqslant 0$ 是定义在 A' 上的连续函数。存在一个边界光滑的紧区域 Z，其边界为 $\partial Z = \Sigma \subset A'$，使得 $B_{r+s/3}(p) \subset Z \subset B_{r+2s/3}(p)$

$$|\mathrm{II}| \leqslant C\ell^{-1} \quad \text{on } \Sigma \qquad \text{and} \qquad \int_\Sigma w\, dA \leqslant \frac{C}{s}\int_{A'} w\, d\mathrm{vol}. \tag{8}$$

证明。 我们改编 [CG91 第 1] 节和 [CT06 定理 3.1] 的证明中的切割构造，并使用 [CT06 定理 3.13] 的证明中的平均化论证。令 $I := [2s/5, 3s/5]$，并考虑环域 $U_t := \{t < \rho < t + \ell\}$，其中 $t \in I$。由于 $\ell \leqslant a \leqslant s/15$，我们有 $U_t \subset \{2s/5 < \rho < 2s/3\} \subset A'$。点 $x \in A'$ 属于 U_t，当且仅当 $\rho(x) - \ell(x) < t < \rho(x)$，因此由 Tonelli 定理可得

$$\int_I \int_{U_t} \frac{w}{\ell}\, d\mathrm{vol}\, dt = \int_{A'} \frac{w(x)}{\ell(x)} \left|I \cap \big(\rho(x) - \ell(x), \rho(x)\big)\right| d\mathrm{vol}(x) \leqslant \int_{A'} w\, d\mathrm{vol}.$$

由于 $|I| = s/5$，我们可以找到并固定 $t_0 \in I$，使得

$$\int_{U_{t_0}} \frac{w}{\ell}\, d\mathrm{vol} \leqslant \frac{5}{s}\int_{A'} w\, d\mathrm{vol}. \tag{9}$$

对于这个 t_0，我们引入尺度适配函数 h，它在 [CG91] 中起到 $d(\cdot, K)$ 的作用，以便在半径为 $\propto \ell$ 的球覆盖上统一应用 Yomdin定量Sard定理：

$$h := \min\Big\{\frac{(\rho - t_0)_+}{\ell}, 1\Big\} \quad \text{so that} \quad \{0 < h < 1\} = \{0 < \rho - t_0 < \ell\} = U_{t_0}.$$

由于 ρ 和 ℓ 都是1-利普希茨的， $|dh| \leqslant 2\ell^{-1}$ 几乎处处成立，因此 h 在每个 $B_{\ell(q)/2}(q)$ 上都是 $C\ell(q)^{-1}$-利普希茨的。对 h 应用 CT06 中定理 3.1], 证明里的光滑化和在球覆盖 $B_{\ell(q)}(q)$ 上的归纳，可得仅依赖于维数的 $F \in C^\infty(M)$ 和 $\delta \in (0, 1_2)$，使得 –

$$F \leqslant h \leqslant F + \tfrac{1}{2} \quad \text{on } M, \tag{10}$$

$$C^{-1}\ell^{-1} \leqslant |\nabla F| \leqslant C\ell^{-1} \qquad \text{and} \qquad |\operatorname{Hess} F| \leqslant C\ell^{-2} \quad \text{on } \{0 < F < \delta\}. \tag{11}$$

注 3.2. 我们使用估计式 (10)，这与 [CT06, p. 504], 一致，而非 [CT06, (3.7)],; 后者与 [CT06, (3.10)] 之间的不一致已在 [Hua20,Remark 3.9]中指出。

对于 $y \in (0, \delta)$，记 $Z_y := \{F \leqslant y\}$。由 (10) 和 (11)， Z_y 是一个边界光滑的紧区域，并且由于 $\delta < \frac{1}{2}$，它满足 –

$$\overline{B_{r+t_0}(p)} \subset Z_y \subset B_{r+t_0+a}(p) \qquad \text{and} \qquad \partial Z_y \subset U_{t_0}.$$

由于 $s/3 < t_0$ 和 $t_0 + a \leqslant 2s/3$，它满足 $B_{r+s/3}(p) \subset Z_y \subset B_{r+2s/3}(p)$ 和 $\partial Z_y \subset A'$，并且 [CT06, (3.6)] 和 (11) 给出 $|\mathrm{II}| \leqslant |\mathrm{Hess}\ F|/|\nabla F| \leqslant C\ell^{-1}$ 于 ∂Z_y上。接下来，我们通过第二次取平均来选择层 y_0。余面积公式、(11)、包含关系 $\{0 < F < \delta\} \subset U_{t_0}$ 和 (9) 给出

$$\int_0^\delta \int_{\partial Z_y} w\, dA\, dy = \int_{\{0<F<\delta\}} w\, |\nabla F|\, d\mathrm{vol} \leqslant C \int_{U_{t_0}} \frac{w}{\ell}\, d\mathrm{vol} \leqslant \frac{C}{s} \int_{A'} w\, d\mathrm{vol}. \tag{12}$$

因此存在 $y_0 \in (0, \delta)$ 使得 $Z := Z_{y_0}$ 满足（8）。 □

4. 通过周围能量估计边界项

令 ε_0 和 c_0 为 [CT06, 定理 0.8], 中的常数，并固定 $L \geqslant 4$ 使得 $c_0 L^{-2} < \frac{1}{4}$。令 M 为完备非紧 Ricci-flat 四维流形， $p \in M$ 且 $0 < s \leqslant r$。在（4）中取 $a := s/(512L)$，令 $A := B_{r+s}(p) \setminus B_r(p)$，并根据带权 $w = \ell/V_\ell$ 的引理 3.1 选择 Z，使得 $\partial Z \subset A' \subset A$。

命题 4.1。区域 Z 满足

$$b_0(\partial Z) + b_1(\partial Z) + J(\partial Z) \leqslant C\Big[\Big(\frac{r}{s}\Big)^3 + \Big(\frac{r}{s}\Big)^{\frac{3}{4}} \mathcal{E}(A)^{\frac{3}{4}}\Big]. \tag{13}$$

证明。 命题 2.1、（5）和（8）给出了以下对边界项的控制

$$b_0(\partial Z) + b_1(\partial Z) + J(\partial Z) \leqslant C \int_{\partial Z} \frac{\ell}{V_\ell}\, dA \leqslant \frac{C}{s} \int_{A'} \frac{\ell}{V_\ell}\, d\mathrm{vol}. \tag{14}$$

对于 $x \in A'$，我们 h ave $B_{r+s}(p) \subset B_{4r}(x)$，因此在 p 处应用 Bishop-Gromov 不等式，再在 x 处应用，可得 s

$$\mathrm{Vol}\, A \leqslant \frac{Cs}{r} \mathrm{Vol}\, B_{4r}(x) \leqslant Csr^3 \frac{V_\ell(x)}{\ell(x)^4}, \qquad \text{so that} \qquad \frac{\ell(x)}{V_\ell(x)} \leqslant C\Big(\frac{sr^3}{\mathrm{Vol}\, A}\Big)^{\frac{1}{4}} V_\ell(x)^{-\frac{3}{4}}. \tag{15}$$

- 若 $\ell(x) = a$，则由 (15) 和 Bishop-Gromov 不等式可得

$$\frac{\ell(x)}{V_\ell(x)} \leqslant \frac{Csr^3}{a^3\, \mathrm{Vol}\, A} \leqslant \frac{Cr^3}{s^2\, \mathrm{Vol}\, A}. \tag{16}$$

- 若 $\ell(x) < a$，则 $\ell(x) = r_{|R|}(x)$ 且 $\int_{B_{L\ell}(x)(x)} |R|^2 d$体积 $> \varepsilon_0$ 依据 [CT06，定理 0.8]。根据极大函数 $M_f(x,t)$ 的定义：$=$上确界$0<\tau\leqslant t$ffl $_{B_\tau}(x)$ $|f|\, d$体积，结合 Bishop-Gromov 不等式，$\int_{B_{L\ell}(x)}(x)$ $|R|^2\, d$体积 $> \varepsilon_0$ 以及 $L\ell(x) < \frac{s}{512}$可得

$$\frac{1}{V_\ell(x)} \leqslant \frac{L^4}{\varepsilon_0} \fint_{B_{L\ell(x)}(x)} |R|^2\, d\mathrm{vol} \leqslant C\, M_{|R|^2}(x, \tfrac{s}{512}). \tag{17}$$

将 $\ell = a$ 时的 (16) 与 $\ell(x) < a$ 时 (15) 中的 (17) 结合，一般情况下可得 ：

$$\frac{\ell(x)}{V_\ell(x)} \leqslant C\Big[\frac{r^3}{s^2\operatorname{Vol} A} + \Big(\frac{sr^3}{\operatorname{Vol} A}\Big)^{\frac14} M_{|R|^2}(x, \tfrac{s}{512})^{\frac34}\Big]. \tag{18}$$

最后，在 A' 上对式 (18) 进行积分，其中 $\operatorname{Vol} A' \leqslant \operatorname{Vol} A$，得到

$$\begin{aligned}\frac1s\int_{A'}\frac{\ell}{V_\ell}\,d\mathrm{vol} &\leqslant C\Big[\Big(\frac rs\Big)^3 + \Big(\frac{r^3}{s^3\operatorname{Vol} A}\Big)^{\frac14}\int_{A'} M_{|R|^2}(x,\tfrac{s}{512})^{\frac34}\,d\mathrm{vol}(x)\Big]\\ &\leqslant C\Big[\Big(\frac rs\Big)^3 + \Big(\frac rs\Big)^{\frac34}\mathcal{E}(A)^{\frac34}\Big],\end{aligned}$$

其中，通过在 A 上应用 [CT06, (4.2)] ，并取 $W = A'$, $f = |R|^2$、半径 $\frac{s}{512}$ 和 $\alpha = \frac34$，我们化简了极大函数。结合 (14)，这就证明了 (13)。□

引理 4.2。设 M 是一个完备非紧 *Ricci-flat* 四维流形，设 $p \in M$ 和 $r > 0$。如果 $B_{2r}(p)$ 的一个邻域能够光滑嵌入到一个无边界的四维流形 N 中，则

$$\mathcal{E}(B_r(p)) \leqslant b_2(N) + C. \tag{19}$$

证明。不妨设 $b_2(N) < \mathcal{E}(B_r(p))$。按照 [CT06 中定理 1.26], 的二进制论证，我们对 $i \geqslant 0$ 引入

$$r_i := (2 - 2^{-i})r, \qquad A_i := B_{r_{i+1}}(p) \setminus \overline{B_{r_i}(p)} \qquad \text{and} \qquad x_i := 2^{-3i}\big(\mathcal{E}(B_{r_i}(p)) - b_2(N)\big).$$

由于 $0 < x_i \leqslant 2^{-3i}\mathcal{E}(B_{2r}(p)) \to 0$ 如 $i \to +\infty$，我们可以固定 i 使得 $x_i = \max_j x_j$，于是 $x_{i+1} \leqslant x_i$ 给出

$$2^{-3i}\mathcal{E}(A_i) = 8x_{i+1} - x_i \leqslant 7x_i. \tag{20}$$

取命题 4.1 中的切割集 Z，以 r_i 和 $2^{-i-1}r$ 分别替代 r 和 s，从而使 $A = A_i$。由于 $B_{r_i}(p) \subset Z \subset B_{r_{i+1}}(p)$，区域 Z 嵌入于 N。由于 $r_i/(r_{i+1} - r_i) \leqslant 2^{i+2}$，由庞加莱对偶，(3) 中 $\dim H^2_c(N) = b_2(N)$ 的第一个不等式为 [Car07，第 1.1 节。2], (13) 和 (20) 给出

$$x_i \leqslant 2^{-3i}\big(\mathcal{E}(Z) - b_2(N)\big) \leqslant C\big[1 + \big(2^{-3i}\mathcal{E}(A_i)\big)^{\frac34}\big] \leqslant C\big(1 + x_i^{\frac34}\big). \tag{21}$$

如果 $x_i \geqslant 1$，则 (21) 给出 $x_i \leqslant 2Cx_i^4$，也就是说，$x_i \leqslant (2C)^4$。因此 $\mathcal{E}(B_r(p)) - b_2(N) = x_0 \leqslant x_i \leqslant \max\{1, (2C)^4\}$。□

5. 主要结果的证明

定理 *A* 的证明。

能量界。由 (19) 可得 $N = M$，我们有 $\mathcal{E}(M) = \sup_{r>0}\mathcal{E}(B_r(p)) \leqslant b_2(M) + C$.

现在假设 $\mathcal{E}(M) < +\infty$，并为 m 个线性无关类 $([\omega_i])_{i\in\{1,\dots,m\}}$ in $H^2_c(M)$ 选取紧支撑代表元。取充分大的 r，使它们的支撑包含在 B_r 中，且 $\mathcal{E}(M \setminus B_r) \leqslant 1$。于是，命题 4.1 中的区域 Z_r 满足 $s = r$

$$B_r \subset \mathring{Z}_r \subset Z_r \subset B_{2r} \qquad \text{and} \qquad m \leqslant b_2(Z_r) \leqslant \mathcal{E}(M) + C. \tag{22}$$

事实上，零延拓将限制类 $[\omega_i|_{\mathring{Z}_r}] \in H^2_c(\mathring{Z}_r)$ 映射为 $H^2_c(M)$ 中原来的线性无关类 $[\omega_i]$，因此这些限制类线性无关，并且根据 Z_r [上的庞加莱对偶性°Car07，第 1.1 节2], $m \leqslant \dim H^2_c(\mathring{Z}_r) = b_2(Z_r)$。

(1) 由于 $\mathcal{E}(M) < +\infty$，将 [CT06 定理 0.8] 应用于 $B_{d(x,p)/2}(x)$，可得 $|R(x)| \leqslant 4c_0\, d(x,\ p)^{-2}$，当 $d(x,\ p)$ 足够大时成立，因为 $\mathcal{E}(B_{d(x,p)/2}(x))$ 在 $d(x,\ p) \to +\infty$ 时趋于零。结合塌缩，我们满足 [CT06 定理 2.3], 的假设，该定理给出 N-结构，而 [CT06 第 499] 页上的性质 iii) 给出外在直径为 $o(r)$ 的轨道。

(2) 对于 $\Sigma_r := \partial Z_r$, $|R| \leqslant 4c_0\, d(x,p)^{-2}$，(8) 和 $\operatorname{Vol} B_r(p) = o(r^4)$ 给出 $J(\Sigma_r) \to 0$。由于 $\chi(Z_r) \in \mathbb{Z}$，(1) 意味着对每个充分大的 r，都有 $\mathcal{E}(M) \in \mathbb{Z}$ 以及 $\chi(Z_r) = \mathcal{E}(M)$。

(3) 假设 M 是定向的。那么，如上所述，当 r 足够大时， $H_c^2(M)$ 的一组基可取代表元，使其支撑在 $B_r(p)$ 中，因此从 $H_c^2(\mathring{Z}_r)$ 的零延拓是满射，并保持楔积配对[Car07，第 1.1 节。2], 因此 $\tau(Z_r) = \tau(M)$。

令 η 表示作用在偶数形式上的奇签名算子的 eta不变量。 [APS75，定理 4.14] 中的边界修正项由 [DW07，（2.6）] 给出，并且满足 $CJ(\Sigma_r) \to 0$ 的界。由于 $|W^{\pm}|^2 \trianglelefteq |R|^2$ 是可积的，签名公式给出

$$\eta(\Sigma_r) \longrightarrow \eta_\infty = \frac{1}{12\pi^2}\int_M \left(|W^+|^2 - |W^-|^2\right) d\mathrm{vol} - \tau(M).$$

最后的不等式来自 $|\eta_\infty + \tau(M)| \leqslant \frac{2}{3}\mathcal{E}(M)$ 以及 $|\tau(M)| \leqslant b_2(M)$. □

推论 *B* 的证明。 如果 X 同胚于 $\mathbb{R}^4$ 且承认一个完备Ricci-flat度量，那么根据（19）和（22）， X 的每个紧子集都包含在某个 Z_r 中，并且满足 $b_2(Z_r) \leqslant 2C$。因此， $\gamma(X) \leqslant 2C$ ，根据[Tay97, 定理 4.2], ，这排除了 $\mathbb{R}^4$ 的不可数多个光滑化，其中 $\gamma = +\infty$ 属于[Tay97，例 5.10]。□

推论 *D* 的证明。 对于一个极限（M， g）和固定的 r， $B_{2r}(p)$ 的邻域会嵌入 $\overline{N_j}$，对所有充分大的 j均成立。应用（19），对 j取下极限，然后令 $r \to +\infty$ ，即可得到光滑度量的界。轨形情形则由轨形 Chern-Gauss-Bonnet公式推出（关于对 ALE端的适配，参见例如 [Nak90] ）： 每个奇点 q 对修正能量的贡献为 $1 - |\Gamma_q|^{-1}$ 。□

参考文献

[AKL89] M. T. Anderson、P. B. Kronheimer 和 C. LeBrun，《无限拓扑型的完备Ricci-flat Kähler流形》，Comm. Math. Phys. 125 (1989)，第 4 期，637–642 页。[APS75] M. F. Atiyah、V. K. Patodi 和 I. M. Singer，《谱不对称性与黎曼几何 I》，Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 77 (1975)，第 1 期，43–69 页。[Bam20] R. H. Bamler，《Ricci流非塌缩极限的结构理论》，预印本，2020，arXiv:2009.03243v2。[Bam20a] R. H. Bamler，《Ricci流背景上的熵与热核估计》，预印本，2020，arXiv:2008.07093。[Bam23] R. H. Bamler，《超Ricci流空间的紧性理论》，Invent. Math. 233 (2023)，第 3 期，1121–1277 页。[BKN89] S. Bando、A. Kasue 和 H. Nakajima，《在具有快速曲率衰减和最大体积增长的流形上构造无穷远处的坐标》，Invent. Math. 97 (1989)，第 2 期，313–349 页。[Car07] G. Carron，《非紧流形上的调和形式》，CIMPA 暑期学校“几何分析近期专题”讲义，2007，arXiv:0704.3194。[CFG92] J. Cheeger、K. Fukaya 和 M. Gromov，《塌缩流形上的幂零结构与不变度量》，J. Amer. Math. Soc. 5 (1992)，第 2 期，327–372 页。[CG91] J. Cheeger 和 M. Gromov，《黎曼流形的截除》，载于《微分几何：纪念 Manfredo do Carmo 研讨会》，Pitman 纯数学与应用数学专著及综述第 52 卷，Longman，1991，85–94 页。[CMM24] O. Chodosh、D. Maximo 和 A. Mukherjee，《具有一致正标量曲率的完备黎曼四维流形》，预印本，2024，arXiv:2407.05574v1。[CN15] J. Cheeger 和 A. Naber，《Einstein流形的正则性与余维4猜想》，Ann. of Math. (2) 182 (2015)，第 3 期，1093–1165 页。[CT06] J. Cheeger 和 G. Tian，《Einstein 4-流形的曲率与单射半径估计》，J. Amer. Math. Soc. 19 (2006)，第 2 期，487–525 页。[CC21] G. Chen 和 X. Chen，《曲率衰减快于二次的引力瞬子》，数学学报 227 (2021)，第 2 期，263–307 页。[DW07] X. Dai 和 G. Wei，《非紧Einstein 4-流形的 Hitchin-Thorpe不等式》，Adv. Math. 214 (2007)，第 2 期，551–570 页。[DO24] A. Deruelle 和 T. Ozuch，《古代及永恒Ricci流中的轨形奇点形成》，预印本，2024，arXiv:2410.16075。

[*Haw*77] *S. W. Hawking*，《引力瞬子》，物理快报 *A 60 (1977)*，第 *2* 期，*81–83* 页。[*Hua*20] *S. Huang*，《 ε-正则性与四维收缩里奇孤子的结构》，国际数学研究论文通知 *2020 (2020)*，第 *5* 期，*1511–1574* 页。[*KN*94] *D. Korotkin* 和 *H. Nicolai*，《施瓦西解的一个周期性模拟》，预印本，*1994*，*arXiv:gr-qc/9403029*。[*KRWY*24] *M. Khuri*、*M. Reiris*、*G. Weinstein* 和 *S. Yamada*，《引力孤子与无限拓扑型的完备里奇平坦黎曼流形》，*Pure Appl. Math. Q. 20 (2024)*，第 *4* 期，*1895–1921* 页。[*Li*80] *P. Li*，《紧黎曼流形的索伯列夫常数与 p-谱》，高等师范学校科学年刊 *(4) 13 (1980)*，第 *4* 期，*451–468* 页。[*Li*08] *P. Li*，《完备黎曼流形上的调和函数》，载于《几何分析手册》第 *1* 卷，纯数学高级研究讲座第 *7* 卷，国际出版社，*2008*，*195–227* 页。[*LS*84] *P. Li* 和 *R. Schoen*，《黎曼流形上次调和函数的 L^p 与平均值性质》，数学学报 *153 (1984)*，第 *3–4* 期，*279–301* 页。[*LS*26] *M. Li* 和 *S. Sun*，《引力瞬子的几何》，即将发表于微分几何综述，*arXiv:2606.10443*。[*Mye*87] *R. C. Myers*，《紧化时空中的高维黑洞》，物理评论 *D 35 (1987)*，第 *2* 期，*455–466* 页。[*Nak*90] *H. Nakajima*，《*ALE* 里奇平坦四维流形的自对偶性与正质量定理》，载于《微分与解析几何近期专题》，纯数学高级研究 *18-I (1990)*，*385–396* 页。[*Ozu*26] *T. Ozuch*，《无穷多个四维流形上的正爱因斯坦度量》，预印本，*2026*，*arXiv:2610.08052*。[*SZ*24] *S. Sun* 和 *R. Zhang*，《超凯勒四维流形的塌缩几何及其应用》，数学学报 *232 (2024)*，第 *2* 期，*325–424* 页。[*Tay*97] *L. R. Taylor*，《光滑四维流形的一个不变量》，几何与拓扑 *1 (1997)*，*71–89* 页。

麻省理工学院，数学系，77 号麻萨诸塞大道，剑桥，MA 02139-4307电子邮件地址：ozuch@mit.edu