_ _$QQQQ$夸克系统与规范/弦对偶 II：弦断裂

g

Oleg Andreev*L.D. Landau Institute for Theoretical Physics, 142432 Chernogolovka, Russia*

这是两篇配套论文中的第二篇，我们在文中继续利用规范/弦对偶构建全重四夸克系统。在这里，我们将这一构建扩展到具有两个等质量轻味的 $SU(3)$规范理论。作为应用，我们对矩形构型和共线构型下最低的两个玻恩-奥本海默势进行了解析和数值分析。分析揭示了与弦重联和弦断裂，以及结点湮灭和夹断相关的若干临界尺度。此外，我们发现弦张力具有普适性，而弦断裂距离则不具有普适性。

arXiv:2611.33140v1 [hep-ph] 24 Nov 2026

I. 引言

夸克模型 [1, 2] 正步入奇异强子时代，使得夸克如何束缚在强子内部这一由来已久的问题日益迫切。一个重要例子是发现了几种由两个粲夸克和两个粲反夸克组成的奇异强子，称为全粲四夸克态 [3]。

这是两篇配套论文中的第二篇，我们将在其中继续发展全重四夸克系统的弦描述，并利用规范/弦对偶计算其前两个玻恩-奥本海默（B-O）势。[1] 在第一篇论文 [6], 中，我们研究了重夸克和反夸克位于矩形顶点的情形，并考虑了两种不同的排序，如图1所示。我们固定了长度与宽度之比，这显著简化了分析，因为参数数量因此减少了一个。本文将从两个方面拓展先前的

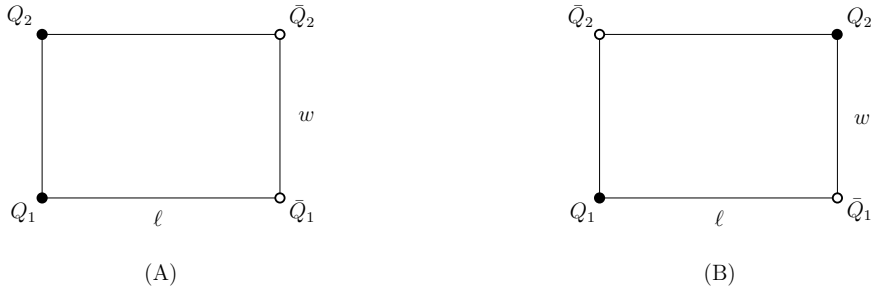

图1：长度为 ℓ 、宽度为 w的矩形。重夸克（反夸克）按照A型排序（左）和B型排序（右）放置在顶点处。

分析。首先，我们引入轻夸克，以模拟具有两种等质量味的 $SU(3)$规范理论，从而能够探讨弦断裂问题。其次，我们固定矩形的宽度，使我们能够与格点量子色动力学中得到的结果 [7–9]进行比较。

本文的结构安排如下。为使论述自成一体，第 II 节将简要回顾我们所采用的理论框架和具体模型。这种方法的核心是基于关联矩阵进行混合分析，其元素构成一个模型哈密顿量

$\mathcal{H}$。这些势是该哈密顿量的本征值。第 III 节致力于构造确定 $\mathcal{H}$对角元所需的五维弦构型。在本节中，我们还将介绍刻画不同构型之间跃迁的长度尺度。这些长度尺度与各种类型的弦相互作用相关。随后，在第 IV 节中，我们讨论最低的两个 B-O 势，并将结果与格点规范理论的结果进行比较。在第 V 节中，我们评述一种特殊类型的弦激发、共线几何的情形以及势模型。最后，我们在第 VI 节中讨论总结。与 [6], 一样，我们包含了附录 A，其中列出本文使用的符号和定义。不过，我们不再重述五维空间中 Nambu-Goto 弦的技术结果，而是请读者参阅

[1] 事实上，这项工作是 更广泛研究计划的一部分，旨在研究全重强子。关于 [4, 5] $Q\bar{Q}$ 和 QQ的讨论， Q 系统。

[6]的附录 B。在附录 B 中，我们给出关于 QQ 和 QQq 系统的一组最少技术细节。最后，在附录 C 中，我们讨论四夸克弦构型的五维类比。

II. 预备知识

本节将讨论 我们构造中用于获得 $QQQQ$ 系统 B-O势的基本特征 .

A. 一般过程

研究四夸克系统时，我们采用一种基于关联矩阵的方法，其元素可导出模型哈密顿量

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} E_1 & & \Theta_{ij} \\ & \ddots & \\ \Theta_{ij} & & E_n \end{pmatrix} . \tag{2.1}$$

这里，对角元表示弦构型的能量，非对角元则描述这些构型之间混合的强度。一般来说， n 是无限的，但在实际计算中，它取有限值，具体取值取决于计算目的。最低的两个势 V_0 和 V_1，由 $\mathcal{H}$的两个最小本征值给出。

现在从四维中的标准视角 [10]考察 $QQQQ$ 系统的弦构型。我们将讨论范围限制在 $N_f = 2$，即两个质量相等的动力学味，尽管将其推广到含有$N_f = 2 + 1$ 的全QCD也很直接。

对于A型排序，很容易猜出最简单的非连通构型 [6]。它们是图2所示的双介子构型 (a) 和 (b)。每个构型都由重夸克源和反夸克源通过.....连接

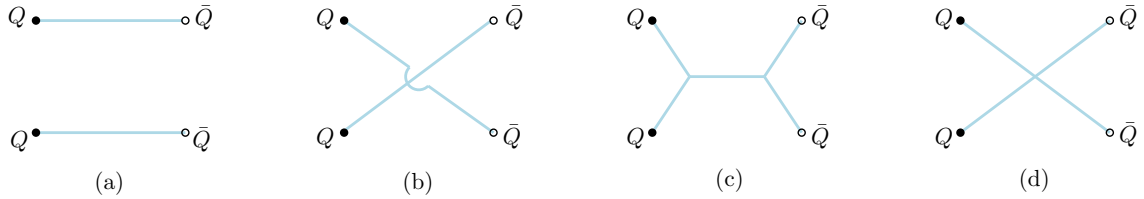

图2：弦端点处没有轻夸克的四维弦构型：(a)–(b) 双介子构型，(c) 四夸克构型，以及 (d) 夹缩四夸克构型。由于构型 (c) 和 (d) 描述了夸克之间真正的四体相互作用，我们将其称为四夸克构型。

弦，看起来像一对重介子。为了进一步讨论，在某种程度上将弦结点和轻夸克对视为基本激发会很有帮助。增加一对弦结点便得到四夸克构型和夹缩四夸克构型 [6], ，即图2中的构型 (c) 和 (d)。另一方面，加入轻夸克会得到图3所示的非连通弦构型。

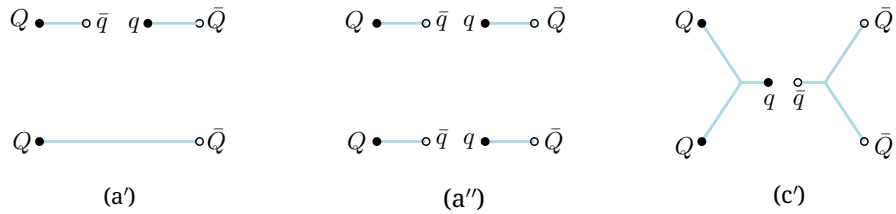

图3：一些含有轻夸克的构型：(a′)–(a″) 多介子构型和 (c′) 双重子构型。这里以及下文中，我们用与图2中的母构型相同的字母来标记它们；这些构型是在母构型中加入虚夸克-反夸克对得到的。撇号的数量等于这类对的数量。

同样，对于B型排序，存在双介子构型和夹缩四夸克构型，如图4 [6]所示。此外，弦断裂会产生多介子构型。这些构型是

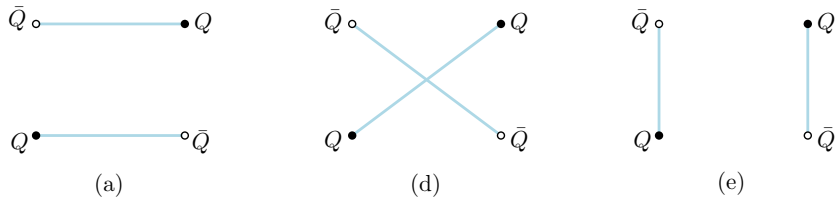

图 4：不含轻夸克的四维弦构型：(a) 和 (e) 为双介子构型，(d) 为夹缩四夸克构型。

如图 5 所示。它不是　值得注意的是，尽管排序不同，上述构型(a)和(a′)

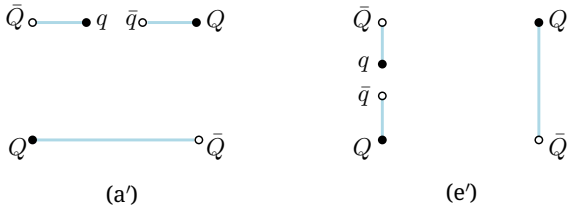

图 5：由图 4 的双介子构型产生的多介子构型。

图形完全相同。

我们以几点说明结束本讨论。首先，每个不连通构型都可以解释为由介子或重子组成的强子分子。然而，我们假设其束缚能可以忽略，因此能量等于组成强子的静止能之和，如格点量子色动力学 [7–9] 中所示。其次，我们保留构型 (c) 和 (d)，因为它们的能量在较大 ℓ [6] 处不同（另见图 8）。第三，我们尝试仅考虑与两个低能 B-O 势相关的构型。最后，B型排序中不存在四夸克构型，在五维中也是如此 [6]。

构型之间的跃迁可以用弦相互作用来解释。在图 6 中，我们示意性地描绘了与以下各节讨论相关的四种相互作用类型，其中我们将介绍一种概念，即 a

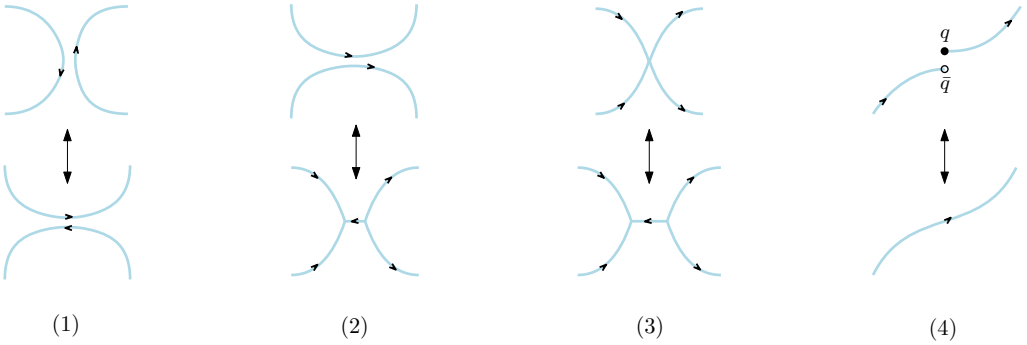

图 6：一些弦相互作用：(1) 重联，(2) 结点湮灭，(3) 夹断，以及 (4) 弦断裂。

用临界长度对跃迁进行定量描述。请注意，在五维中，夹断有一种直观的解释：产生一个膜-反膜束缚态。

B. 五维模型

为方便起见，我们给出一个非常简短的总结。[2] 如下所述。五维几何被选为半径为 R的欧几里得 AdS_5 空间的一参数变形：

[2] 有关更多详情，请参阅 [6] 。

$$ds^2 = \mathrm{e}^{\mathsf{s}r^2}\frac{R^2}{r^2}\Big(dt^2 + (dx^i)^2 + dr^2\Big)\,. \tag{2.2}$$

这里， r 表示第五个（径向）坐标，而 s 是一个变形参数。边界位于 $r = 0$，软墙位于 $r = 1/\sqrt{\mathsf{s}}$。该软墙将弦限制在边界附近。

一根 维弦存在于这个五维空间中，其行为由南部-后藤作用量支配

$$S_{\mathrm{NG}} = \frac{1}{2\pi\alpha'}\int d^2\xi\,\sqrt{\gamma^{(2)}}\,, \tag{2.3}$$

其中， γ 是诱导度规， α' 是弦参数， ξ^i 是世界面坐标。

重子顶点是弦结点的高维类似物，[3] 是一个点状对象，其在静态规范下的作用量形式为

$$S_{\mathrm{V}} = \tau_v\int dt\,\frac{\mathrm{e}^{-2\mathsf{s}r^2}}{r}\,, \tag{2.4}$$

其中 τ_v 是一个自由参数 。在重子化学势为零时，自然可以假设反重子顶点 is 由相同的 作用量描述，因此 $S_{\bar{\mathrm{V}}} = S_{\mathrm{V}}$。

体内弦端点处的轻夸克通过在世界面作用量中加入一个边界项引入，即在曲空间中传播的有质量粒子的作用量。对于几何（2.2），该作用量以静态规范写为

$$S_{\mathrm{q}} = \mathsf{m}\int dt\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\mathsf{s}r^2}}{r}\,, \tag{2.5}$$

其中，m 是一个无量纲参数。

为使以下讨论具体化，我们需要指定模型参数。对于存在轻夸克的 $Q\bar{Q}$ 和 QQQ 夸克系统，我们采用 [11, 12] 中建议的数值，即 $\mathsf{s} = 0.45$吉电子伏特^2,$\mathsf{g} = \frac{R^2}{2\pi\alpha'} = 0.176$、$\mathsf{k} = \frac{\tau_v}{3\mathsf{g}} = -0.102$，以及 $\mathsf{n} = \mathsf{m}\,\mathsf{g} = 3.057$.[4] 这些数值将用于之后的所有估算。重要的是，描述四夸克系统时没有引入额外参数。

III. 五维中的弦构型

现在我们转而讨论几何（2.2）中的弦构型。如前所述，我们通过令

$$w = const\,, \tag{3.1}$$

来固定矩形宽度，这称为几何约束。

一种建立对这些对象直观认识的方法，是将它们的四维对应物置于五维空间的边界上。随后，引力会将轻夸克（反夸克）和弦拉入内部，而重夸克和反夸克则保持静止。分析沿着[6]的思路可以直接进行。只需解释少数技术细节，主要是因为约束条件（3.1）。[5]

---

[3] 我们采用这一术语，以区分四维弦结点与其五维对应物。[4] 不同于 [6], 中用于纯 $SU(3)$规范理论的 $\mathsf{k} = -0.083$ ，我们选择 $\mathsf{k} = -0.102$。这一选择的依据是：对于含轻夸克的量子色动力学，缺乏三夸克势的晶格数据；此外还有唯象规则 $E_{\mathrm{QQ}}(\ell) = \frac{1}{2}E_{\mathrm{Q\bar{Q}}}(\ell)$ ，其中 $\ell \to 0$。[5] 在 [6], 中，我们采用了约束 $w/\ell = const$。

A. A型排序

1. The two-meson configurations

每个双介子构型由两部分组成，其中每一部分如图20a所示。根据我们的假设，其能量是这些部分能量之和。

对于构型 (a)，总能量作为 ℓ 的函数，简单地表示为

$$E^{(\mathrm{a})} = 2E_{\mathrm{Q\bar{Q}}}(\ell)\,, \tag{3.2}$$

其中， $E_{\mathrm{Q\bar{Q}}}$ 和 ℓ 由方程 (B.1) 参数化给出。

根据附录 B 中的公式，小 ℓ 展开立即可写成

$$E^{(\mathrm{a})}(\ell) = -\frac{\alpha^{(\mathrm{a})}}{\ell} + 4c + o(1)\,, \qquad \text{with} \qquad \alpha^{(\mathrm{a})} = 2\alpha_{\mathrm{Q\bar{Q}}}\,. \tag{3.3}$$

系数 $\alpha_{\mathrm{Q\bar{Q}}}$ 由 (B.3) 给出，而 c 是归一化常数。对于较大的 ℓ，展开为 is

$$E^{(\mathrm{a})}(\ell) = 2\sigma\ell + C^{(\mathrm{a})} + o(1)\,, \qquad \text{with} \qquad C^{(\mathrm{a})} = 2C_{\mathrm{Q\bar{Q}}}\,. \tag{3.4}$$

这里， σ 和 $C_{\mathrm{Q\bar{Q}}}$ 定义于 (B.4) 中。重要的是， $\sigma = \mathsf{egs}$ 是物理弦张力，其普适性已在 QQ、 QQQ和 $QQQQ$系统中 [4–6]得到证明。

对于构型 (b)，总能量为

$$E^{(\mathrm{b})} = 2E_{\mathrm{Q\bar{Q}}}(\sqrt{\ell^2 + w^2})\,. \tag{3.5}$$

其参数形式为

$$\ell = \sqrt{\frac{4}{\mathsf{s}}\Big(\mathcal{L}^{+}(\lambda)\Big)^2 - w^2}\,, \qquad E^{(\mathrm{b})} = 4\mathsf{g}\sqrt{\mathsf{s}}\,\mathcal{E}^{+}(\lambda) + 4c\,, \tag{3.6}$$

由 (B.1) 可得。这里，函数 $\mathcal{L}^{+}$ 和 $\mathcal{E}^{+}$ 定义于附录 A 中。参数 λ 从 λ_{b} 变化到 1，其中 λ_{b}是在区间 $[0,1]$内方程 $w = \frac{2}{\sqrt{s}}\mathcal{L}^{+}(\lambda)$ 的一个解。

相应的渐近展开可由表达式 (3.6) 得到。当 ℓ较小时，展开式为

$$E^{(\mathrm{b})} = c^{(\mathrm{b})} + B\ell^2 + o(\ell^2)\,, \tag{3.7}$$

其中 $c^{(\mathrm{b})} = 4\mathsf{g}\sqrt{\mathsf{s}}\mathcal{E}^{+}(\lambda_{\mathrm{b}}) + 4c$ 且 $B = \frac{\mathsf{gs}}{w}\frac{\partial_\lambda \mathcal{E}^{+}}{\partial_\lambda \mathcal{L}^{+}}\Big|_{\lambda=\lambda_{\mathrm{b}}}$。类似地，当 ℓ较大时，有

$$E^{(\mathrm{b})}(\ell) = 2\sigma\ell + C^{(\mathrm{b})} + o(1)\,, \qquad \text{with} \qquad C^{(\mathrm{b})} = 2C_{\mathrm{Q\bar{Q}}}\,. \tag{3.8}$$

在此阶，构型 (a) 和 (b) 的大-ℓ 展开式相同。然而，修正项很重要：当 w 非零时，构型 (b) 的能量始终高于构型 (a)。原因如下。函数 $\mathcal{L}^{+}(\lambda)$ 和 $\mathcal{E}^{+}(\lambda)$ 在区间 $[0,1]$ 内都单调递增。对于给定的 ℓ，由于 (3.6) 中 w 所造成的平移，$\lambda^{(\mathrm{b})}$ 的值必须大于 $\lambda^{(\mathrm{a})}$。因此， $\mathcal{E}^{+}(\lambda^{(\mathrm{b})}) > \mathcal{E}^{+}(\lambda^{(\mathrm{a})})$。这意味着构型 (b) 与基态势无关，且只可能对更高阶的 B-O 势有所贡献。

2. The tetraquark configuration

与 [6]，中一样，四夸克构型由附录 C 中描述的基本构型 (I) 和 (II) 构成。其能量的参数表示为：

$$\ell = \begin{cases} \ell^{\,(\mathrm{II})}(v)\,, \\ \ell^{\,(\mathrm{I})}(v)\ , \end{cases} \qquad E^{(\mathrm{c})} = \begin{cases} E^{\,(\mathrm{II})}(v)\,, & \mathrm{v}_\times \le v \le \mathrm{v}_0\ , \\ E^{\,(\mathrm{I})}(v)\ , & \mathrm{v}_0 \le v \le \mathrm{v}_1 \end{cases} \tag{3.9}$$

如果 $w \le \mathrm{w}$ 且

$$\ell = \ell^{\,(\mathrm{II})}(v)\,, \qquad E^{(\mathrm{c})} = E^{\,(\mathrm{II})}(v)\,, \qquad \mathrm{v}_\times \le v \le \mathrm{v}_1 \tag{3.10}$$

若 $w \ge \mathrm{w}$。这里，$E^{\,(\mathrm{I})}$ 和 $E^{\,(\mathrm{II})}$ 表示方程（C.5）和（C.18）中定义的基本构型的能量。v 的界限取决于宽度 w，其定义见附录 C。它们的含义如下：$\mathrm{v}_\times$ 是构型（c）和（d）之间的转变点，v_0 是基本构型（I）和（II）之间的转变点，而 v_1 对应于大-ℓ 极限。[6] w 的值由方程 $\mathrm{v}_0(w) = \mathrm{v}_1(w)$ 确定。数值上，$\mathrm{w} = 0.779$飞米。

由于 ℓ 有下界，除非 $\ell^{(\mathrm{II})}(\mathrm{v}_\times)$ 足够小，否则讨论 $E^{(\mathrm{c})}$ 的小-ℓ 行为是没有意义的。然而，大-ℓ 展开是有意义的，其形式为

$$E^{(\mathrm{c})} = \sigma\ell + C^{(\mathrm{c})} + o(1)\,, \qquad C^{(\mathrm{c})} = \begin{cases} \mathsf{g}\sqrt{\mathsf{s}}\Big(4\mathcal{E}^+(\alpha,\mathrm{v}_1) - 2\mathrm{e}\sin\beta\mathcal{L}^+(\alpha,\mathrm{v}_1) - \mathcal{J}(\mathrm{v}_1) + 6\mathsf{k}\frac{\mathrm{e}^{-2\mathrm{v}_1}}{\sqrt{\mathrm{v}_1}}\Big) + 4c & \text{if} \quad w \le \mathrm{w}\,, \\ \mathsf{g}\sqrt{\mathsf{s}}\Big(4\mathcal{E}^-(\lambda,\mathrm{v}_1) - 2\mathrm{e}\sin\beta\mathcal{L}^-(\lambda,\mathrm{v}_1) - \mathcal{J}(\mathrm{v}_1) + 6\mathsf{k}\frac{\mathrm{e}^{-2\mathrm{v}_1}}{\sqrt{\mathrm{v}_1}}\Big) + 4c & \text{if} \quad w \ge \mathrm{w}\,, \end{cases} \tag{3.11}$$

这由方程（C.10）和（C.21）可知。角度 α 和 β以及参数 λ定义在这些方程的下方。函数 $\mathcal{E}$、$\mathcal{L}$和 $\mathcal{J}$ 见附录 A。这里，σ 与 QQ、QQQ和 QQq 系统中的弦张力相同 [4, 5, 14]。

重要的是，在极限 $w \to 0$ 下，$\mathrm{v}_\times$、v_0，和 v_1 均趋于零，同时保持排序 $\mathrm{v}_\times < \mathrm{v}_0 < \mathrm{v}_1$。因此，可以通过取 $w \to 0$ 和 $\ell \to \infty$ 来考虑双夸克极限。在此极限下，利用展开式 (C.11)，(3.11) 可改写为

$$E^{(\mathrm{c})} = E_{\mathrm{Q\bar{Q}}}(\ell) + 2E_{\mathrm{QQ}}(w)\,, \tag{3.12}$$

其中

$$E_{\mathrm{Q\bar{Q}}}(\ell) = \sigma\ell + C_{\mathrm{Q\bar{Q}}} + o(1)\,, \qquad E_{\mathrm{QQ}}(w) = -\frac{\alpha_{\mathrm{QQ}}}{w} + c + \sigma_0 w + o(w)\,. \tag{3.13}$$

这里，$\alpha_{\mathrm{QQ}} = -w_0 E_0\mathsf{g}$ 和 $\sigma_0 = \frac{1}{w_0}\big(E_1 + \frac{w_1}{w_0}E_0\big)\mathsf{gs}$ 的系数定义见附录 C。这些表达式与重夸克-双夸克对称性 [13]相符。我们还注意到，重夸克-夸克势 E_{QQ} 的表达式与从 [5] 中的 QQQ 系统以及从 [14] 中的 QQq 系统得到的表达式相同。

3. The pinched tetraquark configuration

现在我们考虑五维中的夹缩四夸克构型。人们或许会认为它是四夸克构型的某种特殊极限，但事实并非如此。如图 8 所示，两种构型都能在很宽的长度范围内独立存在。构型 (d) 如图 7 所示。在 [6], 中，研究者通过保持长度与宽度之比固定来研究它。这里我们将分析扩展到宽度保持固定的情形。

控制该构型的总作用量是四条弦的南部-后藤作用量与两个顶点的作用量之和，即 $S = \sum_{i=1}^{4} S^{(i)}{}_{\mathrm{NG}} + 2S_{\mathrm{V}}$。对 r_v 取极值，可得到该点处力平衡方程的 r 分量 [6], ，由此可将切线角 α 表示为 v 的函数：

$$\sin\alpha = \frac{3}{2}\mathsf{k}(1+4v)\mathrm{e}^{-3v}\,. \tag{3.14}$$

请注意，由于 $\mathsf{k} < 0$，α 为负。

---

[6] 为保持一致性，它们必须满足 $\mathrm{v}_\times < \mathrm{v}_0 < \mathrm{v}_1$。

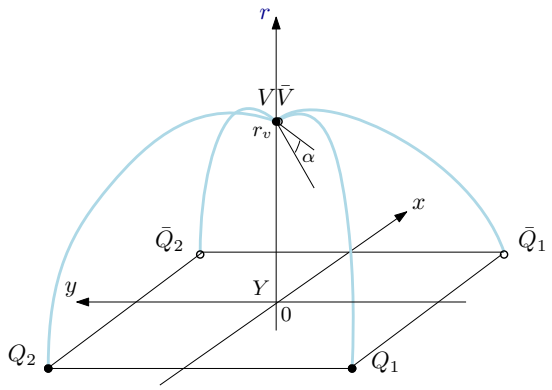

图 7：五维中的夹缩四夸克构型。重子顶点位于 r 轴上的同一点，即 $r = r_v$ 处，其在边界上的投影位于原点。根据对称性，$r = r_v$ 处的所有切线角都相等。我们将它们记为 α。

我们按照 [6] 继续进行。使用 [6] 附录 B 中关于弦长和能量的公式，并将其与 (2.4) 结合，我们得到

$$\ell = \sqrt{\frac{4}{\mathsf{s}}\Big(\mathcal{L}^-(\lambda, v)\Big)^2 - w^2}\,, \qquad E^{(\mathrm{d})} = 2\mathsf{g}\sqrt{\mathsf{s}}\left(2\mathcal{E}^-(\lambda, v) + 3\mathsf{k}\frac{\mathrm{e}^{-2v}}{\sqrt{v}}\right) + 4c\,. \tag{3.15}$$

这里，λ 由 $\lambda = -\mathrm{ProductLog}(-v\,\mathrm{e}^{-v}/\cos\alpha)$ 给出，其中 $\mathrm{ProductLog}(z)$ 表示方程 $z = u\mathrm{e}^u$ [15] 中 u 的主解。结合式 (3.14)，式 (3.15) 定义了 $E^{(\mathrm{d})}(\ell)$ 的参数形式。参数 v 从 $\mathrm{v_d}$ 变化到 $\mathrm{v_p}$，二者均位于区间 $[0, 1]$ 内。下界取决于 w，由方程 $w = \frac{2}{\sqrt{s}}\mathcal{L}^-(\lambda,\ v)$ 确定，对应于小-ℓ 极限。另一方面，上界与 w 无关，由方程 [6] 确定

$$1 - v^2\mathrm{e}^{2(1-v)} - \frac{9}{4}\mathsf{k}^2(1+4v)^2\mathrm{e}^{-6v} = 0\,, \tag{3.16}$$

并对应于大-ℓ 极限。数值上，$\mathrm{v_p} = 0.959$；例如，在 $w = 0.19$飞米处，$\mathrm{v_d} = 0.177$，而在$w = 0.54$飞米处，$\mathrm{v_d} = 0.481$。简单观察可知，$\ell(v)$是 v 的递增函数，在 $v = \mathrm{v_d}$处为零，并在 $v =\mathrm{v_p}$处发散。

为了分析 $E^{(\mathrm{d})}$在小-ℓ 时的行为，我们需要 $\ell(v)$和 $E^{(\mathrm{d})}(v)$在 $v =\mathrm{v_d}$附近的展开式。只保留两个主导项，可得

$$\left.\begin{aligned} E^{(\mathrm{d})} &= c^{(\mathrm{d})} + D\ell^2 + o(\ell^2)\,, \\ \ell &= \ell_{\mathrm{d}} + \mathsf{g}\sqrt{\mathsf{s}}\,w\,(\partial_v\mathcal{E}^- - \tfrac{3}{4}\mathsf{k}(1+4v)v^{-\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{-2v})/\partial_v\mathcal{L}^-\big|_{v=\mathrm{v_d}}\,. \end{aligned}\right\} \tag{3.17}$$

其中 $c^{(\mathrm{d})} = 2\mathsf{g}\sqrt{\mathsf{s}}\big(2\mathcal{E}^-(\lambda_{\mathrm{d}},\ \mathrm{v_d}) + 3\mathsf{k}\mathrm{e}^{-2\mathrm{v_d}}\sqrt{\mathrm{v_d}}\big) + 4c$ 以及 $D = \mathsf{g}\mathsf{s}\,w\,(\partial_v\mathcal{E}^- - \frac{3}{4}\mathsf{k}(1+4v)v^{-\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{-2v})/\partial_v\mathcal{L}^-\big|_{v=\mathrm{v_d}}$。这里，$\lambda_{\mathrm{d}}$是 $\lambda(\mathrm{v_d})$的简写。

以类似的思路，我们可以分析大-ℓ 行为。在极限 $v \to \mathrm{v_p}$下，或者等价地说，在 $\lambda \to 1$ 下，弦会变得无限大，这可由式 (A.6) 得出。在领先阶，式 (3.15) 化为

$$\ell = -\frac{2}{\sqrt{\mathsf{s}}}\ln(1-\lambda) + O(1)\,, \qquad E^{(\mathrm{d})} = -4\mathsf{e}\mathsf{g}\sqrt{\mathsf{s}}\ln(1-\lambda) + O(1)\,, \tag{3.18}$$

其中最后一步用到了 (A.16)。由此立即可得

$$E^{(\mathrm{d})} = 2\sigma\ell + O(1)\,, \tag{3.19}$$

正如预期的那样。要计算次领先项，考虑

$$E^{(\mathrm{d})} - 2\sigma\ell = 2\mathsf{g}\sqrt{\mathsf{s}}\Big(2\big(\mathcal{E}^{-}(\lambda,v) - \mathrm{e}\mathcal{L}^{-}(\lambda,v)\big) + 3\mathsf{k}\frac{\mathrm{e}^{-2v}}{\sqrt{v}}\Big) + 4c + \dots\,, \tag{3.20}$$

其中省略项按 $1/\mathcal{L}^{-}$ 的幂次在 $\lambda \to 1$ 下属于次领先项。借助 (A.24)，令 $v \to \mathrm{v_P}$ 取极限，即可得到能量关于大 ℓ 的展开。具体而言，

$$E^{(\mathrm{d})} = 2\sigma\ell + C^{(\mathrm{d})} + o(1)\,, \qquad \text{with} \qquad C^{(\mathrm{d})} = 4c - 2\mathsf{g}\sqrt{\mathsf{s}}\Big(2\mathcal{I}(\mathrm{v_p}) - 3\mathsf{k}\frac{\mathrm{e}^{-2\mathrm{v_P}}}{\sqrt{\mathrm{v_P}}}\Big)\,. \tag{3.21}$$

不过，在这个阶数上，它与 [6] 中针对几何约束 $w/\ell =$得到的渐近展开相一致 $const$，高阶修正项则有所不同。

4. *What we have learned so far*

从具体例子中可以得到的一个启示是，我们考虑的弦构型多于必要数量。[7] 另一个启示是，在不存在非连通构型的情况下，所获得的认识也可能适用于纯规范理论。

对于具体例子，我们考虑宽度范围为 0.19 飞米 $\leq w \leq$ 0.54飞米。这个范围具有物理意义，因为它与格点计算 [8, 9], 相容，其中 w 的取值受该范围限制；同时也与对 $[bb]$ 双夸克大小的唯象估计相符，后者给出的范围为 $w = 0.19$ 飞米 [16] 和 $w = 0.37$飞米[17]。

接下来，我们将 ℓ限制在较小和中等取值范围内。在图 8 的左图中，我们绘出了以下构型的能量

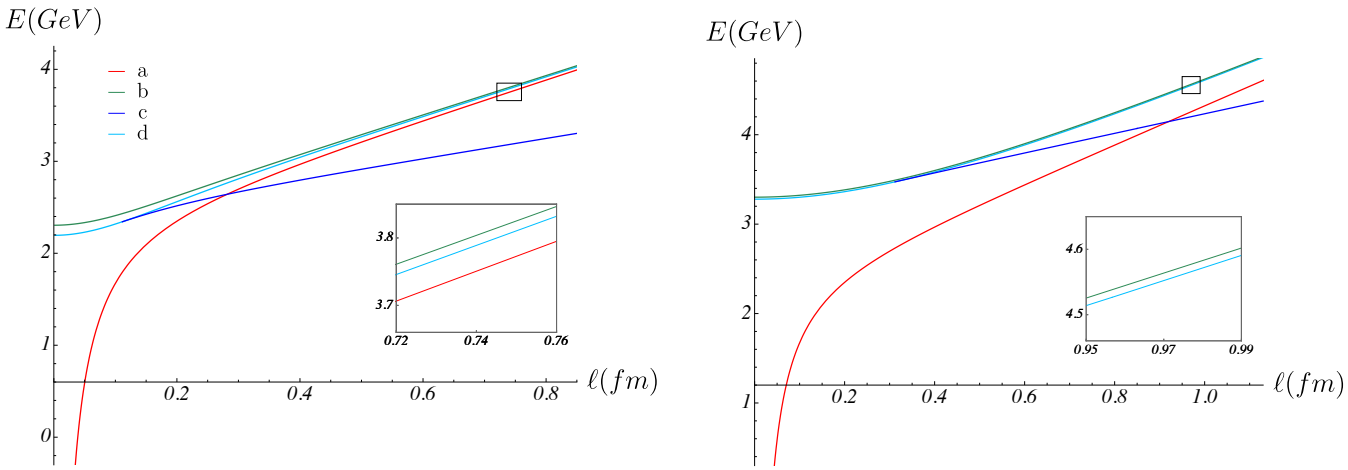

图 8：在 $w = 0.19$飞米（左）和 $w = 0.54$飞米（右）时，弦构型 (a)-(d) 的能量。此处及下文中，我们取 $c = 0.623$ 吉电子伏特。

对于 $w = 0.19$飞米，弦构型的能量随 ℓ 变化。本图所示规律的一个有趣结果是，出现了若干特征尺度，它们将不同构型，或者说不同描述区分开来。为了对这一点进行更定量的分析，我们通过令构型 (i) 和 (j) 的能量相等来定义临界长度，

$$E^{(\mathrm{i})}(\ell) = E^{(\mathrm{j})}(\ell)\,, \tag{3.22}$$

使得相应的临界长度是该方程的一个解。在 ℓ 取此值时，这些构型之间会发生跃迁。这种跃迁源于图 6 所示的弦相互作用。接下来，我们将详细说明构型 (c) 和 (c') 的情况，同时仅简要提及其他构型的具体结果。

[7] 此处，我们保留构型 (b)，因为其能量仅略高于构型 (d) 的能量。

基态势由两种构型决定，因此 $V_0 = \min\{E^{(\mathrm{a})}, E^{(\mathrm{c})}\}$。在 ℓ 较小时，构型 (a) 占主导；随后在 ℓ 较大时转变为构型 (c)。跃迁发生在 $\ell = 0.282$ 飞米处，可以解释为一对重子顶点的产生。这表明基态是强子分子与四夸克态的混合态，其中强子分子由两个介子组成。[8] 第一激发态势由三种构型决定，即 $V_1 = \min\{E^{(\mathrm{a})}, E^{(\mathrm{c})}, E^{(\mathrm{d})}\}$。在 ℓ 较小时，构型 (d) 占主导；随后由于解夹断，构型 (c) 在 $\ell = 0.111$ 飞米处占据主导地位；最后，在 $\ell > 0.282$ 飞米处，构型 (a) 占主导。

后续分析中一个重要的观察如下。当 ℓ 很大时，$E^{(\mathrm{a})}$、$E^{(\mathrm{b})}$ 和 $E^{(\mathrm{d})}$ 的图似乎无法区分，因为它们之间的差异变得极小。如第 1 节所述，$E^{(\mathrm{b})} > E^{(\mathrm{a})}$，因此构型 (b) 不会对 V_1 作出贡献。为了理解 $E^{(\mathrm{a})}$ 和 $E^{(\mathrm{d})}$ 的情况，考察大 ℓ 渐近式 (3.4) 和 (3.21) 会很有帮助。尽管它们的主导项相同，但常数项不同。简单估算可得 $C^{(\mathrm{a})} - C^{(\mathrm{d})} = 10$ 兆电子伏。这意味着，当 ℓ 足够大时，构型 (a) 对 V_1 已不再重要。求出相应曲线的交点很容易，该交点约位于 $\ell = 2.641$ 飞米处。这远高于弦断裂发生时 1 飞米的典型尺度。因此，要理解 V_1 在大 ℓ 时的行为，只需考虑由构型 (a) 而非构型 (d) 得到的不连通构型。此外，随着 w 增大，这一结论仍然成立。例如，当 $w = 0.39$ 飞米时，交点位于 $\ell = 3.348$ 飞米处。

为完整呈现图景，图的右侧面板给出了 $w = 0.54$飞米时的结果。整体情况保持不变，但有两个值得注意的特点。首先，$E^{(\mathrm{b})}$ 与 $E^{(\mathrm{d})}$ 之间的差距变小了。尽管如此，不等式 $E^{(\mathrm{b})} > E^{(\mathrm{d})}$ 仍然成立，且可通过数值计算加以验证。支持这一结论的一个直观论据是：重子顶点对构型 (d) 能量的贡献为负，而弦对两种能量的贡献几乎相同（见图 2）。其次，除了 $E^{(\mathrm{a})}$ 与 $E^{(\mathrm{d})}$的交点外，其他交点也都向 ℓ较大的方向移动。例如，$E^{(\mathrm{a})}$ 与 $E^{(\mathrm{c})}$ 的交点移至 $\ell = 0.920$飞米处。

简言之，对于小于 1 飞米的长度，不计轻夸克贡献时，两个最低势可写为$V_0 = \min\{E^{(\mathrm{a})}, E^{(\mathrm{c})}\}$ 和 $V_1 = \min\{E^{(\mathrm{a})}, E^{(\mathrm{c})}, E^{(\mathrm{d})}\}$。

5. The multimeson and two-baryon configurations

我们先讨论多介子构型。如附录 B 所述，对于 QQ 系统，弦断裂会导致衰变 $QQ \to Q\bar{q} + qQ$，进而使构型 (a) 有两种可能的衰变道：$2QQ \to QQ + Q\bar{q} + qQ$和 $2QQ \to 2Q\bar{q} + 2qQ$。相应的弦构型如图 3a′-a″ 所示。根据我们对非连通构型能量的一贯假设，其分析过程显而易见。

对于构型 (a′)，有

$$E^{(\mathrm{a}')}(\ell) = E_{\mathrm{Q\bar{Q}}}(\ell) + 2E_{\mathrm{Q\bar{q}}}\,. \tag{3.23}$$

这里我们假设在重子化学势为零时 $E_{\mathrm{Q\bar{q}}} = E_{\mathrm{q\bar{Q}}}$，其中 $E_{\mathrm{Q\bar{q}}}$ 由 (B.5) 给出。$E^{(\mathrm{a}')}$ 的小尺度和大尺度 ℓ展开式为

$$E^{(\mathrm{a}')}(\ell) = -\frac{\alpha_{\mathrm{Q\bar{Q}}}}{\ell} + 2c + 2E_{\mathrm{Q\bar{q}}} + o(1) \tag{3.24}$$

and

$$E^{(\mathrm{a}')}(\ell) = \sigma\ell + C^{(\mathrm{a}')} + o(1)\,, \qquad \text{with} \qquad C^{(\mathrm{a}')} = C_{\mathrm{Q\bar{Q}}} + 2E_{\mathrm{Q\bar{q}}}\,, \tag{3.25}$$

其中我们使用了（B.2）和（B.4）。

对于构型 (a″)，我们直接得到

$$E^{(\mathrm{a}'')} = 4E_{\mathrm{Q\bar{q}}}\,, \tag{3.26}$$

---

[8] 一般而言，这样的四夸克态可能是非紧致的。

因此，其能量与 ℓ 无关。

由于宽度 w 保持固定，当 $\ell \to \infty$时，只有构型 (c) 的内部弦会变得无限长。¯ ¯弦断裂时，该构型会衰变为两个双重重子， QQq 和 $QQ\bar{q}$，如图3(c′)所示。对于这一构型，能量与 ℓ 无关，其表达式为

$$E^{(\mathrm{c}')} = 2E_{\mathrm{QQq}}(w)\,, \tag{3.27}$$

其中， E_{QQq} 是 QQq 系统的能量。其对重夸克间距的依赖关系见附录 B。

6. *Putting it all together*

了解含轻夸克的非连通弦构型后，我们可以扩展第4节中的分析。对于 w的极限值，相关构型的能量绘于图9。可以看到，在两种情况下，基态势都由三个弦构型表示为 $V_0 = \min\{E^{(\mathrm{a})}, E^{(\mathrm{c})}, E^{(\mathrm{c}')}\}$。

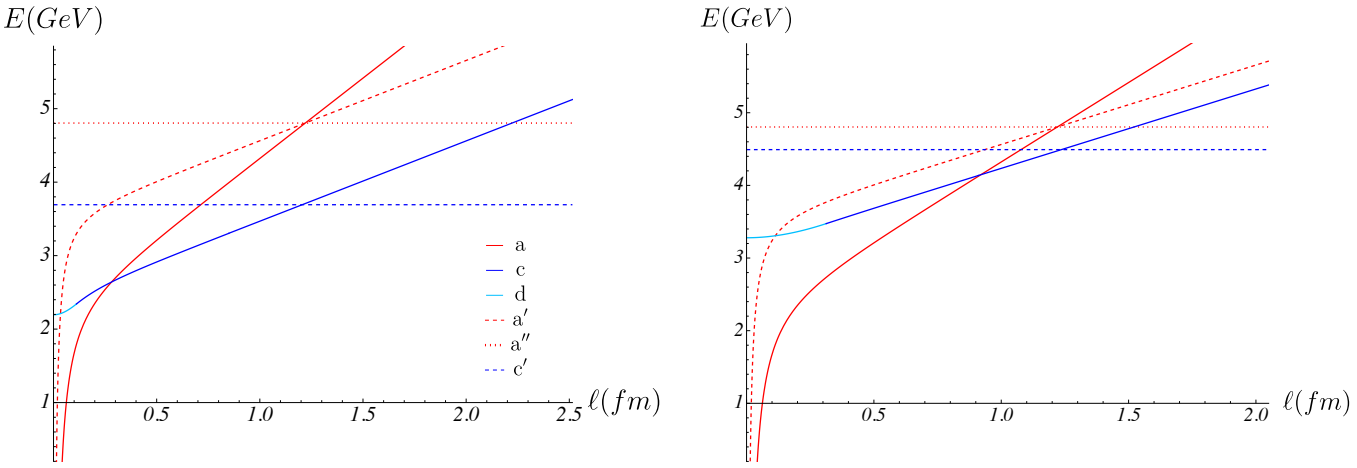

图9：弦构型的能量 A型排序在 $w = 0$时的 .19 飞米（左图），以及在 $w = 0$ .54 飞米（右图）.

这表明基态是由三种态构成的混合态：两个强子分子，以及与四夸克构型 (c) 相关的四夸克态。其大-ℓ 行为由双重子构型 (c′) 决定。从构型 (c) 到构型 (c′) 的跃迁可以解释为通过产生一个轻夸克对使内部弦断裂，正如前文所述。这对应于该系统强衰变为一对双重重子：

$$QQ\bar{Q}\bar{Q} \to QQq + \bar{Q}\bar{Q}\bar{q}\,. \tag{3.28}$$

估算弦断裂距离在物理上很有意义，同时也可借此得到 (3.22) 中定义的一个临界长度。按照 [11], ，我们将弦 3 的长度定义为重子¯顶点在边界上的投影之间的距离（见图 24）。于是，弦断裂距离为在 $\ell = \ell_c$ 处取值的 $\boldsymbol{\ell}_{4\mathrm{Q}} = |YY|$ ，其中ℓ_c 是方程 $E^{(\mathrm{c})}(\ell) = E^{(\mathrm{c}')}(w)$ 在固定 w 下的一个解。利用导出 (C.5) 的表达式，可以将 $\boldsymbol{\ell}_{4\mathrm{Q}}$ 显式写为

$$\boldsymbol{\ell}_{4\mathrm{Q}} = \frac{1}{\sqrt{s}}\mathcal{L}(\bar{\lambda}, v)\Big|_{v=\mathrm{v}_c}\,, \tag{3.29}$$

其中，v_c 是方程 $E^{(\mathrm{I})}(v) = 2E_{\mathrm{QQq}}(w)$ 的一个解。[9] 利用这个公式，我们可以进行若干估算，结果汇总于表 I。因此，结论是，与弦张力不同，弦断裂距离

[9] 对于此处所考虑的 w 值， $E^{(\mathrm{c})}$ 的大-ℓ 行为由构型（I）描述。

w (飞米)	E_{QQq} (吉电子伏特)	ℓ_c (飞米)	$\boldsymbol{\ell}_{4\mathrm{Q}}$ (飞米)	$\frac{\boldsymbol{\ell}_{4\mathrm{Q}}}{\boldsymbol{\ell}_{\mathrm{Q}\bar{\mathrm{Q}}}}$
0.19	1.846	1.205	1.137	0.932
0.31	1.990	1.194	1.040	0.852
0.37	2.057	1.200	1.005	0.824
0.39	2.080	1.204	0.995	0.816
0.46	2.158	1.218	0.964	0.790
0.54	2.246	1.236	0.932	0.764

表 I：弦断裂距离 $\boldsymbol{\ell}_{4\mathrm{Q}}$ 的一些估计值。列出 ℓ_c 是为了便于与晶格进行比较。注意，函数 $\ell_c(w)$ 在 $w = 0.29$ 飞米附近有一个局部极小值。这里 $\boldsymbol{\ell}_{\mathrm{Q}\bar{\mathrm{Q}}} = 1.22$ 飞米。

并非普适。如同在 QQQ 系统 [12], 中，它可能小于 QQ系统中的弦断裂距离，而且还可能取决于几何形状，即重夸克/反夸克在空间中的位置。进一步来说，我们指出，方程 $E^{(\mathrm{c})}(\ell) = 2E_{\mathrm{QQq}}(w)$ 可以近似求解。原因在于，在 $\ell = 1.22$飞米附近，函数 $E^{(\mathrm{c})}(\ell)$ 几乎是线性的，近似为一条直线，如图9所示。若如此，借助渐近展开（3.11），我们得到

$$\ell_c \approx \frac{1}{\sigma}\left(2E_{\mathrm{QQq}}(w) - C^{(\mathrm{c})}\right). \tag{3.30}$$

这里，$C^{(\mathrm{c})}$ 由（3.11）中的第一个表达式给出。重要的是，ℓ_c 与归一化常数 c 无关，这一点可由 E_{QQq} 和 $C^{(\mathrm{c})}$ 的表达式直接得到。事实证明，这是一个非常精确的近似，其结果仅在小数点后第 4 位与精确解有所不同。

第一激发态玻恩–奥本海默势具有相当复杂的结构。它由六种弦构型构成，可写为 $V_1 = \min\{E^{(\mathrm{a})}, E^{(\mathrm{c})}, E^{(\mathrm{d})}, E^{(\mathrm{a}')}\ E^{(\mathrm{a}'')}\ E^{(\mathrm{c}')}\}$，如图9所示。一项可能有悖直觉的新特征是，弦断裂会导致势在夸克间距较小时发生改变。事实上，由构型 (a′) 断裂一根弦得到的构型 (a) 在较小的 ℓ 处占主导地位。随着 ℓ 增大，它会转变为构型 (d)。这一跃迁可解释为 $q\bar{q}$ 对湮灭、弦相交以及在交点处产生 VV对的组合过程。对于 $w = 0.19$飞米，该过程发生在 $\ell = 0.034$ 飞米处；对于 $w = 0.54$ 飞米，则发生在 $\ell = 0.113$飞米处。[10] 在中等 ℓ 处，V_1 的结构与第4节中的相同。然而，随着ℓ增大，由于出现了含轻夸克的非连通构型，其结构也如预期般发生变化。首先，构型 (a) 会跃迁至构型 (c′)。对于 $w = 0.19$ 飞米，该跃迁发生在 $\ell = 0.714$ 飞米处；而对于 $w = 0.54$飞米，则发生在 $\ell = 1.078$ 飞米处。这一跃迁可解释为 VV与 $q\bar{q}$对产生的组合过程。随后，构型 (c′) 与 (c) 之间发生跃迁，正如我们已经在 V_0 中看到的那样。最后，构型 (c) 跃迁至构型 (a′′)，使势变平坦。对于 $w = 0.19$飞米，该跃迁发生在 $\ell = 2.222$ 飞米处；而对于 $w = 0.54$飞米，则发生在 $\ell = 1.521$ 飞米处。它可解释为一个 VV对湮灭，以及因产生两对轻夸克而导致弦断裂的组合过程。

B. B型排序

上述分析可以直接推广到 B型排序。在这种情况下，相关的弦构型如图 4 和图 5 所示，这使得若干简化成为可能。一个显而易见的简化是，我们不需要考虑构型 (a)、(a′) 和 (d)，因为这些构型已经分析过了。另一个简化是，B型排序下不存在构型 (c) [6]。我们先求出非连通构型 (e) 和 (e′)，然后分析与两个低能势相关的弦构型。

[10] 尽管前一种长度小于典型的晶格间距，但后一种并非如此。这使得在较小夸克间距下弦断裂对 V_1 的影响有可能在晶格上显现出来。

1. The mesonic configurations

首先考虑双介子构型 (e)。其能量为

$$E^{(\mathrm{e})} = 2E_{\mathrm{Q\bar{Q}}}(w)\,. \tag{3.31}$$

利用附录 B 中的公式，这也可以等价地写作 $E^{(\mathrm{e})} = 4\mathrm{g}\sqrt{\mathrm{s}}\ \mathcal{E}^{+}(\lambda_{\mathrm{e}}) + 4c$，其中 λ_{e} 是方程 $w = \frac{2}{\sqrt{\mathrm{s}}}\mathcal{L}^{+}(\lambda)$ 的一个解。

类似地，对于多介子构型 (e′)，其能量为

$$E^{(\mathrm{e}')} = E_{\mathrm{Q\bar{Q}}}(w) + 2E_{\mathrm{Q\bar{q}}}\,. \tag{3.32}$$

因此，这两个表达式都不依赖于 ℓ。

顺带一提，虽然 B 型排序中不存在构型 (c)，但包含两个双重重味重子的构型 (c′) 确实存在。不过，在本节所考虑的宽度范围内，事实证明它与两个低能 B-O 势无关。

2. More detail on the string configurations

现在我们可以 分析弦构型。在图 10 中，我们将它们的能量绘制为 ℓ 的函数，针对 t 极限值 w。在 在这两种情况下，基态势均由双介子构型 (a) 给出。 nd

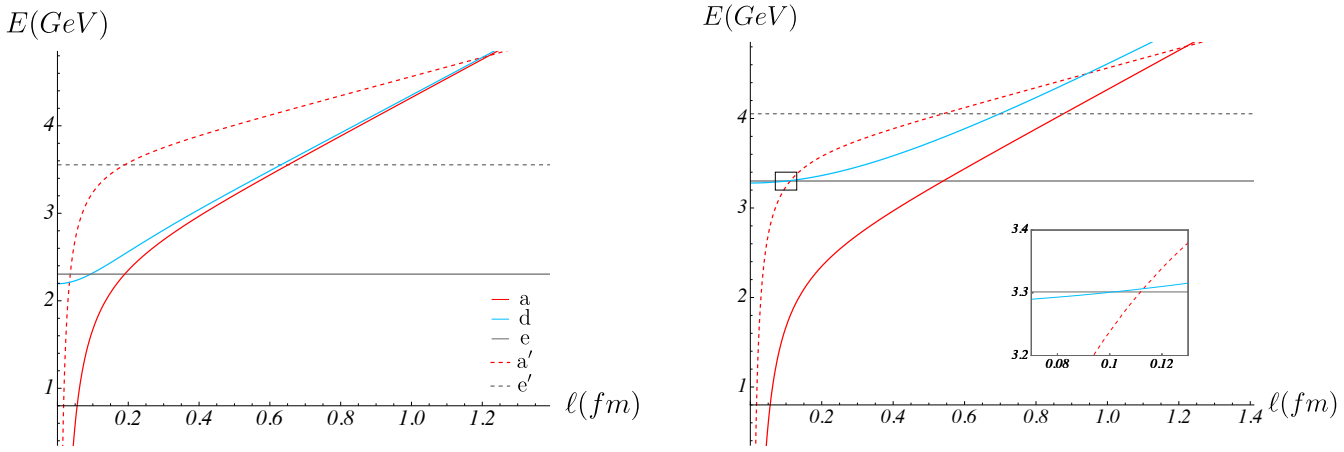

图 10：能量 在 $w = 0.19$ 飞米（左）和 $w = 0.54$ 飞米（右）处 B型排序的弦构型能量 .

(e)，具体而言， $V_0 = \min\{E^{(\mathrm{a})}, E^{(\mathrm{e})}\}$.[11] 它们之间的跃迁发生在 $w = 0.19$fm时的 $\ell = 0.190$ fm处，以及 $w = 0.54$fm时的 $\ell = 0.540$fm处。这对应于强子分子衰变为两个介子，

$$QQ\bar{Q}\bar{Q} \to 2Q\bar{Q}\,. \tag{3.33}$$

这种跃迁可以用弦相互作用来解释，即弦重联。

第一激发态势的结构同样相当复杂。仔细将其放在一起考察时，会发现，在 w 的极限值处对其有贡献的弦构型彼此略有不同。这是因为在下界处相关的构型 (d)，在上界处变得无关。对于 $w = 0.19$飞米，势由 $V_1 = \min\{E^{(\mathrm{a})}, E^{(\mathrm{a}')}E^{(\mathrm{d})}, E^{(\mathrm{e})}, E^{(\mathrm{e}')}\}$ 给出，因此在非常小的 ℓ处，构型 (a′) 占主导地位。在 $\ell = 0.034$飞米处跃迁到构型 (d)，这可以解释为一个 $q\bar{q}$对的湮灭、一个 VV对的产生以及弦重联的组合。在 $\ell = 0.094$ 飞米处还会发生进一步的跃迁，这是由于

[11] 在文献中，这种势被称为翻转势 [18]。

$\bar{}\,VV$对的湮灭。它使构型 (d) 跃迁为构型 (e)。相比之下，在 $w = 0.54$飞米处，从构型 (a′) 出发的跃迁直接到达构型 (e)，绕过了构型 (d)。这发生在 $\ell = 0.112$飞米处。在这种情况下，第一激发态势由 $V_1 = \min\{E^{(\mathrm{a})}, E^{(\mathrm{a}')}$ $E^{(\mathrm{e})}, \ E^{(\mathrm{e}')}\}$给出。随后，对于这两种构型，构型 (e) 与构型 (a) 之间会发生跃迁，正如上文针对 V_0 所讨论的那样。最后，由于跃迁到构型 (e′)，势变得平坦。这一跃迁发生在相当大的 ℓ处，即下界为 $\ell = 0.652$飞米，上界为 $\ell = 0.877$飞米。它可以解释为一个 $q\bar{q}$ 对的产生与弦重联的组合。

IV. 势

A. 关于势的一些细节

了解弦构型后，模型哈密顿量（2.1）的对角元便已确定。然而，在有效弦模型中计算非对角元仍颇具挑战。原则上，这些元可以通过格点量子色动力学中的关联矩阵确定。因此，我们无法描绘势的精确形式。不过，借鉴我们对其他夸克系统的研究经验，尤其是利用转变点附近 Θ 值的近似大小，我们仍能获得有价值的认识。[12]

对于A型排序，我们由此得到图11所示的整体图景。尽管图中只给出了 w的极限值对应的结果，但相同的图景也适用于中间值。我们可以从中得出两个结论

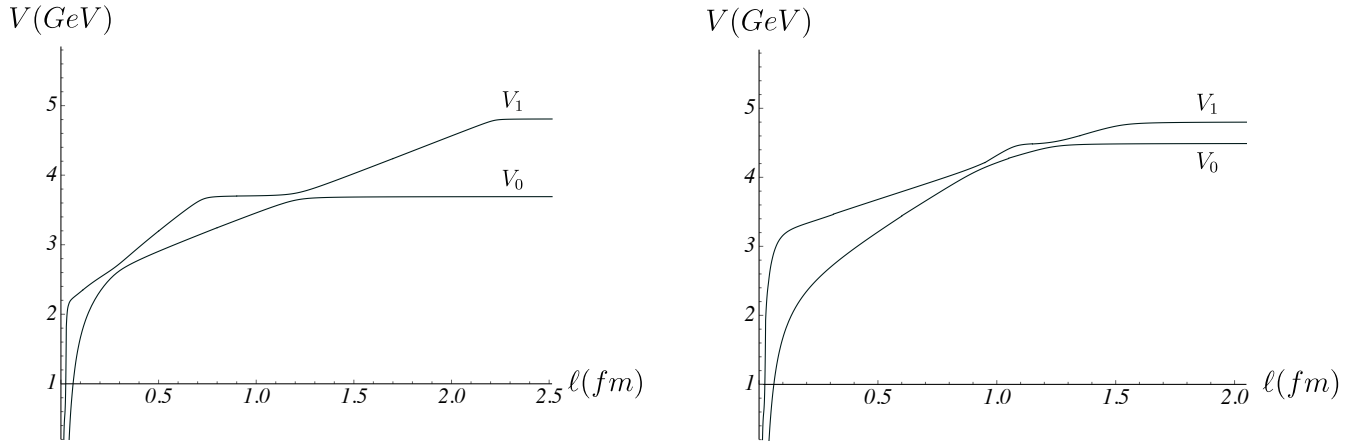

图11：图中示意了A型排序下，在 $w = 0.19$ 飞米（左）和 $w = 0.54$飞米（右）处最低的两个B-O势。公式（B.12）有助于绘制转变点附近的势。

结果。第一，在较大的 ℓ 处， V_0 与 V_1 之间的能隙会随 w增大而减小。这是因为能量 $E_{\mathrm{QQ_q}}$随 w增大，而 $E_{\mathrm{Q\bar{q}}}$ 保持不变。第二，四夸克构型 (c)的支撑范围从 $w = 0.19$ 飞米处的 0.282 飞米 $\leq \ell \leq 1.205$ 收缩到 $w = 0.54$飞米处的 0.920 飞米 $\leq \ell \leq 1.236$。正如我们将在第 V 节中看到的，这两个结论都与较大宽度下势的结构发生定性变化有关。

类似地，我们可以深入了解 B型排序下的势。所得图示见图12。在这种情况下，较大的 ℓ处， V_0 与 V_1 之间的能隙也会随 w 增大而减小。其原因与 A型排序相似：能量 $E_{\mathrm{Q\bar{Q}}}$ 随 w增大，而 $E_{\mathrm{Q\bar{q}}}$ 保持不变。因此，我们预计较大的 w下， V_0 与V_1 的结构会发生定性变化。我们将在下一节继续讨论这个问题。

B. 与格点量子色动力学的比较

对于 $QQ \quad \bar{Q}\bar{Q}$ 夸克系统，数值模拟的结果相当有限，仅适用于理论 s
与 $N_f = 0$ 和 $N_f = \ \ 2 + 1$ 味 [7–9]。在后一种情况下，尚未考虑弦断裂的影响 .

[12] 例如，我们可以假设 Θ 大致为常数，数值约为 47 兆电子伏，这与在晶格上对 $Q\bar{Q}$ 系统进行的研究结果一致 [19]。

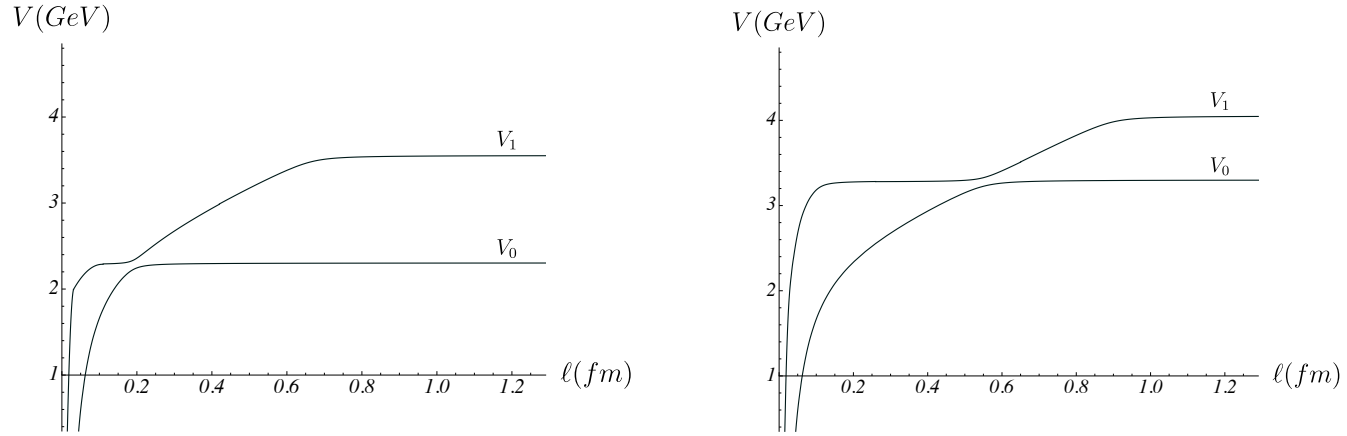

图 12：此处示意了　　B型排序下，在 $w = 0.19$飞米（左）和 $w = 0.54$ 飞米（右）处的两个最低 B-O势　　).

尽管如此，仍值得将我们的结果与格点量子色动力学中得出的结果进行定性比较。我们从A型排序开始。

在淬火情形下，基态势 V_0 最早于 [7, 8]中得到研究。主要结论是， V_0可用双介子构型 (a) 和四夸克构型 (c) 来描述，其中前者在较小的 ℓ 处占主导，而后者在较大的 ℓ处占主导，并产生双重 Y律。后来， [9],重新考察了这一问题，得出的结论是，大-ℓ 行为用三重态-反三重态势描述更为恰当，该势是夸克-反夸克势之和。[13] 这或许会让读者想起有关 Y律和 Δ律的争论，它们涉及 QQQ 系统的红外极限： Y律对应真正的三体相互作用，而 Δ律则是二体相互作用之和。最终，争论以支持 Y律告终（例如参见 [20] 及其中的参考文献）。与 QQQ 情形类似，我们的模型给出 Y律 [5], ，第 III 节的结果支持最初的结论，即[7, 8], 双重 Y律。关于第一激发态势 V_1，人们所知甚少。尽管[9], 对其进行了研究，但根据拟合结果能得出什么结论仍不明确。另一方面，我们的结果表明，它可以用双介子、四夸克和夹缩四夸克构型来描述（见图 8）。

存在轻夸克时，两种势都在 [9], 中进行了研究，但 ℓ 仅达到 0.91 飞米，所得结论与淬火情形类似。然而，我们的结果表明，对于足够大的 ℓ （但小于 1 飞米），基态势可由四夸克构型描述，从而产生双重 Y 律，而非三重态-反三重态势（见图11）。尽管如此，我们的结果与 [9] 一致：双介子构型占主导地位的 ℓ 范围会随着 w 增大而扩大。当然，纳入非连通弦构型后，势会发生改变。它们的贡献不仅改变了大 ℓ 时的行为，也改变了小 ℓ 时的行为（见图9）。具体而言，如果 ℓ超过 1.19 飞米，双重子构型（c′）会使势 V_0 变平。另一个显著变化是，在小 ℓ时，多介子构型（a′）占主导地位。这发生在相当短的长度 $\ell \lesssim 0.11$ 飞米处，因此在 [9] 中不可见。希望未来的数值模拟能够验证我们模型的这些预测。

对于 B 型排序，两种势都只在 [9]中进行了研究。在那里，研究得出结论：无论味内容如何，基态势都可以用翻转势来描述，而翻转势由双介子构型 (a) 和 (e) 叠加而成。这一结论与第 III 节中的结果一致。然而，第一激发态势仍令人困惑。我们的结果表明，在淬火情形下， V_1 可以用夹缩四夸克构型和介子构型来描述。在存在轻夸克时，多介子构型会改变这一图景（见图 10）。它们会改变 V_1的大距离和小ℓ 行为。这些是我们对 B 型排序下第一激发态势的预测。

---

[13] 除了与双介子构型（a）和（e）相关的势之外， [9] 中拟合所使用的其他势都没有弦描述。

V. 进一步评论

A. 其他激发

第 II 节中关于基本激发所作的假设过于简化，原因有多种。尤其是，在构造多夸克系统较高阶 B-O 势对应的弦构型时，应将图 13a 所示的激发弦纳入考虑。这些弦代表一类胶子激发，它们已被

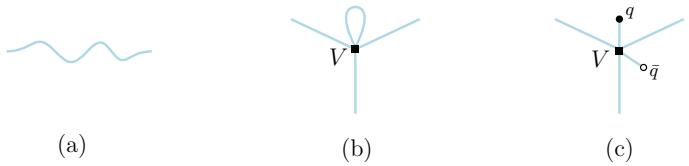

图 13：一些基本激发：(a) 一条激发弦；(b)-(c) 更高阶的重子顶点。激发弦用波浪线表示，此处及下文均如此。(c) 中展示的是海夸克。

¯已在格点量子色动力学中得到广泛研究，但主要是在 QQ系统的背景下。同样，也必须考虑由重子顶点（被视为五膜）产生的激发。这会形成一系列更高阶（激发态）顶点。[14] 这些激发最简单的例子见图 13b-c，其中激发源自开放弦；这些弦的两端分别连接在膜和轻海夸克上。

我们将用一个简单的例子来说明这一点。与 [5]，一样，我们仅考虑一种弦激发，即与混合势 Σ_u^- [21] 相关的弦激发。它可以在我们正在研究的五维弦模型 [22] 中建模。为简单起见，我们进一步仅考虑 B 型排序，其弦构型如图 4所示。将一条激发弦纳入每个构型的推广也很直接。相应的 ˜ 构型如图14所示。一个显而易见的简化是，构型 (d) 对 .....有贡献

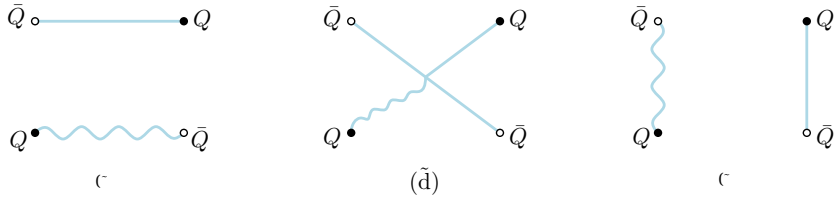

图14：包含激发弦、采用 B 型排序的四维弦构型。它们沿用图4中母构型的字母标记，可通过将一条未激发弦替换为一条激发弦得到。

既不对势 V_0 也不对势 V_1 有贡献。[15] 这是因为构型 (d) 只能对 V_1有贡献。因此，只需考虑构型 (˜a) 和 (˜e)。它们可以用与母构型 (a) 和 (e) 类似的方式处理。

对于构型 (˜a)，能量简单地为

$$E^{(\tilde{\mathrm{a}})}(\ell) = E_{\mathrm{Q}\bar{\mathrm{Q}}}(\ell) + \tilde{E}_{\mathrm{Q}\bar{\mathrm{Q}}}(\ell)\,, \tag{5.1}$$

˜ ¯其中函数 $E_{\mathrm{Q}\bar{\mathrm{Q}}}$ 由式 (B.7) 参数化定义。由于在夸克间距非常小时，$E_{\mathrm{Q}\bar{\mathrm{Q}}}$的行为偏离了微扰量子色动力学的预期（见附录 B），因此讨论小-ℓ展开毫无意义。相比之下，大-ℓ展开是有意义的，其形式为

$$E^{(\tilde{\mathrm{a}})}(\ell) = 2\sigma\ell + C^{(\tilde{\mathrm{a}})} + o(1)\,, \qquad \text{with} \qquad C^{(\tilde{\mathrm{a}})} = C_{\mathrm{Q}\bar{\mathrm{Q}}} + \tilde{C}_{\mathrm{Q}\bar{\mathrm{Q}}}\,, \tag{5.2}$$

[14] 如果如此，那么四维中的弦结点就应被视为一种可能处于多个激发态的物体。因此，非常值得通过格点模拟寻找此类激发的证据。[15] 如果将构型 (d) 中的重子顶点替换为任意高阶顶点（如图 13b-c 所示），也可以作出类似的论证。

˜其中 $C_{Q\bar{Q}}$ 由式 (B.10) 给出。

类似地，对于构型（˜e），能量可以写成

$$E^{(\tilde{e})} = E_{Q\bar{Q}}(w) + \tilde{E}_{Q\bar{Q}}(w)\,, \tag{5.3}$$

这是一个与 ℓ 无关的常数。

现在我们已经计算出了含有激发弦的构型的能量，一个自然的问题是：它们是否会对势 V_1 作出贡献。对于这个问题，我们将简略讨论，因为它无法得到明确的结论。在图15中，我们绘出了能量作为 ℓ 的函数、分别取 w 的两个极限值时的曲线。有两点值得注意。首先，简单估算表明， $E^{(e')}$ 与 $E^{(\tilde{e})}$ 之间的能隙约为 77 兆电子伏，适用于

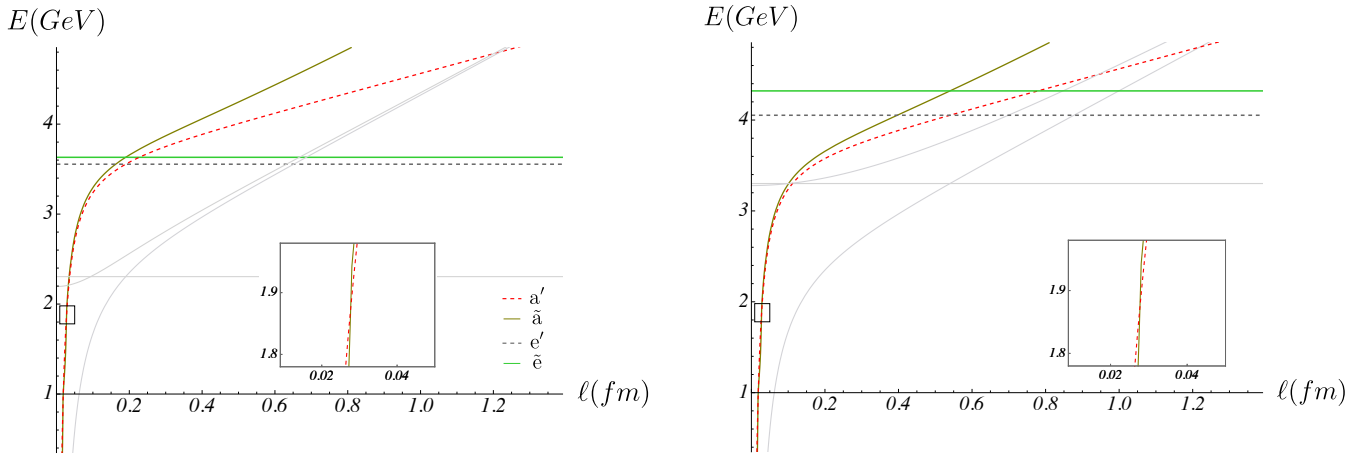

图 15：图10中的曲线，以及构型（˜a）和（˜e）在 $w = 0.19$飞米（左）和 $w = 0.54$ 飞米（右）处的曲线。与我们的讨论无关的曲线以灰色显示。

$w = 0.19$ 飞米处为 268 兆电子伏， $w = 0.54$飞米处为 268 兆电子伏。这些数值与 Σ_u^- 和 Π_u 混合势之间的差值相符；将它们视为 w 的函数时，该差值分别约为 77 兆电子伏和 218 兆电子伏 [21]。[16]这表明，原则上，与 Π_u 相关的弦激发可能与 V_1 有关。其次，在极小的间距处， $E^{(\tilde{a})}$ 支配着 V_1。这是一个微妙的问题；需要指出的是，对于 $\tilde{E}_{Q\bar{Q}}$ ，我们不考虑小于晶格间距的间距（关于这一点的更多内容见附录 B）。

我们可以概括 这一切，即要清楚地理解第一激发态势仍然 s 是一个重大挑战。

B. 更大 w

我们假设宽度范围为 0.19 飞米 $\le w \le$ 0.54 飞米，这对于基态双夸克是合适的。为了获得更深入的认识，考虑尺寸更大的激发双夸克非常重要。因此，我们将先前的分析扩展到更大的宽度，以部分解决这一问题。为避免与激发态势V_1相关的细微问题，我们将讨论限制在基态势 V_0上。

我们先从 A型排序 开始。如第 IIIA 节第4小节所述， V_0 可用构型 (a) 和 (c) 来描述。在没有轻夸克的情况下，这一结论对任意 w [6] 仍然成立。那么存在轻夸克时，势会发生什么变化？第6小节给出的部分答案是，在所考虑的范围内，构型 (c) 中发生的弦断裂会使势变平。从物理上说，这意味着四夸克态衰变为两个双重重味重子（见 (3.28)）。因此，势为$V_0 = \min\{E^{(a)}, E^{(c)}, E^{(c')}\}$。不过，还需要在这一结论中补充一个简单但重要的观察：构型 (c) 和 (c′) 的能量随 w 增大，而构型 (a) 的能量则不会，这一点在图9中也可以看到。由此直接得出，必须将构型 (a′′) 纳入分析，

[16] 注意， Π_u 是第 $N = 1$级的混合势，而 Σ_u^- 处于第 3 级。

因为其能量与 w 无关，所以当 w足够大时，会低于 $E^{(\mathrm{c}')}$ 。进一步分析表明

$$V_0 = \begin{cases} \min\{E^{(\mathrm{a})}, E^{(\mathrm{c})}, E^{(\mathrm{c}')}\} & , \ w \leq 0.681\,\mathrm{fm}\,, \\ \min\{E^{(\mathrm{a})}, E^{(\mathrm{a}'')}, E^{(\mathrm{c})}\} & , \ 0.681\,\mathrm{fm} \leq w \leq 0.711\,\mathrm{fm}\,, \\ \min\{E^{(\mathrm{a})}, E^{(\mathrm{a}'')}\} & , \ w \geq 0.711\,\mathrm{fm}\,. \end{cases} \tag{5.4}$$

这里， $w = 0.681$飞米是方程 $E^{(\mathrm{c}')}(w) = E^{(\mathrm{a}'')}$ 的一个解，而 $w = 0.711$ 飞米是方程$E^{(\mathrm{c})}(\ell_{\mathrm{Q}\bar{\mathrm{Q}}}, w) = E^{(\mathrm{a}'')}$ 的一个解，其中 $\ell_{\mathrm{Q}\bar{\mathrm{Q}}}$ 是 $Q\bar{Q}$ 系统的弦断裂距离，定义见 (B.13)。因此，对于更大的w，势会因发生在构型 (a) 中的双重弦断裂而变平，并导致衰变

$$QQ\bar{Q}\bar{Q} \to 2Q\bar{q} + 2q\bar{Q}\,. \tag{5.5}$$

我们用弦构型在最后两种情况下的能量简单举例，结束对 A型排序的讨论。这些例子见图16。

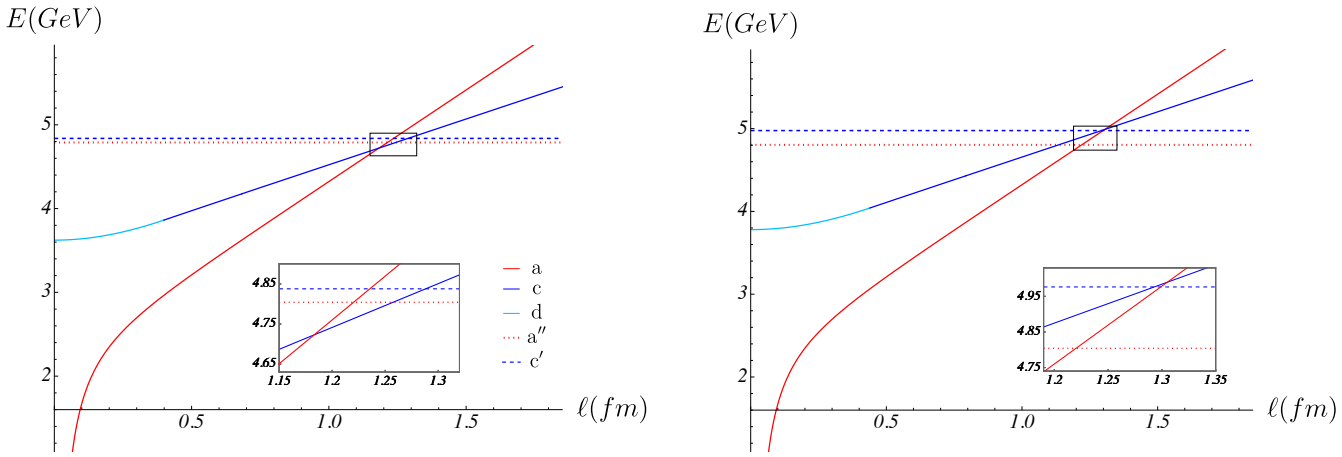

图16：在 (5.4) 中包含的弦构型的能量， $w = 0.69$ 飞米处（左）和 $w = 0.76$飞米处（右）。

为了对 B型排序进行类似分析，我们需要稍微改变术语。构型 (a′) 和 (e′) 分别由构型 (a) 和 (e) 通过断裂两条弦中的任意一条得到，如图5所示。进一步的弦断裂在两种情况下都会导致相同的多介子构型，我们此前已将其记为 (a″)。在本小节中，我们将其记为 (e″)，仅仅是为了追踪其原点。

如第 III 节所示，在这里考虑的 w 范围内，基态势由 $V_0 = \min\{E^{(\mathrm{a})}, E^{(\mathrm{e})}\}$ 给出。一个关键观察是，不连通构型 (e) 的能量随 w 增加，而 e″ 的能量保持不变。这意味着，当 w 足够大时， $E^{(\mathrm{e})}(w) > E^{(\mathrm{e}'')}$ 。因此，必须在分析中纳入构型 (e″)。容易看出，该势可以写成

$$V_0 = \begin{cases} \min\{E^{(\mathrm{a})}, E^{(\mathrm{e})}\} & , \ w \leq 1.22\,\mathrm{fm}\,, \\ \min\{E^{(\mathrm{a})}, E^{(\mathrm{e}'')}\} & , \ w \geq 1.22\,\mathrm{fm}\,. \end{cases} \tag{5.6}$$

这里我们利用了这样一个事实： $w = 1.22$ 飞米是方程 $E^{(\mathrm{e})}(w) = E^{(\mathrm{e}'')}$ 的一个解，这适用于我们选定的参数组。除了图 10 所示的例子外，图 17 还展示了 $w > 1.22$ 飞米处弦构型能量的一个例子。

最后，我们从 (5.4) 和 (5.6) 得出一个有趣的结论：当宽度足够大时，基态势与排序无关。

C. 共线几何

现在我们转向共线几何，目标是估算弦断裂距离。因此，我们关注这样一种四夸克构型：夸克源对之间的间距足够大，能够发生弦

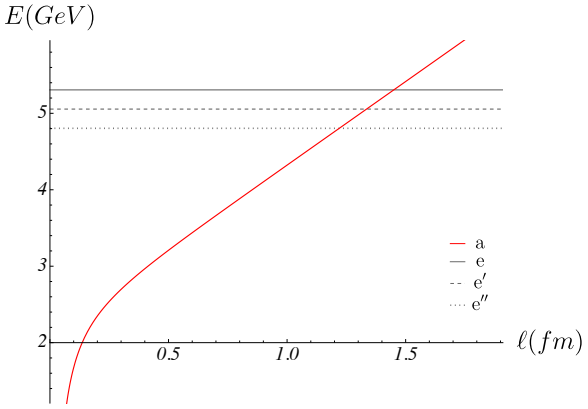

图17：在 $w = 1.45$飞米处，式（5.6）中包含的弦构型的能量。为完整起见，我们还纳入了 $E^{(\mathrm{e}')}$ 。

断裂。对于A型排序，相应的构型如图18所示。这里的切线角

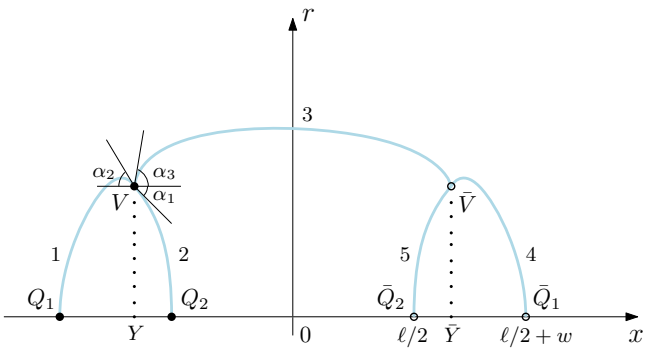

图 18：一个对称的四夸克 构型。对称轴与 r 轴重合。夸克源之间的距离为 $|Q_1Q_2| =$ $|\bar{Q}_1\bar{Q}_2| = w$ 和 $|Q_2\bar{Q}_2| = \ell$。

α_1 取为负值，而其余各项取为正值，具体原因我们将在下文简要说明 y.

利用 [6]，中附录 B 的公式，可以推导出弦能量以及沿 x 轴的长度的参数表达式。将它们与顶点的能量结合起来，便可写出

$$w = \frac{1}{\sqrt{\mathsf{s}}}\Big(\mathcal{L}^-(\lambda, v) + \mathcal{L}^+(\alpha_2, v)\Big)\,, \tag{5.7}$$

几何约束方程，以及

$$\ell = \frac{1}{\sqrt{\mathsf{s}}}\Big(\mathcal{L}(\bar{\lambda}, v) - 2\mathcal{L}^+(\alpha_2, v)\Big)\,, \qquad E^{(\mathrm{c})} = 2\mathsf{g}\sqrt{\mathsf{s}}\Big(\mathcal{E}^-(\lambda, v) + \mathcal{E}^+(\alpha_2, v) + \frac{1}{2}\mathcal{E}(\bar{\lambda}, v) + 3\mathsf{k}\frac{\mathrm{e}^{-2v}}{\sqrt{v}}\Big) + 4c\,. \tag{5.8}$$

构型的长度 ℓ 和能量。这里我们采用与附录 C 中相同的简写记号：切线角 $\alpha_1 = \alpha$ 和 $\alpha_3 = \bar{\alpha}$ ，以及 λ 和 λ。此外，这些角度之间的关系由力平衡方程 [6] 给出。它们为

$$\cos\alpha - \cos\alpha_2 - \cos\bar{\alpha} = 0\,, \qquad \sin\alpha + \sin\alpha_2 - \sin\bar{\alpha} = 3\mathsf{k}(1 + 4v)\mathrm{e}^{-3v} \tag{5.9}$$

并分别对应于该方程的 x 分量和 r 分量。利用 (5.7) 和 (5.9)，可以将这些角度表示为 v 的函数，进而以参数形式将能量表示为矩形的长度的函数：$\ell = \ell(v)$ 和 $E = E^{(\mathrm{c})}(v)$。

¯就我们的目的而言，需要考虑大-ℓ 极限，这对应于 $\lambda \to 1$。这并非真正的红外极限，而是双夸克极限；在此极限下，只有弦 3 会变得无限长，其余弦的长度仍为有限值。在

w (飞米)	$E_{\mathrm{QQ\bar{Q}}}$ (吉电子伏特)	ℓ_c (飞米)	$\boldsymbol{\ell}_{4\mathrm{Q}}$ (飞米)	$\frac{\boldsymbol{\ell}_{4\mathrm{Q}}}{\boldsymbol{\ell}_{\mathrm{Q\bar{Q}}}}$
0.19	1.846	1.072	1.113	0.912
0.31	1.990	1.014	1.032	0.846
0.37	2.057	1.000	1.012	0.830
0.39	2.080	0.997	1.008	0.826
0.46	2.158	0.990	0.996	0.816
0.54	2.246	0.985	0.989	0.810

表 II：共线几何下弦断裂距离 $\boldsymbol{\ell}_{4\mathrm{Q}}$ 的一些估算值。这里 $\ell_c = \ell(\mathrm{v}_c)$ 和 $\boldsymbol{\ell}_{\mathrm{Q\bar{Q}}} = 1.22$飞米。

这种情况下，切线角 $\bar{\alpha}$ 可表示为 v 的函数：$\cos\bar{\alpha} = v\mathrm{e}^{1-v}$ [6]。将此表达式与由力平衡方程和几何约束得到的表达式结合，可得方程 $\bar{\alpha}(v,w) = \arccos v\mathrm{e}^{1-v}$。其解 v_1，表示 v的上界。由方程(A.9)和(A.19)可知，ℓ 和 $E^{(\mathrm{c})}$ 中的奇异项为

$$\ell = -\frac{1}{\sqrt{\mathsf{s}}}\ln(1-\bar{\lambda}) + O(1)\,, \qquad E^{(\mathrm{c})} = -\mathsf{g}\mathrm{e}\sqrt{\mathsf{s}}\ln(1-\bar{\lambda}) + O(1)\,. \tag{5.10}$$

由此可立即得到

$$E^{(\mathrm{c})} = \sigma\ell + O(1)\,, \tag{5.11}$$

正如双夸克极限中所预期的那样。

为了确定常数项，只需在表达式中取极限 $\lambda \to 1 (v \to \mathrm{v}_1)$

$$E^{(\mathrm{c})} - \sigma\ell = 2\mathsf{g}\sqrt{\mathsf{s}}\Big(\mathcal{E}^-(\lambda,v) + \mathcal{E}^+(\alpha_2,v) + \mathrm{e}\mathcal{L}^+(\alpha_2,v) + \frac{1}{2}\big(\mathcal{E}(\bar{\lambda},v) - \mathrm{e}\mathcal{L}(\bar{\lambda},v)\big) + 3\mathsf{k}\frac{\mathrm{e}^{-2v}}{\sqrt{v}}\Big) + 4c\,. \tag{5.12}$$

借助公式 (A.26)，我们得到

$$E^{(\mathrm{c})} - \sigma\ell = 2\mathsf{g}\sqrt{\mathsf{s}}\Big(\mathcal{E}^-(\lambda,\mathrm{v}_1) + \mathcal{E}^+(\alpha_2,\mathrm{v}_1) + \mathrm{e}\mathcal{L}^+(\alpha_2,\mathrm{v}_1) - \frac{1}{2}\mathcal{J}(\mathrm{v}_1) + 3\mathsf{k}\frac{\mathrm{e}^{-2\mathrm{v}_1}}{\sqrt{\mathrm{v}_1}}\Big) + 4c\,. \tag{5.13}$$

这里 $\cos\alpha = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b\sqrt{\frac{4}{a^2+b^2}-1}\Big|_{v=\mathrm{v}_1}$ 以及 $\cos\alpha_2 = \cos\alpha - a|_{v=\mathrm{v}_1}$，其中 $a(v) = v\mathrm{e}^{1-v}$ 以及 $b(v) = 3\mathsf{k}(1+4v)\mathrm{e}^{-3v}$ $+\sqrt{1-a^2}(v)$。因此，

$$E^{(\mathrm{c})} = \sigma\ell + C^{(\mathrm{c})} + o(1)\,, \quad \text{with} \quad C^{(\mathrm{c})} = 2\mathsf{g}\sqrt{\mathsf{s}}\Big(\mathcal{E}^-(\lambda,\mathrm{v}_1) + \mathcal{E}^+(\alpha_2,\mathrm{v}_1) + \mathrm{e}\mathcal{L}^+(\alpha_2,\mathrm{v}_1) - \frac{1}{2}\mathcal{J}(\mathrm{v}_1) + 3\mathsf{k}\frac{\mathrm{e}^{-2\mathrm{v}_1}}{\sqrt{\mathrm{v}_1}}\Big) + 4c\,. \tag{5.14}$$

值得注意的是，只有当宽度超过极限值 w 时，这一极限才有意义。正如附录 C 中对矩形几何的说明，这一数值由条件 $\alpha = 0$ 决定。对于更小的宽度，切线角 α 变为正值，因此构型会改变其形状（另见 [12]）。求得 w 的一种方法是将 $\alpha = 0$ 和 $\bar{\alpha} = \arccos v\mathrm{e}^{1-v}$ 代入公式 (5.9)，然后利用所得的解计算几何约束。在此过程中，注意 $\lambda = v$ at $\alpha = 0$ 会很有帮助。随后进行简单的数值计算，便可得到预期的 $\mathsf{w} = 0.087$飞米，这也与 [12] 中双夸克系统所得的结果一致。因此，对于第 III 节所考虑的w 范围，切线角 α 必须为负。

对于足够大的 ℓ，当双重子构型 (c′) 成为最低能量构型时，连接重子顶点之间的弦会发生弦断裂。在物理上，这对应于四夸克系统衰变为一对双重重子，如第 III 节所述。在这里，我们再次通过方程 (3.29) 定义弦断裂距离，其中 v_c 是方程 $E^{(\mathrm{c})}(v) = E^{(\mathrm{c}')}(w)$ 的一个解。进行一些估算并与表 I 的结果进行比较是很有启发性的

它们。结果汇总于表 II。根据这些估算，我们的主要结论与之前相同：依赖于夸克位置的弦断裂距离并非普适量，并且小于 $\boldsymbol{\ell}_{\mathrm{Q\bar{Q}}}$。在双夸克极限 $w \to 0$ 下，它趋近于后者。此外，$\boldsymbol{\ell}_{4\mathrm{Q}}$ 也小于在 [12] 中共线几何下得到的 $\boldsymbol{\ell}_{3\mathrm{Q}}$。

最后，我们做几点说明。首先，与第 III 节一样，我们引入了一个临界长度 $\ell_c = \ell(\mathrm{v_c})$，其定义与模型无关，以便今后与格点量子色动力学进行比较。其次，方程 $E^{(\mathrm{c})}(\ell)$ $2E_{\mathrm{QQq}}$ ℓ 3 30 $C^{(\mathrm{c})}$ 在 较大时可以近似求解。其解由方程 (.) 给出，但常数项取自方程 (5.14)。事实证明，这种近似相当准确：它与精确解仅在小数点后第四位有所不同。

D. 势模型

给定夸克间势，原则上可以通过求解具有该势的薛定谔方程来计算四夸克系统的质量。然而在实践中，这相当于一个棘手的四体问题。处理这一问题的一种常见方法是采用双夸克方法（近似），将问题简化为依次求解两个二体问题。首先，假设色三重态（反三重态）中的夸克（反夸克）结合成双夸克（反双夸克）。[17] 其次，将四夸克系统基本上视为双夸克-反双夸克束缚态，并采用与夸克-反夸克情形相同的势。尽管对 $X(6400)$ 质量（即基态能量）的估算看起来相当合理（见 [23]中的表 II），但若以更多实验数据进行检验，其准确性仍值得怀疑。

用弦模型的术语来说，双夸克方法相当于只保留四夸克弦构型 (c)，舍弃所有其他构型。显然，这种近似可能会遗漏很大一部分物理，因为对于基态势而言，两个介子构型 (a) 和 (e) 始终都很重要 V_0。此外，当 A型排序下的 w 足够大时，或在 B 型排序的情况下，无论 w 为何，四夸克构型都不存在。因此，夸克模型对 $X(6400)$ [23] 的质量给出更准确的估算，或许并不令人意外。[18] 虽然大多数唯象模型采用双夸克方法，但也有人尝试直接处理完整的四体问题。我们仅提及两项与我们的研究结果有所重叠的工作。在[24], 中，研究者考察了采用受格点计算 [8] 启发的势的四体薛定谔方程。该研究的局限在于只考虑了两个空间维度，并将重夸克的拓扑固定为一种构型（A型排序）。随后， [25], 解决了这些问题，但采用的是两两势。因此，求解具有真正四体势的薛定谔方程仍然颇具挑战。

最后，我们应强调，文献中的所有唯象模型都有一个共同的局限：它们没有考虑弦断裂可能造成的影响。当理论预言与高精度实验数据进行比较时，这些影响可能变得十分重要，尤其是对于激发态。

VI. 讨论

在求解描述夸克间相互作用的势中的薛定谔方程之前，必须先有这样一个势。原则上，弦模型可以提供这种势。然而，仍有若干棘手的问题需要解决。首先，必须计算模型哈密顿量中描述弦构型之间混合的非对角元。其次，必须将上述分析推广到含有 $N_f = 2 + 1$ 种味的量子色动力学。第三，必须将所得预言与实验数据进行比较，以筛选出最符合实际的模型。求解薛定谔方程后，或许就能揭示已知四夸克态的起源，并预言新的态。我们仍处于这项研究计划的早期阶段，还有大量工作有待完成。

另一方面，强子的物理，尤其是强子谱学，为检验和完善弦理论的思想提供了一个自然的平台，特别是那些涉及膜的思想，其中弦结点被视为一个膜 [26]。正如第 III 节所述，一类弦相互作用可以自然地解释为膜-反膜对的产生/湮灭。其他例子包括构型 (d)，它假设膜-反膜束缚态的存在，以及第 V 节中的高阶重子顶点，后者可以被视为膜激发。

已知奇异强子的名单仍在不断增加 [27]。随着时间推移，人们也很可能观测到激发态四夸克，而非基态四夸克。这自然引出了一个问题：如何确定第一激发态

---

[17] 双夸克的概念 早已在开创性论文中被提出 [1]。

[18] 然而，为什么双夸克方法 在描述已知的全粲四夸克态质量方面仍然有效，尚不清楚 s.

势 V_1。我们在第 V 节中的讨论表明，计算第一激发态势也是一项艰巨的任务。格点量子色动力学可以为这项工作作出重要贡献，希望在不久的将来能够实现。

致谢

我们谨向 Hideo Suganuma 致以谢意，感谢他在通信中提供的宝贵意见，并感谢 Alex Nikolaev 在 Mathematica 方面给予的帮助。本工作是在朗道研究所的 FFWR-2024-0011 计划框架下完成的。

附录 A：符号与有用公式

本文中，我们用 $Q(\bar{Q})$表示重夸克（反夸克），用 $q(\bar{q})$表示轻夸克（反夸克），并用 $V(\bar{V})$表示重子（反重子）顶点。除非另有说明，重夸克源位于五维空间 (2.2) 的边界上，位置为 $r = 0$；而轻夸克和顶点则分别位于内部的 $r = r_q$和 $r = r_v(r_{\bar{v}})$处。为方便起见，我们引入无量纲变量 $q = \mathsf{s}r_q^2$ 和 $v = \mathsf{s}r_v^2$。这些变量衡量各对象与软墙的距离；在这些单位下，软墙位于 1 处。

为了写出所得 的公式的紧凑形式，我们使用在 [12], 中引入的基本函数，以及 h 若干新定义的函数 nes:

(i) 函数 $\mathcal{L}^+$ 定义为

$$\mathcal{L}^+(\alpha,x) = \cos\alpha\sqrt{x}\int_0^1 du\,u^2\,\mathrm{e}^{x(1-u^2)}\Big[1-\cos^2\!\alpha\,u^4\mathrm{e}^{2x(1-u^2)}\Big]^{-\frac{1}{2}}, \qquad 0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}, \qquad 0\le x\le 1\,. \tag{A.1}$$

这个非 负函数在 $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 或 $x=0$处为零。对于较小的 x，若 α 趋近于 α_0，它的表现为 as

$$\mathcal{L}^+(\alpha,x) = \sqrt{x}\big(\mathcal{L}_0^+(\alpha_0)+O(x)\big), \qquad \text{with} \qquad \mathcal{L}_0^+(\alpha_0) = \frac{1}{4}\cos^{-\frac{1}{2}}\!\alpha_0\,B\big(\cos^2\!\alpha_0;\tfrac{3}{4},\tfrac{1}{2}\big), \tag{A.2}$$

其中， $B(z;\,a,\,b)$ 表示不完全贝塔函数。它在 (0，1) 处有一个对数奇点。因此，

$$\mathcal{L}^+(\alpha,x) = -\frac{1}{2}\ln(1-x)+O(1), \tag{A.3}$$

当 $x\to 1$ 和 $\alpha\to 0$ 时。为简洁起见，我们用 $\mathcal{L}^+(x)$ 代替 $\mathcal{L}^+(0,\,x)$。

(ii) 函数 $\mathcal{L}^-$ 由下式给出

$$\mathcal{L}^-(y,x) = \sqrt{y}\bigg(\int_0^1 du\,u^2\,\mathrm{e}^{y(1-u^2)}\Big[1-u^4\,\mathrm{e}^{2y(1-u^2)}\Big]^{-\frac{1}{2}} + \int_{\sqrt{\frac{x}{y}}}^1 du\,u^2\,\mathrm{e}^{y(1-u^2)}\Big[1-u^4\,\mathrm{e}^{2y(1-u^2)}\Big]^{-\frac{1}{2}}\bigg), \quad 0\le x\le y\le 1\,. \tag{A.4}$$

它非负，且在原 点处为零。对于 $y=x/\rho$，当 ρ 非零且 $x\to 0$ 时， $\mathcal{L}^-$ 在小 x 下的行为为

$$\mathcal{L}^-(y,x) = \sqrt{x}\big(\mathcal{L}_0^-(\rho)+O(x)\big), \qquad \text{with} \qquad \mathcal{L}_0^-(\rho) = \frac{1}{4}\rho^{-\frac{1}{2}}\mathcal{B}\big(1-\rho^2;\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{4}\big). \tag{A.5}$$

这里 $\mathcal{B}(z;a,\ b) = B(a,\ b) + B(z;a,\ b)$。该函数在 $y=1$ 处也有一个对数奇点，其中 e

$$\mathcal{L}^-(y,x) = -\ln(1-y)+O(1), \quad \text{with fixed } x\,. \tag{A.6}$$

函数 $\mathcal{L}^\pm$ 之间的关系为 $\mathcal{L}^+(0,\ x) = \mathcal{L}^-(x,\ x)$。

（iii）函数 $\mathcal{L}$ 定义为

$$\mathcal{L}(y,x) = 2\sqrt{y}\int_{\sqrt{\frac{x}{y}}}^1 du\,u^2\,\mathrm{e}^{y(1-u^2)}\Big[1-u^4\,\mathrm{e}^{2y(1-u^2)}\Big]^{-\frac{1}{2}}, \qquad 0<x\le y\,. \tag{A.7}$$

这是一个非负函数，在 $y=0$ 和 $x=y$ 处取值为零。对于 $y=x/\rho$，当 ρ 非零且 $x\to 0$ 时，其小 x 行为为

$$\mathcal{L}(y,x)=\sqrt{x}\big(\mathcal{L}_0(\rho)+O(1)\big)\,,\qquad \text{with}\qquad \mathcal{L}_0(\rho)=\frac{1}{2}\rho^{-\frac{1}{2}}B\big(1-\rho^2;\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{4}\big)\,. \tag{A.8}$$

函数 $\mathcal{L}$ 在 $y=1$处奇异，其中

$$\mathcal{L}(y,x)=-\ln(1-y)+O(1)\,,\quad \text{with fixed } x\,. \tag{A.9}$$

$\mathcal{L}$由以下恒等式联系起来

$$\mathcal{L}(y,x)=\mathcal{L}^-(y,x)-\mathcal{L}^+(\alpha,x)\,, \tag{A.10}$$

其中 $\cos\,\alpha=\frac{x}{y}\mathrm{e}^{y-x}$。

(iv) 函数 $\mathcal{E}^+$ 由下式给出

$$\mathcal{E}^+(\alpha,x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^1\frac{du}{u^2}\left(\mathrm{e}^{xu^2}\Big[1-\cos^2\!\alpha\,u^4\mathrm{e}^{2x(1-u^2)}\Big]^{-\frac{1}{2}}-1-u^2\right),\qquad 0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}\,,\qquad 0\le x\le 1\,. \tag{A.11}$$

它在 $x=0$ 处以及(0,1)处奇异。如果 α 在 $x\to 0$时趋近于 α_0，其小-x 行为为

$$\mathcal{E}^+(\alpha,x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\big(\mathcal{E}_0^+(\alpha_0)+O(x)\big)\,,\qquad \text{with}\qquad \mathcal{E}_0^+(\alpha_0)=\frac{1}{4}\cos^{\frac{1}{2}}\!\alpha_0\,B\big(\cos^2\!\alpha_0;-\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{2}\big)\,. \tag{A.12}$$

对于 $x\to 1$ 和 $\alpha\to 0$，函数的行为为

$$\mathcal{E}^+(\alpha,x)=-\frac{1}{2}\mathrm{e}\ln(1-x)+O(1)\,. \tag{A.13}$$

我们通过写作 $\mathcal{E}^+(x)$ 来简化记号，而不写 $\mathcal{E}^+(0,x)$。

(v) $\mathcal{E}^-$ 函数定义为

$$\mathcal{E}^-(y,x)=\frac{1}{\sqrt{y}}\left(\int_0^1\frac{du}{u^2}\left(\mathrm{e}^{yu^2}\Big[1-u^4\,\mathrm{e}^{2y(1-u^2)}\Big]^{-\frac{1}{2}}-1-u^2\right)+\int_{\sqrt{\frac{x}{y}}}^1\frac{du}{u^2}\,\mathrm{e}^{yu^2}\Big[1-u^4\,\mathrm{e}^{2y(1-u^2)}\Big]^{-\frac{1}{2}}\right),\ 0\le x\le y\le 1\,. \tag{A.14}$$

$\mathcal{E}^-$ 在 (0,0) 和 $y=1$ 处是奇异的。更具体地说，对于 $y=x/\rho$，当 ρ 非零且 $x\to 0$ 时，其在小 x 下的行为为

$$\mathcal{E}^-(y,x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\Big(\mathcal{E}_0^-(\rho)+O(x)\Big)\,,\qquad \text{with}\qquad \mathcal{E}_0^-(\rho)=\frac{1}{4}\rho^{\frac{1}{2}}\mathcal{B}\big(1-\rho^2;\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{4}\big)\,. \tag{A.15}$$

另一方面，在固定 x 的情况下，靠近 $y=1$ 时，其行为为

$$\mathcal{E}^-(y,x)=-\mathrm{e}\ln(1-y)+O(1)\,. \tag{A.16}$$

函数 $\mathcal{E}^+$ 和 $\mathcal{E}^-$ 的关系为 $\mathcal{E}^+(0,x)=\mathcal{E}^-(x,x)$。

(vi) $\mathcal{E}$ 函数定义为

$$\mathcal{E}(y,x)=\frac{2}{\sqrt{y}}\int_{\sqrt{\frac{x}{y}}}^1\frac{du}{u^2}\,\mathrm{e}^{yu^2}\Big[1-u^4\mathrm{e}^{2y(1-u^2)}\Big]^{-\frac{1}{2}}\,,\qquad 0<x\le y\,. \tag{A.17}$$

它在原点处是奇异的。对于 $y=x/\rho$，当 ρ 为非零值且 $x\to 0$时，$\mathcal{E}$ 在 x 趋近于零时的行为为

$$\mathcal{E}(y,x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\Big(\mathcal{E}_0(\rho)+o(x)\Big)\,,\qquad\text{with}\qquad\mathcal{E}_0(\rho)=\frac{1}{2}\rho^{\frac{1}{2}}B\big(1-\rho^2;\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{4}\big)\,. \tag{A.18}$$

它在 $y=1$处同样是奇异的，并且在那里具有对数奇点，

$$\mathcal{E}(y,x)=-\mathrm{e}\ln(1-y)+O(1)\,,\quad\text{with fixed }x\,. \tag{A.19}$$

$\mathcal{E}$满足恒等式

$$\mathcal{E}(y,x)=\mathcal{E}^-(y,x)-\mathcal{E}^+(\alpha,x)\,, \tag{A.20}$$

其中 $\cos\alpha=\frac{x}{y}\mathrm{e}^{y-x}$。

(vii) 函数 $\mathcal{Q}$由下式给出

$$\mathcal{Q}(x)=\sqrt{\pi}\mathrm{erfi}(\sqrt{x})-\frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{x}}\,,\qquad 0<x\le 1\,, \tag{A.21}$$

其中 erfi(x) 表示虚误差函数。这是 $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 处 $\mathcal{E}^+$ 的一个特例。其小-x 行为为

$$\mathcal{Q}(x)=-\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x}+O(x^{\frac{3}{2}})\,. \tag{A.22}$$

(viii) 函数 $\mathcal{I}$ 为

$$\mathcal{I}(x)=I_0-\int_{\sqrt{x}}^1\frac{du}{u^2}\mathrm{e}^{u^2}\Big[1-u^4\mathrm{e}^{2(1-u^2)}\Big]^{\frac{1}{2}}\,,\quad\text{with}\quad I_0=\int_0^1\frac{du}{u^2}\Big(1+u^2-\mathrm{e}^{u^2}\Big[1-u^4\mathrm{e}^{2(1-u^2)}\Big]^{\frac{1}{2}}\Big)\,,\quad 0<x\le 1\,. \tag{A.23}$$

一个特例 i　　s $\mathcal{I}(1)=I_0$。数值上，$I_0=0.751$。该函数与 $\mathcal{L}^-$ 和 $\mathcal{E}^-$ 函数有关　　by

$$\mathcal{I}(x)=\mathrm{e}\,\mathcal{L}^-(y,x)-\mathcal{E}^-(y,x)\quad\text{as }y\to 1\text{ at fixed }x\,. \tag{A.24}$$

（ix） $\mathcal{J}$ 函数定义为

$$\mathcal{J}(x)=2\big(\mathcal{I}(x)-I_0\big)=-2\int_{\sqrt{x}}^1\frac{du}{u^2}\mathrm{e}^{u^2}\Big[1-u^4\mathrm{e}^{2(1-u^2)}\Big]^{\frac{1}{2}}\,,\quad 0<x\le 1 \tag{A.25}$$

与 $\mathcal{I}$一样，它满足关系式

$$\mathcal{J}(x)=\mathrm{e}\,\mathcal{L}(y,x)-\mathcal{E}(y,x)\quad\text{as }y\to 1\text{ at fixed }x\,. \tag{A.26}$$

附录 B：关于 QQ 和 QQq 夸克系统的一些细节

本附录简要总结 QQ 和 QQq 系统的B-O势的基本结果。这些结果与我们在第III节和第V节中的讨论有关。关于标准说明，参见 [4, 11, 14, 22] ；除非另有说明，我们遵循其中的约定。

¯1. QQ系统

我们从存在两个等质量轻味时的夸克-反夸克对开始。对于本文而言，我们只需要少数几种弦构型，如图19所示。构型 (a) 是最简单的

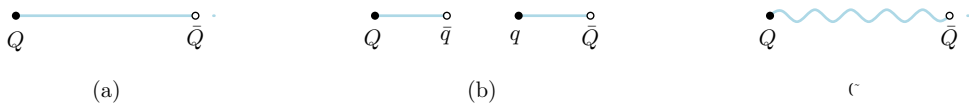

图 19：四维中 QQ 系统的一些弦构型。

一种由价夸克和反夸克通过一条弦连接而成。构型 (b) 是非连通的。它通过添加一对轻夸克并以特定方式将弦连接到它们而形成，从而产生两个重轻介子¯ ¯。这些构型具有物理意义：在弦模型中，重介子 $QQ \to Q\bar{q}+qQ$ 的衰变被描述为它们之间的跃迁。该跃迁通过弦断裂发生。构型 (˜a) 是构型 (a) 的扩展，其中的弦处于激发态。

在五维中，这些构型由连接到五维空间边界上重夸克源的弦构成（2.2），如图 20 所示。此外，构型 (b) 和 (˜a) 在体内包含点状物体：分别是一对轻夸克和一个缺陷。

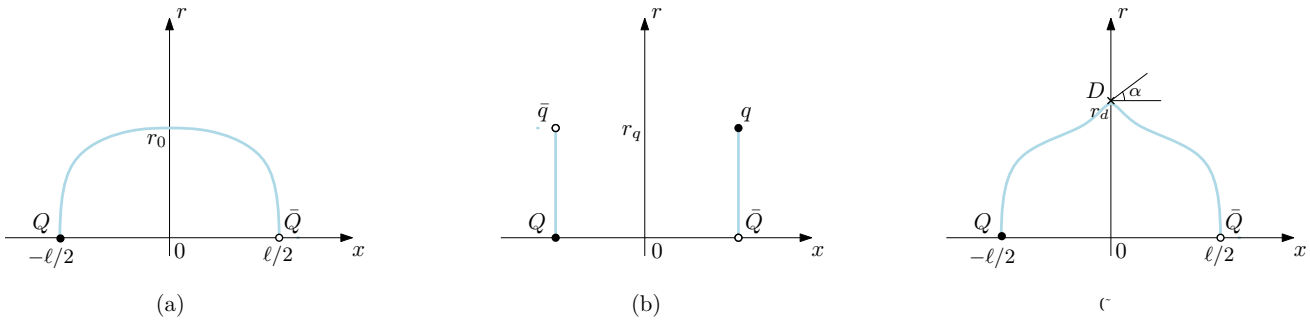

图 20：图 19 中弦构型的五维对应物。重夸克相距 ℓ，位于 $r = 0$；而轻夸克和缺陷则分别位于体内的 $r = r_q$ 和 $r = r_d$。在 (a) 中，r_0 是弦转向点的 r 坐标。在 (˜a) 中，我们专门讨论与混合势 Σ_u^- [22] 相关的弦激发。点状缺陷 D 导致在 $x = 0$ 处形成尖点，其角度为 α。

构型 (a) 最初是在 AdS/CFT对应的背景下讨论的 [28]。除重整化方案外，基本相同的技术也适用于几何 (2.2) [4]。在这种情况下，夸克间距与弦能量之间的关系可由参数形式表示为[19]

$$\ell = \frac{2}{\sqrt{s}}\mathcal{L}^+(\lambda)\,, \quad E_{Q\bar{Q}} = 2g\sqrt{s}\,\mathcal{E}^+(\lambda) + 2c\,, \tag{B.1}$$

其中，$\lambda = s r_0^2$ 是一个从 0 变化到 1 的无量纲参数，而 c 是归一化常数。函数 $\mathcal{L}^+$ 和 $\mathcal{E}^+$ 定义于附录 A。

为便于以后参考，我们指出，$E_{Q\bar{Q}}$ 在小ℓ 时的行为为

$$E_{Q\bar{Q}}(\ell) = -\frac{\alpha_{Q\bar{Q}}}{\ell} + 2c + \boldsymbol{\sigma}_{Q\bar{Q}}\ell + o(\ell)\,, \tag{B.2}$$

[19] 在本附录中，为避免冗杂，我们省略与构型相关的上标。

with

$$\alpha_{\mathrm{Q\bar{Q}}} = (2\pi)^3\Gamma^{-4}\big(\tfrac{1}{4}\big)\mathsf{g}\,, \qquad \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{Q\bar{Q}}} = \frac{1}{8\pi^2}\Gamma^4\big(\tfrac{1}{4}\big)\mathsf{gs}\,. \tag{B.3}$$

另一方面，在大ℓ 时，其行为呈线性：

$$E_{\mathrm{Q\bar{Q}}}(\ell) = \sigma\ell + C_{\mathrm{Q\bar{Q}}} + o(1)\,, \qquad \text{with} \qquad \sigma = \mathrm{egs} \qquad \text{and} \qquad C_{\mathrm{Q\bar{Q}}} = 2c - 2\mathsf{g}\sqrt{\mathsf{s}}\,I_0\,. \tag{B.4}$$

这里， I_0 定义于附录 A 中， σ 是弦张力。它的值大于 (B.2) 中的系数 $\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{Q\bar{Q}}}$ 。数值上， $\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{Q\bar{Q}}}$ 与 σ 之比约为 0.805。

不连通构型 (b) 可以解释为由两个重轻介子组成的强子分子。假设这些介子几乎不相互作用，则总能量就是能量 $E_{\mathrm{Q\bar{q}}}$ 的两倍。后者在 [11], 中计算得到，结果为

$$E_{\mathrm{Q\bar{q}}} = \mathsf{g}\sqrt{\mathsf{s}}\Big(\mathcal{Q}(q) + \mathsf{n}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}q}}{\sqrt{q}}\Big) + c\,, \tag{B.5}$$

其中，函数 $\mathcal{Q}$ 给出于附录 A 中， c 与前文一样是归一化常数，而 $q = \mathsf{s}r_q^2$ 是方程的一个解

$$\mathsf{n}(q-1) + \mathrm{e}^{\frac{q}{2}} = 0 \tag{B.6}$$

在区间 $[0,1]$ 内。这个方程实际上就是力平衡方程的 r 分量。对作用量 $S = S_{\mathrm{NG}} + S_{\mathrm{q}}$ 关于 r_q 求变分即可导出该方程。

到目前为止，我们考虑的都是未激发的弦。然而，QCD弦也有激发态，它们与杂化重夸克势有关。这些势已在格点量子色动力学中得到研究。相比之下，它们对应的弦构型仍鲜为人知。在当前模型中，势 Σ_u^- [22] 对应一种这样的构型。因此，我们只考虑这一类弦激发。它在几何上可解释为弦上形成一个尖点（见图 20˜a）。

对于构型（˜a），夸克间距与其能量之间的关系可参数化地写为

$$\ell = \frac{2}{\sqrt{\mathsf{s}}}\mathcal{L}^+(\alpha, v)\,, \quad \tilde{E}_{\mathrm{Q\bar{Q}}} = 2\mathsf{g}\sqrt{\mathsf{s}}\Big(\mathcal{E}^+(\alpha, v) + \tilde{\mathsf{k}}\,\frac{\mathrm{e}^{-2v}}{\sqrt{v}}\Big) + 2c\,, \tag{B.7}$$

尖点角为

$$\sin\alpha = \tilde{\mathsf{k}}(1+4v)\mathrm{e}^{-3v}\,. \tag{B.8}$$

这里， ˜k 是表征缺陷的参数。无量纲参数 $v = \mathsf{s}r_d^2$ 的取值范围从 $v_{\min}$ 到 $v_{\max}$，其中 $v_{\min}$ 和 $v_{\max}$ 分别是方程 $\cos\alpha = 0$ 和 $\cos\alpha = v\mathrm{e}^{1-v}$ 的解。

这里有一条重要说明。对于 $\tilde{\mathsf{k}} = 2.09$ 可得 $v_{\min} = 3.430$ 和 $v_{\max} = 3.447$。因此，缺陷可以延伸至软墙之外。尽管这看起来可能有些违反直觉，但重要的一点是，这是一条激发弦。对于由（B.8）给出的 α ，两个函数 $\mathcal{L}^+$ 和 $\mathcal{E}^+$ 在区间 $[v_{\min}, v_{\max}]$ 上都有定义且单调递增。它们在 $v = v_{\max}$ 处出现对数奇点。

函数 $\tilde{E}_{\mathrm{Q\bar{Q}}}(\ell)$的表现为

$$\tilde{E}_{\mathrm{Q\bar{Q}}}(\ell) = \tilde{E}_{\mathrm{Q\bar{Q}}}(v_{\min}) + O(\ell^2)\,, \qquad \text{with} \qquad \tilde{E}_{\mathrm{Q\bar{Q}}}(v_{\min}) = 2\mathsf{g}\sqrt{\mathsf{s}}\Big(\mathcal{Q}(v_{\min}) + \tilde{\mathsf{k}}\,\frac{\mathrm{e}^{-2v_{\min}}}{\sqrt{v_{\min}}}\Big) + 2c\,, \tag{B.9}$$

当 ℓ 较小时，以及当

$$\tilde{E}_{\mathrm{Q\bar{Q}}}(\ell) = \sigma\ell + \tilde{C}_{\mathrm{Q\bar{Q}}} + o(1)\,, \qquad \text{with} \qquad \tilde{C}_{\mathrm{Q\bar{Q}}} = C_{\mathrm{Q\bar{Q}}} + 2\mathsf{g}\sqrt{\mathsf{s}}\Big(\int_1^{\sqrt{v_{\max}}} dv\sqrt{v^{-4}\mathrm{e}^{2v^2} - \mathrm{e}^2} + \tilde{\mathsf{k}}\,\frac{\mathrm{e}^{-2v_{\max}}}{\sqrt{v_{\max}}}\Big) \tag{B.10}$$

当 ℓ 较大时。渐近展开式 (B.4) 和 (B.10) 的首项线性项相同，而常数项则因缺陷的贡献而不同。

在图21的左图中，我们将弦构型的能量绘制为夸克间距的函数。值得注意的是，在较大的 ℓ处，$\tilde{}$ $\tilde{}$与 $E_{\mathrm{Q}\bar{\mathrm{Q}}}$ 之间存在相当大的能隙。 然而，构造 $E_{\mathrm{Q}\bar{\mathrm{Q}}}$需要$\tilde{}$一个注意事项。对于较小的 ℓ， $E_{\mathrm{Q}\bar{\mathrm{Q}}}$ 趋于一个常数，而预期势 Σ_u^- 会呈现类似库仑的行为（例如参见 [29]）。尽管 [21]与晶格数据的符合相当好，但在低于晶格间距的间距处出现了偏差，如图所示。这在弦模型中是意料之中的，因为该模型在非常小的夸克间距下并不可靠，而此时微扰量子色动力学变得适用。

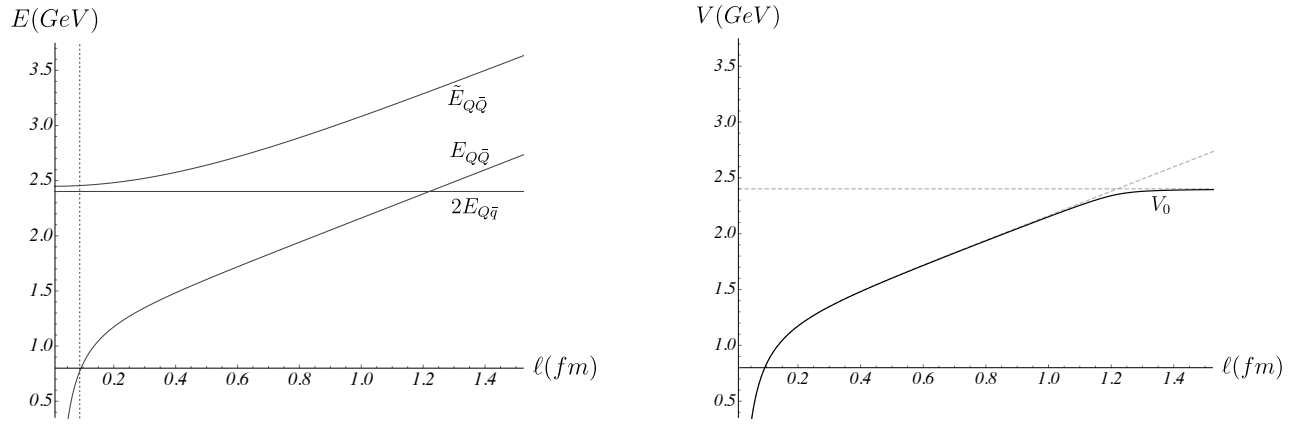

图21：左：弦构型的能量。这里我们设定 $\tilde{\mathsf{k}} = 2000$，如 [22]中所示。竖线位于 $\ell = 0.09$ 飞米处，对应于 [29]中的晶格间距。右：使用表达式（B.12）并结合来自 [19]的$\Theta = 47$兆电子伏确定的基态势。相关能量以虚线表示。

基态 B-O势形式上定义为 $V_0 = \min\big(E_{\mathrm{Q}\bar{\mathrm{Q}}},\ 2E_{\mathrm{Q}\bar{\mathrm{q}}}\big)$。然而，这一定义无法准确描述中间分离距离处的行为。通过基于哈密顿量 (2.1) 的混合分析来解决这一问题会带来技术上的复杂性。实际上，将无限多个弦构型截断为两个，并考虑一个两态系统的模型哈密顿量，要简单得多，

$$\mathcal{H}(\ell) = \begin{pmatrix} E_{\mathrm{Q}\bar{\mathrm{Q}}}(\ell) & \Theta \\ \Theta & 2E_{\mathrm{Q}\bar{\mathrm{q}}} \end{pmatrix}, \tag{B.11}$$

其中 Θ 描述了两个状态之间的混合。随后，势由模型哈密顿量的最小本征值给出。明确地，

$$V_0 = \frac{1}{2}\big(E_{\mathrm{Q}\bar{\mathrm{Q}}} + 2E_{\mathrm{Q}\bar{\mathrm{q}}}\big) - \sqrt{\frac{1}{4}\big(E_{\mathrm{Q}\bar{\mathrm{Q}}} - 2E_{\mathrm{Q}\bar{\mathrm{q}}}\big)^2 + \Theta^2}\,. \tag{B.12}$$

弦断裂距离定义为令构型的能量相等时的距离 [19]

$$E_{\mathrm{Q}\bar{\mathrm{Q}}}(\ell_{\mathrm{Q}\bar{\mathrm{Q}}}) = 2E_{\mathrm{Q}\bar{\mathrm{q}}}\,. \tag{B.13}$$

该距离决定了在给定重夸克间距下，哪种构型主导基态。在大间距下， $E_{\mathrm{Q}\bar{\mathrm{Q}}}(\ell)$ 变为 ℓ 的线性函数，方程也因此大幅简化。[20] 若情况如此，则由方程 (B.4) 和 (B.5) 可知，弦断裂距离为

$$\ell_{\mathrm{Q}\bar{\mathrm{Q}}} \approx \frac{2}{\mathrm{e}\sqrt{\mathsf{s}}}\Big(\mathcal{Q}(q) + \mathsf{n}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}q}}{\sqrt{q}} + I_0\Big)\,. \tag{B.14}$$

[20] 对于此处采用的参数值，这在 $\ell \gtrsim 0.5$飞米时成立，而弦断裂距离约为 1 飞米。

最后，我们通过在图21的右图中绘制 V_0 来说明这一构造。正如预期，V_0 在 $\ell \to 0$ 时趋近于 $E_{\mathrm{Q\bar{Q}}}$，并在 $\ell \to \infty$ 时趋近于 $2E_{\mathrm{Q\bar{q}}}$。这两个渐近区域之间的跃迁发生在约 $\ell = 1.22$ 飞米处，与我们的预期 [19] 一致。

2. QQq 系统

现在我们回顾一下 QQq 夸克系统的若干方面，这些内容对我们在第III节和第V节中的讨论很重要。具体而言，我们需要了解重夸克间距较小和处于中间分离距离时，基态能量随重夸克间距的变化。为此，只需考虑图22所示的简单弦构型。奇特的是，它在五维中的对应情形更为复杂，由三种构型组成，其中只有两种

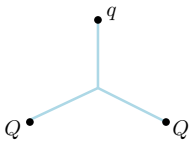

图22：四维中双重重味重子的典型弦构型。

与这里相关。它们 如图23所示。原因在于，每种构型都描述一个特定的范围 of

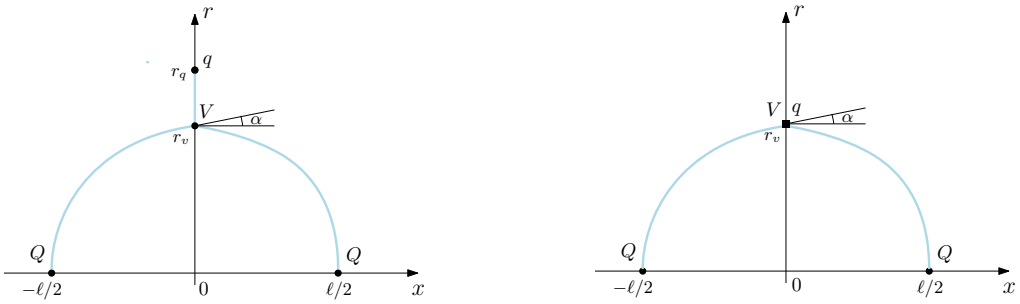

图23：在重夸克间距较小和处于中间分离距离时，对 QQq 系统基态能量有贡献的弦构型。图中对它们进行了标记，每个字母代表重夸克间距的一个特定范围（例如，s表示小间距）。这里，α 是左侧弦在点 V 处的切线角。在构型（s）中，轻夸克和顶点分别位于 $r = r_q$ 和 $r = r_v$ 处，而在构型（m）中，二者都位于 $r = r_v$ 处。

重夸克间距。将它们全部组合起来，即可得到完整范围 [14]。

对于构型 (s)，能量与重夸克间距之间的关系可写成如下参数形式：

$$\ell^{(\mathrm{s})} = \frac{2}{\sqrt{\mathsf{s}}}\mathcal{L}^{+}(\alpha, v)\,, \qquad E^{(\mathrm{s})}_{\mathrm{QQq}} = \mathsf{g}\sqrt{\mathsf{s}}\Big(2\mathcal{E}^{+}(\alpha, v) + \mathsf{n}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}q}}{\sqrt{q}} + 3\mathsf{k}\frac{\mathrm{e}^{-2v}}{\sqrt{v}} + \mathcal{Q}(q) - \mathcal{Q}(v)\Big) + 2c\,, \tag{B.15}$$

其中，参数 $v = \mathsf{s}r_v^2$ 的变化范围为 0 到 $q_\circ$ q 的值由方程 (B.6) 确定。参数 k 表征重子顶点（见第 II 节）。切线角 α 可通过顶点处的力平衡方程用 v 表示，得

$$\sin\alpha = \frac{1}{2}\big(1 + 3\mathsf{k}(1+4v)\mathrm{e}^{-3v}\big)\,. \tag{B.16}$$

此处值得指出的是，在极限 $\ell \to 0$，或者等价地说 $v \to 0$ 下，能量简化为总和 $E^{(\mathrm{s})}_{\mathrm{QQq}} = E_{\mathrm{q\bar{Q}}} + E_{\mathrm{QQ}}$，这与重夸克-双夸克对称性 [13]的预期相符。夸克-夸克势由式 (3.13) 明确给出。

在中间分离距离处，系统由构型（m）描述。在这种情况下，一条弦收缩为一个点，因此轻夸克的位置与顶点重合。分离距离仍由之前相同的公式表示，但参数范围不同；能量则由下式给出

$$E^{(\mathrm{m})}_{\mathrm{QQq}} = \mathsf{g}\sqrt{\mathsf{s}}\Big(2\mathcal{E}^{+}(\alpha, v) + \frac{1}{\sqrt{v}}\big(\mathsf{n}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}v} + 3\mathsf{k}\mathrm{e}^{-2v}\big)\Big) + 2c\,. \tag{B.17}$$

参数 v 现在从 q 变化到 v_{m}，其中 v_{m} 是下列方程的一个解

$$\mathsf{n}(1-v) + 3\mathsf{k}(1+4v)\mathrm{e}^{-\frac{5}{2}v} = 0\,. \tag{B.18}$$

本例中的力平衡方程得出

$$\sin\alpha = \frac{1}{2}\big(\mathsf{n}(1-v)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}v} + 3\mathsf{k}(1+4v)\mathrm{e}^{-3v}\big)\,. \tag{B.19}$$

请注意，$\alpha(\mathsf{v}_{\mathrm{m}}) = 0$。还值得注意的是，对于我们选取的参数，构型（m）所描述的重夸克间距最大可达 1.11 飞米，这对我们的研究目的而言已绰绰有余。

附录 C：基本四夸克构型

在本附录中，我们将讨论 [6], 的基本四夸克构型，重点关注几何约束 (3.1) 所带来的新特征。这些构型如图 24 所示。为方便起见，我们列出如下内容

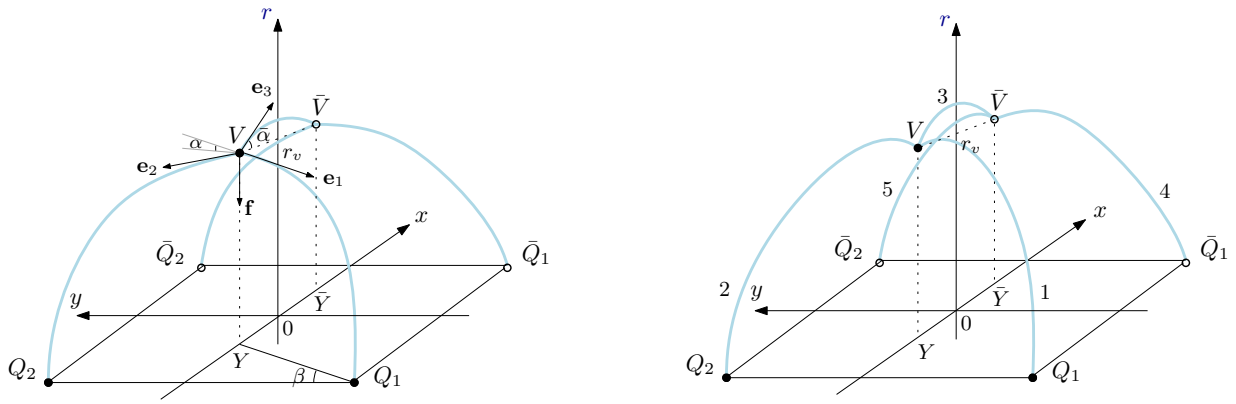

图 24：五维空间中的基本四夸克构型。重夸克源位于五维空间的边界上，处在一个以原点为中心的矩形顶点处。这些构型关于 x 轴和 y 轴的反射对称。重子顶点位于体内的 $r = r_v$ 处。 Y 和 $\bar{Y}$ 是它们在边界上的投影，且 $\beta = \angle Y Q_1 Q_2$。弦按图中右侧面板所示标记为 1、.....、5。对于顶点处的切线角，我们采用基于对称性的缩写：$\alpha_{1,\,2,\,4,\,5} = \alpha$ 和 $\alpha_3 = \bar{\alpha}$。左图： $\alpha \geq 0$。箭头表示作用在 V 上的力，其中引力 $\mathbf{f}$ 方向向下。右图： $\alpha \leq 0$。

简单但有用的公式：

$$\ell = |Q_1\bar{Q}_1| = 2\sin\beta|Q_1 Y| + |Y\bar{Y}|\,, \qquad w = |Q_1 Q_2| = 2\cos\beta|Q_1 Y|\,, \tag{C.1}$$

这些公式适用于 $0 \leq \beta \leq \arctan\frac{\ell}{w}$。

支配每种四夸克构型的总作用量，是弦的南部-后藤作用量与两个顶点的作用量之和

$$S = \sum_{i=1}^{5} S^{(i)}_{\mathrm{NG}} + 2S_{\mathrm{V}}\,. \tag{C.2}$$

对南部-后藤作用量中所涉及的场变分总作用量，可得到弦的运动方程，从而确定其形状（详情参见 [6]的附录 B）。此外，对顶点 V 的位置变分总作用量，可得力平衡方程，其分量形式为 [6]

$$2\sin\beta\cos\alpha-\cos\bar{\alpha}=0\,,\qquad 2\sin\alpha-\sin\bar{\alpha}-3\mathsf{k}(1+4v)\mathrm{e}^{-3v}=0\,, \tag{C.3}$$

与 $v=\ \mathsf{s}r_v^2$。根据对称性，相同的方程也适用于顶点 $\bar{V}$，其切线角相同 s.

1. 构型（I）

如 [6], 的附录 B 中所述，沿边界的弦长为 $|Q_1Y|=\frac{1}{\sqrt{\mathsf{s}}}\mathcal{L}^+(\alpha,v)$ 和 $|Y\bar{Y}|=\frac{1}{\sqrt{\mathsf{s}}}\mathcal{L}(\bar{\lambda},v)$，其中 $\bar{\lambda}=-\mathrm{Pr}\mathrm{oductLog}(-v\mathrm{e}^{-v}/\cos\bar{\alpha})$，函数 $\mathcal{L}^+$ 和 $\mathcal{L}$ 定义于附录 A。将这些表达式与弦能量 [6] 的表达式结合起来，可以将几何约束 (3.1) 写为

$$w=\frac{2}{\sqrt{\mathsf{s}}}\cos\beta\,\mathcal{L}^+(\alpha,v)\,, \tag{C.4}$$

以及矩形的长度和该构型的能量为

$$\ell^{(\mathrm{I})}=\tan\beta\,w+\frac{1}{\sqrt{\mathsf{s}}}\mathcal{L}(\bar{\lambda},v)\,,\qquad E^{(\mathrm{I})}=\mathsf{g}\sqrt{\mathsf{s}}\Big(4\mathcal{E}^+(\alpha,v)+\mathcal{E}(\bar{\lambda},v)+6\mathsf{k}\frac{\mathrm{e}^{-2v}}{\sqrt{v}}\Big)+4c\,. \tag{C.5}$$

在最后一个方程中，我们 使用了（2.4）。给定作为 v 函数的切线角，函数 $E(\ell)$ 可以写成 n p参数形式，即 $\ell=\ \ell^{(\mathrm{I})}(v)$ 和 $E=E_{(\mathrm{I})}(v)$。

我们首先讨论大-ℓ 极限，该极限对应于 $\lambda\to 1$。在此极限下，弦 3 变得无限长，而其他弦保持有限。切线角 $\bar{\alpha}$ 可以用 v 表示为 $\cos\bar{\alpha}=v\mathrm{e}^{1-v}$ [6]。另一方面，根据方程（C.3）和（C.4），所有角度都可以用 v 和 w 表示。将 $\bar{\alpha}$ 的这两个表达式结合起来，可得到方程 $\bar{\alpha}(v,\ w)\ =\arccos\ v\mathrm{e}^{1-v}$，其解 v_1 给出了 v 的上界。显然，v_1 取决于 w。

在尝试理解细节之前，有两点需要说明。首先，这不是真正的红外极限，而是双夸克极限。可以证明，在此极限下，点 Y 和 Y 不会与矩形的施泰纳点重合，如 $\beta\neq\frac{\pi}{6}$ 所示。其次，对于 w 存在一个上界，使得该极限能够存在，下面将对此进行解释。

利用方程(A.9)和(A.19)，我们得到 $\ell^{(\mathrm{I})}$ 和 $E_{(\mathrm{I})}$ 中的奇异项

$$\ell^{(\mathrm{I})}=-\frac{1}{\sqrt{\mathsf{s}}}\ln(1-\bar{\lambda})\ +O(1)\,,\qquad E^{(\mathrm{I})}=-\mathsf{g}\mathrm{e}\sqrt{\mathsf{s}}\ln(1-\bar{\lambda})\ +O(1)\,. \tag{C.6}$$

由此可得

$$E^{(\mathrm{I})}=\sigma\ell\ +O(1)\,, \tag{C.7}$$

正如双夸克极限下所预期的那样（见(B.4)）。

为计算下一项，考虑

$$E^{(\mathrm{I})}-\sigma\ell=\mathsf{g}\sqrt{\mathsf{s}}\Big(4\mathcal{E}^+(\alpha,v)-2\mathrm{e}\sin\beta\mathcal{L}^+(\alpha,v)+\mathcal{E}(\bar{\lambda},v)-\mathrm{e}\mathcal{L}(\bar{\lambda},v)+6\mathsf{k}\frac{\mathrm{e}^{-2v}}{\sqrt{v}}\Big)+4c\,. \tag{C.8}$$

取极限 $\lambda\to 1$ ($v\to\mathrm{v}_1$) 并使用公式 (A.26)，得到

$$E^{(\mathrm{I})}-\sigma\ell=\mathsf{g}\sqrt{\mathsf{s}}\Big(4\mathcal{E}^+(\alpha,\mathrm{v}_1)-2\mathrm{e}\sin\beta\mathcal{L}^+(\alpha,\mathrm{v}_1)-\mathcal{J}(\mathrm{v}_1)+6\mathsf{k}\frac{\mathrm{e}^{-2\mathrm{v}_1}}{\sqrt{\mathrm{v}_1}}\Big)+4c+o(1)\,. \tag{C.9}$$

这里，$\alpha = \alpha(\mathrm{v}_1) =$反正弦 $\frac{1}{2}\big(\sqrt{1-\mathrm{v}_1^2\mathrm{e}^{2(1-\mathrm{v}_1)}}+3\mathsf{k}(1+4\mathrm{v}_1)\mathrm{e}^{-3\mathrm{v}_1}\big)$，且 $\beta = \beta(\mathrm{v}_1) =$反正弦 $\mathrm{v}_1\mathrm{e}^{1-\mathrm{v}_1}/2\cos\alpha$。最后，我们得到

$$E^{(\mathrm{I})} = \sigma\ell + C^{(\mathrm{I})} + o(1)\,, \qquad \text{with} \qquad C^{(\mathrm{I})} = \mathsf{g}\sqrt{\mathsf{s}}\Big(4\mathcal{E}^+(\alpha,\mathrm{v}_1) - 2\mathrm{e}\sin\beta\mathcal{L}^+(\alpha,\mathrm{v}_1) - \mathcal{J}(\mathrm{v}_1) + 6\mathsf{k}\frac{\mathrm{e}^{-2\mathrm{v}_1}}{\sqrt{\mathrm{v}_1}}\Big) + 4c\,. \tag{C.10}$$

值得注意的是，常数项 $C^{(\mathrm{I})}$ 并非普适，因为它取决于 w。

考虑 $w \to 0$ 也趋于零的二重极限是很有启发性的。因此，我们放宽几何约束，并令 $v \to 0$ 与 $\lambda \to 1$同时成立。为了分析二维参数空间 $(v,\ \lambda)$ 中点 $(0,\ 1)$ 的小邻域内参数方程的行为，我们选取路径 $v = \varepsilon$和 $1-\lambda = \varepsilon$。这一选择使我们能够按 ε 的幂进行展开，并控制路径依赖项。直接但略显繁琐的计算得到

$$\begin{aligned} w =& \sqrt{\frac{v}{\mathsf{s}}}\Big(w_0 + w_1 v\Big) + o(\epsilon^{\frac{3}{2}})\,, \quad \ell^{(\mathrm{I})} = \frac{1}{\sqrt{\mathsf{s}}}\Big(-\ln(1-\bar\lambda) + \ell_0\Big) + o(\epsilon^{\frac{1}{2}})\,, \\ E^{(\mathrm{I})} =& \mathsf{g}\sqrt{\mathsf{s}}\Big(-\mathrm{e}\ln(1-\bar\lambda) + \mathcal{E}_0\Big) + 4c + 2\mathsf{g}\sqrt{\frac{\mathsf{s}}{v}}\Big(E_0 + E_1 v\Big) + o(\epsilon^{\frac{1}{2}})\,, \end{aligned} \tag{C.11}$$

其中

$$w_0 = \frac{1}{2}\xi^{-\frac{1}{2}}B\big(\xi^2;\tfrac{3}{4},\tfrac{1}{2}\big)\,, \qquad w_1 = \frac{1}{2}\xi^{-\frac{3}{2}}\Big(\Big(2\xi + \frac{3}{4}\frac{\mathsf{k}-1}{\xi}\Big)B\big(\xi^2;\tfrac{3}{4},-\tfrac{1}{2}\big) - B\big(\xi^2;\tfrac{5}{4},-\tfrac{1}{2}\big)\Big)\,, \tag{C.12}$$

$$E_0 = 1 + 3\mathsf{k} + \frac{1}{2}\xi^{\frac{1}{2}}B\big(\xi^2;-\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{2}\big)\,, \qquad E_1 = -1 - 6\mathsf{k} + \frac{1}{2}\xi^{-\frac{1}{2}}B\big(\xi^2;\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{2}\big) + \xi\, w_1\,, \tag{C.13}$$

and

$$\ell_0 = \int_0^1 du\Big(2\Big(u^{-4}\mathrm{e}^{2(u^2-1)}-1\Big)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{1-u}\Big)\,, \quad \mathcal{E}_0 = 2\int_0^1 \frac{du}{u^2}\Big(\mathrm{e}^{u^2}\Big(1-u^4\mathrm{e}^{2(1-u^2)}\Big)^{-\frac{1}{2}} - 1 - u^2 - \frac{\mathrm{e}\,u^2}{2(1-u)}\Big)\,. \tag{C.14}$$

这里 $\xi = \cos\alpha|_{v=0} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-2\mathsf{k}-3\mathsf{k}^2} \approx 0.938$。在不引起歧义时，我们表示对 v和 $\bar\lambda$的依赖，而不是对 ε的依赖。注意，(C.14) 中的积分可以数值上求出，结果为 $\ell_0 \approx -0.710$ 和$\mathcal{E}_0 \approx -3.431$。随后可以将 $E^{(\mathrm{I})}$ 表示为 ℓ 和 w 的函数。结果由方程 (3.12) 给出，并且与夸克-双夸克对称性 [13]一致。

形式上，除非满足 $w = 0$，小-ℓ 极限并不存在。几何约束阻止我们取极限 $v \to 0$。相反，构型（I）会转变为另一个具有负切角 α 的构型，我们称之为构型（II）。这发生在 $v = \mathrm{v}_0$, 处，其中 v_0 是方程 $\alpha(v,w) = 0$ 的一个解。至少在数值上可以验证，对于任何不超过极限值 w 的 w，这样的解都存在。此外，它取决于w，并满足不等式 $\mathrm{v}_0 \le \mathrm{v}_1$。因此，$\mathrm{v}_0$ 为 v 提供了下界。

宽度 w 在区间 $[\mathrm{v}_0,\mathrm{v}_1]$ 收缩为一点时达到其极限值。这发生在 $w = \mathsf{w}$处，其中 w 是方程 $\mathrm{v}_0(w) = \mathrm{v}_1(w)$ 的一个解。在实践中，先确定与 w 对应的 v_{w} 会更加方便。将 $\alpha = 0$ 和 $\bar\alpha = \arccos v\mathrm{e}^{1-v}$ 代入（C.3）的第二个方程后，我们得到方程

$$1 - 9\mathsf{k}^2(1+4v)^2\mathrm{e}^{-6v} - v^2\mathrm{e}^{2(1-v)} = 0\,, \tag{C.15}$$

其解为 v_{w}。给定 v_{w}，几何约束得出

$$\mathsf{w} = \frac{1}{\sqrt{\mathsf{s}}}\sqrt{4 - v_{\mathrm{w}}^2\mathrm{e}^{2(1-v_{\mathrm{w}})}}\,\mathcal{L}^+(v_{\mathrm{w}})\,. \tag{C.16}$$

注意，对于第 II 节的参数组，简单计算可得 $\mathsf{w} = 0.779$飞米。

总之，当 $w \le \mathsf{w}$ 时，构型（I）存在。此时，其能量由参数形式的 $\ell = \ell^{(\mathrm{I})}(v)$ 和$E^{(\mathrm{I})} = E^{(\mathrm{I})}(v)$ 给出，其中参数从 v_0 变化到 v_1。

2. 构型（II）

由于该构型与构型（I）由相同的作用量支配，因此力平衡方程（C.3）成立。如 [6], 附录 B 中所述，将方程（C.4）和（C.5）中的 $\mathcal{L}^+$ 和 $\mathcal{E}^+$ 替换为 $\mathcal{L}^-$ 和 $\mathcal{E}^-$（对应于负的 α），即可得到几何约束、长度和能量的表达式。这给出

$$w = \frac{2}{\sqrt{\mathsf{s}}} \cos\beta\, \mathcal{L}^-(\lambda, v) \tag{C.17}$$

and

$$\ell^{\,(\mathrm{II})} = \tan\beta\, w + \frac{1}{\sqrt{\mathsf{s}}} \mathcal{L}(\bar\lambda, v)\,, \qquad E^{\,(\mathrm{II})} = \mathsf{g}\sqrt{\mathsf{s}}\Big(4\mathcal{E}^-(\lambda, v) + \mathcal{E}(\bar\lambda, v) + 6\mathsf{k}\frac{\mathrm{e}^{-2v}}{\sqrt{v}}\Big) + 4c\,, \tag{C.18}$$

其中 $\lambda = -\mathsf{ProductLog}(-v\mathrm{e}^{-v}/\cos\alpha)$。与之前一样，角度可以用 v表示，而能量作为矩形长度的函数，可以参数化地写成 $\ell = \ell^{\,(\mathrm{II})}(v)$ 和 $E = E^{\,(\mathrm{II})}(v)$。

这个表达式唯一的问题是没有指定参数 v 的定义域。为了确定它，我们先考虑 $w < \mathsf{w}$ 的情形。正如上一节所见，构型（I）在$v = \mathsf{v}_0$处跃迁为构型（II）。于是问题是，对于更小的 v，构型（II）会发生什么。答案是，它会一直存在到 $\mathsf{v}_\times$，该值是方程 $\bar\alpha(v, w) = 0$ 的一个解，并对应于跃迁到夹缩四夸克构型 (d)。数值上可以验证，该解存在于区间 $[0, 1]$内。此外，它取决于 w，并满足不等式 $\mathsf{v}_\times < \mathsf{v}_0$。后者意味着，当 $w \le \mathsf{w}$ 时，参数 v 从 $\mathsf{v}_\times$ 变化到 v_0。因此，在这种情况下，构型（II）仅适用于中间长度，讨论小 ℓ 和大 ℓ 的极限没有意义。综上，当 $w < \mathsf{w}$ 时，四夸克构型由两种基本构型共同描述。其能量由构型（I）和构型（II）对应的分段函数参数化给出，见 (3.9)。

对于 $w \ge \mathsf{w}$ 的情形，描述会简化，因为区间 $[\mathsf{v}_0, \mathsf{v}_1]$ 收缩为一个点，构型（I）因而不再相关。这使我们能够考虑大-ℓ 极限，其分析方式与构型（I）的情形类似。同样，只有弦 3 会在有限的 w 下变得无限长，因此相应的切线角由 $\cos\bar\alpha = v\mathrm{e}^{1-v}$ 给出。将该角用方程 (C.3) 和 (C.17) 中的 v 表示后，我们得到方程 $\bar\alpha(v,\ w) = \arccos v\mathrm{e}^{1-v}$，其解为 v_1。与之前一样，v_1 取决于 w。

$\ell^{\,(\mathrm{II})}$ 和 $E^{\,(\mathrm{II})}$ 的主导贡献为 ℓ 和 E 的相应右端的表达式相同。因此，$E^{\,(\mathrm{II})}$ 在大 ℓ 时也呈线性增长。为求出常数项，我们考虑 $E^{\,(\mathrm{II})}$ 与 $\sigma\ell$ 之差

$$E^{\,(\mathrm{II})} - \sigma\ell = \mathsf{g}\sqrt{\mathsf{s}}\Big(4\mathcal{E}^-(\lambda, v) - 2\mathrm{e}\sin\beta\mathcal{L}^-(\lambda, v) + \mathcal{E}(\bar\lambda, v) - \mathrm{e}\mathcal{L}(\bar\lambda, v) + 6\mathsf{k}\frac{\mathrm{e}^{-2v}}{\sqrt{v}}\Big) + 4c \tag{C.19}$$

然后取极限 $\lambda \to 1$。由此我们得到

$$E^{\,(\mathrm{II})} - \sigma\ell = \mathsf{g}\sqrt{\mathsf{s}}\Big(4\mathcal{E}^-(\lambda, \mathsf{v}_1) - 2\mathrm{e}\sin\beta\mathcal{L}^-(\lambda, \mathsf{v}_1) - \mathcal{J}(\mathsf{v}_1) + 6\mathsf{k}\frac{\mathrm{e}^{-2\mathsf{v}_1}}{\sqrt{\mathsf{v}_1}}\Big) + 4c\,, \tag{C.20}$$

其中 $\beta = \beta(\mathsf{v}_1)$以及 $\lambda = -\mathsf{ProductLog}(-\mathsf{v}_1\mathrm{e}^{-\mathsf{v}_1}/\cos\alpha(\mathsf{v}_1))$。最后，

$$E^{\,(\mathrm{II})} = \sigma\ell + C^{\,(\mathrm{II})} + o(1)\,, \quad C^{\,(\mathrm{II})} = \mathsf{g}\sqrt{\mathsf{s}}\Big(4\mathcal{E}^-(\lambda, \mathsf{v}_1) - 2\mathrm{e}\sin\beta\mathcal{L}^-(\lambda, \mathsf{v}_1) - \mathcal{J}(\mathsf{v}_1) + 6\mathsf{k}\frac{\mathrm{e}^{-2\mathsf{v}_1}}{\sqrt{\mathsf{v}_1}}\Big) + 4c\,. \tag{C.21}$$

常数项再次依赖于 w。

此处有两点简要说明。首先，尽管 ℓ趋于无穷大，但只要 w 有限，点 Y 和 $\bar Y$ 就不会与施泰纳点重合。其次，在真正的红外极限下，当 w 也趋于无穷大时，外部弦变得无限长，其切线角由 $\cos\alpha = v\mathrm{e}^{1-v}$给出。在这种情况下，$\mathsf{v}_1$ 由方程确定

$$1 - \mathsf{k}^2(1+4v)^2\mathrm{e}^{-6v} - v^2\mathrm{e}^{2(1-v)} = 0\,. \tag{C.22}$$

¯由 (C.3) 中的第一个方程可知， $\beta = \frac{\pi}{6}$ ，因此点 Y 和 Y 就是该矩形的施泰纳点。

因此，对于 $w \geq$ w，构型（II）的能量可参数化地写为 $\ell = \ell^{(\mathrm{II})}(v)$ 和 $E = E^{(\mathrm{II})}(v)$，其中参数从 $\mathrm{v}_{\times}$ 变化至 v_{1}。在这种情况下，四夸克构型仅由基本构型（II）描述，见（3.10）。

---

[1] M. Gell-Mann，Phys.Lett. 8, 214 (1964). [2] G. Zweig，关于强相互作用对称性及其破缺的 An $SU(3)$ 模型，CERN 预印本 8182/TH.401. [3] R. Aaij， $et\ al.$（LHCb），Sci.Bull.65, 1983 (2020)；A. Hayrapetyan， $et\ al.$（CMS），Phys.Rev.Lett.132, 111901 (2024)；A. Tumasyan， $et\ al.$（CMS），“全粲四夸克态家族的观测”，atXiv:2602.02252 [hep-ex]. [4] O. Andreev 和 V.I. Zakharov，Phys.Rev.D 74, 025023 (2006). [5] O. Andreev，Phys.Rev.D 78, 065007 (2008)；Phys.Rev.D 93, 105014 (2016)；Phys.Rev.D 112, 106004 (2025). [6] O. Andreev，Phys.Rev.D 113, 046003 (2026). [7] C. Alexandrou 和 G. Koutsou，Phys.Rev.D 71, 014504 (2005). [8] F. Okiharu、H. Suganuma 和 T.T. Takahashi，Phys.Rev.D 72, 014505 (2005). [9] P. Bicudo、M. Cardoso、O. Oliveira 和 P.J. Silva，Phys.Rev.D 96, (2017) 074508. [10] X. Artru，Phys.Rept. 97, 147 (1983)；N. Isgur 和 J.E. Paton，Phys.Rev.D 31, 2910 (1985). [11] O. Andreev，Phys.Lett.B 804, 135406 (2020)；Phys.Rev.D 101, 106003 (2020). [12] O. Andreev，Phys.Rev.D 104, 026005 (2021). [13] M.J. Savage 和 M.B. Wise，Phys.Lett.B 248, 177 (1990). [14] O. Andreev，J. High Energy Phys. 05, 173 (2021). [15] 参见 MathWorld - Wolfram 网络资源。例如：https://reference.wolfram.com/language/ref/ProductLog.html. [16] C. Quigg，PoS Beauty2019 (2020) 001. [17] D. Ebert、R.N. Faustov、V.O. Galkin 和 A.P. Martynenko，Phys.Rev.D 66, 014008 (2002). [18] H. Miyazawa，Phys.Rev.D 20, 2953, (1979). [19] J. Bulava、B. H¨orz、F. Knechtli、V. Koch、G. Moir、C. Morningstar 和 M. Peardon，Phys.Lett.B 793, 493 (2019). [20] C. Alexandrou、Ph. de Forcrand 和 O. Jahn，Nucl.Phys.Proc.Suppl. 119, 667 (2003). [21] K.J. Juge、J. Kuti 和 C. Morningstar，Phys.Rev.Lett. 90, 161601 (2003). [22] O. Andreev，Phys.Rev.D 86, 065013 (2012). [23] M.N. Anwar 和 T.J. Burns，Phys.Rev.D 110, 034012 (2024). [24] Z. Asadi 和 G.R. Boroun，Phys.Rev.D 105, 014006 (2022). [25] G-J. Wang、M. Oka 和 D. Jido，Phys.Rev.D 108, L071501 (2023). [26] E. Witten，J. High Energy Phys. 9807, 006 (1998). [27] 例如，参见 LHCb合作组，报告编号 LHCb-FIGURE-2026-010. [28] J. Maldacena，Phys.Rev.Lett. 80, 4859 (1998). [29] S. Capitani、O. Philipsen、C. Reisinger、C. Riehl 和 M. Wagner，Phys.Rev.D 99, 034502 (2019).