arXiv:2611.33149v1 [cs.GT] 24 Nov 2026

五个代理的无嫉妒切蛋糕

Aris Filos-Ratsikas
伦敦帝国理工学院
aris.filos-ratsikas@ed.ac.uk

Alexandros Hollender
慕尼黑工业大学
alexandros.hollender@tum.de

Mohamad Latifian
爱丁堡大学
mohamad.latifian@ed.ac.uk

Giannis Tyrovolas
牛津大学
giannis.tyrovolas@cs.ox.ac.uk

摘要

我们研究无嫉妒切蛋糕问题：必须将一种可分资源分配给一组具有异质偏好的代理人，并确保没有代理人会嫉妒他人获得的份额。值得注意的是，已知在对代理人估值作出一些温和的连续性假设时，总能保证存在一种无嫉妒划分，使每位代理人获得的蛋糕份额都是连通的。

当估值具有单调性时，已有研究表明，对于最多四个代理人，可以通过 $\text{poly}(\log(1/\varepsilon))$ 次查询获得连通的 ε- 无嫉妒划分，而五个或更多代理人的情形仍未解决。在本文中，我们提出了一种更为简洁的新方法，为五个代理人实现了这种高效算法。我们的算法使用 $\mathcal{O}(\log^3(1/\varepsilon))$ 次查询，并且还为五个代理人给出了一个全新的存在性证明，该证明除了介值定理之外，不依赖任何不动点定理。

人工智能使用披露。 五个代理人的算法是在2026年10月30日和31日与 Chat- GPT 6 Astra 交互后得出的。随后，作者花了数周时间完善结果的呈现方式。特别是，他们简化了方法，使其更直观、技术上也尽可能简单，同时提炼出支撑该算法的基本原理，并将其作为一项存在性证明单独呈现。本文全部内容均由作者撰写，人工智能仅用于文字润色和制作图表。

1 引言

社会选择研究集体决策应如何体现个体偏好。在这一领域中，公平分割关注在 n偏好可能相互冲突的代理人之间分配资源 [21]。即使一种资源可以在物理上划分为等份，代理人也可能对哪个份额更为理想持有不同看法：一块土地中的不同位置或不同时间段未必同样令人满意。公平性可以用不同方式形式化。例如，比例性要求每个代理人至少获得整个资源价值的 $1/n$ 。另一项自然要求是无嫉妒性：每个代理人对自己份额的估值至少应与对其他任何人份额的估值一样高。

切蛋糕是公平分割中的一个基本问题，研究如何公平分割可分的异质资源 [26]。蛋糕被建模为区间 $[0,1]$, ，完整分配将其全部分配给代理人。各份分配可以由若干个相互分离的区间组成，也可以要求保持连通。在本文中，我们关注每位代理人获得单个区间的模型。这种连通或连续的分配，在划分土地或分配对某项资源的不间断使用权时十分自然，并且只需使用 $n-1$ 个切分点来分配给 n 位代理人。

Stromquist [27], 、Woodall [32], 和 Su [29] 的经典结果证明，在标准的连续性和非饥饿假设下，对于任意数量的代理人，都存在连续的无嫉妒分配。他们的证明使用不动点论证或 Sperner引理，但并未给出高效算法。由于估值函数可能具有任意复杂性，因此通过查询获取信息，而不是假设每个函数都有完整描述，是很自然的做法。Robertson–Webb模型提供评估查询（返回某个区间的价值）和切分查询（要求代理人定位一个达到指定价值的端点） [31]。

即使对于可加价值函数，Stromquist [28] 也证明，对于三个或更多代理人，不存在能够始终找到精确、连续且无嫉妒分配的有限 Robertson–Webb协议。不过，允许份额不连通时，确实存在有界精确协议 [4]。规避连通性不可能结果的一种标准方法，是允许少量嫉妒。若分配为 $(A_1,\dots,A_n)$，则称其为 ε-无嫉妒，当且仅当

$$v_i(A_i) \geq v_i(A_j) - \varepsilon \qquad \text{for all agents } i,j.$$

误差是相对于每位代理人自身价值的可加误差，而精确的无嫉妒性要求误差为零。 r.

尽管文献中也研究了更一般的估值类别，但本文采用 Hollender 和 Rubinstein [13]的单调价值函数模型。估值关于包含关系单调，对退化区间赋值为零，并且关于端点 Lipschitz 连续：对于一个统一的界 $L \geq 1$, 移动端点所导致的区间价值变化至多为 L 乘以端点总位移。我们不要求可加性。我们的算法仅使用区间价值查询。与 Hollender 和 Rubinstein [13], 一样，我们在将 Lipschitz界归一化为 1 后陈述查询次数界。对于一般的 L，这意味着将每个估值 v_i 替换为 v_i/L ，并将目标误差 ε 替换为 ε/L。

结合 Lipschitz 连续性，存在性给出了一个简单的基线：足够细的网格包含一个 ε-无嫉妒分配，并且可以通过穷举搜索找到该分配。对于每个固定的代理人数，这需要的时间关于 $1/\varepsilon$ 是多项式的，但其次数会随着代理人数的增加而增长。然而，我们的目标是得到关于 $\log(1/\varepsilon)$ 为多项式的查询次数界，从而使更高的精度只需相对较少的额外查询。

对于至多四个代理人，这类查询次数界已经已知。对于两个代理人，二分搜索通过O（$\log(1/\varepsilon)$）次价值查询实现切分与选择。Deng 等人 [11] 为三个代理人得到 O（$\log^2(1/\varepsilon)$)次查询，而 Hollender 和 Rubinstein [13]为四个代理人得到 O（$\log^3(1/\varepsilon)$)次查询。这些查询次数界适用于单调利普希茨区间估值。Hollender 和 Rubinstein 明确提出：对于五个单调代理人，是否存在多对数查询算法，或者是否存在能够排除该可能性的下界。我们将回答这一问题。

我们的贡献。 我们提出了一种通用方法，用于为两至五个代理人进行连续的近似无嫉妒蛋糕切分。在上述假设下，该方法恢复了针对两个、三个和四个代理人的已知价值查询次数界，并为五个代理人给出了一种使用 poly(log(1/ε)) 次价值查询的确定性算法。

现有算法大多以一种初始状态开始：针对某一位特定代理人，将蛋糕等分。切分与选择依赖于一位代理人对两份额无差异。早期的三人程序也利用了这种无差异 [5]。在 Hollender 和 Rubinstein [13], 的四人构造中，一位代理人首先将蛋糕划分为四份价值相等的份额。随后，切分点不断移动，同时她对自己最偏好的两份或三份额无差异，且其他代理人的偏好符合两种指定模式之一。接着，势函数论证表明，这种连续移动必然会在某个无嫉妒划分处终止。遗憾的是，所有将这种方法用于

五个代理人时的尝试都失败了。因此，我们改用一种截然不同的方法，并在下文的技术概述中详细介绍。

同期工作。Mackenzie 和 Suzuki 最近独立开展的同期研究 [18]也为五个代理人提出了一种高效算法。他们的研究还包括其他结果，其中最值得注意的是针对七名或更多代理人的下界，表明在最坏情况下需要 Ω(多项式$(1/\varepsilon)$) 次查询。如人工智能披露声明所述，我们于2026年10月30日至31日使用 ChatGPT 6 Astra 获得了这些结果。之后，我们花了数周时间撰写论文；在此期间，Mackenzie 和 Suzuki 的预印本 [18] 于2026年11月17日发表。我们决定上传本研究的第一个版本，但不查阅他们的手稿（摘要除外），以确保本研究确实独立完成。我们计划在未来的版本中比较这两种算法。

1.1 技术概述

我们首先介绍三名代理人情形，以帮助读者直观理解我们的新想法。我们假设估值满足饥饿性假设。

我们新方法背后的主要思想是引入一个主切口，我们将其记为 m ，并称为锚点切点。对于在蛋糕 $[0,1]$, 上固定锚定切点 m 的每一种可能方式，我们都将确定另一个切分点，从而得到一种相应的蛋糕划分，将其分为三份 P_1、 P_2 和 X，并具有以下性质：

> **稳健性：** 无论三名代理人中的哪一名离开，我们都能将份额 P_1、 P_2分配给剩下的两名代理人，使他们彼此不产生嫉妒。

我们强调，份额 P_1、 P_2 必须在某名代理人离开之前选定。因此，无论哪名代理人离开，都必须能够分配这些份额。此外，请注意，稳健性性质并未说明代理人如何评价份额 X。实际上，它只要求剩下的两名代理人在各自分配到的份额 P_1、 P_2之间不存在嫉妒。他们认为份额 X比自己分配到的份额更有价值还是价值更低，都无关紧要。

因此，暂且假设，对于锚定切点 $m \in [0,1]$ 的每个位置，都有满足稳健性性质的对应份额 $P_1(m)$、$P_2(m)$ 和 $X(m)$。此外，假设我们还成功确保了以下两个附加性质：

> **中的连续性 m：** 份额 $P_1(m)$、 $P_2(m)$ 和 $X(m)$ 的端点是关于 m 的连续函数。

> **边界条件：** 在 $m = 0$ 处，所有代理人都更偏好份额 $X(m)$ ，而非份额 $P_1(m)$、$P_2(m)$。在 $m = 1$ 处，所有代理人都更偏好 $P_1(m)$、 $P_2(m)$ 中的某个份额，而非份额 $X(m)$。

现在，很容易利用这些性质证明无嫉妒划分的存在。事实上，由于估值函数是连续的，且份额随 m 连续变化，我们可以应用介值定理，得到存在 $m^* \in [0,1]$ 使得：

- 所有代理人都弱偏好于 $\{P_1(m^*)\ P_2(m^*)\}$ 中的某个份额，而非份额 X。
- 某位代理人 i 对份额 X 与 $\{P_1(m^*)\ P_2(m^*)\}$ 中其最偏好的份额无差异。

请注意，我们在此处关键地用到了 $m = 0$ 和 $m = 1$ 处的边界条件。

最后，我们论证将物品划分为份额 $P_1(m^*)$、 $P_2(m^*)$ 和 $X(m^*)$ 是无嫉妒的。具体而言，首先将份额 X 分配给代理人 i。根据上文的第二个要点，该代理人会将份额 X 视为其偏好物件之一，因此不会嫉妒其他任何代理人。对于其余代理人，根据稳健性性质，我们可以将份额 $P_1(m^*)$、 $P_2(m^*)$ 分配给他们，使他们彼此之间不产生嫉妒。此外，他们也不会嫉妒代理人 i，因为根据上文的第一个要点，他们弱偏好自己的份额，而非份额 X。因此，我们得到了一种无嫉妒划分。

为了完成这一论证，还需要证明，对于任意锚定切点 $m \in [0,1]$ ，确实存在份额 P_1、 P_2 和 X ，满足稳健性性质，同时在 m 上具有连续性，并满足边界条件。接下来，我们将先从较简单的情形入手，即只有两位代理人的情形，来说明其中的直观原因。

在继续之前，我们也简要讨论一下目前所得结论的算法含义。事实上，我们只使用了介值定理，这意味着我们可以希望利用

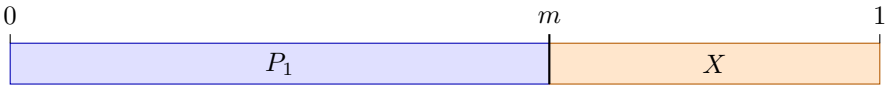


图 1：两名代理人情形。锚点 m 将蛋糕切分为两个份额。划分 $[0, m]$显然是鲁棒的。

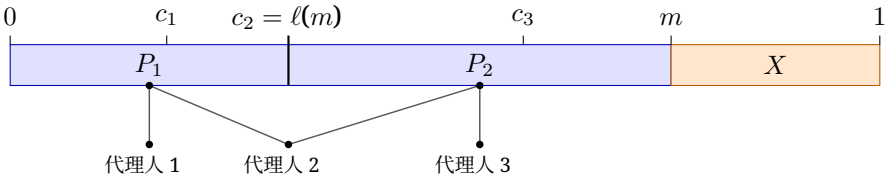


图 2：三名代理人情形。对于每个锚点 m，都存在一个鲁棒划分 $[0, m]$。对于每位代理人 i，c_i 是使该代理人对 $[0, c_i]$ 和 $[c_i, m]$无差异的点。切分点 $\ell(m)$是中位标记 $\ell = c_2$。对于每位代理人，我们在该代理人与其在 P_1，P_2中最偏好的份额之间画一条线。

这种方法来获得一种高效算法。实际上，我们可以直接对 m 进行二分搜索，以确定一个与精确解锚点 m^*足够接近的值。为此，给定 m，我们需要能够高效地计算份额 $P_1(m)$、$P_2(m)$ 和 X，或者能够对它们进行足够精确的近似。

两个代理人。在这种情况下，给定 $m \in [0, 1]$，我们只需令 $P_1(m) := [0, m]$ 以及 $X(m) := [m, 1]$。稳健性显然成立，因为如果两位代理人中的一位离开，另一位就会满意于份额 P_1，因为此时已没有其他代理人会引发嫉妒。各份额关于 m 的连续性也由其构造直接可得。最后，很容易看出边界条件也得到了满足。图1对此作了说明。

因此，介值定理保证存在 m^*，使得两位代理人都弱偏好份额 $[0, m^*]$ 而非份额 $[m^*, 1]$，且至少有一位对两者无差异。因此，我们可以用无嫉妒的方式分配这些份额。这种方法与切分与选择相似，但并不完全相同。在切分与选择中，我们选定一位代理人，请其将蛋糕切分为价值相等的两份，然后让另一位代理人先从中选择一份。在这里，我们可以将该协议理解为请两位代理人分别在蛋糕上标出各自认为的一半位置，然后选取最靠右的标记作为切分点 m^*。无论如何，这会得到一种算法，能通过$\mathcal{O}(\log(1/\varepsilon))$次查询找到一个 ε-无嫉妒分配。

三位代理人。给定 $m \in [0, 1]$，我们令 $P_1(m) := [0, \ell]$，$P_2(m) := [\ell, m]$，以及 $X(m) := [m, 1]$，其中ℓ 是这样一个集合：至少两位代理人弱偏好份额 P_1 而非 P_2，并且至少两位代理人弱偏好份额 P_2 而非 P_1。由于我们假设估值是贪婪的，ℓ事实上由这一条件唯一确定。该条件还立即意味着稳健性，即无论哪位代理人离开，我们都可以将 P_1 和 P_2 分配给剩余的两位代理人，使他们彼此不产生嫉妒。这如图 2所示。

描述 ℓ的另一种等价方式如下。对于每位代理人 $i \in \{1, 2, 3\}$，令 c_i为唯一的切分点，使代理人 i 对份额 $[0, c_i]$ 和 $[c_i, m]$无差异。然后，令 ℓ 为 c_1、c_2和 c_3的中位数。由此我们还可得出，ℓ 是关于 m的连续函数，因为不难看出，c_i 是 m的连续函数。因此，如所希望的，各份额关于 m都是连续的。最后，在 $m = 0$ 和 $m = 1$ 处的边界条件显然得到满足。

因此，我们通过两次应用介值定理，得到了无嫉妒划分的存在性证明：一次是在给定任意固定的 m 时求得 ℓ，另一次是求得解锚切分点 m^*。这自然导出了嵌套二分搜索算法。外层二分搜索针对 m 的取值进行，并利用内层二分搜索确定（或者更准确地说，近似确定）与当前 m对应的 ℓ的取值。由此，我们得到一个使用 $\mathcal{O}(\log^2(1/\varepsilon))$ 次查询来寻找 ε-无嫉妒分配的算法。

四个参与者。 现在，给定 $m \in [0,1]$，我们设定 $P_1(m) := [0,\ell]$，$P_2(m) := [\ell,m]$，$P_3(m) := [m,r]$，以及$X(m) := [r,1]$。这里，ℓ 和 r 的选择满足稳健性条件，也就是说，无论哪位代理人离开，我们都能将份额 P_1、P_2、P_3 分配给剩下的三位代理人，使他们彼此之间都不嫉妒。

与代理人较少的情形不同，对于四个代理人，不再能保证对每个 $m \in [0,1]$ 都必然存在这样的 ℓ 和 r。这不难看出。例如，当 m 接近 1 时，份额 P_3 会非常小，因此无法确保某个代理人会弱偏好它，而不是在 P_1 和 P_2 中选出较好的那一份。直观地说，对于这类情形，也就是无论如何选择 P_3 都无法保证稳健性性质时，我们希望能够固定 $P_3 := [m,1]$，转而允许在份额 P_1 和 P_2 之间出现一个新的未使用区间。这样一来，即使区间 $[0,m]$ 很大，份额 P_1 和 P_2 也可以都变得很小。事实证明，解决这一问题的方法也能让我们解决五人情形，因此接下来我们直接针对五个代理介绍该方法。

五个代理。 为了解决这一问题，我们允许有第二个未使用份额。具体而言，给定 $m \in [0,1]$，我们考虑一个由 ℓ_1，ℓ_2，ℓ_3，ℓ_4 参数化的蛋糕划分，其中主要区间为 $P_1(m) := [0,\ell_1]$，$P_2(m) := [m-\ell_2, m]$，$P_3(m) := [m, m+\ell_3]$，$P_4(m) := [1-\ell_4, 1]$，额外区间为 $L(m) := [\ell_1, m-\ell_2]$ 和 $R(m) := [m+\ell_3, 1-\ell_4]$。我们还要求满足可行性，即

$$\ell_1 + \ell_2 \le m \qquad \text{and} \qquad \ell_3 + \ell_4 \le 1 - m$$

以及极大性；极大性还额外要求这两个不等式中至少有一个取等号。请注意，这意味着在任意给定的锚定切点处，$L(m)$ 或 $R(m)$ 必须为空 m。这对我们的论证至关重要。图 3 展示了一个例子。

采用这一更新后的定义，我们重新得到存在唯一性。也就是说，对于任意给定的 $m \in [0,1]$，存在唯一的 ℓ_1、ℓ_2、ℓ_3、ℓ_4，它们是最大可行的，并且满足针对份额 P_1、P_2、P_3、P_4 的稳健性性质。这并非显而易见，下面我们将说明其成立的直观原因。在证明 ℓ_1、ℓ_2、ℓ_3、ℓ_4 的存在唯一性时，我们还将证明它们是 m 的连续函数，这一点也起着至关重要的作用。

现在来看看如何利用这一点证明无嫉妒划分的存在。思路是以处理 X 的方式处理右侧份额 R，并基本忽略左侧份额 L。在 $m = 0$ 处，$R = [0,1]$ 必然为空，所有其他份额也都为空。因此，所有代理人都偏好 R，胜过任何一个份额 P_1、P_2、P_3、P_4。在 $m = 1$ 处，份额 R 必然为空，因此所有代理人都偏好其他某个份额，而不是它（具体而言，是份额 L，也就是 $[0,1]$）。因此，根据介值定理，存在一个锚定切点的位置 m^*，使得所有代理人都弱偏好其他某个份额而非份额R，并且有某个代理人 i 对其最偏好份额和份额 R 无差异。

关键观察是，由于 R 属于代理人 i的最偏好份额之一，因此它不可能为空（根据估值的贪食性）。但这意味着份额 L必然为空。因此，我们可以将份额 R 分配给代理人 i；根据稳健性性质，我们可以将份额 P_1、P_2、P_3、P_4分配给其余四个代理人，使他们彼此之间不产生嫉妒。由此便得到蛋糕的无嫉妒划分。

存在 ℓ_1、ℓ_2、ℓ_3、ℓ_4。 这里我们给出一些直观解释，说明为什么对每个 $m \in [0,1]$ 都存在唯一的最大可行 ℓ_1、ℓ_2、ℓ_3、ℓ_4，从而使稳健性性质成立。假设我们已将ℓ_1 固定为某个非常小的值。那么，我们可以证明，存在 ℓ_2、ℓ_3 和 ℓ_4 的唯一取值，使稳健性性质得到满足。这些 ℓ_2、ℓ_3 和 ℓ_4 的取值将会非常小，因此极大性条件不会成立。现在设想我们增加 ℓ_1，同时更新 ℓ_2、ℓ_3 和 ℓ_4 以保持稳健性。于是，ℓ_2、ℓ_3 和 ℓ_4 也将随 ℓ_1一同增加。因此，在某个时刻，不等式 $\ell_1 + \ell_2 \le m$ 或 $\ell_3 + \ell_4 \le 1 - m$ 之一将变为紧的。在这一时刻，极大性也将成立（即 L 或 R 中至少一个为空），从而得到所需的划分。

在第3节中，我们仅利用介值定理给出一个论证，证明给定 ℓ_1时，存在唯一的 ℓ_2、ℓ_3 和 ℓ_4，使稳健性性质成立。由此可得一种算法：通过三重嵌套的二分搜索确定 ℓ_2、ℓ_3、ℓ_4，再通过一次二分搜索确定 ℓ_1，并对 m进行外层二分搜索，共需 $\mathcal{O}(\log^5(1/\varepsilon))$次查询。我们不采用这种方法，而是证明，对于给定的 m，只需 $\mathcal{O}(\log^2(1/\varepsilon))$次查询，便可通过枚举常数个可能的无差异图，找到 ℓ_1、ℓ_2、ℓ_3和 ℓ_4。由此得到该算法最终的查询次数上界为 $\mathcal{O}(\log^3(1/\varepsilon))$。

1.2 相关工作

精确协议与不连通份额。 对于可加价值函数，Brams 和 Taylor [7] 以及 Robertson 和 Webb [23]给出了允许份额不连通的有限精确无嫉妒协议，但其查询次数并非仅由代理人的数量决定。Aziz 和 Mackenzie [3] 得到了一个上界

四个参与者需要 584 次查询。他们针对任意 n [4] 的协议至多使用 $n^{n^{n^{n^{n}}}}$ 次查询，即六重 n。近期的确定性协议使用 $2^{O(n \log n)}$ 次查询，并附有初等证明 [22]，以及 $n^{O(1)}2^n$ 次查询 [33]。Mackenzie 和 Suzuki [17] 给出了一种随机化协议，对每种估值配置，期望查询次数为 $\widetilde{O}(n^{30})$。移动刀程序为精确分割提供了另一种途径 [5, 8, 24]。具体而言，Saberi 和 Wang [24] 的五人程序针对具有有界密度的可加价值函数，存在多对数近似离散化，但允许份额不连通。

近似与困难性。对于参与者人数可变的情况，Goldberg 等人 [12] 研究连通近似及受约束变体，而 Barman 和 Kulkarni [6] 针对归一化可加价值函数，将加性嫉妒控制在 $1/4 + o(1)$ 以内，同时给出乘性保证。我们关注固定人数下任意小的加性误差。若不要求单调性，则查询下界在 $1/\varepsilon$ 上呈多项式增长；这一结论对四个代理人 [13] 和三个代理人 [15] 已成立。这些下界不适用于我们的估值类别。对于由有理分段常数密度给出的归一化可加价值函数，Kawase 等人 [16] 证明，精确和近似的完全连通无嫉妒性问题均为 PPAD完全问题。他们的归约使用了不断增加的代理人数。因此，这并未证明五个或其他任何固定数量的单调代理人情况下存在困难性。对于五个以上的代理人，已有结果仍未解决任何固定数量的单调代理人是否存在多对数查询复杂度这一问题。

查询访问与通信。 我们的单调价值函数模型不要求可加性，但假设已知 Lipschitz 界，并且只使用价值查询。在针对可加价值函数的标准 Robertson–Webb模型中，还允许进行切分查询，且不施加密度界。在该模型中，Brˆanzei 和 Nisan [10]证明，对于三名代理人，存在一个紧确的确定性 $\Theta(\log(1/\varepsilon))$ 界；对于任意 n，实现连通近似无嫉妒性的查询上界为 $O(n/\varepsilon)$。这些结果在估值类别和允许的查询方面都与我们的结果不同。一般查询次数界计算的是偏好 elicitation 的开销，而后续搜索不一定需要多项式时间。因此，这与代理人数可变时的 PPAD 困难性结果并不矛盾。相较之下，通信复杂度衡量的是知晓自身估值的代理人 [9]之间交换的比特数。价值查询的答案可能是任意实数，因此仅有价值查询次数界并不能直接推出相同的通信比特数界。

代理人离开与其他要求。 在离开代理问题中，先将蛋糕切成$n-1$份额，之后才确定 n 名代理人中谁将离开。无论哪名代理人离开，其余代理人都必须能够获得这些份额的无嫉妒分配。Meunier 和 Su [19] 在标准的饥饿性与闭性假设下证明了此类分配的存在性。这正是我们的保留区间所采用的稳健性性质。秘密代理人结果则是在不征询一名代理人的情况下预先准备 n 份额。她选定最喜欢的一份后，其余代理人都能获得一份自己弱偏好于其他所有份额的分配 [2]。Panina 和 ˇZivaljevi´c [20] 研究了这两种情形，包括在附加假设和对可能分配的限制下，允许对退化片段表达偏好的扩展。这些存在性结果并未提供我们的算法所需的稳定性和几何搜索。其他研究则探讨了采用自由处置 [25] 的精确连续无嫉妒，以及针对受限估值 [1]的真实机制。

2 预备知识

对于正整数 n，我们将集合 $\{1, \ldots, n\}$ 简写为 $[n]$。我们用 $\|\cdot\|_\infty$ 表示上确界范数。也就是说，对于向量 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$，$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{j \in [n]} |x_j|$。

蛋糕被建模为区间 $[0, 1]$。共有 n 个代理人，每个代理人都有一个估值函数，为蛋糕的每个区间赋予一个值。具体而言，对于每个 $i \in [n] := \{1, 2, \ldots, n\}$，都有一个函数$v_i$: $[0, 1]^2 \to [0, 1]$。代理人 i 对区间 $[\ell, r]$ 的估值为 $v_i(\ell, r)$。我们要求，若$\ell \geq r$，则 $v_i(\ell, r) = 0$。此外，我们假设估值函数还满足以下两个性质：

- 对于某个常数 $L > 0$，v_i 是 L-利普希茨连续的，即对于所有 $(\ell, r), (\ell', r') \in [0, 1]^2$，

$$|v_i(\ell, r) - v_i(\ell', r')| \leq L(|\ell - \ell'| + |r - r'|).$$

- v_i 是单调的。也就是说，对于所有 $[\ell, r] \subseteq [\ell', r']$, $v_i(\ell,\ r) \leq v_i(\ell',\ r')$。

我们将蛋糕的连续划分称为由 k 个区间 $P_1, \ldots, P_k$ 组成的集合，且这些区间的内部互不相交。如果这些 P_j 划分了蛋糕，即 $\cup_{j\in[k]} P_j = [0,1]$，那么我们将此划分称为完全划分。将份额分配给代理人集合 S 的（部分）分配，是从 S 中的代理人到份额的单射映射。我们用 A_i 表示代理人 i 获得的份额。

定义 2.1。令 S 为代理人集合的子集。若分配 $\mathbf{A} = \{A_i\}_{i\in S}$ 在S中的代理人之间满足无嫉妒，则对所有 $i, j \in S$, $v_i(A_i) \geq v_i(A_j)$均成立。若不等式在加上 ε 这一加性项的范围内成立，则称其为 ε-无嫉妒：对所有 $i, j \in S$, $v_i(A_i) + \varepsilon \geq v_i(A_j)$均成立。

注意，这里我们允许 $\mathbf{A}$ 不划分 $[0,1]$。

归一化。不失一般性，我们可以假设估值是 1-Lipschitz 连续的，即 $L = 1$。事实上，可以通过将 v_i 替换为 v_i/L，并将近似无嫉妒目标 ε 替换为 ε/L来实现这一点。这样，我们就只需用 ε来表示计算复杂度界。

查询复杂度。我们考虑能够通过查询估值函数的值来访问这些函数的算法。[1] 一次查询包含两个端点 ℓ、r 以及一个代理人 $i \in [n]$的身份，响应则是该代理人对区间 $[\ell, r]$ 的估值，即 $v_i(\ell, r)$。算法的性能以输出一个 ε-无嫉妒分配所需的查询次数来衡量。不难看出，可以使用需要 多项式$(1/\varepsilon)$ 次查询的蛮力算法解决该问题。如果一个算法使用 多项式$(\log(1/\varepsilon))$ 次查询，我们就称其为高效算法。

尽管该模型只要求算法具有较高的查询效率，而不一定具有较高的时间效率，但本文提出的算法在相应的白盒模型中运行时间也是多项式级的。另请参阅 [14]，了解更多详情及与其他模型的比较。

贪食性。在切蛋糕问题中，假设估值不仅是单调的，而且是严格单调的，这样做可能很方便。这通常称为贪食性 条件。若对于所有 $[\ell, r] \subsetneq [\ell', r']$，都有 $v_i(\ell, r) < v_i(\ell', r')$，我们就称 v_i是贪婪的。出于计算方面的考虑，以下更强的条件版本非常有用。对于某个 $\gamma > 0$，若对所有 $[\ell, r] \subseteq [\ell', r']$

$$v_i(\ell', r') \geq \gamma(\ell - \ell') + \gamma(r' - r) + v_i(\ell, r).$$

我们无需假设估值是贪婪的或强饥饿的。相反，只需一个简单的预处理步骤，就可以确保满足这一条件。该步骤会稍微改变估值函数，但由于我们只关心寻找近似无嫉妒分配，而非精确分配，因此这并无影响。具体而言，给定 $\gamma \in (0,1)$，我们只需将每个估值函数v_i替换为 v_i'，其中 $v_i'(\ell, r) := (1-\gamma)v_i(\ell, r) + \gamma|r - \ell|$。容易看出，$v_i'$ 是 γ- 强饥饿的，并且与 v_i 一样，仍然是 1-Lipschitz 连续的。此外，关于 v_i' 的任何 δ-无嫉妒划分，都会得到一个关于原始估值 v_i的$(\delta + 2\gamma)$-无嫉妒分配。因此，通过适当选取 γ 和 δ，我们可以确保最终得到所需的 ε-无嫉妒分配。

3 五个代理人的存在性证明

我们首先 提出一种新的五个代理人的精确无嫉妒划分构造性存在性证明 s.

定理 1. 考虑一个有五个代理人的切蛋糕实例，其估值为 v_i，且单调并且 *Lipschitz* 连续。那么，存在一种无嫉妒分配，由连续份额组成，并将整块蛋糕完整地分给五个代理人。

根据该证明，我们将能够提取出一种可高效计算近似无嫉妒划分的算法。我们先给出一些有用的定义。

定义 3.1. 对于任意锚点 $m \in [0,1]$，我们称元组 $(\ell_1,\ \ell_2,\ \ell_3,\ \ell_4) \in [0,1]^4$ 是可行的，if

$$\ell_1 + \ell_2 \leq m \qquad \text{and} \qquad \ell_3 + \ell_4 \leq 1 - m.$$

如果其中一个不等式取等号，则可行元组是极大的。

[1] 在相关文献中，这些通常被称为 *value queries*。

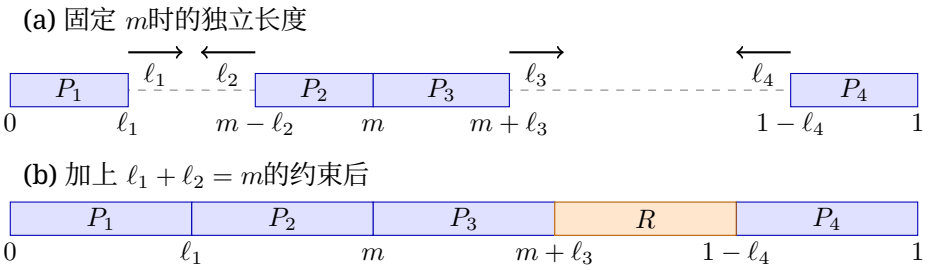


图3：保留的四份及其增长方向。闭合左侧间隙后，留下区间 $R=[m+\ell_3, 1-\ell_4]$，接触时将其分配给第五位代理人。

给定一个锚点 $m \in [0,1]$和一个元组 $\boldsymbol{\ell}=(\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4)$，我们构造四份蛋糕。我们使用以下简写：$P_1=[0,\ell_1]$，$P_2=[m-\ell_2, m]$，$P_3=[m, m+\ell_3]$，$P_4=[1-\ell_4, 1]$。在这种解释下，如果份额 P_j 是集合 $[0,1]$ 的子集，且它们的内部互不相交，则元组 $\boldsymbol{\ell}$ 是可行的。如果份额 P_j 覆盖了整块蛋糕，但至多留有一个非空区间，则可行元组是极大的。此外，按照记号约定，元组 $\boldsymbol{\ell}^*$同样定义份额 $P_1^*=[0,\ell_1^*]$、……、$P_4^*=[1-\ell_4^*, 1]$。

定义3.2。对于任意 $m \in [0,1]$，如果可行元组（ℓ_1，ℓ_2，ℓ_3，ℓ_4）具有鲁棒性，那么无论哪位代理人离开，我们都能将份额 P_1，P_2，P_3，P_4 分配给剩余四位代理人，使他们彼此之间都不嫉妒。更一般地，对于某个 $\delta \geq 0$，如果无论哪位代理人离开，我们都能将份额 P_1，P_2，P_3，P_4 分配给剩余四位代理人，使他们彼此之间的嫉妒不超过 δ，那么我们称该元组是 δ-鲁棒的。

定义3.3。对于 $m \in [0,1]$、$\delta \geq 0$和可行元组 $\boldsymbol{\ell}$，我们定义 δ-偏好图 $G_\delta(m, \boldsymbol{\ell})$。这是一个顶点为 $[5] \sqcup \{P_1, \ldots, P_4\}$ 的二分图。当且仅当 $v_i(P_j)+\delta \geq \max^{k\in[4]} v_i(P_k)$时，顶点 i 与顶点 P_j 之间存在一条边。如果 m 可由上下文确定，我们将使用简写 $G_\delta(\boldsymbol{\ell})$。

如果 $v_i(P_j)+\delta \geq \max^{k\in[4]} v_i(P_k)$，我们称份额 P_j 是代理人 i的 δ-最偏好份额。令 S为二分图同一侧顶点集的一个子集。令 $N(S)$表示其邻居集合。现在，我们可以用图的语言描述 δ-稳健性。

引理 3.4。令 $\boldsymbol{\ell}$ 为一个可行元组。那么，当且仅当对于所有 $i \in [5]$ 以及所有$S \subseteq [5] \setminus \{i\}$、$|N(S)| \geq |S|$，它们都在图 $G_\delta(\boldsymbol{\ell})$中时，$\boldsymbol{\ell}$ 才是 δ-稳健的。

证明。这是霍尔条件的直接应用。任何 δ-无嫉妒分配都是将份额匹配给代理人的匹配，其中这些份额是代理人的 δ-最喜欢的份额。一旦某个代理人 i 离开，这样的匹配存在，当且仅当对于所有 $S \subseteq [5] \setminus \{i\}$、$|S| \leq |N(S)|$。□

引理 3.5。如果 $\boldsymbol{\ell}$ 是一个 δ-鲁棒划分，那么 $G_\delta(\boldsymbol{\ell})$ 是连通的。

证明。假设为得出矛盾，$G_\delta(\boldsymbol{\ell})$是不连通的。令 $S \subseteq [5]$ 为极大连通分支中的代理人集合。于是，如果 $|S| \leq 4$ 存在 $i \in [5] \setminus S$。根据引理 3.4，$|N(S)| \geq |S|$。类似地，对于 $[5] \setminus S$，$|N([5] \setminus S)| \geq |[5] \setminus S|$。由于图是不连通的且 S是极大的，$N([5] \setminus S)$和 $N(S)$不相交。因此，$|N(S)| + |N([5] \setminus S)| \leq 4$。于是 $|S| + |[5] \setminus S| = 5 \leq 4$，产生矛盾。因此，$|S| = 5$。要使 $G_\delta(\boldsymbol{\ell})$成为 δ-鲁棒的，根据引理 3.4，$N([5]) = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$。因此，图 $G_\delta(\boldsymbol{\ell})$是连通的。□

为证明 δ-鲁棒分配的存在性，我们引入一个“权重”函数。每个代理人 i 都可以为份额 P_j的权重贡献 w_{ij}。如果份额 P_j 是代理人 i的唯一最喜爱物品，则其权重 w_{ij}将接近 1。更一般地，如果份额 P_j 是 k 个并列最喜爱物品中的一个，则其权重 w_{ij} 将接近$1/k$。份额 P_j的权重记为 W_j，它等于各代理人为该份额贡献的权重之和，即$W_j = \sum_{i\in[5]} w_{ij}$。此外，我们选择一个连续的权重函数。

定义 3.6。对于固定的 m 和 $\delta > 0$，考虑一个元组 $\boldsymbol{\ell}$。令 $\exp(x) = 2^x$。对于一个份额 P_j 和一个代理人 i，令

$$w_{ij}(m, \boldsymbol{\ell}) = \frac{\exp(\frac{5}{\delta} \cdot v_i(P_j))}{\sum_{k\in[4]} \exp(\frac{5}{\delta} \cdot v_i(P_k))}.$$

然后，令 $W_j(m, \boldsymbol{\ell}) = \sum_{i\in[5]} w_{ij}(m, \boldsymbol{\ell})$。根据上下文可以明确时，我们将省略 m，改写为 $W_j(\boldsymbol{\ell})$。

引理 3.7。 对于每个代理人 i, $\sum_{j\in[4]} w_{ij}(\boldsymbol{\ell}) = 1$，我们有 $\sum_{j\in[4]} W_j(\boldsymbol{\ell}) = 5$。

证明。 这可以直接从 w_{ij}的定义中看出：

$$\sum_{j\in[4]} w_{ij}(m,\boldsymbol{\ell}) = \frac{\sum_{j\in[4]} \exp(\frac{5}{\delta}\cdot v_i(P_j))}{\sum_{k\in[4]} \exp(\frac{5}{\delta}\cdot v_i(P_k))} = 1.$$

由于有 5 位代理人，我们可以推导出 $\sum_{j\in[4]} W_j(\boldsymbol{\ell}) = 5$。 □

引理 3.8。 假设估值 v_i 是贪婪的。那么，权重函数 $W_j(m,\boldsymbol{\ell})$ 关于 ℓ_j严格递增，关于 ℓ_k 严格递减（对 $k \neq j$ 而言），且连续。

证明。 严格单调性直接源于 W_j 是严格单调函数的复合这一事实。为证明这一点，我们依赖于 v_i 严格单调这一事实。同样，由于 w_{ij} 的分母始终至少为 4，且 v_i 连续、exp 也连续，因此 W_j的连续性得以成立。 □

现在我们证明，找到一个使所有权重函数都相等的元组 $\boldsymbol{\ell}$，即可得到一个 δ-鲁棒划分。

引理 3.9。 对于固定的 $m \in [0,1]$，考虑一个可行元组 $\boldsymbol{\ell}$。假设对于所有 $j \in [4]$，$W_j(\boldsymbol{\ell}) = \frac{5}{4}$。那么，$\boldsymbol{\ell}$是 δ-鲁棒的。

证明。考虑 δ-偏好图 $G_\delta(\boldsymbol{\ell})$。根据引理 3.4，$\boldsymbol{\ell}$ 是 δ-鲁棒的，当且仅当对于每个代理人i，在 $G_\delta(\boldsymbol{\ell})$ 中删除顶点 i 后仍存在一个完美匹配。现在，任取物件顶点的一个子集 P。那么，$\sum_{P_j\in P} W_j - w_{ij} \geq \frac{5}{4}|P| - 1$。对于那些某个份额 P_j 不是其 δ-最偏好份额的每个代理人，其对 W_j 的贡献至多为 $\exp(\frac{5}{\delta}\cdot(v-\delta))/\exp(\frac{5}{\delta}\cdot v) = \exp(-\frac{5}{\delta}\delta) = 2^{-5}$。

因此，对于从 P 中取出的某个份额是其 ε-最偏好份额之一的代理人数量至少为$\lceil\frac{5}{4}|P| - 1 - 4\cdot|P|2^{-5}\rceil \geq |P|$。因此，引理 3.4的条件成立。 □

现在，我们可以利用这一存在性刻画，以及 $W_j(\boldsymbol{\ell})$ 的连续性和单调性，来证明存在 δ-鲁棒划分。为便于表述，我们将把估值函数扩展到其定义域之外。

定义 3.10。 给定估值函数 $v_i\colon [0,1]^2 \to [0,1]$，我们将估值函数的扩展$\tilde{v}_i\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 定义如下。对于 $a \leq b$,

$$\tilde{v}_i(a,b) = v_i(\max(0,a),\min(1,b)) + b - a - \max(0,\min(b,1) - \max(a,0)).$$

也就是说，$\tilde{v}_i(a,\ b) = v_i([a,b]\cap[0,1]) + \mu([a,b]\setminus[0,1])$，其中 μ表示互不相交区间并集的总长度。对于 $a > b$, $\tilde{v}_i(a,\ b) = 0$。

重要的是，v_i 与 $\tilde{v}_i$ 在 $[0,1]^2$ 上一致：对于所有 $(a,\ b) \in [0,1]^2$，$\tilde{v}_i(a,\ b) = v_i(a,\ b)$。此外，如果 v_i 是 1-Lipschitz 且强饥饿程度为 γ，那么 $\tilde{v}_i$ 也如此。考虑扩展 $\tilde{v}_i$ 的好处在于，对于每个左端点 $a \in [0,1]$ 和目标 $T \in \mathbb{R}_{\geq 0}$，都存在 b，使得 $\tilde{v}_i(a,\ b) = T$。鉴于它们在定义域 $[0,1]^2$，上一致，我们常常也用 v_i 表示扩展 $\tilde{v}_i$。

现在我们已经准备好证明第一个存在性引理。

引理 3.11。 对于任意 $m \in [0,1]$ 和 $\delta > 0$，都存在一个极大可行元组 $(\ell_1,\ell_2,\ell_3,\ell_4)$，它是$\delta$-鲁棒的。

证明。固定 $m \in [0,1]$ 和 $\delta > 0$，并记 $c = 5/4$。根据引理 3.9，只需找到一个极大可行元组 $\boldsymbol{\ell}^*$，使得对于每个 $j \in [4]$，都有 $W_j(\boldsymbol{\ell}^*) = c$。给定 ℓ_1、ℓ_2、ℓ_3，我们先找到 ℓ_4，使得 $W_4(\ell_1,\ \ell_2,\ \ell_3,\ \ell_4) = c$。然后，在保持 P_4 的权重等于 c的同时，连续移动 ℓ_3，直到 P_j 的权重也等于c。最后，保持 P_3 和 P_4 的权重等于 c，确定一个 ℓ_2 的取值，使得 P_2 的权重也等于 c。由于权重之和为 5，份额 P_1 的权重也等于 c。我们证明，随着ℓ_1 连续变化，使所有权重相等的相应切分点也连续变化。因此，从 $\ell_1 = 0$出发，我们可以连续增大 ℓ_1，直到 $\ell_1 + \ell_2 = m$ 或 $\ell_3 + \ell_4 = 1 - m$。由此得到的划分是一个 δ-鲁棒的极大划分。

首先假设估值是贪婪的。在整个构造过程中，长度可以是任意非负数，元组也不必是可行的。我们使用定义 3.10中定义的估值扩展来评估各份额。因此，对于每个代理人，每份份额的价值关于其长度连续且严格递增，长度为零时价值为零，并且随着长度增加而趋于无穷。对于这些辅助元组，我们对 w_{ij} 和 W_j 使用相同的公式。

命题3.12。 对于每个$(\ell_1, \ell_2, \ell_3) \in \mathbb{R}^3_{\geq 0}$，都存在唯一的非负长度 $\alpha_4(\ell_1, \ell_2, \ell_3)$，使得

$$W_4\big(\ell_1, \ell_2, \ell_3, \alpha_4(\ell_1, \ell_2, \ell_3)\big) = c.$$

函数 α_4 关于每个自变量都连续且严格递增。

证明。 固定$\mathbf{u} = (\ell_1, \ell_2, \ell_3)$。在 $\ell_4 = 0$处，对每个代理人而言，份额 P_4 的价值都为零，因此 $w_{i4} \leq 1/4$，从而$W_4(\mathbf{u}, 0) \leq c$。当 $\ell_4 \to \infty$时，对每个代理人而言，它的价值趋于无穷大，而其他份额的价值保持不变，因此 $W_4(\mathbf{u}\ \ell_4) \to 5$。由连续性和介值定理可得一个权重为 c的长度；而 ℓ_4 中的严格递增性保证了唯一性。对于固定的 ℓ_4，增加$\mathbf{u}$ 中的任一坐标都会严格降低$W_4(\mathbf{u}\ \ell_4)$。因此， $\alpha_4(\mathbf{u})$关于 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3严格递增。

为证明连续性，令 $r = \alpha_4(\mathbf{u})$。对于每个 $\beta > 0$，都有 $W_4(\mathbf{u}\ r+\beta) > c$。当输入 $\mathbf{u}'$ 充分接近 $\mathbf{u}$ 时，这个严格不等式仍然成立，从而得到 $\alpha_4(\mathbf{u}') < r+\beta$。如果 $r > 0$，我们还可以选择 $0 < \beta < r$并利用 $W_4(\mathbf{u}\ r-\beta) < c$，从而对邻近输入得到 $\alpha_4(\mathbf{u}') > r-\beta$。如果 $r = 0$，则由非负性提供下界。这些界证明了连续性，包括在零解处的连续性。 □

命题 3.13。 存在一个连续函数 $\mathbf{x}\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}^4_{\geq 0}$，使得 $x_1(s) = s$ 且 $W_j(\mathbf{x}(s)) = c$对于每个 $s \geq 0$ 和 $j \in [4]$ 均成立。此外，$\mathbf{x}(0) = (0, 0, 0, 0)$，并且当 $s \to \infty$ 时，每个坐标都严格递增并趋于无穷大。

证明。 首先，在保持 $W_4 = c$ 的同时选择第三段的长度。定义

$$F_3(\ell_1, \ell_2, t) = W_3\big(\ell_1, \ell_2, t, \alpha_4(\ell_1, \ell_2, t)\big).$$

根据断言 3.12，该函数是连续的。固定 ℓ_1，ℓ_2。增大 t 也会增大 $\alpha_4(\ell_1, \ell_2, t)$，因此 W_1和 W_2 都严格递减。由于 $W_4 = c$ 且权重之和为 5，

$$F_3(\ell_1, \ell_2, t) = 3c - W_1 - W_2,$$

其中右侧的权重是在相同的元组处计算的。因此， F_3 关于 t 严格递增。在 $t = 0$ 处，第三份额的值为零，因此 $F_3 \leq c$。当 $t \to \infty$ 时，对每个代理人而言，其值趋于无穷大，从而迫使 $W_1, W_2 \to 0$。因此 $F_3 \to 3c = 15/4$。由介值定理和严格递增性可知，存在唯一的长度 $\alpha_3(\ell_1, \ell_2)$，使得 $F_3(\ell_1, \ell_2, \alpha_3(\ell_1, \ell_2)) = c$。

固定 t 时，增大 ℓ_1 或 ℓ_2 也会增大 α_4。第三份额保持不变，而其他份额的价值增大，因此其权重严格递减。因此， F_3 对其前两个自变量分别严格递减，而 α_3 对每个自变量都严格递增。前一个断言中的连续性论证同样适用于 F_3，包括零根处的情形，并由此证明 α_3 的连续性。

接下来，对于 $s, t \geq 0$，定义

$$\mathbf{w}_s(t) = \big(t, \alpha_3(s,t), \alpha_4(s, t, \alpha_3(s,t))\big), \qquad F_2(s,t) = W_2\big(s, \mathbf{w}_s(t)\big).$$

这里 $W_3 = W_4 = c$，因此

$$F_2(s,t) = 2c - W_1\big(s, \mathbf{w}_s(t)\big).$$

固定 s 时，$\mathbf{w}_s(t)$ 的三个坐标都随 t 严格递增，因此 W_1 严格递减。于是 F_2 关于 t 严格递增。在 $t = 0$ 处，对于所有代理人， P_2 的值为零，因此 $F_2(s, 0) \leq c$。当 $t \to \infty$ 时，份额 P_2 的价值趋于无穷大，这迫使 $W_1 \to 0$，进而使 $F_2(s, t) \to 2c = 10/4$。由于 F_2 连续，存在唯一的非负 $\alpha_2(s)$，使得 $F_2(s, \alpha_2(s)) = c$。

固定 t 时，增大 s 会增大第一、第三和第四段的长度，而第二段的长度保持不变。因此， $F_2(s, t)$ 严格递减。于是 α_2 严格递增，前面的连续性论证适用于 α_2。

现在我们可以设定

$$\mathbf{x}(s) = \big(s, \mathbf{w}_s(\alpha_2(s))\big).$$

根据构造，$W_2 = W_3 = W_4 = c$，并且由和为常数可知 $W_1 = c$。$\mathbf{x}$ 的所有坐标都是连续且严格递增的。在输入为零时，上述选取的每个根均为零，因此$\mathbf{x}(0) = (0, 0, 0, 0)$。

最后，$x_1(s) = s \to \infty$。如果另一个坐标 $x_j(s)$ 在 $s \to \infty$ 时仍有界，那么对每个代理人而言，其份额的价值都会保持有界，而第一份额的价值则趋于无穷大。此时，权重公式将对每个代理人给出 $w_{ij} \to 0$，这与 $W_j = c$ 矛盾。由于每个坐标都是递增的，因此每个坐标都必须趋于无穷大。 □

现在我们来恢复可行性。根据命题 3.13，函数 $x_1(s)+x_2(s)$ 和 $x_3(s)+x_4(s)$ 连续、严格递增，在 $s = 0$处为零，且无界。因此存在唯一的 s_L，$s_R \geq 0$ 使得

$$x_1(s_L) + x_2(s_L) = m, \qquad x_3(s_R) + x_4(s_R) = 1 - m.$$

令 $s^* = \min\{s_L, s_R\}$ 和 $\boldsymbol{\ell}^* = \mathbf{x}(s^*)$。由单调性可得

$$\ell_1^* + \ell_2^* \leq m, \qquad \ell_3^* + \ell_4^* \leq 1 - m,$$

其中至少一个等号成立。因此，$\boldsymbol{\ell}^*$ 是最大可行的，且四个权重都等于 c。这也涵盖了$m = 0$ 和 $m = 1$，对于它们，$s^* = 0$。

最后，我们去掉饥饿性假设。对于 $\eta \in (0,1)$，将区间上的每个估值 $[a, b] \subseteq [0, 1]$ 替换为

$$v_i^\eta(a, b) = (1 - \eta)v_i(a, b) + \eta(b - a).$$

这些估值是贪婪的，因此上述构造给出了一个极大可行元组，其四个对应的权重均等于 c。极大可行元组的集合是闭且有界的。因此，我们可以沿着一个使这些元组收敛到极大可行元组的序列令 $\eta \to 0$ $\boldsymbol{\ell}^*$。由于 $|v_i^\eta(a, b) - v_i(a, b)| \leq \eta$ 在蛋糕的每个区间上，原估值及权重公式均具有连续性，因此 $W_j(\boldsymbol{\ell}^*) = c$ 对每个 $j \in [4]$都成立。应用引理 3.9 即可完成证明。 □

引理 3.14。假设估值 v_i 是贪婪的。那么，对于任意 $m \in [0, 1]$，都存在一个鲁棒的极大可行元组 $(\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4)$。

证明。为证明这一点，我们可以使用引理 3.11 以及类似于[30]中的标准紧致性论证。根据引理 3.11，对于每个 $n \in \mathbb{Z}_+$，存在一个极大可行元组 $\boldsymbol{\ell}^n$，该元组是 $\frac{1}{n}$-鲁棒的。由紧致性可知，存在一个子序列（$\boldsymbol{\ell}^{n_k}$），其收敛到元组 $\boldsymbol{\ell}^*$。由于可行性和极大性由弱不等式定义，$\boldsymbol{\ell}^*$ 是一个可行的极大元组。对于每个元组 $\boldsymbol{\ell}^{n_k}$，我们可以构造（$1/n_k$）-偏好图 G_{1/n_k}（$\boldsymbol{\ell}^{n_k}$）。注意，具有五个代理顶点和四个物件顶点的二分图只有有限种可能。因此，必然存在一个进一步的子序列 $n_{k_r} = p$，使得对于每个元组 $\boldsymbol{\ell}^p$，$G_{1/p}$（$\boldsymbol{\ell}^p$）对于所有 p都是相同的。将该图记为 G。

由于每个 $\boldsymbol{\ell}^p$ 都是 $1/p$-鲁棒的，引理 3.4 的条件对 G成立。现在，考虑G中的一条边（i，P_j），根据连续性：

$$v_i(P_j^*) = \lim_{p\to\infty} v_i(P_j^p) \geq \lim_{p\to\infty} \left(\max_{t\in[4]} v_i(P_t^p) - \frac{1}{p}\right) = \max_{t\in[4]} v_i(P_t^*).$$

因此，边（i，P_j）存在于 G_0（$\boldsymbol{\ell}^*$）中，因此 G 是 G_0（$\boldsymbol{\ell}^*$）的子图。每个图 $G_{1/i}$（$\boldsymbol{\ell}^i$）都满足引理3.4 的匹配条件。因此，G 也满足。由于 G 是 G_0（$\boldsymbol{\ell}^*$）的子图，G_0（$\boldsymbol{\ell}^*$）也满足。因此，$\boldsymbol{\ell}^*$ 是鲁棒的。 □

引理 3.15。假设估值是贪婪的。对于任意 $m \in [0, 1]$，至多存在一个鲁棒的极大可行元组 $(\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4)$。

证明。为导出矛盾，假设存在两个不同的此类元组 $\boldsymbol{\ell}$ 和 $\boldsymbol{\ell}'$。不失一般性，存在 $i \in [4]$ 使得 $\ell_i > \ell'_i$（否则交换 $\boldsymbol{\ell}$ 和 $\boldsymbol{\ell}'$）。但此时，也必定存在某个 $j \in [4]$ 使得 $\ell_j \leq \ell'_j$。事实上，不可能对所有 $k \in [4]$ 都有 $\ell_k > \ell'_k$，因为那样一来，$\boldsymbol{\ell}$ 和$\boldsymbol{\ell}'$ 就不可能同时是极大可行的。

因此，我们已经论证集合 $S := \{i \in [4] : \ell_i > \ell'_i\}$ 满足 $1 \leq |S| \leq 3$。现在，令 A 表示在由 $\boldsymbol{\ell}'$描述的划分中，在 S 中有最偏好份额的代理人集合。由于 $\boldsymbol{\ell}'$ 是鲁棒的，我们必有 $|A| \geq |S| + 1$。事实上，如果这样的代理人至多有 $|S|$ 个，那么移除其中一人后，就不可能将 S 中的每个份额分配给偏好它的某个人。与 $\boldsymbol{\ell}'$相比，在对应于 $\boldsymbol{\ell}$的划分中，S 中的份额价值严格增加（因为估值是贪婪的），而 $[4] \setminus S$ 中的份额价值弱下降；这对所有代理人估值都成立。

因此，在划分 $\boldsymbol{\ell}$中，集合 A 中的每个代理人现在都严格偏好 S 中的某个特定份额，而不是 $[4]\setminus S$中的任何份额。这意味着，在 $[4]\setminus S$ 中有最偏好份额的代理人数量至多为$5-|A|\le 5-(|S|+1)=4-|S|$。这与 $\boldsymbol{\ell}$的稳健性矛盾，因为如果$[5]\setminus A$ 中的任何代理人离开，就无法分配 $[4]\setminus S$中的所有份额。 □

引理 3.14 和3.15 可推出以下结论。

命题 3.16。 假设估值是贪婪的。对于任意 $m\in[0,1]$，存在唯一的鲁棒的极大可行元组 $(\ell_1,\ell_2,\ell_3,\ell_4)$ 。

因此，我们可以将每个 $m\in[0,1]$ 与唯一的极大可行鲁棒元组 $\boldsymbol{\ell}^*(m)=(\ell_1^*(m)\ \ell_2^*(m)\ \ell_3^*(m)\ \ell_4^*(m))$ 关联起来。如果上下文中 m 很清楚，我们有时会省略 $\boldsymbol{\ell}^*(m)$ 中的 m，并改写为 $\boldsymbol{\ell}^*$ 。

引理 3.17。 固定任意 $m\in[0,1]$，并假设对于某个 $\gamma\in(0,1)$，估值是 γ-强饥饿的。如果 $(\ell_1,\ell_2,\ell_3,\ell_4)$ 是对于某个 $\delta>0$ 为 δ-鲁棒的极大可行元组，那么

$$|\ell_i-\ell_i^*(m)|\le 3\gamma^{-3}\delta\qquad\forall i\in\{1,2,3,4\}.$$

证明。 令 $(\ell_1^*,\ell_2^*,\ell_3^*,\ell_4^*)$ 表示在 m 处鲁棒的唯一极大可行元组。令 $(\ell_1,\ell_2,\ell_3,\ell_4)$ 为一个 δ-鲁棒的极大可行元组。对 $i\in\{1,2,3,4\}$ 定义 $d_i:=\ell_i-\ell_i^*$。我们要证明 $|d_i|\le 3\gamma^{-3}\delta$。令 I^+ 表示满足 $d_i>0$ 的指标集合 $i\in\{1,2,3,4\}$。注意，我们必有 $|I^+|\le 3$。事实上，若对所有 $i\in\{1,2,3,4\}$ 都有 $\ell_i>\ell_i^*$，则元组 $\boldsymbol{\ell}$ 不可能是极大可行的，因为对 $\boldsymbol{\ell}^*$ 成立的等式所对应的不等式，对 $\boldsymbol{\ell}$ 根本不成立。

当我们从 $\boldsymbol{\ell}^*$ 变为 $\boldsymbol{\ell}$时，对于每一份 $i\in I^+$，它对任意代理人的价值最多增加 d_i，且至少增加 γd_i。这是因为估值具有 1-Lipschitz性，而且它们是γ-强贪婪的。任何其他份额（即任意一份 $i\in\{1,2,3,4\}\setminus I^+$）的价值都可能下降，但对任何代理人而言肯定不会增加。

现在记 $d_{\max}:=\max_{i\in I^+}d_i$，并考虑直线 $[0,d_{\max}]$。区间 $[\gamma d_i,d_i]$, $i\in I^+$ 覆盖了该直线的某些部分。现在我们来论证，这些区间的并集不可能留下一个未覆盖的$[0,d_{\max}]$ 子区间，其长度严格大于 δ 。为导出矛盾，假设存在这样一个区间 (a,b)，其中 $b-a>\delta$，且 $(a,b)\subseteq[0,d_{\max}]\setminus\cup_{i\in S}[\gamma d_i,d_i]$。令 S 表示满足以下条件的指标 $i\in I^+$ 的集合：区间 $[\gamma d_i,d_i]$ 位于未覆盖区间 (a,b) 上方，即 $\gamma d_i\ge b$。注意， $S\neq\emptyset$，因为存在 $i\in I^+$ 使得 $d_i=d_{\max}$。此外，我们还有 $|S|\le 3$，因为 $S\subseteq I^+$。

由于元组 $\boldsymbol{\ell}^*$ 是鲁棒的，因此，当切分点按照 $\boldsymbol{\ell}^*$定位时，至少有 $|S|+1$ 个代理人弱偏好 $\{P_i\}_{i\in S}$ 中的一份额，而非 $\{P_i\}_{i\notin S}$中的任意份额。事实上，如果这类代理人至多有 $|S|$个，那么其中一人离开后，就不可能将 $\{P_i\}_{i\in S}$ 中的每一份额都分配给喜欢它的某个代理人，这与稳健性矛盾。既然已经证明这类代理人至少有 $|S|+1$ 个，我们就用 A 表示这一代理人集合。现在，如果改为按照 $\boldsymbol{\ell}$定位切分点，那么 A 中的代理人对 $\{P_i\}_{i\in S}$ 中某一份额的偏好，较之对$\{P_i\}_{i\notin S}$中任意一份额的偏好，高出超过 δ ，即，

$$\max_{i\in S}v_j(P_i)>\max_{i\notin S}v_j(P_i)+\delta\qquad\forall j\in A.\tag{1}$$

事实上，从 $\boldsymbol{\ell}^*$ 变为 $\boldsymbol{\ell}$时，对于任意代理人，$\{P_i\}_{i\in S}$ 中任意一份额的价值至少增加 b，而 $\{P_i\}_{i\notin S}$ 中任意一份额的价值至多增加 a。由于 $b-a>\delta$，结论 (1) 成立。然而，(1) 与 $\boldsymbol{\ell}$ 的 δ-稳健性矛盾，因为它表明， A 中没有任何代理人能够以至多 δ 的嫉妒程度获得 $\{P_i\}_{i\notin S}$ 中的任何份额。这意味着，至多有 $5-|A|\le 5-(|S|+1)$ 个 $=4-|S|$代理人能够获得 $\{P_i\}_{i\notin S}$中的 $4-|S|$ 份额之一。一旦这些代理人中有人离开， $\{P_i\}_{i\notin S}$ 中就会有某一份额无人分配，这就产生了矛盾。

因此，我们证明了在 $[0,d_{\max}]$中， $\cup_{i\in S}[\gamma d_i,d_i]$ 留下的未覆盖区间长度至多为 δ。由此不难推导出 $d_{\max}$ 的一个上界。事实上，由于 $|S|\le 3$，最坏情况出现在这三个区间 $[\delta,\gamma^{-1}\delta]$、 $[\gamma^{-1}\delta+\delta,\gamma^{-1}(\gamma^{-1}\delta+\delta)]$, 和 $[\gamma^{-1}(\gamma^{-1}(\gamma^{-1}\delta+\delta)+\delta),\gamma^{-1}(\gamma^{-1}(\gamma^{-1}\delta+\delta)+\delta)]$的情形下。这给出了界 $d_{\max}\le\gamma^{-1}(\gamma^{-1}(\gamma^{-1}\delta+\delta)+\delta)\le 3\gamma^{-3}\delta$。

这表明，对所有 $i\in\{1,2,3,4\}$，都有 $d_i\le 3\gamma^{-3}\delta$。要证明 $d_i\ge -3\gamma^{-3}\delta$，考虑由满足 $d_i<0$ 的指标 i 构成的集合 I^-，并使用一个非常相似的论证。 □

引理 3.18。 假设对于某个 $\gamma\in(0,1)$，这些估值是 γ-强饥饿的。那么，函数$m\mapsto(\ell_1^*(m)\ \ell_2^*(m)\ \ell_3^*(m)\ \ell_4^*(m))$是$(13\gamma^{-3})$-利普希茨连续的。

证明。 考虑 $m,m'\in[0,1]$，其中 $|m-m'|=:d>0$。我们的目标是证明，对于所有 $i\in[4]$， $|\ell_i^*(m)-\ell_i^*(m')|\le 13\gamma^{-3}d$。首先，我们证明存在一个元组 $\boldsymbol{\ell}$，它具有以下两个性质：

- 它接近 $\boldsymbol{\ell}^*(m)$，即对于所有 $i \in [4]$，$|\ell_i - \ell_i^*(m)| \le d$，并且
- 在 m'处是最大可行的。

不难看出，这样的元组确实存在。具体而言，只需先对所有 $i \in [4]$设定 $\ell_i := \ell_i^*(m)$，然后稍微移动 ℓ_i，即可恢复 m'处的最大可行性。由于 $|m - m'| = d$且 $\boldsymbol{\ell}^*$ 在 m处是最大可行的，因此只需将每个 ℓ_i 移动至多 d。

现在，由于对所有 $i \in [4]$都有 $|\ell_i - \ell_i^*(m)| \le d$，且 $|m - m'| = d$，因此与由$(m', \boldsymbol{\ell})$定义的划分相比，由$(m, \boldsymbol{\ell}^*(m))$定义的划分中，任意代理人的任意份额的价值最多只会相差 $2d$。这里我们用到了所有估值都是1-利普希茨连续这一事实。由于 $\boldsymbol{\ell}^*(m)$在 m处是鲁棒的，因此可知 $\boldsymbol{\ell}$ 在 m'处是 $4d$-鲁棒的。

最后，根据引理 3.17 我们得到 $|\ell_i - \ell_i^*(m')| \le 3\gamma^{-3} \cdot 4d = 12\gamma^{-3}d$。因此，对于所有 $i \in [4]$

$$|\ell_i^*(m) - \ell_i^*(m')| \le |\ell_i^*(m) - \ell_i| + |\ell_i - \ell_i^*(m')| \le d + 12\gamma^{-3}d \le 13\gamma^{-3}d. \qquad \square$$

给定一个锚点 m 和一个可行元组 $\boldsymbol{\ell}$，我们可以定义 6 个份额。我们已经讨论过份额P_1、……、P_4。此外，令 $L = [\ell_1, m - \ell_2]$和 $R = [m + \ell_3, 1 - \ell_4]$。注意，如果 $\boldsymbol{\ell}$是极大的，则 L和 R 中有一个为空。

引理 3.19。假设对于一个锚点 $m \in [0, 1]$，元组 $\boldsymbol{\ell}$ 是可行的、极大的且鲁棒的。假设对于某个代理人 i，份额 L 或份额 R 是该代理人最偏好的份额之一。假设对于所有其他代理人 $i' \neq i$，份额 P_1、……、P_4 中有一个是代理人 i'最偏好的份额。那么，对于五个代理人，存在一个精确无嫉妒完整分配。

证明。根据 $\boldsymbol{\ell}$的极大性，L或 R 必有一个为空。不失一般性，设 L为空。于是，我们可以将份额 R 分配给代理人 i。份额 R 是 i最偏好的份额之一，因此他不会嫉妒任何其他代理人。对于每个其他代理人 $i' \neq i$，P_j 之一是代理人 i'最偏好的份额，因此没有代理人会嫉妒 i。根据 $\boldsymbol{\ell}$的稳健性，存在一种方法，可以将份额 $P_1, \ldots P_4$ 分配给不是 i的代理人，使得没有代理人会嫉妒其他代理人的份额。因此，存在一种无嫉妒分配。$\square$

现在我们可以证明五个代理人情形下无嫉妒划分的存在性了。

定理 1。考虑一个有五个代理人的切蛋糕实例，其估值 v_i 是单调且 *Lipschitz* 连续的。那么，存在一种无嫉妒分配，它将蛋糕完全分配给五个代理人，且各代理人获得的份额均为连续份额。

证明。首先，假设估值 v_i 是 γ-强饥饿的。令 $\boldsymbol{\ell}^*(m)$ 为关于锚点 $m \in [0, 1]$ 鲁棒的极大可行元组。根据引理 3.18，$\boldsymbol{\ell}^*(m)$ 关于 m 是连续的。将份额 $[\ell_1, m - \ell_2]$ 记为 L，将份额 $[m + \ell_3, 1 - \ell_4]$ 记为 R。注意，对于极大 $\boldsymbol{\ell}$，L 和 R 中必有一个为空。对于 $m = 0$，$\boldsymbol{\ell}^*(m) = (0, 0, 0, 0)$。在这种情况下，份额 R 严格优于空份额 P_1、……、P_4、L。对于 $m = 1$，同样有 $\boldsymbol{\ell}^*(m) = (0, 0, 0, 0)$。在这种情况下，份额 L 严格优于其他份额 P_1、……、P_4、R。根据介值定理，必然存在某个值 m^*，使得对于所有代理人 i，份额 R 都不是严格的最偏好份额，而对于某个代理人 i，它是共同最偏好的份额。因此，我们可以应用引理 3.19，推得存在一个将份额 P_1、……、P_4、R 分配给代理人 1、2、……、5 的无嫉妒分配。

现在，我们用标准的紧致性论证去掉 γ-强饥饿性假设。考虑不必满足 γ-强饥饿条件的估值 v_i。对于每个整数 $n \ge 2$，令 $v_i^n(a, b) = (1 - 1/n)v_i(a, b) + (1/n)\max(b - a, 0)$。于是，对于每个 v_i^n，我们都可以计算出一个由 $(m_n, \boldsymbol{\ell}^*(m_n))$ 给出的精确无嫉妒分配。每个分配都将一份额从 $P_1, \ldots, P_4, R$ 映射给代理人 $1, \ldots, 5$。由于这种映射的数量有限，其中一种分配必定会无限次出现。考虑只包含该分配的子序列 m_k。由于 $(m_k, \boldsymbol{\ell}^*(m_k))$ 的可能取值构成一个紧空间，因此存在一个收敛的子序列 $(m_r, \boldsymbol{\ell}^*(m_r))$，当 $r \to \infty$ 时收敛到某个 $(m^*, \boldsymbol{\ell}^*)$。

设 P^* 划分 $(m^*, \boldsymbol{\ell}^*)$ 中份额 P 的区间。对于每个份额 P，设 P^r 其在划分 $(m_r, \boldsymbol{\ell}^*(m_r))$ 中被分配到的区间。于是，$|v_i(P^r) - v_i^r(P^r)| \le 1/r$。此外，给定两个区间 $P = [a, b], Q = [c, d]$ 设 $|P - Q| = |a - c| + |b - d|$。于是，当 $r \to \infty$ 时，对于所有份额 P，$|P^* - P^r| \to 0$。由于 v_i是连续的，$v_i(P^r) \to v_i(P^*)$。因此，由于 $r \to \infty$，$v_i^r(P^r) \to v_i(P^*)$。由于极限保留弱不等式，且无嫉妒性是用弱不等式定义的，因此划分 $(m^*, \boldsymbol{\ell}^*)$ 是无嫉妒的。$\square$

4 五个代理人的高效算法

我们可以利用存在性证明和所建立的工具，提取出一种使用 poly(log(1/ε))次查询的高效算法。

定理 2. 考虑一个切蛋糕实例，其估值函数 v_i *Lipschitz* 连续且单调。那么，对于每个 $\varepsilon > 0$，我们都可以使用 $\mathcal{O}(\log^3(\varepsilon^{-1}))$ 次估值查询，为五个代理人计算一个采用连续份额的 ε-无嫉妒完整分配。

我们的算法以反复使用区间二分为核心。以下标准引理将证明很有用。

引理 4.1. 假设估值 v_i 都是贪婪的。对于给定的 $m \in [0,1]$，假设存在 $\ell_j^* \in (0,\ 1)$，使得对于某个代理人 i 和某个值 x，$v_i(P_j^*) = x$。那么，给定 x，对于任意精度 $p > 0$，都存在一种算法，能在 $\mathcal{O}(\log(1/p))$ 时间内找到一个长度为 ℓ_j 的区间，使得 $|\ell_j - \ell_j^*| \le p$。特别地，我们还可以要求 $\ell_j \le \ell_j^*$。对于这样的 ℓ_j，还有 $|v_i(P_j) - v_i(P_j^*)| \le p$。

证明。利用迭代区间二分即可直接证明。为简化记号，我们考虑 $j = 1$ 的情形。由于 v_i 是严格递增归一化函数，我们知道 $v_i(0,\ 0) = 0 < x < v_i(0,\ 1)$。给定任一区间 $[a, b]$，其中 $v_i(0, a) \le x \le v_i(0, b)$，我们可以求出其中点 $\text{mid} = (a+b)/2$。如果 $v_i([0, \text{mid}]) \le x$，则保留 $[\text{mid}\ \ b]$。否则，保留 $[a, \text{mid}]$。无论哪种情况，区间长度都会减半，同时保持性质 $v_i(0, a) \le x \le v_i(0, b)$。初始时，$a = 0$ 且 $b = 1$。对于任意正精度 $p > 0$，经过 $\mathcal{O}(\log(1/p))$ 次迭代后，区间长度至多为 p。由于 $\ell_j^* \in [a, b]$，$a \le \ell_j^* \le a + p$。因此，我们可以选择 a 为 ℓ_j。此外，根据 v_i 是 1-Lipschitz 这一事实，$|v_i(0, \ell_j) - v_i(0, \ell_j^*)| \le |\ell_j - \ell_j^*| \le p$。

□

对于固定的 $m \in [0,1]$，存在唯一的极大可行鲁棒元组 $\boldsymbol{\ell}^*(m)$。给定该元组，我们可以轻松计算精确偏好图 $G_0(\boldsymbol{\ell}^*(m))$。我们可以得到一个部分逆命题：给定 T 的 $G_0(\boldsymbol{\ell}^*(m))$ 的生成树，对于每个 $\delta > 0$，我们都可以恢复一个元组 $\boldsymbol{\ell}$，使得 T 是 $G_{3\delta}(\boldsymbol{\ell})$ 的子图。该过程需要在 $1/\delta$ 和 $1/\gamma$ 上进行多对数级查询。

引理 4.2。 假设估值对于某个 $\gamma > 0$ 是 γ-强饥饿的。考虑一个顶点集为 $[5] \sqcup \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ 且固定 $m \in [0,1]$ 的连通二分图 G。令 T 为 G 的生成树。假设存在一个极大可行鲁棒元组 $\boldsymbol{\ell}^*$，使得 T 是精确偏好图 $G_0(\boldsymbol{\ell}^*)$ 的子图。那么，对于任意 $\delta > 0$，我们可以找到一个极大可行 3δ-鲁棒 $\boldsymbol{\ell}$，使得 T 是 $G_{3\delta}(\boldsymbol{\ell})$ 的子图，并使用 $\mathcal{O}(\log(\delta^{-1}\gamma^{-1}) \cdot \log(\delta^{-1}))$ 次查询。此外，$\boldsymbol{\ell}$ 接近 $\boldsymbol{\ell}^*$：

$$|\ell_j - \ell_j^*| \le \delta \qquad \forall j \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

证明。令 T为二分图 G的一棵生成树，其顶点集为 $[5] \sqcup \{P_1, \ldots, P_4\}$。考虑在 T中度至少为 2 的代理顶点 i。那么，要使 T 成为 $G_0(\boldsymbol{\ell}^*)$ 的子图，对于所有与 i相邻的份额 P_j^*，$P_{j'}^*$，必须有 $v_i(P_j^*) = v_i(P_{j'}^*)$。

我们对区间 $[0, m]$ 进行迭代区间二分，以找到合适的 ℓ_1值。对于一个候选值 ℓ_1，执行以下操作。假设对于代理人 i，份额 P_1 和 P_j 在T中相邻。根据定义 3.10 中定义的 v_i 的扩展，总存在 ℓ_j' 使得$v_i(P_j') = v_i(P_1)$。根据引理 4.1，对于所有 $p > 0$，我们可以在 $\mathcal{O}$中用$1/p$的对数时间找到满足条件的 ℓ_j，使得 $\ell_j \le \ell_j'$ 和 $|\ell_j - \ell_j'| \le p$。确定一个候选值 ℓ_j后，我们可以对任意其他份额$P_{j'}$ 执行相同操作，只要存在一个代理人 i'，使得份额 P_1 或 P_j 与 $P_{j'}$相邻。由于 T 是一棵生成树，每个份额都可以通过此过程到达，因此我们构造出一个候选元组 $\boldsymbol{\ell}$。由于区间二分是顺序进行而非嵌套进行的，这可以通过$\mathcal{O}(1/p)$次查询完成。

因此，我们构造出了候选元组 $\boldsymbol{\ell}$。假设 $\ell_1 \le \ell_1^*$。那么，根据 ℓ_j的单调性，我们必有 $\ell_j \le \ell_j^*$。特别是，如果元组 $\boldsymbol{\ell}$ 不可行，ℓ_1 就会超过 ℓ_1^*，因此有 $\ell_1 > \ell_1^*$。反之，假设对于某个 $K > 0$，$\ell_1 \ge \ell_1^* + K$。那么，根据 γ-强贪食性，$v_i(P_1) \ge v_i(P_1^*) + K\gamma$。因此，$v_i(P_j) + p \ge v_i(P_1) \ge v_i(P_1^*) + K\gamma$。至于 ℓ_j^* $v_i(P_j^*) = v_i(P_1^*)$，我们可推出 $v_i(P_j) + p \ge v_i(P_j^*) + K\gamma$。如果 $K\gamma - p \ge 0$，根据 1-Lipschitz 连续性，可得 $\ell_j \ge \ell_j^* + K\gamma - p$。这一论证可以推广：假设 $\ell_j \ge \ell_j^* + K$，且对于某个代理人 i，份额 j、j'是树 T中 i 的邻居。那么，$\ell_{j'} \ge \ell_{j'}^* + K\gamma - p$。由于树中的最大距离为 3，我们可以得出，若$K\gamma - p\gamma^2 - p\gamma - p > 0$，则对于所有份额 P_j、$\ell_j \ge \ell_j^* + K\gamma^3 - p\gamma^2 - p\gamma - p$均成立。由于 $\gamma \le 1$，我们可以将其改写为：$\ell_j \ge \ell_j^* + K\gamma^3 - 3p$。特别地，对于 $K > 3p\gamma^{-3}$，$\boldsymbol{\ell}$ 将不可行，因为 $\boldsymbol{\ell}^*$ 是极大的。这使我们能够进行以下检验。如果 $\boldsymbol{\ell}$ 不可行，则 $\ell_1 > \ell_1^*$。如果 $\boldsymbol{\ell}$ 可行，则 $\ell_1 \le \ell_1^* + 3p\gamma^{-3}$。

利用这一检验，我们可以进行区间二分。令 $p = \delta\gamma^3/6$。我们维护一个可能的 ℓ_1 区间，记作 $[a_1, b_1]$。初始时，$[a_1, b_1] = [0, m]$。我们选取候选值 ℓ_1，即其中点（$a_1 + b_1$）/2。按照证明前文所述，我们构造候选元组 $\boldsymbol{\ell}$。如果 $\boldsymbol{\ell}$ 可行，则令 $a_1 = \ell_1$。如果不可行，则令 $b_1 = \ell_1$。这样可以确保算法每一步都满足 $b_1 \geq \ell_1^*$和 $a_1 \leq \ell_1^* + \delta/2$。经过 $\log(1/p)$ 次迭代后，区间 $[a_1, b_1]$ 的长度为 $p = \delta\gamma^3/6 \leq \delta/2$。于是，$b_1 - a_1 \leq \delta/2$，因此 $a_1 - \delta/2 \leq \ell_1^* \leq a_1 + \delta/2$。这一论证并非只适用于份额 P_1，我们也可以将其用于份额 P_2、P_3、P_4，以求得 a_2、a_3、a_4，使得 $a_j - \delta/2 \leq \ell_j^* \leq a_j + \delta/2$。选取 $\ell_j = a_j - \delta/2$。于是，$\boldsymbol{\ell}$ 是一个可行分配，且满足 $\|\boldsymbol{\ell} - \boldsymbol{\ell}^*\|_\infty \leq \delta$。由于 v_i 均为 1-Lipschitz，且 $\boldsymbol{\ell}^*$ 是鲁棒的，$\boldsymbol{\ell}$ 是 δ-鲁棒的。

最后一步是增加一个 ℓ_j 以恢复极大性。由于 $\boldsymbol{\ell}^*$ 是极大的，因此要么 $\ell_1^* + \ell_2^* = m$，要么$\ell_3^* + \ell_4^* = 1 - m$。特别地，要么 $\ell_1 + \ell_2 \geq m - 2\delta$，要么 $\ell_3 + \ell_4 \geq 1 - m - 2\delta$。如果是第一种情况，我们将 ℓ_2 增加到 $m - \ell_1$。在第二种情况下，我们将 ℓ_3 增加到 $1 - m - \ell_4$。无论哪种情况，长度至多增加 2δ。根据 1-Lipschitz性，P_2 或 P_3 的值相应地至多增加 2δ。因此，该划分是 3δ-鲁棒的。特别地，T 是 $G_{3\delta}(\boldsymbol{\ell})$ 的一棵子树。

至于运行时间，外部区间二分需要 $\mathcal{O}(\log(\delta^{-1}\gamma^{-1}))$ 次查询，内部二分需要$\mathcal{O}(\log(\delta^{-1}\gamma^{-1}))$次查询，总计需要 $\mathcal{O}(\log^2(\delta^{-1}\gamma^{-1}))$ 次查询。 □

由于具有五个代理人和四个份额的二分图数量是常数，并且对于每个图，其生成树数量也是常数，因此此类图的生成树可能数量是常数。这样，我们可以通过遍历这一定数量的生成树来“猜测”正确的生成树。

引理 4.3。假设对于某个 $\gamma > 0$，估值是 γ-强饥饿的。给定任意锚点$m \in [0, 1]$，我们可以计算出一个满足以下条件的最大可行 δ-鲁棒元组 $(\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4)$

$$|\ell_j - \ell_j^*(m)| \leq \delta \qquad \forall j \in \{1, 2, 3, 4\}$$

使用 $\mathcal{O}(\log^2(\delta^{-1}\gamma^{-1}))$ 次针对估值函数的价值查询。

证明。我们可以直接应用引理 4.2。对于每个 $m \in [0, 1]$，存在一个最大鲁棒可行划分 $\boldsymbol{\ell}^*$。该划分定义了一个偏好图 $G_0(\boldsymbol{\ell}^*)$，并带有一棵生成树 T。根据引理 4.2，给定T，对于任意 $p > 0$，我们可以计算出 $\boldsymbol{\ell}$，使得 $\boldsymbol{\ell}$ 是 $\mathcal{O}$ 中的一个 $3p$-鲁棒划分，并且所需时间为 $p^{-1}(\log(p^{-1}\gamma^{-1}))$。具有 5 个代理顶点和 4 个物件顶点的二分图中的树数量 T 是常数。因此，我们在这一定数量的生成树上运行该算法，并高效地验证一个分配是否为$3p$-鲁棒。由此，我们必定能够找到一个 $3p$-鲁棒划分。根据引理 3.17，这意味着对于所有 $j \in [4]$，$|\ell_j - \ell_j^*(m)| \leq 9p\gamma^{-3}$。通过设置 $p = \gamma^3\delta/9$，我们可以找到 ℓ_j，使得 $|\ell_j - \ell_j^*(m)| \leq \delta$，所需时间为$\mathcal{O}(\log^2(\delta^{-1}\gamma^{-1}))$。 □

给定一个锚点 $m \in [0, 1]$，我们可以高效地计算一个极大的 δ-鲁棒元组 $\boldsymbol{\ell}$。我们可以将其用作子程序，以找到一个 ε-无嫉妒划分。对于给定的元组 $\boldsymbol{\ell}$，令 L 表示份额 $[\ell_1, m - \ell_2]$，并令 R 表示份额 $[m + \ell_3, 1 - \ell_4]$。注意，在极大划分中，L 和 R 中至少有一个为空。正如我们在定理 1的证明中所论证的，必然存在 m^* 使得 $\boldsymbol{\ell}^*(m^*)$ 是一个精确无嫉妒分配。利用 Lipschitz 连续性和 γ-强饥饿性，我们可以复现这一论证，从而找到一个近似无嫉妒划分。

引理 4.4。假设对于某个 $\gamma > 0$，估值具有 γ-强饥饿性。对于每个 $\varepsilon > 0$，我们可以使用 $\mathcal{O}(\log^3(\varepsilon^{-1}\gamma^{-1}))$次估值查询，为五个代理人计算一个具有连续份额的 ε-无嫉妒完全划分。

证明。我们首先通过区间二分计算一个合适的 m。我们维护一个可能的 m 区间，记为 $[a, b]$。初始区间为 $[0, 1]$。在每次迭代中，我们选取中点 $m =$ （$a + b$）作为候选值m /2。对于候选值 m，我们计算 $\boldsymbol{\ell}$，使得 $\|\boldsymbol{\ell} - \boldsymbol{\ell}^*$（$m$）$\|_\infty \leq \varepsilon/12$。根据引理 4.3，这可以通过 $\mathcal{O}(\log^2(\varepsilon^{-1}\gamma^{-1}))$ 次查询完成。如果存在某位代理人 i，使份额 R 是其最偏好份额之一，则设定 $a = m$。否则，设定 $b = m$。

我们可以在经过 $\mathcal{O}(\log(\varepsilon^{-1}\gamma^{-1}))$ 次查询后确保 $|a - b| \leq \varepsilon\gamma^3/(13 \cdot 12)$。但是，根据引理 3.18，$\boldsymbol{\ell}^*(m)$ 是 $13\gamma^{-3}$-Lipschitz 连续的。因此，$\|\boldsymbol{\ell}^*(a) - \boldsymbol{\ell}^*(b)\|_\infty \leq \varepsilon/12$。令 $\boldsymbol{\ell}_a$ 为为 a 计算出的元组，$\boldsymbol{\ell}_b$ 为为 b 计算出的元组。根据我们先前的构造，$\|\boldsymbol{\ell}_a - \boldsymbol{\ell}^*(a)\|_\infty \leq \varepsilon/12$，且 $\|\boldsymbol{\ell}_b - \boldsymbol{\ell}^*(b)\|_\infty \leq \varepsilon/12$。根据三角不等式，$\|\boldsymbol{\ell}_a - \boldsymbol{\ell}_b\|_\infty \leq \varepsilon/4$。令 P_a 为 $\boldsymbol{\ell}_a$ 中五个非空片段之一，P_b 为 $\boldsymbol{\ell}_b$ 中对应的份额。根据估值函数的 1-Lipschitz性，对于所有代理人 i 以及所有份额 P_a，若其对应份额为 P_b，则 $|v_i(P_a) - v_i(P_b)| \leq \varepsilon/2$。特别地，如果份额 P_a 是最偏好份额

对于划分 ℓ_a 中的代理人 i 而言，那么 P_b 必须是划分 ℓ_b 中最偏好的份额。由于 R 是 ℓ_a 中某位代理人 i 的最偏好份额，因此它是 ℓ_b 中代理人 i 的 ε 最偏好份额。

现在我们声称， ℓ_b 是一个 ε-无嫉妒划分。假设区间 R_b 长度为正。那么，我们可以先将份额 R 分配给将其视为最偏好份额的代理人 i 。对于任何代理人来说， R 都不是ℓ_b中的最偏好份额，因此没有代理人会嫉妒 i。根据 ℓ_b 具有 $\varepsilon/12$ 鲁棒性这一事实，可以将份额 P_1、.....、 P_4 分配给代理人 $[5] \setminus \{i\}$，使每位代理人都能从 P_1、.....、 P_4 中获得一个最偏好份额 $\varepsilon/12$。由于 R不是最偏好份额，这就是一个 ε-无嫉妒划分。现在考虑边界情况：在 ℓ_b中， R_b 的长度为0。如果份额 L_b 非空，我们可以将份额 L_b 分配给代理人 i ，从而完全分配蛋糕。份额 L_b的长度严格为正，因此它也是代理人 i的一个 ε-最偏好份额。如果份额 L_b 也为空，那么我们可以将任一空份额分配给代理人 i ，同时保持 ε-无嫉妒性。

查询总数（以及算法的运行时间）为 $\mathcal{O}(\log^3(\varepsilon^{-1}\gamma^{-1}))$。 □

通过一个非常简短的论证，我们可以免除 γ-强贪食性的假设。这样即可证明定理2 并结束算法部分。

定理 2。 考虑一个具有 *Lipschitz* 连续且单调的估值函数 v_i 的切蛋糕实例。那么，对于每个 $\varepsilon > 0$，我们可以使用 $\mathcal{O}(\log^3(\varepsilon^{-1}))$ 次估值查询，为五个代理人计算一个具有连续份额的 ε-无嫉妒完整分配。

证明。 如预备知识中所述，给定一个估值 v_i ，对于任意 $\gamma \in (0,1)$，我们可以通过设置 $v_i'(\ell, r) = (1-\gamma)v_i(\ell, r) + \gamma \max(r-\ell, 0)$，构造一个 γ- 强贪食性估值 v_i'。由于对于所有 $(\ell, r) \in [0,1]^2$，$|v_i(\ell, r) - v_i'(\ell, r)| \leq \gamma$，相对于 v_i' 的任何 δ-无嫉妒分配，都是相对于原始 v_i 的 $(\delta + 2\gamma)$-无嫉妒分配。

因此，我们可以直接应用引理4.4。给定估值 v_i 和目标输入 ε，构造 $\varepsilon/3$-强饥饿估值 v_i' 并搜索一个 $\varepsilon/3$-无嫉妒分配。根据引理4.4，这可以通过 $\mathcal{O}(\log^3(\varepsilon^{-2})) = \mathcal{O}(\log^3(1/\varepsilon))$次估值查询完成。 □

参考文献

[1] Reza Alijani、Majid Farhadi、Mohammad Ghodsi、Masoud Seddighin和Ahmad S. Tajik。《具有最少切割次数的无嫉妒机制》。载于AAAI人工智能会议论文集，第31卷，2017年。doi: 10.1609/aaai.v31i1.10584。[2] Megumi Asada、Florian Frick、Vivek Pisharody、Maxwell Polevy、David Stoner、Ling Hei Tsang和Zoe Wellner。《公平分割以及Sperner型和KKM型结果的推广》。SIAM离散数学杂志，32:591–610，2018年。doi: 10.1137/17M1116210。[3] Haris Aziz和Simon Mackenzie。《适用于四个参与者的离散有界无嫉妒切蛋糕协议》。载于第四十八届年度ACM计算理论研讨会论文集，第454–464页，2016年。doi: 10.1145/2897518.2897522。[4] Haris Aziz和Simon Mackenzie。《适用于任意数量参与者的离散有界无嫉妒切蛋糕协议》。载于IEEE计算机科学基础研讨会论文集，第416–427页，2016年。doi: 10.1109/FOCS.2016.52。URL https://arxiv.org/abs/1604.03655。[5] Julius B. Barbanel和Steven J. Brams。《以最少切割进行蛋糕分配：适用于三个人、四个人及更多人的无嫉妒程序》。数学社会科学，48(3):251–269，2004年。doi: 10.1016/j.mathsocsci.2004.03.006。[6] Siddharth Barman和Pooja Kulkarni。《连通份额无嫉妒蛋糕分配的近似算法》。载于第50届自动机、语言与编程国际学术讨论会，第261卷《莱布尼茨国际信息学会议录》，第16:1–16:19页。Schloss Dagstuhl – 莱布尼茨信息学中心，2023年。doi: 10.4230/LIPIcs.ICALP.2023.16。[7] Steven J. Brams和Alan D. Taylor。《无嫉妒蛋糕分配协议》。《美国数学月刊》，102(1):9–18，1995年。doi: 10.1080/00029890.1995.11990526。[8] Steven J. Brams、Alan D. Taylor和William S. Zwicker。《四人蛋糕分配问题的移动刀解法》。《美国数学学会会刊》，125 (2):547–554，1997年。doi: 10.1090/S0002-9939-97-03614-9。[9] Simina Brˆanzei和Noam Nisan。《切蛋糕的通信复杂度》。载于ACM经济学与计算会议论文集，第525页，2019年。URL https://arxiv.org/abs/1709.09876。[10]Simina Brˆanzei和Noam Nisan。《切蛋糕的查询复杂度》。载于《神经信息处理系统进展》第35卷，第37905–37919页，2022年。doi: 10.52202/068431-2747。URL https://proceedings.neurips.cc/paper_files/paper/2022/hash/f7a7bb369e48f10e85fce85b67d8c516-Abstract-Conference.html。[11] Xiaotie Deng、Qi Qi和Amin Saberi。《无嫉妒切蛋糕的算法解法》。运筹学，60(6):1461–1476，2012年。doi: 10.1287/opre.1120.1116。[12] Paul W. Goldberg、Alexandros Hollender和Warut Suksompong。《连续切蛋糕：困难性结果与近似算法》。《人工智能研究杂志》，69:109–141，2020年。doi: 10.1613/jair.1.12222。[13] Alexandros Hollender和Aviad Rubinstein。《四个参与者的无嫉妒切蛋糕》。《ACM杂志》，72(5):1–54，2025年。doi: 10.1145/3765615。文章34。[14] Alexandros Hollender和Aviad Rubinstein。《四个参与者的无嫉妒切蛋糕》。《ACM杂志》，72(5):34:1–34:54，2025年。doi: 10.1145/3765615。[15] Alexandros Hollender、Gilbert Maystre和Kilian Risse。《关于切蛋糕与曲线交叉》，2026年。URL https://arxiv.org/abs/2606.13980。arXiv:2606.13980。[16] Yasushi Kawase、Bodhayan Roy和Mohammad Azharuddin Sanpui。《具有可加价值函数的连续无嫉妒切蛋糕问题的PPAD完全性》，2026年。URL https://arxiv.org/abs

/2610.19690. arXiv:2610.19690, 第2版。

[17] Simon Mackenzie 和 Mashbat Suzuki。《具有多项式期望查询次数的精确无嫉妒切蛋糕》，2026年。网址：https://arxiv.org/abs/2610.28535。arXiv:2610.28535。[18] Simon Mackenzie 和 Mashbat Suzuki。《几乎确定连通无嫉妒切蛋糕复杂性》。arXiv预印本 arXiv:2611.20890，2026年。[19] Fr´ed´eric Meunier 和 Francis Edward Su。《Sperner引理与Fan引理的多标记版本及其应用》。《SIAM应用代数与几何杂志》，3(3):391–411，2019年。doi: 10. 1137/18M1192548。[20] Gaiane Panina 和 Rade ˇZivaljevi´c。《有龙在场时的无嫉妒划分》，2022年。网址：https://arxiv.org/abs/2112.12969。arXiv:2112.12969，第2版。[21] Ariel D. Procaccia。《切蛋糕算法》。载于 Felix Brandt、Vincent Conitzer、Ulle Endriss、J´erˆome Lang 和 Ariel D. Procaccia 编，《计算社会选择手册》，第311–330页。剑桥大学出版社，2016年。doi: 10.1017/CBO9781107446984.014。[22] Alexandros Psomas。《切分供人类食用的蛋糕：一种基础的 n代理人切蛋糕协议》，2026年。网址：https://arxiv.org/abs/2610.30370。arXiv:2610.30370。[23]Jack M. Robertson 和 William A. Webb。《近似精确且无嫉妒的蛋糕分配》。《Ars Combinatoria》，45:97–108，1997年。网址：https://combinatorialpress.com/ars-articles/volume-045-ars-articles/near-exact-and-envy-free-cake-division/。[24] Amin Saberi 和 Ying Wang。《为五人切蛋糕》。载于《信息管理中的算法问题》，计算机科学讲义第5564卷，第292–300页。Springer，2009年。doi: 10.1007/978-3-642-02158-9 25。[25] Erel Segal-Halevi、Avinatan Hassidim 和 Yonatan Aumann。《浪费带来迅速：采用自由处置的无嫉妒切蛋糕有界时间算法》。《ACM算法汇刊》，13 (1)，2016年。doi: 10.1145/2988232。文章12。[26] Hugo Steinhaus。《公平分割问题》。《Econometrica》，16(1):101–104，1948年。[27] Walter Stromquist。《如何公平地切蛋糕》。《美国数学月刊》，87(8):640–644，1980年。doi: 10.1080/00029890.1980.11995109。[28] Walter Stromquist。《无法通过有限协议找到无嫉妒的蛋糕划分》。《组合电子期刊》，15(1):R11，2008年。doi: 10.37236/735。研究论文R11。[29] Francis Edward Su。《租赁和谐：公平分割中的Sperner引理》。《美国数学月刊》，106(10):930–942，1999年。doi: 10.1080/00029890.1999.12005142。[30] Francis Edward Su。《租赁和谐：公平分割中的Sperner引理》。《美国数学月刊》，106(10):930–942，1999年。doi: 10.1080/00029890.1999.12005142。[31] Gerhard J. Woeginger 和 Jiˇr´ı Sgall。《切蛋糕的复杂性》。《离散优化》，4(2):213–220，2007年。doi: 10.1016/j.disopt.2006.07.003。[32] D. R. Woodall。《公平地分蛋糕》。《数学分析与应用杂志》，78(1):233–247，1980年。doi: 10.1016/0022-247X(80)90225-5。[33] Qilin Ye 和 Yannan Bai。《削减高塔：单指数无嫉妒切蛋糕》，2026年。网址：https://arxiv.org/abs/2609.05191。arXiv:2609.05191，第2版。