arXiv:2611.33152v1 [math.CT] 24 Nov 2026

Knop 插值范畴中的阿贝尔包络与量子群

JOHANNES FLAKE 和 PETER MADER

Abstract. 我们证明，Knop 张量包络的大类子范畴都存在阿贝尔包络。因此，这些阿贝尔包络对应于其母插值范畴中的群，或更一般地说，霍普夫代数（“量子群”）。作为一个特例，我们得到，Flake–Maassen（2022）意义下所有所谓群论型易量子群的插值范畴，其阿贝尔包络均由对称群的 Deligne 插值范畴中的量子群给出。同样，我们将这一理论应用于缠绕积、有限一般线性群和有限仿射群的插值范畴。我们的主要技巧是利用 Knop 范畴所依据的关系演算，显式构造与坐标代数相对应的对象。

1. Introduction

一个张量范畴是一个阿贝尔范畴，带有满足若干自然公理的张量积；例如，有限群或代数群的表示范畴就符合这些条件。事实上，这些例子可以重新诠释为一种组织原则：对于任意对称张量范畴$\mathcal{C}$，到$\mathcal{C}$ 的对称张量函子，根据 Tannakian 重构理论，都等价于在适当的一般意义下内在于$\mathcal{C}$ 的群。对于任意群，相应的张量范畴由其表示范畴给出。更一般地说，某类不一定对称的函子对应于内在于$\mathcal{C}$ 的霍普夫代数及其余模范畴。本着 [Dri87]，的思想，我们将这些称为内在于$\mathcal{C}$ 的量子群及其表示。[1]

Deligne 提出的一个深刻定理 [Del02] 表明，在零特征的代数闭域上，一大类张量范畴由向量空间范畴或超向量空间范畴中的一个群内对象给出。这类范畴正是那些张量幂的（复合）长度至多呈指数增长的对称张量范畴。因此，要研究超出 Deligne 定理范围的张量范畴，就必须转向正特征或超指数增长，而这两个方向都已发展成为活跃的研究领域。

在零特征中具有超指数增长的张量范畴里，一个重要类别是

Knop 插值范畴，也称为*Knop* 张量包络[Kno07]。这些张量范畴是通过对正则范畴$\mathcal{A}$的关系演算进行线性化而定义的。对于每个$\mathcal{A}$，都会构造一族范畴$\mathcal{T}(\mathcal{A}\ \delta)$，并以参数

[1]注意，　量子群一词也可以指许多其他事物，例如量子化的宇宙包络代数代数。

所谓的度函数 δ 来控制线性化。范畴$\mathcal{T}(\mathcal{A}\ \delta)$通常是张量范畴的一般非阿贝尔版本，称为伪张量范畴。对于适当的$\mathcal{A}$，它们在 δ几乎所有（一般）取值下都是半单张量范畴，而在其余（特殊）取值下则存在半单商张量范畴 δ。由于这些半单商可以识别为有限群的表示范畴，因此可以将$\mathcal{T}(\mathcal{A}\ \delta$视为相应有限群族的插值范畴。例如，当$\mathcal{A}$ 为有限集合的对偶范畴时，通过 Knop 的构造可以得到对称群的 Deligne 插值范畴 Rep(S_t) [Del07]。

请注意，除了重构 Rep(S_t) 之外，Knop 插值范畴还与 Harman–Snowden 基于原拟拟紧群构造的张量范畴密切相关[HS24]，这项工作由 Snowden 完成 [Sno24]，正如我们在第 3.4 节中所讨论的。

除了在特殊参数 δ 处取半单商之外，还可以考察范畴 $\mathcal{T}(\mathcal{A}\ \delta)$ 是否定义了一个它们可以嵌入其中的普适张量范畴。这引出了阿贝尔包络 [Cou21、BEO23、CEOP23、FLP26]，的概念，而这一概念已经成为张量范畴理论中的核心概念。对于给定的伪张量范畴，判定这样的阿贝尔包络是否存在，并进而构造它，往往是一个困难的问题。

在本文中，我们解决了 Knop 插值范畴中一大类适当子范畴的这一问题。利用关系演算，我们证明这些范畴具有阿贝尔包络，并且这些阿贝尔包络由母插值范畴中的（量子）群通过适当版本的 Tannakian 重构给出。

更具体地说，固定一个特征 0 的代数闭基域，并令 Rel($\mathcal{A}$为固定正则范畴 $\mathcal{A}$ 的关系类别，满足若干假设，其中态射的张量积由积给出，而复合由拉回后取像给出。于是，Knop 的张量包络 $\mathcal{T}(\mathcal{A}\ \delta)$ 是 Rel($\mathcal{A}$) 的线性化，由参数 δ指定。我们在 第 3 节 中定义了 Rel(A) 的一类 群论的 子范畴。每个这样的子范畴 $\mathcal{C}$ 都会生成一个非满伪张量子范畴 $\mathcal{C}_\delta$ of$\mathcal{T}(\mathcal{A}\ \delta)$，并带有一个包含函子 ι。

我们首先证明，C_δ 与 $\mathsf{T}_\delta := \mathsf{T}(\mathsf{A}\ \delta)$ 具有可比较的特殊参数集合 δ。

定理 A (定理3.6)。 $\mathcal{C}_\delta$ 在 $\mathcal{T}_\delta$ 为半单时也是半单的；如果$\mathcal{A}$ 是 *Barr*-正合且 *Malcev* 的，则逆命题也成立。

随后，我们考察 Knop 范畴 T_δ 的阿贝尔包络能够导出子范畴 C_δ 的阿贝尔包络所需的条件。对于 $f\colon\ X \hookrightarrow Y$ in A 中的一个单射，一个 C-秩对象 是一个对象 $R \in \mathsf{A}$，使得存在一个形如 $Y \overset{f}{\hookleftarrow} X \to R$in C 的关系，并且对于所有 $Y \overset{f}{\hookleftarrow} X \overset{\varepsilon}{\twoheadleftarrow} W \to R$ in C 中的关系，态射 ε 是一个同构。

定理 B (命题 3.26，定理 3.27，定理 3.28)。假设基域的特征为0 ，且 $\mathcal{A}$ 中的每个单射都具有一个 $\mathcal{C}$-秩对象。那么函子

$$\mathrm{Ind}(\iota) : \mathrm{Ind}(\mathcal{C}_\delta) \longrightarrow \mathrm{Ind}(\mathcal{T}_\delta)$$

有一个右伴随。此外，若 $\mathcal{T}_\delta$ 具有形如 $\iota(S)$ 且带有$S \in \mathcal{C}_\delta$的全局分裂对象，则 $\mathcal{C}_\delta$ 和 $\mathcal{T}_\delta$ 都存在具有足够多射影对象的阿贝尔包络 $\mathcal{C}_\delta^{\mathrm{ab}}$和 $\mathcal{T}_\delta^{\mathrm{ab}}$，并且 $\mathcal{C}_\delta^{\mathrm{ab}}$等价于一个内在于 $\mathcal{T}_\delta^{\mathrm{ab}}$的（量子）群的表示范畴。

在此，全局分裂对象是一个非零对象，与之作张量积可将任意态射变为可分裂态射。分裂对象在构造阿贝尔包络时发挥着核心作用。根据 [FLP26], 中的一个观察，它们可以沿某些伴随引理 2.8）传递。这使我们能够从所断言的伴随函子的存在性，推导出$\mathcal{C}_\delta$ 的阿贝尔包络存在。反过来，该伴随函子的存在性是通过显式构造一个对象来证明的，该对象是张量单位在伴随函子下的像（命题 3.23）。这一构造归结为对关系演算进行细致分析。

由此可知，所有所断言的阿贝尔包络均存在；根据它们的泛性质，我们得到一个（正合）张量函子$\mathcal{C}_\delta^{\mathrm{ab}} \to \mathcal{T}_\delta^{\mathrm{ab}}$扩张 ι。根据适当版本的 Tannakian 重构（定理 2.11），这个张量函子对应于一个内在于$\mathcal{T}_\delta^{\mathrm{ab}}$的量子群；如果$\mathcal{C}$ 作为 Rel($\mathcal{A}$) 的幺半子范畴是对称的，那么它甚至对应于一个群。我们将在第 4.3 节讨论这些量子群的显式描述。

我们将 定理 B 应用于若干 Knop 范畴，其中 Deligne 范畴 Rep(S_t)（$t \in \mathbb{C}$ ）是主要示例。在这种情况下，范畴 Rel($\mathcal{A}$) 建立在分划图的演算之上。其某些子范畴已在所谓“易量子群”的背景下得到研究和分类（例如参见 [BS09、RW16]）。术语 群论的 源自这一分类。范畴 $\mathcal{C}_\delta$ 对应于文献 [FM21], 中的范畴 Rep($\mathcal{C}$ t)；作者在其中对不可分解对象进行了参数化，并给出了半单性准则，对于群论范畴 $\mathcal{C}$ ，该准则与定理 A一致。

范畴 Rep(S_t) 有一个全局分裂对象 Δ ，它属于$\mathcal{C}$ t对应的范畴 Rep($\mathcal{C}$)，对于无数个群论的分划范畴中的每一个都如此。我们可以应用定理 B 和定理 3.38 ，得到：

定理 C (推论 4.7)。对于每个由划分构成的群论范畴 $\mathcal{C}$ ，伪张量范畴 $\mathrm{Rep}(\mathcal{C}\ t)$ 都有一个足够多投射对象的阿贝尔包络，该包络由一个内在于 $\mathrm{Rep}(S_t)^{\mathrm{ab}}$ 的（量子）群的表示范畴给出。

作为一个具体例子，我们考虑由块大小为偶数的划分构成的子范畴 $\mathcal{C}$ 。它是对称的，我们证明它对应于群概形 $(S_2)^t$，见 Rep(S_t)^{ab}中的命题 4.10。注意，此处 t 不必是整数，而 S_2 的非整数幂则按照 Etingof 的非整数张量幂[Eti14，§§3.2 和 41]来解释。

虽然关系演算 Rel($\mathcal{A}$) 只在范畴等价的意义下依赖于 $\mathcal{A}$ ，但即使将 $\mathcal{A}$ 替换为一个等价范畴，其群论子范畴的类也可能发生变化。我们在第 4.4 节简要探讨将 Rep(S_t) 中的分割演算替换为另一种等价演算所带来的后果；特别是，我们注意到，通过这种方式可以在 Rep(S_t)^{ab} 中得到更多群的例子（例4.11）。

Knop 的构造还为缠绕积 $(G \wr S_n)_{n\geq 0}$（其中 G 是固定的有限群）、一般线性群 $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q))_{n\geq 0}$ 或有限仿射

群 $(\mathrm{Aff}_n(\mathbb{F}_q))_{n\geq 0}$（其中 $\mathbb{F}_q$ 是有限域）构造了插值范畴。构造方法是选取正则范畴 A，分别为有限自由 G-集合范畴 G-FreeFinSet 的对偶范畴、有限维向量空间范畴 $\mathrm{Vect}^{\mathrm{fd}}_{\mathbb{F}_q}$，或非空有限维仿射空间范畴 $\mathrm{Aff}^{\mathrm{fd}}_{\mathbb{F}_q}$；更准确地说，我们选取这些范畴的自然骨架化版本作为 A。我们证明：

定理 *D*（推论 *5.1*，命题 *6.6*）。对于任意 $A \in G\text{-}FreeFinSet^{\mathrm{op}}$、$Vect^{\mathrm{fd}}_{\mathbb{F}_q}$、$Aff^{\mathrm{fd}}_{\mathbb{F}_q}$，在后两种情形下取 $q > 2$，以及 *Rel(A)* 的所有群论子范畴 C，相应的伪张量子范畴 $C_\delta \hookrightarrow T_\delta = T(A\ \delta)$ 都具有足够多射影对象的阿贝尔包络，这些包络由内在于 T^{ab}_δ 的（量子）群的表示范畴给出。

除了运用我们新颖的统一判据确立大量新颖且有趣的阿贝尔包络的存在性（包括 $\mathrm{Rep}(S_t)$ 中不可数多个群论子范畴的阿贝尔包络）之外，我们认为，我们的工作还可为插值范畴中内在的（量子）群理论奠定基础。值得注意的是，Harman–Kalinov 对于 S_t $\mathrm{Rep}(t \notin \mathbb{N}_0)$ 中 [HK20], 简单结合代数的分类——我们认为这是对该理论的另一项贡献——例如并未涵盖我们示例的坐标代数（S_2）^{t}，因为它具有无限长度。

AI 的使用。 我们于2025年12月开始着手这一项目。本文几乎所有结果都是在未使用 AI 的情况下获得的，论文也是手写完成的。我们确实使用了 GPT-6 Astra 来确定 第 2.5 节 中可能已知命题的准确表述和证明；我们无法在文献中找到这些内容的完全相同形式；还用它来寻找 命题 3.33 和 命题 4.10的证明，以及校对最终文稿。特别是，它帮助我们发现并修正了 定义 3.1 中一个微妙的问题。

致谢。J.F. 感谢 David Green、Nate Harman、Thorsten Heidersdorf、Alexander Mang、Andrew Snowden 和 Moritz Weber 提供有益的讨论，其中一些讨论可以追溯到几年前。特别是，J.F. 感谢 Thorsten Heidersdorf 和 Andrew Snowden 指出了 命题 3.32(a) 的内容。J.F. 得到了波恩豪斯多夫数学中心的支持。P.M. 得到了波恩国际研究生院（BIGS）和德国学术奖学金基金会（Studienstiftung des deutschen Volkes）的支持。

Contents

1. 引言 1AI 的使用 4致谢 42. 背景 52.1. 偏交半格与 M¨obius 基 52.2. 张量范畴 62.3. Knop 张量包络 62.4. 伪图示的范畴 7

2.5. Tannakian 重构 83. 群论子范畴 103.1. 秩假设 133.2. M¨obius 基 163.3. 表示对象 173.4. 与寡形群的关系 223.5. 具有一个原子的正则范畴 254. Rep(S_t) 中的群 274.1. 分划范畴 274.2. 阿贝尔包络的存在性 294.3. 量子群的诠释 304.4. FinSet 的其他实现 325. Rep($G \wr S_t$) 中的群 336. Rep(GL_t) 与 Rep(Aff_t) 中的群 35参考文献 38

2. Background

我们固定一个域 $\Bbbk$。

2.1. **偏交半格与 M¨obius 基。** 本小节重复介绍 Knop [Kno07 中§ 7]所给出的关于具有交的偏序集的基本定义和事实。特别地，我们将需要以下概念。

定义 2.1。设 L 为一个偏序集。

(a) 如果对于所有 $u, v \in L$，交 $u \wedge v$ 都存在，则称 L 为一个交半格。(b) 考虑通过添加一个新的最小元 $\varnothing$ 对 $= L \sqcup \{\varnothing\}$ 进行扩张 $L^{\varnothing}$：也就是说，对于所有 $u \in L$，令 $\varnothing < u$。如果 $L^{\varnothing}$ 是一个交半格，则称 L 为一个偏交半格。(c) 如果 L 是一个偏交半格，则其*M¨obius* 代数 $A(L)$ 是以 L 为基的自由 $\Bbbk$-向量空间。基元素 u, $v \in L$ 的乘法定义为：当交存在时为 $u \wedge v$，否则为 0。(d) 如果对于所有 $u \in L$、$v \in M$、$u \leq v$，$u \in M$ 成立，则称子集 $M \subseteq L$ 是 L 中的序理想。

考虑一个有限偏交半格 L 及其 M¨obius 函数 μ_L：它由 $\mu_L(u, v) = 0$（对于 $u \not\leq v$）和 $\sum_{u \leq w \leq v} \mu_L(u, w) = \delta_{u,v}$（对于 $u \leq v$ 属于 L）唯一确定。它产生元素 $x(v) := \sum_{u \leq v} \mu_L(u, v)$ $u \in A(L)$（对于 $v \in L$）。这些元素构成 $A(L)$ 的一组基，称为*M¨obius* 基，其满足吸收性质

$$x(u)v = \begin{cases} x(u) & \text{if } u \leq v, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \quad \text{and} \quad x(u)x(v) = \begin{cases} x(u) & \text{if } u = v, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{1}$$

以下命题是定义的直接推论：

引理 2.2. 设 L 是一个有限偏 *meet*-半格，且 $M \subseteq L$ 是 L 中的一个序理想。那么 M 是一个偏交半格，并且 M ¨ 函数 μ_L、μ_M 在 M 上一致。

引理 2.3（见 [Kno07，引理 7。1]）。 设有一个有限偏 *meet*-半格 L 以及一个函数 $\varphi\colon L \to \Bbbk$，我们将其线性延拓为映射 $\varphi\colon\ A(L) \to \Bbbk$。则

$$\det((\varphi(r \wedge s))_{r,s\in L}) = \prod_{r\in L} \varphi(x(r)),$$

约定当 $\varphi(r \wedge s) := 0$ 在 L 中交不存在时 .

2.2. **张量范畴**。 对我们而言，伪张量范畴 是一个 Hom-有限的 $\Bbbk$-线性加法且幂等完备的刚性幺半范畴，其 End(**1**) $\cong \Bbbk$。 张量范畴 是有限长度阿贝尔伪张量范畴，这恢复了 [EGNO15] 中的概念。对于任意伪张量范畴 $\mathcal{C}$，阿贝尔包络 是一个全忠实嵌入 $\mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{T}$，将其嵌入张量范畴 $\mathcal{T}$，使得对于任意张量范畴 $\mathcal{T}'$，沿此嵌入进行限制会在以下范畴之间诱导出一个等价

$$\mathrm{Fun}^{\mathrm{ex}}(\mathcal{T}, \mathcal{T}') \to \mathrm{Fun}^{\mathrm{faith}}(\mathcal{C}, \mathcal{T}')$$

分别为正合／忠实线性幺半函子。

如果伪张量范畴C中不可分解对象之间的每个非零态射都是同构，那么C是半单张量范畴，也是其自身的阿贝尔包络。

如果C是球形伪张量范畴，我们就可以定义自同态的迹。C中的态射 $f\colon X \to Y$ 称为可忽略的，如果对C中的所有态射 $g\colon Y \to X$，$\mathsf{tr}(fg) = 0$。可忽略态射构成一个张量理想。

命题 2.4。 假设 $\Bbbk$ 是代数闭的，且$\mathcal{C}$ 是定义在 $\Bbbk$上的球形伪张量范畴。那么$\mathcal{C}$ 是半单的，当且仅当所有幂零自同态的迹均为*0*，且可忽略态射的理想为零。

证明。 如果$\mathcal{C}$ 是半单的，则它尤其是阿贝尔的，因此幂零自同态的迹均为0。根据 [AKO02，推论 7.1，7]可忽略态射为零。逆命题见 [EO22，定理 2。6]□

2.3. **Knop 张量包络**。 下文假设 A 是一个子对象有限正则范畴，且终对象 **1** 没有真子对象。[2] 单态射称为单射，极端满态射称为满射。

设 δ 是 $\mathcal{A}$ 上的次数函数，其定义如 [Kno07第 3.1 节], 所述：即一条规则，将固定域 $\Bbbk$ 中的一个值赋给 $\mathcal{A}$ 中的任意满射态射，δ 使同构对应的值为 **1**，且关于复合具有乘法性，并在拉回下保持不变。

在 [Kno07中，§3] Knop 为任意如上所述的（A δ）构造了一个伪张量范畴T（$\mathcal{A}$ δ），其含义见第 2.2 节。每个对象 $X \in \mathcal{A}$ 都会在$\mathcal{T}$（$\mathcal{A}$ δ）中产生一个对象

[2]此处我们采用 Knop 关于正则性的约定，见 [Kno07，§ 2]：添入一个新的绝对始对象 $\varnothing$ 后，即得到通常意义下的有限完备正则范畴。$\mathcal{A}$ 中不存在的纤维积由 $\varnothing$给出。空关系在线性化中对应于零态射。

记为 $[X]$。A 的终对象和 T(A δ) 中的单位对象都记为$\mathbf{1}$。可证明：

定理 2.5 ([Kno07，§ 8])。假设 $\Bbbk$ 的特征为0。若$\mathcal{T}(\mathcal{A}\ \delta)$ 是半单的，则

$$\sum_{X\in \mathrm{sub}(Y)} \mu(X,Y)\delta(X \twoheadrightarrow \mathbf{1}) \neq 0$$

对所有 $Y \in \mathcal{A}$ 均成立，其中 μ 是偏序集 $\mathrm{sub}(Y)$ 的 *Möbius* 函数。若$\mathcal{A}$ 是 *Barr*-正合且满足 *Malcev* 性质，则反向蕴含也成立。

2.4. **伪图示范畴**。以下设 F : C $\to$ D 是线性幺半范畴之间的线性˜ ˜ ˜幺半函子。记 F : C $\to$ D 为 Ind-完备化。

定义 2.6。若对每个对象 $Y \in$ D，都存在某个 $X \in$ C，使其为 $F(X)$ 的直和项，则称函子 F 是占优的。

引理 2.7 ([FLP26，引理 5.7])。 假设 $\mathcal{C}$，$\mathcal{D}$ 是刚性范畴，且 F 是占优的。˜假设存在一个对象 $H \in\mathcal{C}$ 使得

$$\tilde{\mathcal{D}}(\tilde{F}(-),\mathbf{1})|_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}} \cong \tilde{\mathcal{C}}(-,H)|_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$$

˜作为函子 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to$ 向量空间范畴。那么 F 有一个右伴随，将 $\mathbf{1} \mapsto H$映至。

回顾一下，若存在一个（反向平行的）态射 g 使得 $fgf = f$，则称态射 f 可分裂 。若非零对象 X 能分裂 态射 f，则称 $X \otimes f$和 $f \otimes X$均可分裂。全局分裂对象 是指能够分裂给定范畴中所有态射的对象。

˜**引理 2.8**。 假设 $\mathcal{C}$、$\mathcal{D}$ 是刚性范畴，且 F 有一个右伴随 G ，使得 $G(\mathbf{1}_{\mathcal{D}})$有一个非零直和项 $U \in\mathcal{C}$。设 f 是 $\mathcal{C}$ 中的一个态射，且 $S \in \mathcal{C}$ 是一个满足 $S \otimes U \neq 0$的对象。若 $F(S)$ 分裂 $F(f)$，则 $S \otimes U$分裂 f。

˜ ˜证明。 我们将 C $\subseteq$ C，D $\subseteq$ D 视为全子范畴，并将 $H := G(\mathbf{1}_{\mathcal{D}})$ 简写。我们有同构

$$\tilde{\mathcal{C}}(X, G(F(Y))) \cong \tilde{\mathcal{D}}(\tilde{F}(X), F(Y)) \cong \tilde{\mathcal{D}}(\tilde{F}(Y^* \otimes X), \mathbf{1}_{\mathcal{D}}) \cong \tilde{\mathcal{C}}(Y^* \otimes X, H) \cong \tilde{\mathcal{C}}(X, Y \otimes H)$$

˜在 $X \in$C 和 $Y \in$C 中自然，因此得到函子同构 $G(F(-)) = - \otimes H$。

现在考虑一个态射 f : $A \to B$ 属于 C，一个对象 $S \in$ C，以及 D 中 $F(f) \otimes F(S)$ 的一个分裂 g :$F(B) \otimes F(S) \to F(A) \otimes F(S)$，因此它也在 D 中。于是

$$G(g) : B \otimes S \otimes H = G(F(B \otimes S)) \longrightarrow G(F(A \otimes S)) = A \otimes S \otimes H$$

是 $G(F(f \otimes S)) = f \otimes S \otimes H$ 的一个分裂。于是，将 $G(g)$ 对 $B \otimes S \otimes U \to A \otimes S \otimes U$ 作余限制/限制后，得到 C 中 $f \otimes S \otimes U$ 的一个分裂。类似地，利用左右对偶，我们得到自然同构 $G(F(S) \otimes F(A)) \cong S \otimes H \otimes A$。将 G 应用于$F(S) \otimes F(f)$ 的一个分裂，并限制到直和项 $S \otimes U$，即可得到 $S \otimes U \otimes f$ 的一个分裂。□

在 [FLP26，§3], 中定义了一类 $\oplus$-伪图示的伪张量范畴。在 [FLP26，§4.2] 中证明了，正如第 2.3 节所回顾的，Knop 张量包络尤其是 $\oplus$-伪图示的。这对我们有如下影响：

定理 2.9。 设 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是伪张量范畴之间的线性幺半函子，满足

(a) $\mathcal{D}$ 是一个 $\oplus$-伪图示的伪张量范畴；*(b)* $\mathcal{D}$ 具有形如 $F(S)$ 的全局分裂对象，其中 $S \in \mathcal{C}$ 为某个对象；*(c)* F 具有一个右伴随 G；*(d)* $\mathbf{1}$ 是 $G(\mathbf{1}_{\mathcal{D}})$中的一个直和项。

那么， S 是$\mathcal{C}$中的一个全局分裂对象；$\mathcal{C}$ 和$\mathcal{D}$ 具有带足够多的投射对象的阿贝尔包络，并且 F诱导出一个张量函子 $F^{\mathrm{ab}}\colon \mathcal{C}^{\mathrm{ab}} \to \mathcal{D}^{\mathrm{ab}}$。

证明。 由(b)、(c)和(d)并利用引理 2.8，可得C 的分裂对象存在。

˜记 $H = G(\mathbf{1}_{\mathcal{D}})$，并令 η 为伴随单位。由伴随关系，C$(\mathbf{1}, H) \cong$D$(\mathbf{1}_{\mathcal{D}}, \mathbf{1}_{\mathcal{D}}) = \Bbbk$，其中 $\eta_{\mathbf{1}}$ 对应于恒等映射。因此，(d)意味着 $\eta_{\mathbf{1}}$ 是一个分裂单态射。投影公式 $GF(X) \cong X \otimes H$ 将 η_X 与 $X \otimes \eta_{\mathbf{1}}$对所有 $X \in$C 进行恒等识别，因此伴随单位在 C 上自然地分裂。这意味着 F 是忠实的。

考虑伪张量范畴的一种如下正合性条件：任意非零态射 $u\colon U \to \mathbf{1}$ 都是态射（$u \otimes U - U \otimes u$）的余核。根据 $\mathcal{D}$ 的 [FLP26，命题 310]，结合 (a)，此条件成立。我们断言它在$\mathcal{C}$中也成立。

事实上，上述条件等价于对每个 X，序列在 Hom$(-, X)$ 下的像正合：

$$\Sigma_u\colon U \otimes U \xrightarrow{u\otimes U - U\otimes u} U \xrightarrow{u} \mathbf{1} \to 0.$$

单位的分裂使 Hom(Σ_u, X) 成为 Hom$(\Sigma_u, GF(X))$ 的一个缩回。根据伴随，后者同构于 Hom$(F(\Sigma_u)$ $F(X))$；由于 $F(u) \neq 0$，根据 D 中相应的条件，该对象正合。因此 Hom(Σ_u, X) 也正合。

现在， [FLP26，定理 61] 给出了所声称的阿贝尔包络，而阿贝尔包络的泛性质则给出了所断言的函子。□

2.5. **Tannakian 重构**。 我们首先回顾一些与 Tannakian 重构相关的一般性（且可能已为人所知）的思想。由于我们未能在文献中找到完全符合本文应用所需形式的论述，因此将证明一并列出。与此处所述结果类似的结果见 [LM25， § 5.1、定理 6.7 和 6.11、推论 6.19] 以及 [BLV11，推论 5.9]。

设 T、V 为张量范畴，其中 V 是带有编织 c 的对称范畴。设 $F\colon$T $\to$V 是一个张量函子。特别地，这样的函子是正合的，或等价地说，是忠实的.[CEOP23，定理 2.4。1], 其在 Ind 完备化上的延拓 $F\colon$ Ind(T) $\to$ Ind(V) 具有一个˜右伴随 $G\colon$ Ind(V) $\to$ Ind(T) [KS06，推论 8.6。3]。

定义 2.10. F 的中心截面是一个张量函子 $J\colon$V $\to$ T，连同同构 $\gamma_{V,X}\colon J(V) \otimes X \to X \otimes J(V)$，其中这些同构属于 T，并且关于 V 和 T 中的张量积都是自然且相容的，使得

$$FJ \cong \mathrm{Id}_{\mathcal{V}} \quad \text{and} \quad F(\gamma_{V,X}) = c_{V,FX} \quad \text{for all } V, X.$$

具体而言，上述相容性意味着 $\gamma_{V,\mathbf{1}} = \mathrm{id}$, $\gamma_{\mathbf{1},X} = \mathrm{id}$,

$$\gamma_{V,X\otimes X'} = (\mathrm{id}\otimes\gamma_{V,X'})(\gamma_{V,X}\otimes\mathrm{id}), \quad \text{and} \quad \gamma_{V\otimes V',X} = (\gamma_{V,X}\otimes\mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes\gamma_{V',X}).$$

例如，对于有限群 G 及遗忘函子 $\mathrm{Rep}\,G \to \mathrm{Vec}$，中心截面由平凡作用函子给出；代数群的有理表示范畴也类似。

定理 2.11。当且仅当存在一个中心截面时，存在一个霍普夫代数 H，它属于$\mathrm{Ind}(\mathcal{V})$，使得$\mathcal{T}$ $\simeq$余模$_{\mathcal{V}}(H)$ 作为张量范畴与之等价，并且该等价将 F 识别为遗忘函子。

证明。“若”部分由以下观察可知：中心截面由平凡余模函子给出，该函子将任意对象 $V \in$V 映为利用 H 的单位所定义的平凡余作用。

尚需证明“仅若”部分。由 Beck 的（余）单子性，Ind(T) $\simeq$ Comod$^{\mathrm{Ind}(\mathcal{V})}(\tilde{T})$，其中余单子为 $T := FG$。由刚性可知，我们有意义为 [FLP24], 的投影公式同构，参见 [FLP24，推论 3.20]。因此，根据 [BLV11，命题 2.14], （应用于对偶情形），T 是一个霍普夫余单子。中心截面赋予 T 一个幺半余增广，使其与编织相容，意义见 [BLV11，推论 5.9]。因此，由该结果可得 $T \simeq H \otimes -$，其中 $H := T(\mathbf{1})$ 是 Ind(V) 中的一个霍普夫代数。转至刚性（或紧）对象即可推出所述结论。□

虽然可以升级定理 2.11 以纳入对霍普夫代数H的描述，但我们将推导出一种在本设定下更为方便的描述。对于张量范畴中的任意对象 X，令 $T(X) = \bigoplus_{i\geq 0} X^{\otimes i}$ 为其在 Ind 完备化中的张量代数。

定理 2.12。假设 F 存在一个中心截面。进一步假设存在一个自对偶对象 $W' \in \mathcal{T}$，使得 $\mathcal{T}$ 中的任意对象都是 W' 的张量幂的有限直和的子商。最后假设 $W := F(W')$ 上存在一个余代数结构 (Δ, ε) 以及一个态射

$$\Delta' \colon W' \to W' \otimes J(W) \ \textit{in}\ \mathcal{T} \quad \textit{such that}\ F(\Delta') = \Delta.$$

令 ψ 为代数映射 ψ' 的伴随对应态射 F 在 ψ 下的像

$$\tilde{F}(T(W')) \cong T(W) \to \mathbf{1}$$

由 ε 在 W上给出，即

$$\psi := \left(T(W) \xrightarrow{\tilde{F}(\mathrm{unit})} \tilde{F}\tilde{G}(T(W)) \xrightarrow{\tilde{F}\tilde{G}((\varepsilon^{\otimes i})_{i\geq 0})} \tilde{F}\tilde{G}(\mathbf{1})\right) \quad \textit{in}\ \mathrm{Ind}(\mathcal{V}).$$

那么 ψ 是一个代数态射，且 H 如定理 *2.11* 中的霍普夫代数与 $T(W)/\ker(\psi)$ 作为双代数同构，其中代数结构由张量代数的代数结构诱导，而余代数结构则由结构态射在 W 上的取值唯一确定，这些取值由 Δ 和 ε规定。

证明。根据 定理 2.11，不妨设 $\mathcal{T}$ =余模$_{\mathcal{V}}(H)$，F 是遗忘函子，G 是余自由余模函子 $X \mapsto {}^{\bullet}H \otimes X$，其中 ${}^{\bullet}H$ 是正则左 H-余模，J 是平凡余作用函子，并且伴随（F，G）具有单位

$$\eta_X = \delta_X \colon X \to {}^{\bullet}H \otimes F(X) = GF(X),$$

其中， δ_X 是 X上的 H 的余作用，对于任意 $X \in$余模$_{\mathcal{V}}(H)$。我们设

$$\alpha := G(\varepsilon)\eta_{W'} \colon W' \to GF(\mathbf{1}) = {}^{\bullet}H, \quad j := F(\alpha) \colon W \to H.$$

设 $\delta \colon W \to H \otimes W$是 W'作为 $\mathsf{Comod}_{\mathcal{V}}(H)$ 中一个对象的余作用。则明确地，

$$j = (\mathrm{id}_H \otimes \varepsilon)\delta.$$

我们断言 $j \colon W \to H$ 是一个余代数态射。事实上， Δ' 是余模态射意味着

$$(\mathrm{id}_H \otimes F(\Delta'))\delta = (\delta \otimes \mathrm{id}_W)F(\Delta').$$

利用 $F(\Delta') = \Delta$ 并与 $\mathrm{id}_H \otimes \varepsilon \otimes \mathrm{id}_W$ 复合，得到

$$\delta = (j \otimes \mathrm{id}_W)\Delta. \tag{2}$$

现在， α 是一个余模态射，而 j 是其在 $\mathcal{V}$ 中的像，结合公式 (2)可得

$$\Delta_H j = (\mathrm{id}_H \otimes j)\delta = (j \otimes j)\Delta,$$

其中， Δ_H 是余乘法，即 H的正则余作用。将 公式 (2) 与 $\varepsilon_H \otimes \varepsilon$复合，得到

$$\varepsilon_H j = \varepsilon.$$

我们已经证明了该断言。

该断言意味着存在唯一的双代数态射 $\phi \colon T(W) \to H$，其在 W 上由 j给出，并且代数 $T(W)$ 上的唯一双代数结构在 W 上由 (Δ, ε) 给出。令 $H' \subset H$ 为 ϕ 的像，则方程 (2) 表明 $\delta(W) \subset H' \otimes W$。由于 W' 按照上述意义生成 T，这意味着对于所有 $X \in \mathsf{T}$，乃至所有 $X \in \mathsf{Ind}(\mathsf{T})$，都有 $\delta_X(X) \subset H' \otimes X$。特别地，对于 $X = {}^{\bullet}H$，

$$H = (\mathrm{id}_H \otimes \varepsilon_H)\Delta_H(H) = (\mathrm{id}_H \otimes \varepsilon_H)\delta_H({}^{\bullet}H) \subset H',$$

即， ϕ 是一个满态射。

由于 F 是（强）幺半结构的，右伴随 G 具有一个规范的松幺半结构，并且单位与余单位变换都是幺半结构的。特别地， ψ' 作为某个代数态射的伴随对应定义，是一个代数态射。由于它在 W' 上由 α 给出，因此它是形如 $T(W') \to G(\mathbf{1})$ 的唯一此类代数态射。特别地， $\psi = F(\psi')$ 是形如 $T(W) \to H$ 且在 W 上为 $F(\alpha) = j$ 的唯一代数态射。因此， $\psi = \phi$，并且 $H \cong T(W)/\ker\ \psi$，正如所断言的。□

3. Group-theoretical subcategories

我们从第2.3节的设定开始：固定$\mathcal{A}$ 为一个小的子对象有限正则范畴。我们假设终对象$\mathbf{1}$ 没有真子对象。设 δ 是$\mathcal{A}$ 上的次数函数，取值于固定的域 $\Bbbk$ ，且该域的特征为 0；再设$\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathcal{A}, \delta)$为相应的伪张量范畴。通过限制允许关系的集合，我们得到$\mathcal{T}$ 的伪张量子范畴；若$\mathcal{T}$存在阿贝尔包络，这些子范畴也可能存在阿贝尔包络。

我们固定 A 的一组原子 G，也就是说，G 中的元素是没有真积分解的非终对象。我们假设 A 中的有限积严格满足结合律和单位律，且其对象恰好是所选取的有限积

$$X_1 \times \cdots \times X_n, \qquad n \geq 0, \quad X_i \in \mathcal{G},$$

其中空积等于 $\mathbf{1}$。因此，每个对象实际上都是这样的一个积。在选择任何子范畴之前，集合 G 及这些积就已确定；G 的不同成员在 A 中可能是同构的。

定义 3.1。 Rel(A) 的一个包含 A 的所有对象的（不一定是满的）子范畴 C，若满足以下条件，则称为群论子范畴：C 对以下运算封闭

（1）形成求值关系和余求值关系：对于任意 $X \in$ G，C 包含 $X \times X \xleftarrow{(\mathrm{id},\ \mathrm{id})} X \to \mathbf{1}$ 和 $\mathbf{1} \leftarrow X \xrightarrow{(\mathrm{id},\ \mathrm{id})} X \times X$。（2）转置：如果 $X \xleftarrow{f} r \xrightarrow{g} Y$ 是 C 中的一个态射，那么其转置 $Y \xleftarrow{g} r \xrightarrow{f} X$ 也属于 C，我们将其记为 r^T。（3）“张量积”：如果 $X \xleftarrow{f} r \xrightarrow{g} Y$ 和 $X' \xleftarrow{f'} r' \xrightarrow{g'} Y'$ 是 C 中的态射，那么 $X \times X' \xleftarrow{f\times f'} r \times r' \xrightarrow{g\times g'} Y \times Y'$ 也属于 C。（4）子关系：如果 $X \leftarrow r \to Y$ 是 C 中的态射，且 $r' \hookrightarrow r$ 是任意子对象，那么 $X \leftarrow r' \to Y$ 也属于 C。（5）张量生成元的自同构：对于每个 $X \in$G 以及所有 $f \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{A}}(X)$，关系 $X \xleftarrow{f} X \xrightarrow{=} X$ 包含于 C 中。

对于 Rel(A) 中的关系集合 R，我们用 $\langle R\rangle_{\mathrm{gt}}$ 表示包含 R 的最小群论子范畴，并称其为由 R 生成的群论子范畴。这个最小子范畴存在：Rel(A) 是群论的，而群论子范畴的交具有相同的不动对象，并满足条件 (1)–(5)。因此，$\langle R\rangle_{\mathrm{gt}}$ 是所有包含 R 的群论子范畴的交。

从现在起，假设 C 是 Rel(A) 的一个群论子范畴。利用 δ，我们可以将 C 线性化，得到一个伪张量范畴 C_δ 和一个忠实线性幺半函子$\iota : \mathsf{C}_\delta \to \mathsf{T}$。形式上：

定义 3.2。 令 C_δ^0 为 T(A δ) 的子范畴，其对象为所有形如 $[X]$的对象，其中$X \in$A；其态射由 C 中关系的线性组合给出。令 C_δ 为 C_δ^0 的加性完备化和幂等完备化。

注记 3.3。 对于 $X = X_1 \times \cdots \times X_n$中的 $X_i \in$G，对象 $[X_n \times \cdots \times X_1]$是$[X]$的对偶。其求值和余求值通过将原子的求值和余求值进行复合与张量积得到。因此，C_δ 具有刚性。从 T 继承的枢轴结构使 C_δ 成为球形范畴，因此我们可以讨论 C_δ中的迹。

备注 3.4. 关于原子的积的假设以及 定义 3.1中的条件 (1)–(3) 使得 $\mathcal{C}_\delta$ 成为 $\mathcal{T}$ 的伪张量子范畴。条件 (4) 和 (5) 确保 $\mathcal{C}_\delta$ 能够充分“看到” $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{T}$ 的结构。特别是，条件 (4) 意味着 $\mathcal{C}_\delta$ 是

半单，只要$\mathcal{T}$ 是（定理 3.6），并且在下文构造 $\mathcal{C}_\delta$ 的阿贝尔包络时需要这一点。

注 3.5。 注意，范畴 Rel($\mathcal{A}$) 和 $\mathcal{T}$ 在将 $\mathcal{A}$替换为与之等价的正则范畴时保持不变，但 Rel($\mathcal{A}$) 的群论子范畴类并非如此。事实上，如果 $\mathcal{A}$ 中的两个对象同构，那么它们在 Rel($\mathcal{A}$) 的某个子范畴中可能并不同构。我们将在 第 4 节中探讨这一点，其中 $\mathcal{A}$ 被取为与 $\mathrm{FinSet}^{\mathrm{op}}$ 等价，但不是骨架化的。

定理 3.6。 假设 $\Bbbk$ 是代数闭的。那么，对于所有使 $\mathcal{C}_\delta$ 成为半单的 δ 选择，$\mathcal{T}(\mathcal{A}\ \delta)$ 都是半单的（如 定理 *2.5*所述）。如果 δ 且 $\mathcal{A}$ 是 *Barr*-正合的 *Malcev* 范畴，则这些恰好是半单的选择。

证明。对于对象 $X \in \mathsf{A}$，考虑集合 $\mathsf{C}(X) \coloneqq \mathsf{C}(\mathbf{1}, X) \subseteq \mathsf{sub}(X)$ 以及一个子对象$S \in \mathsf{C}(X)$。根据关于 A 的假设，sub(X) 是一个有限偏交半格，且$S \wedge T = S \times_X T$ 在纤维积存在时成立。由于 C 在粗化下闭合，引理 2.2 断言，sub(S) 和 C(X) 又是偏交半格，并且 Möbius 函数 $\mu_{\mathrm{sub}(S)}$、$\mu_{\mathcal{C}(X)}$ 和 $\mu_{\mathrm{sub}(X)}$ 在 sub(S) 上重合，其中 sub(S) 被视为 S 以下的序理想。

由于$\mathbf{1}$ 没有真子对象，因此 $\mathrm{End}_{\mathcal{C}_\delta}(\mathbf{1}) = \Bbbk$。记 N 为 C_δ 中可忽略态射构成的张量理想。$\mathsf{N} = 0$ 当且仅当对所有 $X \in \mathsf{A}$，双线性型

$$\beta_X : \mathcal{C}_\delta(\mathbf{1}, [X]) \times \mathcal{C}_\delta([X], \mathbf{1}) \to \mathrm{End}_{\mathcal{C}_\delta}(\mathbf{1}) = \Bbbk, \quad (f, g) \mapsto gf$$

对所有 $X \in \mathsf{A}$ 都是非退化的。我们可以将 C(X) 视为 $\mathsf{C}_\delta(\mathbf{1}, [X])$ 和 $\mathsf{C}_\delta([X], \mathbf{1})$ 的一组基；在这组基下，β_X 由 $(S \hookrightarrow X, T \hookrightarrow X) \mapsto \delta(S \wedge T \twoheadrightarrow \mathbf{1})$ 给出。如果交不存在，我们令 $\delta(S \wedge T \twoheadrightarrow \mathbf{1}) = 0$。因此，$\beta_X$ 非退化当且仅当

$$\Omega_X \coloneqq \det(\delta(S \wedge T \twoheadrightarrow \mathbf{1})_{S,T \in \mathcal{C}(X)}) \neq 0.$$

利用引理 2.3和 M¨ Möbius 基的定义，我们计算得

$$\Omega_X = \prod_{S \in \mathcal{C}(X)} \sum_{\substack{T \in \mathcal{C}(X) \\ T \subseteq S}} \mu_{\mathcal{C}(X)}(T, S)\delta(T \twoheadrightarrow \mathbf{1}) = \prod_{S \in \mathcal{C}(X)} \underbrace{\sum_{T \in \mathrm{sub}(S)} \mu_{\mathrm{sub}(S)}(T, S)\delta(T \twoheadrightarrow \mathbf{1})}_{=:\omega_S}.$$

因此，$\mathsf{N} = 0$ 当且仅当对所有 $X \in \mathsf{A}$ 以及所有 $S \in \mathsf{C}(X)$，都有 $\omega_S \neq 0$。将$X = \prod_i X_i$ 写作含 $X_i \in \mathsf{G}$ 的形式，它们的余求值的张量积给出 $\mathsf{C}(\prod_i X_i^{\times 2})$ 中一个与 X 同构的子对象。因此，这等价于对所有 $X \in \mathsf{A}$ 都有 $\omega_X \neq 0$。

现在假设 T(A δ) 是半单的。根据定理 2.5，$\omega_X \neq 0$ 对所有 $X \in \mathsf{A}$ 都成立，因此 N $= 0$。此外，根据命题 2.4，T(A δ) 中所有幂零自同态的迹都为 0。C_δ 和 T(A δ) 中的迹相同，因此命题 2.4 蕴含 C_δ 是半单的。反过来，假设 A 是 Barr-正合且 Malcev 的，并且 C_δ 是半单的。根据命题 2.4，N $= 0$，因此对所有 $X \in \mathsf{A}$，$\omega_X \neq 0$ 都成立。因此，根据定理 2.5，T(A δ) 是半单的。□

如定理 2.9中所述，可以利用适当的幺半群伴随来得出$\mathcal{C}_\delta$的阿贝尔包络存在。

在本节中，我们给出一个条件，在该条件下，函子 ι 或其 Ind 完备化是此类伴随的一部分；等价地，在该条件下，该函子

$$\mathcal{T}(\iota(-),\mathbf{1}) : C_\delta^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Vec} \qquad \text{or} \qquad \tilde{\mathcal{T}}(\tilde{\iota}(-),\mathbf{1}) : \tilde{C}_\delta^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Vec}$$

是可表的，其中波浪号表示 Ind 完备化。

3.1. **秩假设**。 本小节与次数函数 δ 的选择无关，我们只在关系演算 Rel(A) 中进行讨论。回顾一下，在 A 中，满射态射的拉回总是存在的，这解释了本小节中纤维积的存在性。

记号 3.7。 对于 Rel(A) 中的一个关系 $X \xleftarrow{f} r \xrightarrow{g} Y$，记 top($r$) 为子对象 im($f$) $\hookrightarrow X$，记 bot(r) 为子对象 im(g) $\hookrightarrow Y$。对于 A 中的任意子对象 $f\colon\ X \hookrightarrow Y$，关系 $Y \xleftarrow{f} X \xrightarrow{f} Y$ 记作 β_f。

形如 β_f 的关系包含在任意群论子范畴 C 中，因为它们是 Y 上的恒等关系的子关系。在下文中，我们使用相邻书写表示关系的复合（与其他所有态射相同）。

引理 3.8. 设 r, s 是 $\mathcal{C}$ 中的关系，且 $\mathrm{bot}(s) = \mathrm{top}(r)$。

(a) 我们有 $r\beta_{\mathrm{top}(r)} = r = \beta_{\mathrm{bot}(r)}r$。*(b)* 复合 rs 满足 $\mathrm{top}(rs) = \mathrm{top}(s)$, $\mathrm{bot}(rs) = \mathrm{bot}(r)$。

证明。 由复合的定义可得。 □

定义 3.9. 考虑集合 S $= \bigsqcup_{X\in\mathcal{A}}$sub($X$)，它由 A 中对象的所有子对象构成。我们在 S 上定义一个等价关系：$f_1 \sim f_2$ 当且仅当存在一个关系 $r \in$C，使得 top(r) $= f_1$,bot(r) $= f_2$。

注记 3.10. 关系 $\sim$是自反的，因为 $\beta_f \in \mathcal{C}(Y,Y)$ 对所有 $f\colon\ X \hookrightarrow Y$。它是对称的，因为 $\mathcal{C}$ 中的关系在交换两条腿后仍然是关系。由引理 3.8可知它具有传递性。

假设 3.11。 若对每个子对象 $f\colon\ X \hookrightarrow Y$，都存在一个对象 $R_f \in$ C，使得下列条件成立，则称群论子范畴 C $\subseteq$Rel(A) 具有所有秩对象：

(A1) C 中存在一个形式为 $Y \xleftarrow{f} X \to R_f$ 的关系；(A2) 对于 C 中所有形式为 $Y \xleftarrow{f\varepsilon} \cdot \to R_f$ 且 ε 为满射的关系，态射 ε 是同构。

注 3.12。 我们可以将对象 R_f 解释为子对象 $f : X \hookrightarrow Y$的“秩”（相对于 $\mathcal{C}$的选取），也就是说，在某种意义上，它是满足存在关系 $r \in \mathcal{C}(Y, R_f)$ 且 top(r) $= f$的最小对象。在第 4 节至第 6 节的例子中，我们正是这样验证假设 3.11。

引理 3.13。 假设假设 *3.11*，对象 R_f 可以独立于其等价类 $[f]_\sim$中代表元 f 的选择。

证明。 考虑子对象 $f'\colon X' \hookrightarrow Y'$满足 $f' \sim f$，即存在一个关系 $s \in \mathsf{C}(Y,\ Y')$，其形式为 $Y \overset{f}{\hookleftarrow} X \twoheadleftarrow s \twoheadrightarrow X' \overset{f'}{\hookrightarrow} Y'$。我们需要证明，$f$ 的条件 (A1)、(A2) 蕴含 f'相应的条件 (A1')、(A2')。

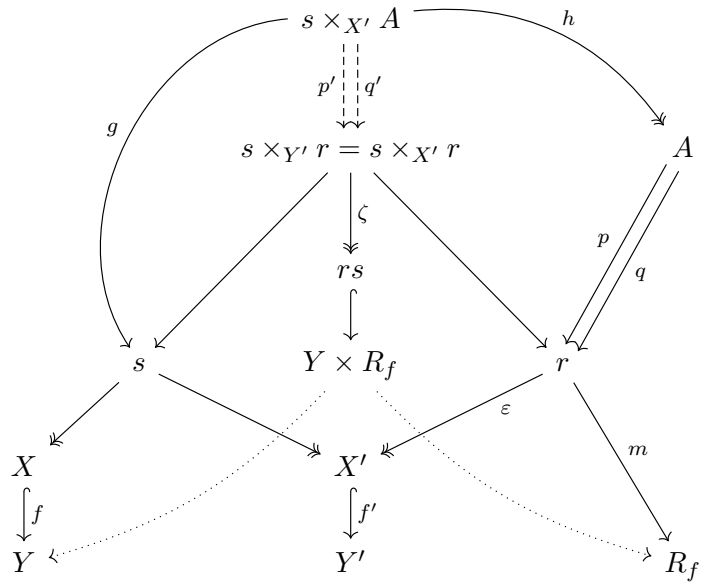
由 (A1)，存在一个形如 $Y \overset{f}{\hookleftarrow} X \to R_f$ 的关系（属于 C）。与 s^T 复合，得到一个形如

$$Y' \overset{f'}{\hookleftarrow} X' \twoheadleftarrow Z \to R_f.$$

It 将由 (A2') 推出 $Z \twoheadrightarrow X'$ 必须是同构，这表明 (A1 ').

为证明 (A2')，考虑关系 $Y' \overset{f'}{\hookleftarrow} X' \overset{\varepsilon}{\twoheadleftarrow} r \to R_f$。我们需要证明 ε 是同构。由于我们在正则范畴中工作，只需证明 ε 是单射。为此，设 $p,\ q\colon A \rightrightarrows r$ 是满足 $\varepsilon p = \varepsilon q$ 的态射。我们需要证明 $p = q$。

考虑复合 rs，并对 $s \twoheadrightarrow X'$ 和 $\varepsilon p = \varepsilon q$ 作拉回。由纤维积 $s \times_{X'} r$ 的泛性质，得到两个诱导态射 $p',\ q'$:



记 $\lambda\colon\ rs \hookrightarrow Y \times R_f \to Y$ 和 $\rho\colon\ rs \hookrightarrow Y \times R_f \to R_f$ 分别为关系 $r \circ s$ 的左腿和右腿。根据 (A2)，λ 是单射，因此

$$\lambda\zeta p' = f(s \twoheadrightarrow X)g = \lambda\zeta q'$$

推出 $\zeta p' = \zeta q'$。因此

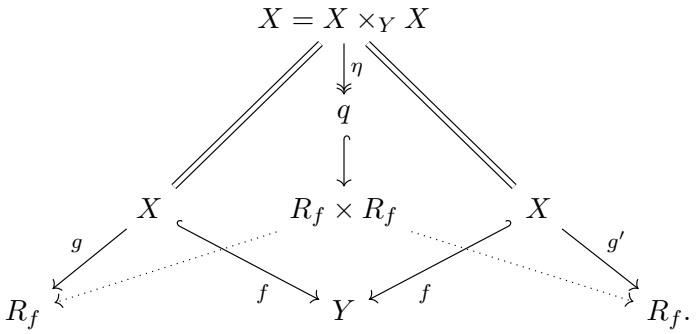
$$mph = \rho\zeta p' = \rho\zeta q' = mqh.$$

态射 h 是一个满射的拉回，因此是满态射，所以 $mp = mq$。此外$f'\varepsilon p = f'\varepsilon q$，并且由于 $f'\varepsilon$ 和 m是联合单射，我们得到 $p = q$。□

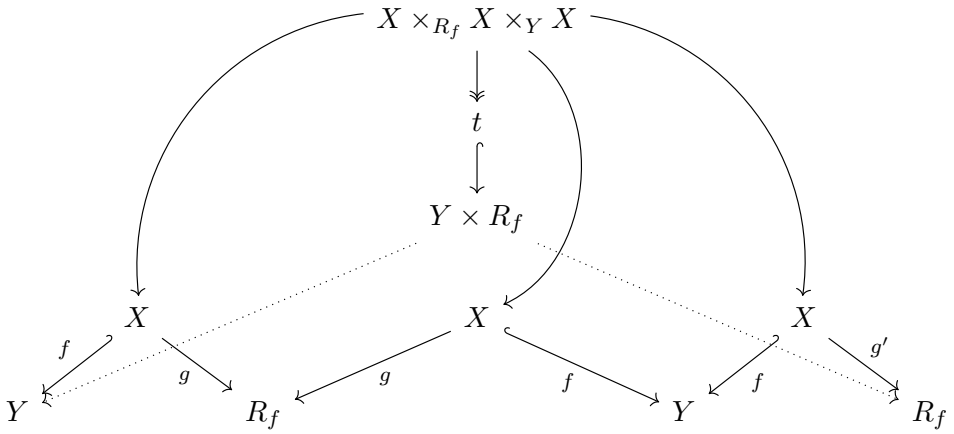
例 3.14。考虑 A 的终对象 $\mathbf{1}$ 以及 $f = \mathrm{id}_{\mathbf{1}} \in S$。于是 R_f 可以取为$\mathbf{1}$。事实上，条件 (A1) 得以满足，因为 C 必须包含 $\mathbf{1} \xleftarrow{=} \mathbf{1} \xrightarrow{=} \mathbf{1}$。对于条件 (A2)，考虑 C 中的一个关系 $\mathbf{1} \xleftarrow{=} \mathbf{1} \xleftarrow{\varepsilon} X \xrightarrow{g} \mathbf{1}$。由 ε 和 g 诱导的映射 $X \to \mathbf{1} \times \mathbf{1} \cong \mathbf{1}$就是唯一的态射 $\varepsilon\colon X \to \mathbf{1}$，且它必须是单射。因此 ε是一个同构。

命题 3.15。假设 假设 *3.11* 并选择秩对象，如 引理 *3.13*所述。令 $f \sim f'$为 $\mathcal{S}$ 中的元素，并记 $f'\colon\ X \hookrightarrow Y$。考虑关系 r其形式为$Y \xhookleftarrow{f'} X \xrightarrow{g} R_f$ 以及 s 其形式为 $Y \xhookleftarrow{f'} X \xrightarrow{g'} R_f$ 于 $\mathcal{C}$中。则存在 $R_f \hookleftarrow q \hookrightarrow R_f$于 $\mathcal{C}$ 中，使得 $\mathrm{bot}(r) = \mathrm{top}(q)$ 以及 $s = qr$。

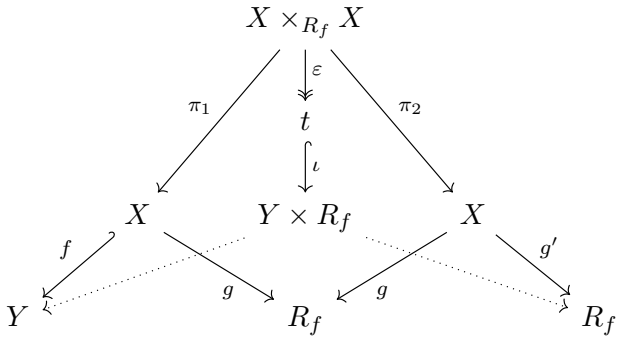
证明。由于 $R_f = R_{f'}$，不妨设 $f = f'$。定义 $q := sr^T$，即作为该关系 n



根据 (A2)，两条腿 $q \hookrightarrow R_f \times R_f \to R_f$ 均为单射。这意味着 g 和 g' 将相同的态射等化：对于所有态射p_1, p_2，我们有 $A \to X$。复合 $qr = sr^T r$ 由下式给出

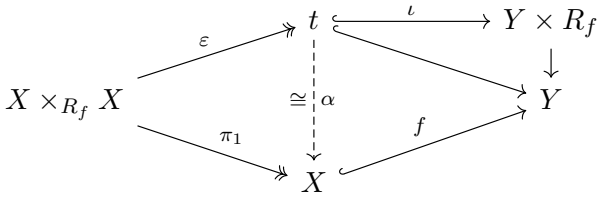


对于 q，沿单射 f 的拉回将图表简化为

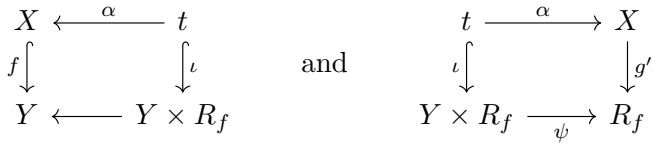


拉回 $X \times_{R_f} X$ over g 是 g的核对，因此两个投影 π_1，π_2 都是满态射。因此，态射 $t \overset{\iota}{\hookrightarrow} Y \times R_f \to Y$的像是 f。由 (A2) 可知，它是单态射。由于像分解是唯一的，我们得到一个同构 $\alpha\colon t \to X$，使下图交换:

(3)



为了证明关系 $Y \hookleftarrow t \to R_f$ 和 s 相同（即它们是$Y \times R_f$的同一个子对象），我们证明下列图表交换:



第一个图表根据 α 的定义交换（见（3））。对于第二个图表，注意我们有 $g\pi_2 = g\pi_1 = g\alpha\varepsilon$。由于 g 和 g' 使相同的态射相等化，我们得到$g'\alpha\varepsilon = g'\pi_2 = \psi\iota\varepsilon$。由于 ε 是满射，$g'\alpha = \psi\iota$ 正如所需。□

3.2. M¨obius 基。

现在我们回到原始范畴 A，不再考虑形式添加的始对象。

固定对象的子对象按包含关系构成偏序；如果一个单射 f' 可通过另一个单射 f 因子分解，我们记作 $f \geqslant f'$。特别地，对于 X，$Y \in \mathsf{C}$，关系集合 $\mathsf{C}(X,\ Y)$（即 X 与 Y 之间的关系）在子对象序下构成偏序。事实上，$\mathsf{C}(X,\ Y)$ 是一个偏交半格。由于 A 是子对象有限的，$\mathsf{C}(X,\ Y)$ 是有限的，因此我们可以考虑 $\mathsf{C}_\delta([X],\ [Y])$ 的 M¨obius 基 $\{x(r) \mid r \in \mathsf{C}(X,\ Y)\}$。

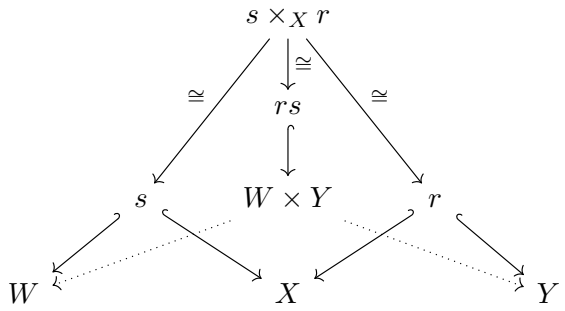
命题 *3.16*。考虑 C 中的关系 $X \hookleftarrow r \hookrightarrow Y$ 和 $C(W,X)$ 中的关系 $s \in$ 。则 $x(r)s = 0$ （属于 C_δ），除非 $\mathrm{bot}(s) \geqslant \mathrm{top}(r)$。如果 s 具有 $W \hookleftarrow s \hookrightarrow X$ 的形式，则当 $\mathrm{bot}(s) = \mathrm{top}(r)$ 时，$x(r)x(s) = x(r)s = x(rs)$；否则，$x(r)x(s) = 0$。

证明。考虑 X 的子对象构成的偏交半格 L 及其莫比乌斯代数$A(L)$。莫比乌斯基 $\{x(f) \mid f \in L\} \subseteq A(L)$的一般吸收性质表明

$$x(f)g = \begin{cases} x(f) & \text{if } g \geqslant f, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \qquad \text{and} \qquad x(f)x(g) = \begin{cases} x(f) & \text{if } g = f, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

对所有 $f, g \in L$均成立。这些性质在代数嵌入 $A(L) \hookrightarrow \mathsf{C}_\delta([X],[X])$ $f \mapsto \beta_f$下得以保留。此外，r和 $\beta_{\mathrm{top}(r)}$ 的粗化格同构，因此$x(r) = rx(\beta_{\mathrm{top}(r)})$。于是，$\mathrm{bot}(s) \not\geqslant \mathrm{top}(r)$蕴含 $x(r)s = rx(\beta_{\mathrm{top}(r)})\beta_{\mathrm{bot}(s)}s = 0$。

若 s 具有 $W \hookleftarrow s \hookrightarrow X$ 的形式，且$\mathrm{bot}(s) = \mathrm{top}(r)$，则我们可以识别 $s \times_X r \cong r \cong s$，复合 rs 由下式给出



因此，$\beta_{\mathrm{top}(r)}$、r和 rs 的粗化交半格彼此均同构，并且 $x(\beta_{\mathrm{top}(r)})$ 是一个幂等元。我们得到

$$x(r)x(s) = rx(\beta_{\mathrm{top}(r)})x(\beta_{\mathrm{bot}(s)})s = rx(\beta_{\mathrm{top}(r)})s = x(r)s = x(rs).$$

另一方面，如果 $\mathrm{bot}(s) \neq \mathrm{top}(r)$，那么 $x(r)x(s) = rx(\beta_{\mathrm{top}(r)})x(\beta_{\mathrm{bot}(s)})s = 0$。 □

3.3. **表示对象**。表示 $\mathcal{T}(\iota(-), \mathbf{1})$ 的对象将为每个等价类 $[f]_\sim \in \mathcal{S}/\!\sim$ 配备一个直和项。下文中，我们假设 假设 3.11，并为每个 R_f 选择一个秩对象 $[f]_\sim$，这可由 引理 3.13保证。我们选择$R_{\mathrm{id}_\mathbf{1}} = \mathbf{1}$ 如 例 3.14所示。

现在，固定一个对象 $X \in \mathsf{C}$，并将 $\mathsf{S}_X = \{f \in \mathrm{sub}(X) \mid R_f = X\}$ 记作。S 上的等价关系 $\sim$ 限制在 S_X上得到等价关系 $\approx$。

引理 3.17。对于 $f \approx f' \in \mathcal{S}_X$，若满足 $f \geqslant f'$，则有 $f = f'$。

证明。记 $f\colon A \hookrightarrow X$和 $f'\colon A' \hookrightarrow X$。条件 $f \geqslant f'$意味着 f'可分解为$A' \hookrightarrow A \overset{f}{\hookrightarrow} X$。由于 $f \approx f'$，存在 C 中的一个关系 $X \leftarrow r \rightarrow X$，其 $\mathrm{top}(r) = f$ 且 $\mathrm{bot}(r) = f'$。根据 (A2)，这两个态射实际上是单射，因此 $A \cong r \cong A'$。

由于 A 是子对象有限的，单射自同态 $A \cong A' \hookrightarrow A$ 是一个同构，并且 f，f' 作为子对象彼此重合。□

引理 3.18。对于 $f \in \mathcal{S}_X$，其数量

$$a_f \coloneqq |\{r \in \mathcal{C}(X,X) \mid \operatorname{top}(r) = f\}|$$

与代表元 f 在其等价类 $[f]_{\approx}$ 中的选取无关。

证明。令 $f' \approx f$ 并选取 $r \in \mathsf{C}(X,X)$，使得 $\mathsf{top}(r) = f$ 且 $\mathsf{bot}(r) = f'$。由 (A2)，我们有 $r^T r = \beta_f$ 和 $r r^T = \beta_{f'}$。因此，该映射

$$\{s \in \mathcal{C}(X,X) \mid \operatorname{top}(s) = f\} \longrightarrow \{s' \in \mathcal{C}(X,X) \mid \operatorname{top}(s') = f'\}, \qquad s \longmapsto s r^T$$

的逆映射由 $s \mapsto sr$ 给出。□

定义 3.19。对于 $f \in \mathcal{S}_X$，定义

$$e_f \coloneqq \frac{1}{a_f} \sum_{\substack{r \in \mathcal{C}(X,X) \\ \operatorname{top}(r) \approx f}} x(r) \in \mathcal{C}_\delta([X],[X]),$$

其中，$x(r)$ 取自 $\mathsf{C}_\delta([X],[X])$ 的 M¨obius 基。

引理 3.20。对于 $f \in \mathcal{S}_X$，元素 e_f 是 $\mathcal{C}_\delta([X],[X])$ 中的一个幂等元。

证明。根据 (A2)，所有满足 $\mathsf{top}(r) \approx f$ 的 $r \in \mathsf{C}(X,X)$ 都具有 $X \hookleftarrow r \hookrightarrow X$ 的形式。为证明 e_f 是幂等元，我们计算

$$\begin{aligned}
e_f^2 &= \frac{1}{a_f^2} \sum_{\substack{r \in \mathcal{C}(X,X) \\ \operatorname{top}(r) \approx f}} \sum_{\substack{s \in \mathcal{C}(X,X) \\ \operatorname{top}(s) \approx f}} x(r)x(s) \\
&\overset{(*)}{=} \frac{1}{a_f^2} \sum_{\substack{r \in \mathcal{C}(X,X) \\ \operatorname{top}(r) \approx f}} \sum_{\substack{s \in \mathcal{C}(X,X) \\ \operatorname{bot}(s) = \operatorname{top}(r)}} x(rs) \\
&= \frac{1}{a_f^2} \sum_{\substack{t \in \mathcal{C}(X,X) \\ \operatorname{top}(t) \approx f}} \sum_{\substack{rs = t \\ \operatorname{bot}(s) = \operatorname{top}(r)}} x(t) \\
&\overset{(**)}{=} \frac{1}{a_f^2} \sum_{\substack{t \in \mathcal{C}(X,X) \\ \operatorname{top}(t) \approx f}} a_f x(t) \\
&= e_f,
\end{aligned}$$

其中等式（$*$）由命题 3.16 得出，而（$**$）则源于以下事实：对于固定的 $t \in \mathcal{C}(X,X)$，若 $\mathsf{top}(t) \approx f$，则有

$$\begin{aligned}
&|\{(r,s) \mid r,s \in \mathcal{C}(X,X), rs = t, \operatorname{top}(r) = \operatorname{bot}(s)\}| \\
&= |\{(r, r^T t) \mid r \in \mathcal{C}(X,X), \operatorname{bot}(r) = \operatorname{bot}(t)\}| = a_f.
\end{aligned}$$

□

引理 3.21。令 $f \in \mathcal{S}_X$ 和 $W \in \mathcal{C}$。映射

$$\mathcal{C}_\delta([W], \mathrm{im}(e_f)) \to \mathcal{T}([W], \mathbf{1})$$

由与关系 $X \xleftarrow{=} X \to \mathbf{1}$ 的后复合给出是单射。其像具有如下形式的基

$$\{f' + \textit{lower order terms} \mid f' \in \mathrm{sub}(W), f' \sim f\},$$

其中“低阶”指 $\mathrm{sub}(W)$ 上的子对象序，并且我们将 $\mathcal{T}([W], \mathbf{1}) \cong \mathrm{span}_{\Bbbk} \mathrm{sub}(W)$视为相同。

证明。考虑 $r \in \mathsf{C}(X, X)$ 和 $s \in \mathsf{C}(W, X)$，其中 $f \approx \mathsf{bot}(s) \approx \mathsf{top}(r)$。根据引理 3.17，条件 $\mathsf{bot}(s) \geqslant \mathsf{top}(r)$ 蕴含 $\mathsf{bot}(s) = \mathsf{top}(r)$。因此，根据命题 3.16，$x(r)s = 0$，除非 $\mathsf{bot}(s) = \mathsf{top}(r)$，从而我们得到

$$e_f s = \frac{1}{a_f} \sum_{\substack{r \in \mathcal{C}(X,X) \\ \mathsf{top}(r) \approx f}} x(r)s = \frac{1}{a_f} \sum_{\substack{r \in \mathcal{C}(X,X) \\ \mathsf{bot}(s) = \mathsf{top}(r)}} x(r)s. \tag{4}$$

如果 $q \in \mathsf{C}(X, X)$ 满足 $\mathsf{top}(q) \approx f$ 作为 X的子对象，再由 命题 3.16，

$$e_f q = \frac{1}{a_f} \sum_{\substack{r \in \mathcal{C}(X,X) \\ \mathsf{top}(r) = \mathsf{bot}(q)}} x(r)q = \frac{1}{a_f} \sum_{\substack{r \in \mathcal{C}(X,X) \\ \mathsf{top}(r) = \mathsf{bot}(q)}} x(rq) = e_f \beta_{\mathsf{top}(q)}. \tag{5}$$

对于一般情形 $s \in \mathsf{C}(W, X)$，我们有

$$\begin{aligned} e_f s &= \frac{1}{a_f} \sum_{\substack{r \in \mathcal{C}(X,X) \\ \mathsf{top}(r) \approx f}} x(r)s = \frac{1}{a_f} \sum_{\substack{r \in \mathcal{C}(X,X) \\ f \approx \mathsf{top}(r) \leqslant \mathsf{bot}(s)}} x(r)s = \frac{1}{a_f} \sum_{\mathsf{bot}(s) \geqslant \hat{f} \approx f} \sum_{\substack{r \in \mathcal{C}(X,X) \\ \mathsf{top}(r) = \hat{f}}} x(r)s \\ &= \sum_{\mathsf{bot}(s) \geqslant \hat{f} \approx f} \frac{1}{a_f} \sum_{\substack{r \in \mathcal{C}(X,X) \\ \mathsf{top}(r) = \hat{f}}} x(r)(\beta_{\hat{f}} s) \overset{(4)}{=} \sum_{\mathsf{bot}(s) \geqslant \hat{f} \approx f} e_f(\beta_{\hat{f}} s) \end{aligned}$$

因此，$\mathsf{C}_\delta([W], \mathsf{im}(e_f))$ 由 $\{e_f s \mid s \in \mathsf{C}(W, X), \mathsf{bot}(s) \approx f\}$ 生成。对于每个子对象 $f \sim f' \in \mathsf{sub}(W)$，引理 3.13 表明，存在一个关系 $s_{f'} \in \mathsf{C}(W, X)$，满足 $\mathsf{top}(s_{f'}) = f'$。如果另一个 $s \in \mathsf{C}(W, X)$ 满足 $\mathsf{top}(s) = f'$，那么由命题 3.15，存在 $q \in \mathsf{C}(X, X)$，使得 $s = q s_{f'}$ 且 $\mathsf{top}(q) = \mathsf{bot}(s_{f'})$。因此，根据 (5)，$e_f s = e_f q s_{f'} = e_f \beta_{\mathsf{bot}(s_{f'})} s_{f'} = e_f s_{f'}$。

总之，$\{e_f s_{f'} \mid f' \in \mathsf{sub}(W)\ f \sim f'\}$是一个生成集。映射

$$\mathcal{C}_\delta([W], \mathrm{im}(e_f)) \to \mathcal{T}([W], \mathbf{1})$$

将 $e_f s_{f'}$ 发送到 f'+低阶项，而这种形式的元素是线性无关的。 □

回想一下，我们用波浪号表示范畴和函子的 Ind 完备化。

定义 3.22。我们定义 Ind-对象

$$H_{\mathcal{C}} := \bigoplus_{X \in \mathcal{C}} \bigoplus_{[f]_\approx \in \mathcal{S}_X/\approx} \mathrm{im}(e_f) \in \tilde{\mathcal{C}}_\delta.$$

命题 3.23。 考虑态射 $p\colon \tilde{\iota}(H_{\mathcal{C}}) \to \mathbf{1}$，其在$\mathrm{im}(e_f)$ 上由关系 $X \xleftarrow{=} X \to \mathbf{1}$ 给出，其中 $X \in \mathcal{C}$ 和$[f]_{\approx} \in \mathcal{S}_X/\!\approx$。于是线性映射

$$\tilde{\mathcal{C}}_\delta([W], H_{\mathcal{C}}) \longrightarrow \tilde{\mathcal{T}}([W], \mathbf{1}), \qquad s \longmapsto p\tilde{\iota}(s)$$

对所有 $W \in \mathcal{C}$，它都是一个同构。

证明。 该映射是以下映射的直和：$\mathcal{C}_\delta([W], \mathrm{im}(e_f)) \to \mathcal{T}([W], \mathbf{1})$，它们来自 引理 3.21，适用于 $X \in \mathcal{C}$和 $[f] \in \mathcal{S}_X/\!\approx$。这些映射是单射，并且 $\mathcal{T}([W], \mathbf{1})$ 恰好是它们的像的直和。 □

Coro推论 3.24。 函子 $\tilde{\mathcal{T}}(\tilde{\iota}(-),\mathbf{1})\colon \tilde{\mathcal{C}}_\delta^{\mathrm{op}} \to$ 向量空间范畴 由对象 H 可表 $_{\mathcal{C}}$.

证明。命题 3.23 中的同构 命题 3.23 是自然的，因为它们由与一个固定态射作后复合给出。它们延拓为相应 Karoubi 完备化和 Ind 完备化上的函子同构。 □

引理 3.25。 对象 $H_{\mathcal{C}}$ 有一个直和项同构于单位对象 $\mathbf{1} \in \mathcal{C}_\delta$。

证明。 由 例 3.14，终对象 $\mathbf{1} \in \mathcal{A}$ 是一个秩对象 $R_{\mathrm{id}_\mathbf{1}}$。我们有$e_{\mathrm{id}_\mathbf{1}} = \mathrm{id}_\mathbf{1}$ 以及 $\mathbf{1} = \mathrm{im}(e_{\mathrm{id}_\mathbf{1}}) \in \mathcal{C}_\delta$ 是 $H_{\mathcal{C}}$中的一个直和项。 □

命题 3.26。 对于 Rel(*A*)中的任意满足假设 3.11的群论范畴 *C*，包含函子 ι 具有一个 *Ind* 右伴随，且该伴随的单位是分裂的。

证明。函子 $\iota\colon \mathsf{C}_\delta \to \mathsf{T}$ 是占优的，因为 C_δ 包含所有满足 $X \in \mathsf{A}$ 的对象 $[X]$，而 T 中的每个对象都是这类对象的有限直和的直和项。因此，由引理 2.7 和推论 3.24，函子 $\mathrm{Ind}(\iota)\colon \mathrm{Ind}(\mathsf{C}_\delta) \to \mathrm{Ind}(\mathsf{T})$ 有一个右伴随 G，它映射 $\mathbf{1} \mapsto H_{\mathcal{C}}$。由引理 3.25 以及定理 2.9 的证明中的论证，伴随单位在 C_δ 上自然地分裂。由于 $\mathrm{Ind}(\iota)$ 保持紧对象，G 保持滤过余极限，因此该分裂延拓至 Ind 完备化。 □

定理 *3.27*。设 *C* 是 *Rel(A)* 中的一个群论范畴，且包含函子 ι 有一个 *Ind* 右伴随 G，其单位可分裂（例如，*C* 满足假设 *3.11*）。假设 *T* 有一个形如 $\iota(S)$ 的全局分裂对象，其中 $S \in \mathcal{C}_\delta$。那么 S 是 $\mathcal{C}_\delta$ 中的全局分裂对象，*T* 和 $\mathcal{C}_\delta$ 都有足够多投射对象的阿贝尔包络，并且 ι 诱导出它们之间的一个（正合）张量函子 $\iota^{\mathrm{ab}}\colon \mathcal{C}_\delta^{\mathrm{ab}} \to \mathcal{T}^{\mathrm{ab}}$。

证明。 这是定理 2.9：可分裂的单位使得$\mathbf{1}$ 成为 $G(\mathbf{1})$ 的一个直和项。假设 3.11下，所需的伴随由命题 3.26提供。 □

现在，我们可以应用第 2.5 节所述的 Tannakian 重构，并将$\mathcal{C}_\delta^{\mathrm{ab}}$识别为 $G(\mathbf{1})$ 在$\mathcal{T}^{\mathrm{ab}}$ 中的像所对应的余模范畴：

定理 3.28。 在定理 *3.27*的情形下，张量函子 $\iota^{\mathrm{ab}}\colon \mathcal{C}_\delta^{\mathrm{ab}} \to \mathcal{T}^{\mathrm{ab}}$可分解为

$$\mathcal{C}_\delta^{\mathrm{ab}} \xrightarrow{\cong} \mathrm{Comod}_{\mathcal{T}^{\mathrm{ab}}}(H) \xrightarrow{\mathit{forget}} \mathcal{T}^{\mathrm{ab}},$$

其中 $H = \mathrm{Ind}(\iota^{\mathrm{ab}})(G(\mathbf{1})) \in \mathrm{Ind}(\mathcal{T}^{\mathrm{ab}})$，其霍普夫代数结构由幺半群伴随和一个中心截面重构。这里我们通过 $G(\mathbf{1})$ 在以下意义下视为$\mathrm{Ind}(\mathcal{C}_\delta^{\mathrm{ab}})$ 中的一个对象：通过嵌入 $\mathcal{C}_\delta$。在 假设 *3.11*下，它就是 $H_{\mathcal{C}}$ 来自命题 *3.23*的显式对象。

证明。 由 定理 2.11，只需构造 $\iota^{\mathrm{ab}}\colon \mathcal{C}_\delta^{\mathrm{ab}} \to \mathcal{T}^{\mathrm{ab}}$ 的中心截面。对于任意 $X \in \mathcal{C}$，定义 $\tilde{X} := X^{\times 2}$ 并考虑关系

$$\alpha_X := \left(\tilde{X} \xleftarrow{\Delta_X} X \xrightarrow{\mathrm{id}} X\right) \in \mathrm{Rel}(\mathcal{A})(\tilde{X}, X),$$

其中 Δ_X 是对角映射。对于一般对象 $X \in \mathsf{A}$，选择一个表达式 $X = \prod_i X_i$ ~ ~ ~，其中有 $X_i \in \mathsf{G}$。置 $X := \prod_i X_i$，并令 $\alpha_X \in \mathsf{Rel(A)}(X, X)$ 为所有 α_{X_i} 的乘积。对于 Rel(A) 中的关系 $X \xleftarrow{f} r \xrightarrow{g} Y$，关系 $J(r) := \alpha_Y^T r \alpha_X$ 是

$$\tilde{X} \xleftarrow{(\prod_i \Delta_{X_i})\pi_X} X \times Y \xrightarrow{(\prod_j \Delta_{Y_j})\pi_Y} \tilde{Y},$$

使用分解 $X = \prod_i X_i$ 和 $Y = \prod_j Y_j$；因此， $J(r)$ 包含于 C 中。注意，在 T 中， $\alpha_X \alpha_X^T = \mathrm{id}_{[X]}$ 和 $e_X := \alpha_X^T \alpha_X$ 是一个幂等元。置 $J([X]) := \mathrm{im}(e_X)$。张量约束 $J([X]) \otimes J([Y]) \to J([X \times Y])$ 由 $\alpha_{X\times Y}^T(\alpha_X \otimes \alpha_Y)$ 诱导。根据同样的粗化论证，该关系及其转置属于 C，并诱导出逆同构。应用忠实函子 ι后，相容性成立。这些赋值扩张为线性幺半函子 $J\colon \mathsf{T} \to \mathsf{C}_\delta$，并且 α_X 组装成幺半函子同构 $\alpha : \iota J \cong \mathrm{id}_{\mathcal{T}}$。根据阿贝尔包络的泛性质， J 扩张为张量函子 $J_{\mathrm{ab}}\colon \mathsf{T}^{\mathrm{ab}} \to \mathsf{C}_\delta^{\mathrm{ab}}$，且 $\iota^{\mathrm{ab}} J^{\mathrm{ab}} \cong \mathrm{id}_{\mathcal{T}^{\mathrm{ab}}}$。

对于对象 $X, Y \in \mathsf{A}$，关系

$$\gamma_{X,Y} := \left(\tilde{X} \times Y \longleftarrow X \times Y \longrightarrow Y \times \tilde{X}\right) \in \mathcal{T}(\mathrm{im}(e_X) \otimes [Y], [Y] \otimes \mathrm{im}(e_X))$$

是利用选定的分解 $X = \prod_i X_i$ 对 $\left(\bigotimes_i \mathrm{ev}_{[X_i]}\right) \otimes \mathrm{id}_{[Y]} \otimes \left(\bigotimes_i \mathrm{coev}_{[X_i]}\right)$ 进行粗化，因此包含于 C_δ 中。它满足

$$(\mathrm{id}_{[Y]} \otimes \alpha_X)\iota(\gamma_{X,Y})(\alpha_X^T \otimes \mathrm{id}_{[Y]}) = c_{[X],[Y]}$$

其中 c 是 T 上通过交换因子给出的对称编织。由于 $\mathsf{C}_\delta^{\mathrm{ab}}$ 中的张量积是正合的，它与直和和余核可交换。因此， γ 的定义可扩展到所有 $X \in \mathsf{T}^{\mathrm{ab}}, Y \in \mathsf{C}_\delta^{\mathrm{ab}}$，并使 J^{ab} 成为 ι^{ab} 的中心截面。

为确定霍普夫代数，令 $K = G(\mathbf{1})$，并将其视为 $\mathrm{Ind}(\mathsf{C}_\delta^{\mathrm{ab}})$ 中的对象。根据[FLP26, 定理 6.1], ，每个对象 $A \in \mathsf{C}_\delta^{\mathrm{ab}}$ 都有一个由~C_δ 中对象 $P_i \in$ 给出的表示 $P_1 \to P_0 \to A \to 0$ 。应用伴随同构 $\mathsf{C}_\delta(P_i, K) \cong \mathsf{T}(\iota(P_i), \mathbf{1})$，并取核，得到

$$\mathrm{Ind}(\mathcal{C}_\delta^{\mathrm{ab}})(A, K) \cong \mathcal{T}^{\mathrm{ab}}(\iota^{\mathrm{ab}}(A), \mathbf{1}).$$

因此 K 是 $\mathbf{1}$ 处 $\mathrm{Ind}(\iota^{\mathrm{ab}})$ 的右伴随的值，而定理 2.11 给出了所断言的 H 的识别。在 假设 3.11 下， 推论 3.24 将 K 识别为 $H_{\mathcal{C}}$。 □

3.4. **与寡形群的关系**。 我们简要回顾 [Sno24] ，说明 Knop 范畴如何融入更一般的伪张量范畴构造，即将寡态射群的“置换模”视为伪张量范畴 [HS24]。在本小节中，进一步假设 $\mathcal{A}$ 是 Barr-正合的。

对于下面的子群构造，我们将 **(Reg+)** 写作满足以下条件的范畴：正则、Barr-正合、Malcev、子对象有限，且终对象没有真子对象。

构造 3.29 （见 [Sno24，§ 4]）。正则范畴 $\mathcal{A}$ 上的 pro-对象范畴 Pro($\mathcal{A}$) 存在一个对象 Ω，使得对于所有 $X \in \mathcal{A}$，集合 $\mathfrak{B}(X) := \mathrm{Surj}^{\mathrm{Pro}(\mathcal{A})}(\Omega\ X)$ 非空且是一个传递 Aut(Ω)-集。这样的对象 Ω 称为 A 的泛齐次原对象。由 $\mathfrak{B}(X)$ 定义的拓扑使 $G := \mathrm{Aut}(\Omega)$ 成为一个 pro-寡形群。

命题3.30。每个光滑传递 G-集都有一个有限覆盖，该覆盖是某个 $X \in \mathcal{A}$ 的 G-集，形式为$\mathfrak{B}(X)$。

证明。直接由 [Sno24，命题44] 得出。 □

构造3.31 (见 [Sno24，§ 6])。 次数函数 δ 由此导出一个测度 μ 于G ，方法如下：给定一个满射 $e: X \to Y$属于 $\mathcal{A}$，定义

$$\mu(\mathfrak{B}(X) \to \mathfrak{B}(Y)) := \sum_{\substack{Z \in \mathrm{sub}(X), \\ e(Z)=Y}} \mu_{\mathrm{sub}(X)}(Z, X)\delta(e|_Z). \tag{6}$$

注意，这恰好就是 Knop 元素 ω_e (见 [Kno07，§ 8])。由于我们处于特征 0，命题3.30 意味着赋值（6）唯一地延拓为定义在所有有限型光滑 G-集上的测度。

下文中，设（G， μ）如构造 3.29 和 3.31中所述。以下结果的 (a) 部分由 Thorsten Heidersdorf 和 Andrew Snowden 指出。

命题 3.32。 *(a)* 存在一个伪张量范畴之间的等价

$$\Phi : \mathcal{T}(\mathcal{A}, \delta) \longrightarrow \mathrm{Perm}(G, \mu)^{\mathrm{kar}}$$

将任意对象 $[X]$ （对应于 $X \in \mathcal{A}$ ）映为 $\mathfrak{A}(X) := \coprod_{Y \in \mathrm{sub}(X)} \mathfrak{B}(Y)$，并将任意关系 属于 A 映为示性函数 $1_{\mathfrak{A}(r)}$，视为一个 $\mathfrak{A}(X) \times \mathfrak{A}(Y)$ 矩阵。

(b) 如果$\mathcal{A}$ 还具有 *Malcev* 性质，那么在*(a)*部分所述的等价伪张量范畴中，幂零自同态的迹为零。

证明。 (a) 根据 [Sno24，定理 7，5], 函子 Φ 作为一个全忠实幺半函子存在，其像由以下形式的 G-集合生成： $\mathfrak{B}(X)$。对于任意光滑传递的 G-集合T，命题3.30给出了一个有限覆盖 π： $\mathfrak{B}(X)$， $\twoheadrightarrow T$ 其度为 d。自同态$d^{-1}\pi^*\pi_*$ 是一个幂等元，其像同构于 T （回忆一下，我们处于特征 0 的情形）。因此， Φ它是本质满射的。

(b) 根据 [Kno07，定理 6。1], $\mathcal{T}(\mathcal{A}\ \delta)$ 存在一个到半单张量范畴的线性对称幺半函子。由于迹在这样的函子下保持不变，而且在任意张量范畴中，幂零自同态的迹都为零，因此这就证明了该断言。□

上述等价在结合以下关于与 G 的开子群相对应的范畴的描述时尤其有用。对于 $X \in$ A，令 A$//X$ 为 A 中到 X 的满射所构成的范畴，其态射为交换三角形。

命题 3.33。 假设 $\mathcal{A}$ 满足 ***(Reg+)***，并令 $(G、\ \mu)$ 如上与 $(\mathcal{A}\ \ \delta)$相关联。

(a) 对于每个 $X \in A$，范畴 $A//X$ 满足 *(Reg+)*。规则 $\delta_X(e) := \delta(e)$ 在 $A//X$上定义了一个次数函数。*(b)* 对于 G的每个开子群 U，存在 U 的一个有限指数开子群 V 以及一个对象 $X \in A$，使得 $\mathfrak{B}(X) \cong G/V$作为 G-集合，并且通过构造 *3.29* 和 *3.31*，偶对 $(V、\ \mu|_V)$ 与偶对 $(A//X、\ \delta_X)$ 相对应。

证明。(a) A$//X$ 的正则性在 [Kno07 § 2，例 4], 中有所说明，其中像分解和满射的拉回均在 A 中计算。A$//X$ 中满射 $q\colon\ Y \twoheadrightarrow X$ 的一个子对象，恰好是 A 中的一个子对象 $Z \subset Y$，使得 $q|_Z$ 为满射。因此，A$//X$ 是子对象有限的，其终对象 id_X 没有真子对象。A$//X$ 中的自反关系在 A 中也是自反的，因而是等价关系。它在 A 中的商继承了一个到 X的满射。这证明了 A$//X$ 的正合性和 Malcev性质（另见[Kno07，附录 A，例 10]）。δ_X 的次数函数公理由 δ的相应公理推出。

(b) 根据命题3.30，我们可以选择一个有限覆盖 $\pi\colon\ \mathfrak{B}(X) \twoheadrightarrow G/U$。令 Ω 为 A 的泛齐次原对象，并选取一个元素 $p\colon\ \Omega \twoheadrightarrow X$ 中的 $\mathfrak{B}(X)$，满足$\pi(p) = U$，即 G/U 中的恒等陪集。其稳定子子群 $V \subseteq G$是开集，并且包含于 U 中。由于 $\mathfrak{B}(X)$ 是一个传递的 G-集，$\mathfrak{B}(X) \cong G/V$，且 π 下 U 的原像同构于 U/V，因此 $[U\colon\ V] < \infty$。

令 $\mathcal{D} :=\mathcal{A}//X$。Ω 的商（通过这些商进行因子分解）构成一个余终系统。令 Ω′ 为由该系统定义的 $\mathcal{A}//X =\mathcal{D}$ 中的原对象。我们断言，Ω′ 是 $\mathcal{D}$ 的泛齐次原对象，其含义与构造 3.29 中相同，并且 Aut(Ω′) $\cong V$ 是拓扑群。

事实上，对于任意 $q\colon Y \twoheadrightarrow X \in$ D,

$$\mathfrak{B}_{\mathcal{D}}(q) := \mathrm{Surj}_{\mathrm{Pro}(\mathcal{D})}(\Omega', q) = \{f \in \mathfrak{B}(Y) \mid qf = p\}.$$

由于 $\mathfrak{B}(Y)$ 和 $\mathfrak{B}(X)$ 是非空的传递 G-集合，它们之间的 G-集合映射 $f \mapsto qf$ 是满射，这意味着 $\mathfrak{B}_{\mathcal{D}}(q)$ 非空。对于 f_1，$f_2 \in \mathfrak{B}_{\mathcal{D}}(q)$，取满足 $f_2 = f_1 g$ 的 $g \in G$，则 $p = qf_2 = qf_1 g = pg$，即 $g \in V$，并且 $\mathfrak{B}_{\mathcal{D}}(q)$ 作为 V-集合是传递的。类似的论证表明，V 与 Aut(Ω′) 作为拓扑群相同。特别地，为了比较邻域基，注意对于任意 $f\colon \Omega \twoheadrightarrow Y$，由 $(p,\ f)\colon \Omega \to X \times Y$ 的余像给出的 Ω 的商，其稳定子为 $V \cap \mathrm{Stab}_G(f)$，并且当某个 $q \in$D 时，它确定了 $\mathfrak{B}_{\mathcal{D}}(q)$ 的一个点。这意味着我们可以将子空间拓扑中的基本邻域与集合 $\mathfrak{B}_{\mathcal{D}}(q)$ 中各点的稳定子子群对应起来。我们已经证明了这一断言。

正如在 (a) 的证明中所观察到的，$q\colon\ Y \twoheadrightarrow X$ in D 中的子对象恰好是 Y in A 中在 q 下满射到 X 的子对象，并且这两种子对象偏序集中这些子对象之上的区间相同。对于 D 中的一个满射 $e\colon (q\colon\ Y \twoheadrightarrow X) \twoheadrightarrow (r\colon\ Z \twoheadrightarrow X)$，每个

$T \subseteq Y$ 与 $e(T) = Z$ 在 q下已经满射到 X。因此，方程 (6)中的和对于 e 在 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{A}$中相同。由于 $\mathfrak{B}_{\mathcal{D}}(e)$ 是由 $\mathfrak{B}(e)$ 取 p上的纤维得到的，因此这将与 $\mathcal{D}$ δ_X) 相关联的测度对应于 $\mu|_V$。□

引理 *3.34.* 在命题 *3.32(a)* 的情形下，设 *C* 是 *Rel(A)* 中的一个群论子范畴。那么对于所有 $X \in A$，都有 $\Phi(im(x(id_X))) \cong \mathfrak{B}(X)$。特别地，$\Phi(C_\delta) \subset Perm(G,\mu)^{\mathrm{kar}}$ 包含所有形如 $\mathfrak{B}(X)$ 的对象，其中 ~~$X \in A$~~。

证明。设 $X \in$A，且 $U \in \mathrm{sub}(X)$ 是一个子对象。将其视为关系 $X \hookleftarrow U \hookrightarrow X$（即 C_δ 中的一个态射），我们有

$$\Phi(U) = 1_{\mathfrak{A}(U)} = \sum_{V \subseteq U} 1_{\mathfrak{B}(V)},$$

其中 $\mathfrak{B}(V) \subseteq \mathfrak{A}(X) \subseteq \mathfrak{A}(X) \times \mathfrak{A}(X)$ 通过对角嵌入。现在考虑 M¨obius 基 $x(U)_{U \in \mathrm{sub}(X)}$。M¨obius 反演给出 $\Phi(x(U)) = 1_{\mathfrak{B}(U)}$。取 $U = X$，我们得到

$$\Phi(\mathrm{im}(x(X))) \cong \mathrm{im}(\Phi(x(X))) \cong \mathrm{im}(1_{\mathfrak{B}(X)}) \cong \mathfrak{B}(X),$$

正如所断言的。最后一个断言成立，因为 C 在粗化下封闭，特别是对于用于定义 $x(X) = x$ (id_X) 的那些粗化。□

以下结果利用准正则测度的概念，确立了定理 3.27 的一项假设。

命题 3.35。设 $\mathcal{A}$ δ 如上，并假设 $\mathcal{A}$ 还满足 *Malcev* 条件。设 (G,μ) 为相应的带测度 *pro*-寡态群，如构造 *3.29* 和 *3.31*中所述，并假设 μ 是准正则的。那么存在一个全局分裂对象 S，它属于 $\mathcal{T}(\mathcal{A}\ \delta)$，且包含于任何子范畴 $\mathcal{C}_\delta$ 之中，该子范畴对应于 $\mathcal{C}$ 这一 $\mathrm{Rel}(\mathcal{A})$的群论子范畴。

证明。若 μ 是准正则的，则存在一个开子群 $U \subseteq G$，使得 μ 在 U 上的限制是正则的。根据 命题 3.33(b)，我们可以选取一个有限指数开子群 $V \subseteq U$以及 $X \in \mathcal{A}$，使得 $\mathfrak{B}(X) \cong G/V$，且 $(V, \mu|_V)$ 是与 $(\mathcal{A}//X, \delta_X)$ 相对应的那一对。μ 在 V 上的限制仍然是正则的。

根据命题 3.33(a)，范畴$\mathcal{A}//X$ 满足(**Reg+**)。因此，根据命题 3.32(a) 和 (b)，$\mathrm{Perm}(V, \mu|_V)^{\mathrm{kar}}$ 中的幂零自同态的迹为零。

因此，根据 [HS24，定理 13 的证明，13], 并结合 [HS24，备注 11，5]如果 G 不是第一可数的，G/V 则$G,\mu)^{\mathrm{kar}}$中的一个全局分裂对象。注意，~~该~~证明使用了所谓的性质 (P) 来调用 [HS24，定理 13，2], 但紧接着该结果之后的说明指出，只需假设幂零自同态的迹为零即可，而我们刚刚已经对 V证明了这一点。

令 $S := \mathrm{im}(x(\mathrm{id}_X))$ 属于 T(A δ)。由引理 3.34，$\Phi(S) \cong \mathfrak{B}(X) \cong G/V$。因此，命题 3.32(a) 中的幺半群等价表明，S 是 T(A δ) 中的全局分裂对象；并且对于每个群论子范畴 C $\subseteq$ Rel(A)，S 属于 C_δ，这同样由引理 3.34 得出。□

3.5. **具有一个原子的正则范畴**。考虑一个子对象有限正则范畴$\mathcal{A}$，其中每个对象都是一个直积 X^n，这里 X 是某个固定的非终对象，而$n \in \mathbb{N}_0$。记$\mathbf{1} := X^0$ 表示终对象。我们描述一个特殊的群论子范畴$\mathcal{C} \subseteq \mathrm{Rel}(\mathcal{A})$，它不满足假设 3.11，但仍能给出一个阿贝尔包络。

对于 A 上的次数函数 δ，记 t 为 $X \to \mathbf{1}$的像分解中满射态射的次数。考虑关系

$$r := \left(X^2 \xleftarrow{=} X^2 \to \mathbf{1}\right).$$

其旋转 $\rho := (X \xleftarrow{\pi_1} X^2 \xrightarrow{\pi_2} X)$ 满足 $\rho^2 = t\rho$，因此当$t \neq 0$时，$t^{-1}\rho$ 是幂等元。

引理 3.36。令 $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{Rel}(\mathcal{A})$ 为一个群论子范畴。

(a) 群论子范畴 $\langle r \rangle_{\mathrm{gt}} \subseteq \mathrm{Rel}(\mathcal{A})$ 恰好包含满足 $n+m$ 为偶数的关系$X^n \leftarrow X^b \to X^m$。

(b) 如果 $\mathcal{C}$ 包含 r，那么 $\mathcal{C} = \langle r \rangle_{\mathrm{gt}}$ 或 $\mathcal{C} = \mathrm{Rel}(\mathcal{A})$。

证明。对于 (a)，注意到 $\langle r \rangle_{\mathrm{gt}}$ 对所有 $n \in \mathbb{N}_0$ 都包含关系 $X^{2n} \xleftarrow{=} X^{2n} \to \mathbf{1}$。通过粗化和旋转，我们看到 $\langle r \rangle_{\mathrm{gt}}$ 包含所有满足 $n+m$ 为偶数的关系 $X^n \leftarrow X^b \to X^m$。反之，由于 $\langle r \rangle_{\mathrm{gt}}$ 由这类关系在张量积、复合、反射和粗化下生成，而这些操作都保持奇偶性，因此结论成立。

对于 (b)，假设 C 还包含一个满足 $n+m$ 为奇数的关系 $X^n \leftarrow X^b \to X^m$。通过旋转并反复应用 r，该关系可化为某个子对象 $S \hookrightarrow X$ 对应的 $X \hookleftarrow S \to \mathbf{1}$。与 $X \xleftarrow{\pi_1} X^2 \xrightarrow{\pi_2} X$（$r$ 的一次旋转）复合后，得到 $X \xleftarrow{=} X \to \mathbf{1}$。因此，对于每个 n，C 都包含 $X^n \xleftarrow{=} X^n \to \mathbf{1}$。通过粗化和旋转，我们看到 C 包含所有关系。□

命题 3.37。设 $\mathcal{C} = \langle r \rangle_{\mathrm{gt}}$，并假设 $t \neq 0$。那么，将 $H_{\mathcal{C}} = \mathbf{1} \oplus \mathrm{im}(t^{-1}\rho)$视为 $\mathcal{C}_\delta$ 中的一个对象时，它表示函子 $\mathcal{T}(-, \mathbf{1})|_{\mathcal{C}_\delta}$。

证明。只需证明对每个 $n \in \mathbb{N}_0$，都有一个同构

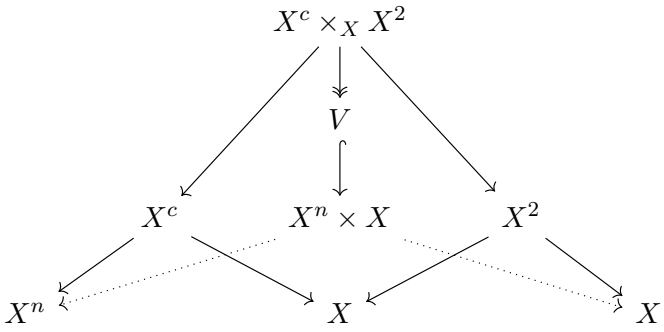
$$\mathcal{C}_\delta(X^n, \mathbf{1}) \oplus \mathcal{C}_\delta(X^n, \mathrm{im}(t^{-1}\rho)) = \mathcal{C}_\delta(X^n, H_{\mathcal{C}}) \longrightarrow \mathcal{T}(X^n, \mathbf{1})$$

在第一个直和项上，该同构由包含给出；在第二个直和项上，则由与关系 $X \xleftarrow{=} X \to \mathbf{1}$ 复合给出。对于 n 偶数，我们有 $\mathsf{C}_\delta(X^n, H_{\mathcal{C}}) = \mathsf{C}_\delta(X^n, \mathbf{1}) = \mathsf{T}(X^n, \mathbf{1})$。对于 $n = 2m+1$ 奇数，我们需要

$$\mathcal{C}_\delta(X^n, \mathrm{im}(t^{-1}\rho)) \longrightarrow \mathcal{T}(X^n, \mathbf{1})$$

是一个同构。对于满射性，注意到 $\mathsf{T}(X^n, \mathbf{1})$ 中的每个关系 $X^n \xleftarrow{f} X^b \to \mathbf{1}$ 都有一个原像 $t^{-1}s_f$，其中 s_f 由 $X^n \xleftarrow{f\pi_1} X^b \times X \xrightarrow{\pi_2} X$ 给出。对于单射性，我们证明 $\mathsf{C}_\delta(X^n, \mathrm{im}(t^{-1}\rho))$ 由形如 s_f 的关系张成，其中 f 是 X^n 的子对象：

考虑一个关系 $q = (X^n \leftarrow X^c \rightarrow X)$，并将其左腿因子分解为 $X^c \overset{\varepsilon}{\twoheadrightarrow} X^b \overset{f}{\hookrightarrow} X^n$，其中 ε 是满射。与 ρ复合得到



$= \quad \delta(\varepsilon)^{s_f}$.

顶端的纤维积是 $X^c \times_X X^2 = (X^c \times_X X) \times X$。其到像$X^b \times X$上的映射是 $\varepsilon \times \mathrm{id}_X$，度为 $\delta(\varepsilon)$。因此 $t^{-1}\rho q = t^{-1}\delta(\varepsilon)^{s_f}$，从而证明了张成断言。由于元素 ^{s_f} 的像 tf 线性无关，故单射性成立。□

定理 3.38。对于 $\mathcal{A}$，δ 如上所述（特别地，$\mathcal{A}$ 有一个原子 X），以及 $\mathcal{C}$ 作为 $\mathrm{Rel}(\mathcal{A})$ 的一个群论子范畴，假设以下两个条件成立：

(a) 存在一个 $\mathcal{T}_\delta := \mathcal{T}(\mathcal{A}\ \delta)$ 形式的全局分裂对象 $\iota(S)$，其中 $S \in \mathcal{C}_\delta$，且$\iota\colon\ \mathcal{C}_\delta \to \mathcal{T}_\delta$ 的包含如前所述。***(b)*** 要么 假设 *3.11* 成立，要么 $r \in \mathcal{C}$。

那么，S 是一个全局分裂对象，$\mathcal{C}_\delta$、$\mathcal{C}_\delta$ 和$\mathcal{T}_\delta$ 都具有足够多射影对象的阿贝尔包络，ι 诱导一个（正合）张量函子 $\iota^{\mathrm{ab}}\colon\ \mathcal{C}_\delta^{\mathrm{ab}} \to \mathcal{T}_\delta^{\mathrm{ab}}$，并且$\mathcal{C}_\delta^{\mathrm{ab}}$由$\mathcal{T}_\delta^{\mathrm{ab}}$中的某个量子群的表示给出。

证明。若 假设 3.11 成立，则由 定理 3.27 和定理 3.28可立即得出结论。因此，我们不妨假设 $r \in \mathcal{C}$ 成立。于是根据 引理 3.36，我们只需考虑两种情况：$\mathcal{C}_1 = \mathrm{Rel}(\mathcal{A})$ 和 $\mathcal{C}_2 = \langle r \rangle_{\otimes\mathrm{gt}}$。令 $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_\delta$ 为 Knop 范畴中相应的子范畴。

于是根据 引理 3.36，$\mathcal{T}_2$ 是 $\mathcal{T}_1$ 的一个子范畴，包含 $[X]$ 的所有张量幂，并且 $\mathrm{Hom}([X]^{\otimes a}, [X]^{\otimes b})$ 是 $\mathcal{T}_1$ 中的完整同态空间（当 $a+b$ 为偶数时）；若 $a+b$ 为奇数，则该同态空间为零。这意味着任意对象 $\mathcal{T}_2$ 都可分解为直和 $A = A_0 \oplus A_1$，其中A_i 由 A 中出现在 $[X]^{\otimes a}$ 里的那些不可分解直和项组成（对 a 而言，其奇偶性为 i），并且不同奇偶性的奇偶直和项之间的所有态射均为零。

我们声称，在这两种情况下，S 都是一个全局分裂对象。对于 $\mathbb{T}_1$, ，这是显然的；对于 $\mathbb{T}_2$，则可利用上述奇偶分解得到。

我们还声称，在这两种情况下，每个非零态射 $u\colon\ U \to \mathbf{1}$ 都是 $(u \otimes U - U \otimes u)$ 的余核。对于 $\mathcal{T}_1$, ，这由 [FLP26 的命题 3 得出。10] 因为 $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_\delta$ 是⊕该文献意义下的伪图示的，这由 [FLP26，§ 42] 得出。对于 $\mathcal{T}_2$,，则再次由所讨论的奇偶分解得出。

有了这两个结论，定理 3.27 和 定理 3.28证明的其余部分便可适用。特别是，在定理 3.28 的证明中构造的中心截面适用于所有情况，因此，定理 2.11 利用 Ind(ι^{ab}) 的右伴随给出量子群的断言；如第 2.5 节所回顾的，这个右伴随在阿贝尔范畴层面上总是存在。□

4. Groups in $\underline{\mathrm{Rep}}(S_t)$

Knop 范畴 T = T(A δ) 最早且最著名的例子之一，是复参数 $t \in \mathbb{C}$ 下的 Deligne 范畴 Rep(S_t)（参见 [Del07]）。它的构造方式是取 A = FinSet^{op} 为有限集合的对偶范畴，并取 δ ($e^{\mathrm{op}} : Y \to X$) $= t^{|Y \setminus e(X)|}$ 为集合的单射 $e : X \hookrightarrow Y$。在本节的大部分内容中，我们更具体地令 A 为 FinSet^{op} 的骨架，其对象为 n，其中 $n \in \mathbb{N}_0$。在这种情况下，关系演算 Rel(A) 可用分划图来描述。我们研究 Rel(A) 的群论子范畴，并应用第 3 节中的方法得到它们的阿贝尔包络。

然而，使用 FinSet 的骨架^{op} 会限制群论子范畴的类别。我们将在$\mathcal{A}$ （其与 FinSet 等价）^{op} 中讨论正则范畴的其他选择，但这些选择会在第 4.4 节产生新的子范畴。

4.1. **分划范畴**。 考虑 FinSet 的满骨架子范畴$\mathcal{A}$ ，其由对象^{op}生成 $n := \{1, \dots, n\}$ 对于 $n \in \mathbb{N}_0$。那么， $n \xleftarrow{f} b \xrightarrow{g} m$ 在 Rel($\mathcal{A}$) 中的一个关系就是一个满射 $f \sqcup g : n + m \twoheadrightarrow b$，我们将其视为把 n个上部点和 m 个下部点划分为 b 互不相交的集合，称为块。分划图的垂直复合和水平复合使 Rel($\mathcal{A}$) 成为一个刚性严格幺半范畴。关于这种图示演算的更详细介绍见 [FM21]。我们将使用以下记号和术语：

- 分划图的旋转是指反复应用同构

$$\mathrm{Rel}(\mathcal{A})(\underline{n}, \underline{m}) \cong \mathrm{Rel}(\mathcal{A})(\underline{n \pm 1}, \underline{m \mp 1}).$$

  例如，



- 所谓对分割图施加一个帽，是指与图表 ⋰ ⋱ 复合，其中帽放置在适当的位置。
- 所谓分拆范畴，是指 Rel(A) 的一个刚性幺半子范畴 C，它包含所有对象 n, $n \in \mathbb{N}_0$ ，并且对水平翻转分割图封闭。
- 设 P 为一组分割图。我们用 $\langle P \rangle$ 表示包含 P的最小分拆范畴。
- 如果一个分拆范畴对粗化封闭（即合并分割中的块），我们就称它为群论的。

Rel($\mathcal{A}$) 的一个子范畴是分拆的群论范畴，当且仅当按照定义 3.1的意义，它是一个群论的关系类别。任意一个分拆范畴

都会导出 Rep($\mathcal{C}$ t) 的一个（非满）子范畴，其中 Rep(S_t)。对于 $\mathcal{C}$ 为群论范畴的情形，这恰好就是$\mathcal{C}_{\delta_t}$ 所述的范畴定义 3.2。我们将 n在 Rep($\mathcal{C}$ t) 中的像记为 $[n]$。

Rep($\mathcal{C}$ t) 的构造源于 Banica 和 Speicher 开创的易量子群的构造与分类 [BS09]，并由 Raum 和 Weber 完成（参见 [RW16] 及其中的参考文献）。术语 群论的 反映了这样一个事实：这类分划范畴由无限自由积 $\mathbb{Z}_2^{*\infty}$ 的某些子群所确定。分类结果表明，分划范畴有不可数多个，其中除可数多个以外，其他都是群论的。

引理 4.1 ([RW14，引理 2。3])。 一个分划范畴是群论的，当且仅当它包含划分 。换言之，$\langle P\rangle_{\mathrm{gt}} = \langle P,\ \vdots\ \rangle$ 对于任意划分集 P。

回顾第 3.5 节 可知，划分 $r = $起着特殊作用：若群论范畴 $\mathcal{C}$ 包含 ，则 $\mathcal{C}$ $=$ Rel($\mathcal{A}$) 或 $\mathcal{C}$ $= \langle$ ，$\vdots\ \rangle$，且对于 $t \neq 0$在这些情形下 ι : Rep($\mathcal{C}$ t)$\mapsto$ Rep(S_t) 有一个右伴随。我们可以对包含以下划分的分划范畴进行分类：

引理 4.2。 如果一个包含交叉的群论范畴$\mathcal{C}$ ，那么$\mathcal{C}$ $=$Rel($\mathcal{A}$) 或$\mathcal{C}$ $= \langle$,$\vdots\ \rangle$ 或$\mathcal{C}$ $= \langle\ \vdots\ \rangle$。

证明。 我们有一个（非满）子范畴链

$$\mathcal{C}_0 = \langle\ ,\ \rangle \longhookrightarrow \mathcal{C}_1 = \langle\ ,\ \rangle \longhookrightarrow \mathrm{Rel}(\mathcal{A}).$$

事实上，是通过粗化并将其中两个点向下旋转而从1得到的，因此∈C1。只需证明，C1 是介于C0 和 Rel(A)之间的唯一分拆范畴。

考虑一个包含C0, 的分拆范畴。令 p 为C中的一个划分，令 n 为 p 中奇数大小的块数。通过旋转，不妨假设它只有上部点。通过置换这些点，不妨假设点只有在相邻时才能相连。对大小为 ≥ 2的块应用帽后，不妨假设 p 是由 n个离散点组成的划分。例如，

$\in \mathcal{C} \xRightarrow{\text{rotate}} \in \mathcal{C} \xRightarrow{\text{permute}} \in \mathcal{C} \xRightarrow{\text{apply caps}} \in \mathcal{C}.$

再次应用帽，我们看到，当 $n \geq 2$ 为偶数时有∈ C，而当 n 为奇数时有 ∈ C。总之，我们可以区分三种情况：

- 范畴C0 包含所有布劳尔图及其粗化。因此，它恰好由块大小为偶数的图表组成。如果C中的所有图表都有 $n = 0$ 奇块，那么C $=$C0。
- 范畴C1 包含上下点总数为偶数的所有图表。因此，它恰好由 n 奇数块数量为偶数的图表组成。如果C中的所有图表都有 n 偶数个，但有些图表有 $n > 0$，那么C $=$ C1。
- 最后，如果 C 中某个图表具有 n 奇数，那么 C $=$Rel(A)。 □

引理 4.3。 设$\mathcal{C}$ 为一个划分的群论范畴。如果$\mathcal{C}$ 包含一个具有大小为 *1* 的块的划分p ，那么∈ $\mathcal{C}$。

证明。 通过旋转，不妨设对于某个 n，有 $p \in \mathsf{C}(n,1)$，且唯一的底部点没有与任何其他点相连。对顶部点应用帽后，我们看到，如果 n 为奇数，则 $\in \mathsf{C}$；如果 n 为偶数，则 $\in \mathsf{C}$。 □

4.2. **阿贝尔包络的存在性**。

命题 4.4 (见 [FM21])。 设 $\mathcal{C}$ 是一个划分的群论范畴。那么 $\mathrm{Rep}(\mathcal{C}\ t)$ 是半单的，当且仅当 $t \notin \mathbb{N}_0$。

对于 $\mathcal{C} = \mathrm{Rel}(\mathcal{A})$，这推广了 $\mathsf{Rep}(S_t)$ 的一个基本性质（见 [Del07，定理 2.18]）。对于 $d \in \mathbb{N}_0$，$\mathsf{Rep}(S_d)$ 不是阿贝尔范畴，但存在一个阿贝尔包络 $\mathsf{Rep}^{\mathrm{ab}}(S_d)$（见 [CO14]）。为证明任意群论范畴 $\mathcal{C}$ d的 $\mathsf{Rep}(\mathcal{C}$Assumption 3.11。

注 4.5。 回顾一下，根据 引理 3.36 (b)，包含 的划分的群论范畴只有两个： $\mathcal{C} = \mathrm{Rel}(\mathcal{A})$ 和 $\mathcal{C} = \langle \bullet\ \bullet \rangle_{\mathrm{gt}}$。

引理 4.6. 设 $\mathcal{C}$ 是一个不同于 $\langle \bullet\ \bullet \rangle_{\mathrm{gt}}$的划分的群论范畴。那么 $\mathcal{C}$满足 假设 *3.11*。

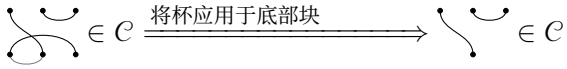
证明。我们首先假设 $\notin \mathsf{C}$。考虑 Rel(A) 中的一个关系 $n \xleftarrow{f} b \xrightarrow{g} m$ 及其对应的分割图。那么，当且仅当该分割图中没有底部块（即没有上部点的块）时， f 在 A 中是单射。

固定一个 n 单射 $f\colon\ n \hookrightarrow m$（即一个集合的满射），并定义 $R_f := r_f$，其中

$$r_f := \min\{i \in \mathbb{N}_0 \mid \exists \text{relation in } \mathcal{C} \text{ of the form } m \xleftarrow{f} n \leftarrow b \rightarrow i\}.$$

这个最小值是良定义的：该集合非空，因为由 $m \xleftarrow{f} n \xhookrightarrow{f} m$ 给出的关系 β_f 是 id_m 的一个粗化，因此属于 C。

我们需要证明 R_f 满足假设 3.11中的性质 (A1) 和 (A2)。考虑 $\mathcal{C}$ 中形如 $m \xleftarrow{f} n \xleftarrow{\varepsilon} b \rightarrow i$的一个关系。我们证明，如果 ε 不是双射，那么 $i > r_f$。如果 ε 不是双射，那么对应的图表有一个底部块。根据引理 4.3，有 $i \geq 2$。因此，我们可以在一个底部块中选取一个点及其一个邻点，并对它们应用一个杯。图示如下：



这会在 $\mathsf{C}(m,\ i-2)$ 中得到一个划分，它与原划分具有相同的顶部连通性，但底部点更少。

这表明 R_f 满足 (A2)。结合 R_f 的定义，在假设 $\notin \mathsf{C}$ 的情况下，这意味着 (A1)。

对于 $\mathsf{C} = \mathsf{Rel(A)}$，定义 $R_f := 0$ 对所有 f 都成立。

备注4.5 意味着，所讨论的特殊情形实际上蕴含了该断言 n. □

在 [CO14中，引理 311] 证明了对象 $\Delta_{d+1} := \mathrm{im}(x(\mathrm{id}^{\lfloor d+1 \rfloor}))$ 将 $\mathsf{Rep}(S_d)$ 中所有态射可分裂。就（奥利戈形的）无限对称群 G 作用

在 $\Omega = \{1, 2, \dots\}$ 上，对象 Δ_{d+1} 对应于 G-集 G/U，其中 U 是逐点固定 1、……、$d+1$ 的子群。它包含于所有 C_δ 中（C 属于 $\subseteq$ Rel(A) 的群论范畴），因为其定义幂等元是恒等图表粗化的线性组合。

推论 4.7。 设 $\mathcal{C}$ 是一个划分的群论范畴。对于 $d \in \mathbb{N}_0$，Δ_{d+1}，一个全局分裂对象已存在于 $\mathrm{Rep}(\mathcal{C}\ d)$ 中，并且 $\mathrm{Rep}(\mathcal{C}\ d)$ 具有足够多射影对象的阿贝尔包络。此阿贝尔包络由 $\mathrm{Rep}(S_d)^{\mathrm{ab}}$ 中的某个量子群的表示给出。

证明。 这是定理 3.38的引理 4.6的应用。 □

4.3. 诠释为量子群。 设 C 是一个划分的群论范畴。推论 4.7 给出一个阿贝尔包络 Rep(C t)^{ab}。定理 3.28证明中的中心截面构造不需要假设 3.11。因此定理 2.11 将 Rep(C t)^{ab} 实现为某个霍普夫代数 Ind-对象在 Rep(S_t)^{ab}中的余模$_{\mathrm{Rep}(S_t)^{\mathrm{ab}}}(H)$，或者也可以实现为 Rep($S_t$)^{ab}中的一个“量子群”。

如果 Rep($\mathcal{C}$ t) 和 ι : Rep($\mathcal{C}$ t) $\to$ Rep(S_t) 是对称的，H 就会成为交换霍普夫代数，因此可以被视为 Rep(S_t)^{ab}上的仿射群的坐标环。为了满足对称性，我们需要 $\in\mathcal{C}$；根据 引理 4.2，这意味着 $\mathcal{C}$ 是以下分割范畴之一：

- 对于 C =Rel(A)，我们有 $H\mathcal{C} = \mathbf{1}$，这对应于平凡群。
- 对于 C = $\langle \cdot \rangle_{\mathrm{gt}}$，以及 $t \neq 0$，我们有 $H = \iota(H\mathcal{C}) = \mathbf{1} \oplus \mathrm{im}(t^{-1}) \cong \mathbf{1} \oplus \mathbf{1} \cong$O($S_2$) in Rep($S_t$)。因此，Rep(C t)$_{\mathrm{ab}}$ 对应于在 Rep(S_t)$_{\mathrm{ab}}$上定义的离散群 S_2。注意，对于一般的 t，范畴 Rep(C t) 插值于表示范畴 Rep($S_2 \times S_n$) = Rep$_{\mathrm{Rep}(S_n)}(S_2)$（其中 $n \geq 1$）。
- 对于 C = $\langle \times \rangle_{\mathrm{gt}}$，我们有 $H = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}_0} \mathrm{im}(e_n)$，其中 e_n 是由下式给出的 $[n]$的幂等自同态：

$$e_n := \left(\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}\sigma\right) x(\mathrm{id}_{[n]}). \tag{7}$$

下面我们将证明，霍普夫代数 H 同构于 $\Bbbk[S_2]^{\otimes t}$；该对象在 $t = d \in \mathbb{N}_0$ 处半单化后变为群代数$\Bbbk[S_2]^{\otimes d} = \Bbbk[S_2^d]$，或者等价地，变为 S_2^d上的函数代数。因此，Rep(C t)^{ab}可以被视为“Rep(S_t)^{ab}上的群 S_2^t 的表示”。

在 [Eti14], 处构造了一个对称幺半函子 $(-)^{\otimes t}$: UVect $\to$ Ind(Rep(S_t))，其中 $t \notin \mathbb{N}_0$，UVect 是由 $\mathbb{C}$-向量空间组成的范畴，这些向量空间带有一个指定的非零向量，并且态射为保持该向量的线性映射。它将函子 $(-)^{\otimes d}$: UVect $\to$Rep(S_d) 插值为 $d \in \mathbb{N}_0$。由于它是对称幺半函子，它将代数映为代数，将霍普夫代数映为霍普夫代数。注意，该函子不是线性的。

命题 4.8 (参见 [Eti14，命题 4.3])。 对于一个含幺 $\Bbbk$-代数 A，考虑张量代数 $T_A := T(A \otimes [1])$ 及其分次部分 $T_A^i := (A \otimes [1])^{\otimes i}$。则代数 $A^{\otimes t}$

是 T_A 对由以下态射的像生成的理想取商所得的商代数

$$r_1 = \eta_A \otimes \mathrm{id}_{[1]} - \text{'}: [1] \to T_A^1 \oplus T_A^0,$$
$$r_2 = \mu_A \otimes \mathrm{id}_{[1]} - \sigma_{23}(\mathrm{id}_{A\otimes A} \otimes \text{⅄}) : A \otimes A \otimes [1] \to T_A^1 \oplus T_A^2,$$
$$r_3 = \mathrm{id} - \sigma_{13}\sigma_{24} - ([-,-]_A \otimes \text{Y})\sigma_{23} : A \otimes [1] \otimes A \otimes [1] \to T_A^1 \oplus T_A^2.$$

这里， η_A、 μ_A 和 $[,]_A$ 分别表示 A的单位、乘法和换位子，而 σ_{ij} 交换第 i个和第 j个张量因子。 r_1 中的项取值于 $T_A^0 = \mathbf{1}$；它将 A 的单位与张量代数的单位相对应。

对于 $t \in \mathbb{N}_0$，我们通过这个表示在 Ind(Rep(S_t)^{ab}) 中定义 $A^{\otimes t}$ 。

引理4.9。 考虑 $A = \Bbbk[S_2]$。霍普夫代数 $A^{\otimes t}$ 同构于$T([1])$ 除以由以下各项的像生成的理想

$$s_1 = \mathrm{id}_{[2]} - \text{X} : [2] \to [2], \qquad s_2 = \text{⅄} - \text{'} : [1] \to [2] \oplus [0].$$

余乘法和余单位分别由和诱导。 ⅄ '

证明。记 $A := \Bbbk[S_2] = \Bbbk[z]/(z^2 - 1)$ 和 $A \otimes [1] = 1 \otimes [1] \oplus z \otimes [1]$。我们使用命题 4.8 中 $A^{\otimes t}$ 的表示。令 $Q = T([1])/(s_1, s_2)$，并令 $j\colon [1] \to Q$ 为典范态射，$\eta_Q\colon \mathbf{1} \to Q$ 为单位。由 $A \otimes [1] \to Q$ 在 $1 \otimes [1]$ 上取 η_Q、在 $z \otimes [1]$ 上取 j 所给出的态射诱导出一个代数态射 $\sigma\colon$ $A^{\otimes t} \to Q$：关系 r_1 由定义成立， r_2 由 s_2 和余单位恒等式推出，而 r_3 由 s_1 推出。

反过来，包含 $z \otimes [1] \subseteq A \otimes [1]$ 诱导出一个代数态射 $\tau\colon Q \to A^{\otimes t}$。事实上， r_3 给出 s_1，而 r_2 在 $z\otimes z\otimes[1]$上的取值与 r_1一起给出 s_2。这些关系表明，复合 $\sigma\tau$ 和 $\tau\sigma$ 在生成元上均为恒等映射。可在生成元 $z \otimes [1]$ 上验证， τ 保持余乘法和余单位，因此是 Hopf 代数的同构。□

命题 4.10. 考虑由块大小为偶数的划分构成的范畴$\mathcal{C} = \langle \text{X} \rangle_{\mathrm{gt}}$ 。那么$\mathrm{Rep}(\mathcal{C}\ t)^{\mathrm{ab}} \cong$ 余模 $\mathrm{Rep}(S_t)^{\mathrm{ab}}(H)$，其中 H 是霍普夫代数 $\Bbbk[S_2]^{\otimes t} \in \mathrm{Ind}(\mathrm{Rep}(S_t)^{\mathrm{ab}})$。

证明。简记 $\mathsf{C}_t := \mathrm{Rep}(\mathsf{C}\ t)$ 和 $\mathsf{S}_t := \mathrm{Rep}(S_t)$。我们证明，引理4.9中的霍普夫代数$T([1])/(s_1, s_2)$ 与定理 2.12 中的霍普夫代数 $T(W)/\ker(\psi)$ 同构，其中我们选取 $W' = [1] \in \mathsf{C}_t$ 和 $W = [1]$，其余代数结构为$\Delta =$和 $\varepsilon =$。态射 $\Delta'\colon W' \to W' \otimes J(W)$ 由一个上方有一个点、下方有三个点的单块给出。在识别 $\iota J(W) \cong W$ 下，它的像是 Δ。为明确描述 ψ，回顾一下，$\mathrm{Ind}(\iota : \mathsf{C}_t \to \mathsf{S}_t)$ 的右伴随由以下同构构造而成

$$\mathrm{Ind}(\mathcal{C}_t)\left(-, \bigoplus_{n\geq 0} \mathrm{im}(e_n)\right) \cong \mathrm{Ind}(\mathcal{S}_t)\left(\mathrm{Ind}(\iota)(-), [0]\right) \tag{8}$$

由命题 3.23可知。这里 e_n 是公式（7）中给出的幂等元公式（7）。对于固定的$k \geq 0$，考虑如下形式的划分 f： $[k] \to [0]$ 其中 $o(f)$ 个块为奇块。该划分

$s_f\colon [k] \to [o(f)]$ 将 f 的每个奇块与一个新的底部点相连。根据方程（8），M¨obius 基元素 $x(f)\colon [k] \to [0]$ 的原像为$e_{o(f)}x(s_f)$。M¨obius 反演表明$\varepsilon^{\otimes k} = \sum_{f\colon [k]\to[0]} x(f)$，因此 $\varepsilon^{\otimes k}$ 在方程（8）下的伴随对应态射为

$$\varepsilon^{\otimes k,\perp} = \sum_{f:[k]\to[0]} \left(e_{o(f)}x(s_f) : [k] \to \operatorname{im}(e_{o(f)})\right).$$

在分次部分 $[k]$ 上，态射 $\psi\colon T([1]) \to \bigoplus_{n\geqslant 0} \operatorname{im}(e_n)$ 由 $\varepsilon^{\otimes k,\perp}$ 给出。特别地，我们有 $\varepsilon^{\otimes 0,\perp} = \mathrm{id}_{\operatorname{im}(e_0)} = \mathrm{id}_{[0]}$ 以及 $\varepsilon^{\otimes 2,\perp} = \bullet\bullet + e_2\colon [2] \to [0] \oplus \operatorname{im}(e_2)$。因此

$$\psi \circ s_1 = \varepsilon^{\otimes 2,\perp} - \varepsilon^{\otimes 2,\perp} \circ \times = \smile - \times + e_2 - e_2 \circ \times = 0$$

and

$$\psi \circ s_2 = \varepsilon^{\otimes 2,\perp} \circ \curlywedge - \varepsilon^{\otimes 0,\perp} \circ \bullet = \curlywedge + e_2 \circ \curlywedge - \bullet = 0.$$

总之，ψ 因子分解为

$$\begin{array}{ccc} T([1]) & \xrightarrow{\quad\psi\quad} & \bigoplus_{n\geq 0} \operatorname{im}(e_n)。 \\ & {\scriptstyle q}\searrow \quad \nearrow{\scriptstyle \overline{\psi}} & \\ & T([1])/(s_1,\ s_2) & \end{array}$$

ψ 的一个截面由态射 $\varphi\colon \bigoplus_n \operatorname{im}(e_n) \to T([1])$ 给出，其中每个 $\operatorname{im}(e_n) \subseteq [n]$都作为直和项包含在内。事实上，在复合 $\varepsilon^{\otimes n,\perp}e_n$中，除属于 $\otimes n$的最细划分外，其余每个直和项都被消去，因此 $\varepsilon^{\otimes n,\perp}e_n = \mathrm{id}_{\operatorname{im}(e_n)}\circ \bullet$ 剩下需要证明 $q\varphi\psi = q$。

对于固定的 k 和一个划分 $f\colon [k] \to [0]$，考虑态射 $qx(\beta_f)$。利用对称关系 s_1，我们可以重新排列 β_f 的底部块，使相连的底部点彼此相邻。接下来，反复对每个块应用关系 s_2，每次成对删除相连的底部点。这样，f的每个奇块留下一个底部点，而每个偶数块都不留下底部点。由此可见，$qx(\beta_f) = q\varphi e_{o(f)}x(s_f)$。因此

$$q\,\mathrm{id}_{[k]} = q \sum_{f:[k]\to[0]} x(\beta_f) = q\varphi \sum_{f:[k]\to[0]} e_{o(f)}x(s_f) = q\varphi\varepsilon^{\otimes k,\perp},$$

因此 $q = q\varphi\psi = \overline{q}\varphi\psi q$。由于 q 是满态射，$q\varphi\psi = \mathrm{id}$。结合 $\psi q\varphi = \psi\varphi = \mathrm{id}$，这表明 ψ 是一个同构，其逆为 $q\varphi$。□

4.4. FinSet 的其他实现 FinSet^{op}。我们可以用另一个仍与 FinSet^{op} 等价的范畴替换 A。具体而言，考虑一个非空字母表 A 上的单词 $\mathbf{v} = v_1 \dots v_n$，以及集合 $[\mathbf{v}] := \{(1, v_1) \dots, (n, v_n)\}$。令 B 为 FinSet^{op} 的满子范畴，它由集合 $[\mathbf{v}]$ 张成，其中 $\mathbf{v}$ 遍历 A^* 中的所有单词，并选定直积$[\mathbf{v}] \times [\mathbf{w}] = [\mathbf{vw}]$（单词的拼接）。

Rel(B) 中的一个关系 $[\mathbf{v}] \xleftarrow{f} [\mathbf{b}] \xrightarrow{g} [\mathbf{w}]$ 是集合的一个商 $f \sqcup g\colon [\mathbf{vw}] \twoheadrightarrow [\mathbf{b}]$。它不取决于单词 $\mathbf{b}$ 本身，而只取决于其长度。换言之，一个关系可以表示为一个分割图，其上下两排的点分别标记为字母表中的元素A。当 A 取单元素集合时，我们得到无标号分割 Rel(A)。作为一个范畴，B 与

A 和 $\mathrm{FinSet}^{\mathrm{op}}$等价，但与 Rel(A) 相比，我们在 Rel(B) 中发现了新的群论子范畴。

例 4.11。 假设字母表 A 由两个元素 $\{a,b\}$ 组成，并考虑 Rel(B) 的子范畴$\mathsf{C} = \langle \begin{smallmatrix} a & a \\ \bullet & \bullet \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} b & b \\ \bullet & \bullet \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} a & b \\ \times & \end{smallmatrix} \rangle_{\mathrm{gt}}$。同色交叉可由双单点生成元经粗化和旋转得到，因此 C 是对称的。为每个单词赋予其在 $\Gamma = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$中的颜色奇偶度。于是，C 恰由上下单词度数相同的所有分割组成：所有生成元和闭包运算都保持该度数，而每个这样的分割都可通过重排和旋转双单点生成元的积，再进行粗化得到。

For $t \neq 0$，函子 $\iota : \mathsf{C}_t \to \mathsf{Rep}(\underline{S_t})$ 有一个右伴随，它将 $\mathbf{1}$ 映到对象

$$H_{\mathcal{C}} = \mathbf{1} \oplus \operatorname{im}\left(t^{-1} \begin{smallmatrix} a \\ \bullet \\ \bullet \\ a \end{smallmatrix}\right) \oplus \operatorname{im}\left(t^{-1} \begin{smallmatrix} b \\ \bullet \\ \bullet \\ b \end{smallmatrix}\right) \oplus \operatorname{im}\left(t^{-1} \begin{smallmatrix} a & b \\ \smile & \frown \\ a & b \end{smallmatrix}\right)$$

事实上，这四个直和项 E_g由 $g \in \Gamma$索引，度数各不相同，并满足$\iota(E_g) \cong \mathbf{1}$。每个度数内的态射空间与 $\mathsf{Rep}(S_t)$ 中的相同，而不同度数之间的态射则为零。因此——

$$\mathcal{C}_t(-, H_{\mathcal{C}}) \cong \underline{\mathrm{Rep}}(S_t)(\iota(-), \mathbf{1}).$$

刚性与支配性于是给出了所断言的右伴随。

这些直和项满足 $E_g \otimes E_h \cong E_{g+h}$，且 C_t 可识别为 $\mathsf{Rep}(S_t)$ 中 Γ 分次对象的范畴，其中 ι 忘记分次。因此， $\iota(H_{\mathcal{C}}) \cong \Bbbk[\Gamma] \cong \mathsf{O}(\Gamma)$ 是 $\mathsf{Rep}(S_t)^{\mathrm{ab}}$ 上克莱因四元群的坐标代数。这样的群并非来自 Rel(A) 的群论子范畴。 ——

5. $\mathsf{Rep}(G \wr S_t)$ 中的群

第 4 节中的结论可以稍作推广：不再考虑 $\mathrm{FinSet}^{\mathrm{op}}$，而考虑固定有限群 G 的有限秩自由 G-集合范畴的对偶范畴。其骨架 A 由有限余积 $G^{\sqcup n}$ for $n \in \mathbb{N}_0$ 组成。记 $\ell_0(G^{\sqcup n}) := n$，则 A 上所有次数函数都具有如下形式： $\delta(e^{\mathrm{op}} : Y \to X) = t^{\ell_0(Y \setminus e(X))}$，其中 $e : X \hookrightarrow Y$ 是有限自由 G-集合之间的单射，且 $t \in \Bbbk$ 固定。范畴 T(A δ) 插值缠绕积的表示范畴 $\mathsf{Rep}(G \wr S_n)$ [Kno07, § 9] 中的例 2，因此也记作 $\mathsf{Rep}(G \wr S_t)$。当且仅当 $t \notin \mathbb{N}_0|G|$ [Kno07, § 8] 中的例 2 时，它们是半单的。

关系演算 $\mathsf{Rel}(\mathcal{A})$ 已在 G-分割 的意义下于 [NLS21, § 3]中进行了描述。一个 G-分割图是一个分割图（其 形状），其中上点和下点标记为 G的元素。若对于每个块，一个图的标记都可以通过与某个固定群元素相乘而由另一个图的标记得到，则称两个 G-分割图等价。$\mathsf{Rel}(\mathcal{A})$ 中的关系及其复合，恰好分别对应于 G-分割图的等价类及其复合。

群论子范畴 $\mathsf{C} \subseteq \mathsf{Rel(A)}$ 包含所有形如以下形式的 G-分割图



$$\text{for all } a, b \in G.$$

因此，$\mathcal{C}$ 完全由其所包含的 G-分割图的形状决定；也就是说，如果一个 G-分割图属于$\mathcal{C}$，那么所有 G具有相同形状的分割图也属于$\mathcal{C}$。因此，与第4.1 节和第4.2 节中的论证相同，可以说明$\mathcal{C}$ 满足假设 3.11，前提是它不包含双单元素关系。利用 [FHH26第§4.2], 节中的以下结论，我们可以推得$\mathcal{C}_\delta$ 具有阿贝尔包络。

对于 $t \in \Bbbk$ 和 $n \in \mathbb{N}_0$，考虑这些元素

$$x_n \coloneqq x(\mathrm{id}_{G^{\sqcup n}}), \qquad e_n \coloneqq \frac{1}{n!}\sum_{\sigma \in S_n} \sigma, \qquad \omega_n \coloneqq \frac{1}{|G|^n} \sum_{g_1,\dots,g_n \in G} \overset{1}{\underset{g_1}{\bullet}} \cdots \overset{1}{\underset{g_n}{\bullet}}.$$

于是 $e \coloneqq x_n e_n \omega_n$ 是 $\mathsf{Rep}(G \wr S_t)$ 中的一个幂等元，我们记 $\Delta_n \coloneqq \mathsf{im}(e)$。存在一个幺半结构“限制”函子

$$\underline{\mathrm{Rep}}(G \wr S_t) \longrightarrow \underline{\mathrm{Rep}}(G \wr S_{t-n|G|}) \boxtimes \mathrm{Rep}(G \wr S_n),$$

它有一个双边伴随，将 $\mathbf{1} \mapsto \Delta_n$送到该对象。

现在考虑 $d \in \mathbb{N}_0|G|$ 和 $n = d + 1$。此时 $\mathsf{Rep}(\underline{G \wr S_d})$ 不是阿贝尔范畴，但 $\mathsf{Rep}(\underline{G \wr S_{d-n|G|}}) \boxtimes \mathsf{Rep}(G \wr S_n)$ 甚至是半单的。由引理 2.8，这意味着 $\Delta_n = \Delta_{d+1}$是 $\mathsf{Rep}(G \wr S_d)$ 中的一个全局分裂对象，因此后者具有一个含有足够多射影对象的阿贝尔包络。对于任意群论子范畴 $\mathsf{C} \subseteq \mathsf{Rel(A)}$，在定理 3.28 的证明中构造的函子$J\colon \mathsf{T} \to \mathsf{C}_\delta$给出一个提升 $J(\Delta_n)$，满足 $\iota J(\Delta_n) \cong \Delta_n$。其构造不需要阿贝尔包络，而且对称化子 e_n 本身不必属于 C_δ。

推论 5.1。 令 $d \in \mathbb{N}_0|G|$，其对应的次数函数为 δ。对于任意群论子范畴 $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{Rel}(\mathcal{A})$，伪张量范畴 $\mathcal{C}_\delta$ 具有一个全局分裂对象，该对象在 ι 下的像与$\mathcal{T}$中的 Δ_{d+1} 同构。它具有一个带有足够多射影对象的阿贝尔包络，该包络由$\mathrm{Rep}(G \wr S_d)^{\mathrm{ab}}$中的某个量子群的表示给出。

证明。 这由定理 3.38 结合 $S = J(\Delta_{d+1})$ 得出。 □

备注 5.2。 我们可以考虑所有有限的 G-集合，而不是自由的 G-集合。所得的 Knop 范畴及其插值性质已在 [EAH24，§ 3.51]中进行了研究。不同于 $\mathsf{FinSet}^{\mathrm{op}}$ 和 $G\text{–}\mathrm{FreeFinSet}^{\mathrm{op}}$（其中所有对象都是单个原子对象的直积（第 3.5 节）），范畴 $G\text{–}\mathrm{FinSet}^{\mathrm{op}}$ 对每个传递 G-集合的同构类都有一个原子。我们考虑 $G\mathrm{FinSet}^{\mathrm{op}}$ 的以下实现，它允许使用图示演算。

令 $A = \{T_1, \dots, T_r\}$ 为传递 G-集的同构类的一组完备代表。对于字母表 A 上的每个单词 $\mathbf{v} = T_{i_1} \cdots T_{i_n}$，定义如下 G-集

$$[\mathbf{v}] \coloneqq \{(t, j) \mid j \in \{1, \dots, n\}, t \in T_{i_j}\} \cong \bigsqcup_{j=1}^{n} T_{i_j}$$

并令 A 为由此类 $[\mathbf{v}]$ 张成的 G-Set^{op} 的满子范畴。它是一个正则范畴，其积由 $[\mathbf{v}]\times[\mathbf{w}]:=[\mathbf{vw}]$ 给出（即单词的拼接）。对于单词 $\mathbf{v}=T_{i_1}\cdots T_{i_n},\mathbf{w}=T_{\ell_1}\cdots T_{\ell_m}$，A 中的态射 $[\mathbf{v}]\to[\mathbf{w}]$ 由集合映射 $f\colon\{1,\dots,m\}\to\{1,\dots,n\}$ 以及 G-集的态射 $\varphi_j\colon T_{\ell_j}\to T_{i_{f(j)}}$ 唯一确定，而这些态射必为满射。Rel(A) 中的关系可表示为一个分割图，其中块由 A 的元素标记，顶点由 $(T_i,\varphi\colon T_i\to T_j)$ 标记；其中 T_j 是该顶点所连接的块的标签，而 φ 是 G-集的一个态射。

设 $\mathcal{C}$ 是 Rel($\mathcal{A}$) 的群论子范畴。如 第4.2节中一样，我们再次可以定义单射 R_f 的秩 $f\colon\ [\mathbf{v}]\to[\mathbf{w}]$，将其定义为满足以下条件的最小长度对象 $[\mathbf{u}]$：存在关系 $[\mathbf{w}]\xleftarrow{f}[\mathbf{v}]\twoheadleftarrow[\mathbf{b}]\to[\mathbf{u}]$ 属于 $\mathcal{C}$。如果对于所有此类关系，底层划分图都没有下部块，则 假设 3.11 成立。我们不知道对于群论子范畴 $\mathcal{C}$的所有选择，这是否成立；例如，在排除 $\langle\,\bullet\,\bullet\,\rangle_{\mathrm{gt}}$ 作为底层群论划分范畴之后。

6. Groups in Rep(GL$_t$) and Rep(Aff$_t$)

在本节中，我们考察有限域 $\mathbb{F}=\mathbb{F}_q$ 上的有限维向量空间以及 $\mathbb{F}$上的有限维仿射空间所构成的正则范畴。它们的骨架分别记为 A 和 B，由对象 $\mathbb{F}^n$（其中 $n\in\mathbb{N}_0$）组成。对于每个 $t\in\Bbbk$，我们都有一个次数函数 δ_t，它将满射线性映射或仿射映射 $\varepsilon\colon\mathbb{F}^n\twoheadrightarrow\mathbb{F}^m$ 映射到 $\delta_t(\varepsilon)=t^{n-m}$。

我们首先考察 Rel(A) 与 Rel(B) 之间的关系。我们将仿射映射$\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^m$ 记作 $f(-)+t$，其中 $f\colon\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^m$ 是线性的，而 $t\in\mathbb{F}^m$ 是平移向量。

引理 6.1. 映射

$$\Phi:\mathrm{Rel}(\mathcal{B})\longrightarrow\mathrm{Rel}(\mathcal{A}),\qquad\left(\mathbb{F}^n\xleftarrow{f(-)+s}\mathbb{F}^b\xrightarrow{g(-)+t}\mathbb{F}^m\right)\longmapsto\left(\mathbb{F}^n\xleftarrow{f}\mathbb{F}^b\xrightarrow{g}\mathbb{F}^m\right)$$

在$\mathrm{Rel}(\mathcal{B})$ 与$\mathrm{Rel}(\mathcal{A})$的群论子范畴集合之间分别诱导出一个双射。

证明。这是因为群论子范畴 C $\subseteq$Rel(B) 必须包含所有形如 $\mathbb{F}^n\xleftarrow{=}\mathbb{F}^n\xrightarrow{+t}\mathbb{F}^n$ 的关系，其中 $n\in\mathbb{N}_0$ 和 $t\in\mathbb{F}^n$任意。这些关系是 Rel(B) 中的自同构，并且我们有

$$\left(\mathbb{F}^n\xleftarrow{f(-)+s}\mathbb{F}^b\xrightarrow{g(-)+t}\mathbb{F}^m\right)=\left(\mathbb{F}^m\xleftarrow{=}\mathbb{F}^m\xrightarrow{+t}\mathbb{F}^m\right)\circ\left(\mathbb{F}^n\xleftarrow{f}\mathbb{F}^b\xrightarrow{g}\mathbb{F}^m\right)\circ\left(\mathbb{F}^n\xleftarrow{+s}\mathbb{F}^n\xrightarrow{=}\mathbb{F}^n\right)$$

对 Rel(A) 中的所有关系 $\mathbb{F}^n\xleftarrow{f}\mathbb{F}^b\xrightarrow{g}\mathbb{F}^m$ 以及所有 $s\in\mathbb{F}^n,\ t\in\mathbb{F}^m$均成立。 □

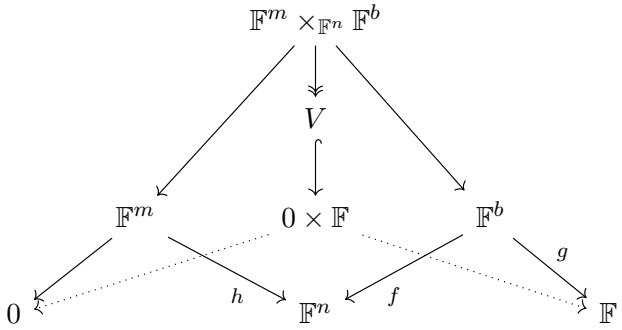
回忆第 3.5 节中的关系

$$r:=\left(\mathbb{F}^2\xleftarrow{=}\mathbb{F}^2\to 0\right)$$

在类似于 Rep(S_t) 的划分中发挥着特殊作用。 ' '

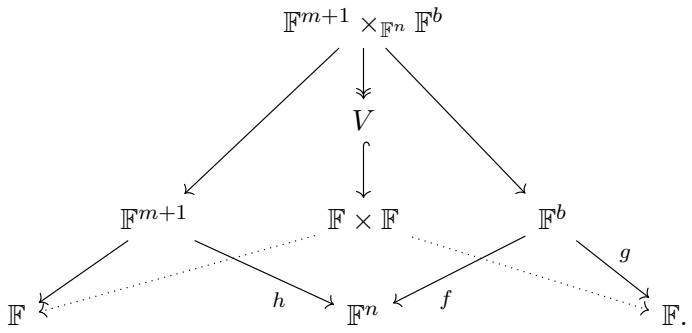
引理 6.2。 设 $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{Rel}(\mathcal{A})$ 是一个群论子范畴。如果 $\mathcal{C}$ 包含一个形如 $\mathbb{F}^n \xleftarrow{f} \mathbb{F}^b \xrightarrow{g} \mathbb{F}$ 且 f 不是单射的关系，那么 $r \in \mathcal{C}$。对于 $\mathrm{Rel}(\mathcal{B})$ 的群论子范畴，同样成立。

证明。 根据 引理 6.1，只需在 $\mathbf{Rel}(\mathcal{A})$ 中进行讨论。令 $0 \neq v \in \ker(f)$。由于 f， g 是联合单射，因此有 $g(v) \neq 0$。我们先考察 $n = 2m$ 为偶数的情形。记 $c^{\otimes m} \in \mathcal{C}(0, \mathbb{F}^n)$ 为帽的 m 重张量积，并考察它与关系 $\mathbb{F}^n \xleftarrow{f} \mathbb{F}^b \xrightarrow{g} \mathbb{F}$的复合：



纤维积 $\mathbb{F}^m \times_{\mathbb{F}^n} \mathbb{F}^b$ 包含向量 $(0, v)$。它在 V 中的像是非零向量 $(0, g(v))$。因此，复合得到关系 $0 \leftarrow \mathbb{F} \rightrightarrows \mathbb{F}$。与之前一样，这表明 C 包含所有关系。

若 $n = 2m+1$ 为奇数，考虑 $c^{\otimes m} \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{F}}$ 与关系 $\mathbb{F}^n \xleftarrow{f} \mathbb{F}^b \xrightarrow{g} \mathbb{F}$的复合：



再次，纤维积 $\mathbb{F}^{m+1} \times_{\mathbb{F}^n} \mathbb{F}^b$ 包含向量 $(0, v)$，因此 V 包含非零向量 $(0, g(v))$。于是，复合要么是关系 $\mathbb{F} \leftarrow \mathbb{F}^2 \rightarrow \mathbb{F}$ （r的旋转），要么是关系 $\mathbb{F} \xleftarrow{0} \mathbb{F} \rightrightarrows \mathbb{F}$。后一种情况下，$\mathsf{C}$ 还必须包含 $\mathbb{F}^2 \xleftarrow{0} \mathbb{F}^2 \rightrightarrows \mathbb{F}^2$。再与一个杯复合，我们看到 $0 \leftarrow \mathbb{F}^2 \rightrightarrows \mathbb{F}^2$ 属于 C，得证。□

引理 6.3。 假设 $\mathbb{F}$ 包含多于两个元素。设 $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{Rel}(\mathcal{A})$ 或$\mathcal{C} \subseteq \mathrm{Rel}(\mathcal{B})$ 是一个不包含 r 的群论子范畴。那么 $\mathcal{C}$ 满足 假设 *3.11*。

证明。同样，只需在 Rel($\mathcal{A}$) 中进行讨论：容易验证，如果 $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{Rel}(\mathcal{B})$ 是群论的，并且 $\Phi(\mathcal{C}) \subseteq \mathrm{Rel}(\mathcal{A})$ 满足 假设 3.11，那么 $\mathcal{C}$ 也满足该假设。

因此，我们固定一个群论子范畴 C $\subseteq$Rel(A) 以及一个单射线性映射f： $\mathbb{F}^n \hookrightarrow \mathbb{F}^m$ 并定义 $R_f := \mathbb{F}^{r_f}$，其中

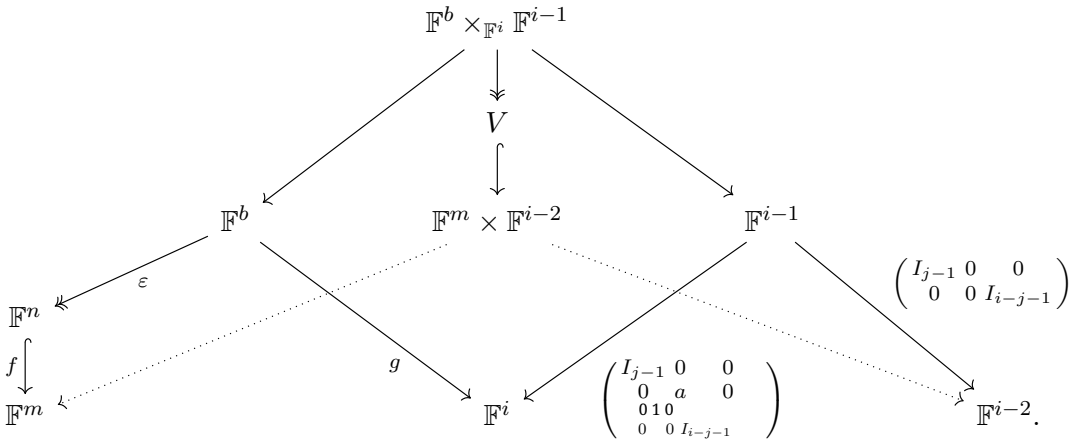
$$r_f := \min\{i \in \mathbb{N}_0 \mid \exists \text{relation in } \mathcal{C} \text{ of the form } \mathbb{F}^m \overset{f}{\hookleftarrow} \mathbb{F}^n \twoheadleftarrow \mathbb{F}^b \to \mathbb{F}^i\}.$$

该最小值定义良好：该集合非空，因为由$\mathbb{F}^m \overset{f}{\hookleftarrow} \mathbb{F}^n \overset{f}{\hookrightarrow} \mathbb{F}^m$ 给出的关系 β_f 是 $\mathrm{id}_{\mathbb{F}^m}$ 的一个粗化，因此包含于 C 中。

我们需要证明 R_f 满足假设 3.11中的性质 (A1) 和 (A2)。考虑 $\mathcal{C}$ 中形如 $\mathbb{F}^m \overset{f}{\hookleftarrow} \mathbb{F}^n \overset{\varepsilon}{\twoheadleftarrow} \mathbb{F}^b \overset{g}{\to} \mathbb{F}^i$的关系。我们假设 ε 不是双射，并推导出 $i > r_f$。根据 引理 6.2，我们有 $i \geq 2$。注意，根据定义，$\mathcal{C}$ 包含关系 $\mathbb{F} \overset{\cdot a}{\leftarrow} \mathbb{F} \overset{=}{\to} \mathbb{F}$ 对所有 $a \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$均成立。它还包含旋转版本

$$c_a := \left(0 \leftarrow \mathbb{F} \xrightarrow{\binom{a}{1}} \mathbb{F}^2\right).$$

选择 $0 \neq u \in \ker(\varepsilon)$。由于 $f\varepsilon$ 和 g 是联合单射的，因此 $g(u) \neq 0$。域 $\mathbb{F}$包含多于两个元素，所以我们可以选择 $j \in \{1, \ldots, i-1\}$ 和 $a \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$，使得 $g(u)_j \neq ag(u)_{j+1}$，并考虑将 $\mathrm{id}_{\mathbb{F}^{j-1}} \otimes c_a^T \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{F}^{i-j-1}}$ 与$\mathbb{F}^m \overset{f}{\hookleftarrow} \mathbb{F}^n \overset{\varepsilon}{\twoheadleftarrow} \mathbb{F}^b \overset{g}{\to} \mathbb{F}^i$复合。



我们证明，复合关系的顶端也为 f，也就是说， $V \hookrightarrow \mathbb{F}^m \times \mathbb{F}^{i-2} \to \mathbb{F}^m$ 的像恰好是 f 的像。对于一个向量 $v \in \mathbb{F}^b$，我们需要找到 V 中的一个元素，使其在 $\mathbb{F}^m$ 中的像为 $f\varepsilon(v)$。考虑向量 $v' := v + {}^{g}\,{}_{(ag}\,{}^{v}\,{}_{j-ag}\,{}^{v}\,{}_{j+1}\,{}_{j+1}{}^{-g}\,{}^{u}\,{}_{j}\,{}^{)}\,{}_{(}\,{}_{)}\,{}_{(}\,{}_{)}\,{}_{(}\,{}_{)}\,{}_{j}\,{}^{u}$。我们有

$g(v')_j = {}^a g(v')_{j+1}$，所以

$$w \coloneqq (v', g(v')_1, \dots, \widehat{g(v')_j}, \dots, g(v')_i) \in \mathbb{F}^b \times \mathbb{F}^{i-1}$$

包含于纤维积 $\mathbb{F}^b \times_{\mathbb{F}^i} \mathbb{F}^{i-1}$ 中。根据构造，其在 $\mathbb{F}^m$ 中的像是 $f\varepsilon(v') = f\varepsilon(v)$。这表明 R_f 满足 (A2)。结合 R_f 的定义，即可推出 (A1)。□

引理 6.4。与寡形群 $(\mathcal{A}\ \delta_t)$ 或 $(\mathcal{B}\ \delta_t)$相对应的测度，在构造*3.29* 和 *3.31* 下均为准正则。

证明。对于正则范畴 $\mathcal{A}$，群为 $G := \mathrm{Aut}_{\mathbb{F}}(\Omega)$，它在向量空间 Ω 上寡形地作用：$= \bigcup_{i\geq 0} \mathbb{F}^i$。其稠密子群 $\bigcup_{i\geq 0} \mathrm{GL}_i(\mathbb{F})$ 具有相同的光滑有限集和测度，因此根据 [HS24，命题 15，其测度均为准正则。14]。

对于正则范畴 B，使用等价 $\mathrm{B} \simeq \mathrm{A}//\mathbb{F}$，它将满射 $\lambda\colon E \twoheadrightarrow \mathbb{F}$映至仿射空间 $\lambda^{-1}(1)$（参见 [Kno07，第 2 节，例 4]）。由于 $\dim \lambda^{-1}(1) = \dim E - 1$，该等价将 δ_t 与从 A 继承的次数函数对应起来。设 μ 为与 G 相对应的测度 δ_t。根据命题 3.33(b) 的证明，与 $\mathrm{A}//\mathbb{F}$ 相关联的群和测度分别是开子群 $U \subseteq G$ 和 $\mu|_U$。取一个开子群 $V \subseteq G$，使得 $\mu|_V$ 是正则的。于是 $\mu|_{U\cap V}$ 是正则的，因此 $\mu|_U$ 是准正则的。□

命题 6.5。对于$\mathcal{T}(\mathcal{A}\ \delta_t)$ 和$\mathcal{T}(\mathcal{B}\ \delta_t)$中的每一个，都存在一个全局分裂对象，它属于分别对应于$\mathrm{Rel}(\mathcal{A})$ 和$\mathrm{Rel}(\mathcal{B})$的任意群论子范畴的嵌入像。

证明。这是引理 6.4下命题 3.35 的特殊情形。□

命题 6.6。假设 $\mathbb{F}$ 包含两个以上的元素且 $t \in \Bbbk$。对于$\mathcal{C} \subseteq \mathrm{Rel}(\mathcal{A})$ 或$\mathcal{C} \subseteq \mathrm{Rel}(\mathcal{B})$中的群论子范畴，范畴$\mathcal{C}\delta_t$ 具有一个阿贝尔包络，且其中有足够多的射影对象。

证明。这是在命题 6.5 和 引理 6.3的基础上得到的定理 3.38 。□

References

[AKO02] Y. Andr´e、B. Kahn 和 P. O'Sullivan，*Nilpotence，radicaux et structures monoïdales*，2002。[BEO23] D. Benson、P. Etingof 和 V. Ostrik，*New incompressible symmetric tensor categories in positive characteristic* **172** 2023 1, 105 200 ，《杜克数学杂志》（），第 – 号。[BLV11] A. Brugui`eres 、 S. Lack 和 A. Virelizier，*Hopf monads on monoidal categories*，《数学进展》 227 （ 2011 ），第 2 号，745–800。[BS09] T. Banica 和 R. Speicher，*Liberation of orthogonal Lie groups* **222** 2009 4, ，《数学进展》（），第 – 号。1461 1501
[CEOP23] K. Coulembier、P. Etingof、V. Ostrik 和 B. Pauwels，*Monoidal abelian envelopes with a quotient property* **794** 2023 179 214 ，《纯粹与应用数学杂志》（），–。[CO14] J. Comes 和 V. Ostrik，*On Deligne's category* 《表示论》^{ab}（S_d），《代数与数论》8（2014 年 5 月），第 2 号，473–496，电子版见 1304.3491。[Cou21] K. Coulembier，*Monoidal abelian envelopes*，《组合数学》157（2021），第 7 号，1584–1609。[Del02] P. Deligne，*Catégories tensorielles*，2002，第 227–248 页。本文献献给 Yuri I. Manin，以庆祝他 65 岁生日。

[Del07] P. Deligne,
La catégorie des représentations du groupe symétrique S_t lorsque t n'est pas un entier naturel，《代数群与齐性空间》，《塔塔基础研究所数学研究丛书》（2007），209–273。[Dri87] V. G. Drinfel'd,
Quantum groups，《国际数学家大会论文集》，第 1、2 卷（美国加利福尼亚州伯克利，1986），1987，第 798–820 页。[EAH24] I. Entova-Aizenbud 和 T. Heidersdorf,
Deligne-Knop tensor categories and functoriality，2024。[EGNO15] P. Etingof、S. Gelaki、D. Nikshych 和 V. Ostrik，*Tensor categories*，《数学综述与专著》205，美国数学学会，2015。[EO22] P. Etingof 和 V. Ostrik，*On semisimplification of tensor categories*，《表示论与代数几何：庆祝 Sasha Beilinson 和 Victor Ginzburg 生日的会议》，2022，第 3–35 页。[Eti14] P. Etingof,
Representation theory in complex rank, i，《变换群》19（2014），。[FHH26] J. Flake、T. Heidersdorf 和 D. Hull，*Abelian envelopes for interpolation categories of wreath products from monoidal adjunctions* 2026，。
[FLP24] J. Flake、R. Laugwitz 和 S. Posur，*Projection formulas and induced functors on centers of monoidal categories* 2024，。[FLP26]，*Monoidal adjunctions and abelian envelopes*，2026，[FM21] J. Flake 和 L. Maassen，*Semisimplicity and Indecomposable Objects in Interpolating Partition Categories* **2022** 2021 22, 17363 17430,，《国际数学研究通报》（8 月），第 – 号，电子版见 2003.13798。[HK20] N. Harman 和 D. Kalinov,
Classification of simple algebras in the Deligne category《表示论》（S_t），《代数杂志》549（2020），215–248。[HS24] N. Harman 和 A. Snowden，*Oligomorphic groups and tensor categories*，2024。[Kno07] F. Knop，*Tensor envelopes of regular categories*，《数学进展》214（2007），第 2 号，571–617。[KS06] M. Kashiwara 和 P. Schapira，*Categories and sheaves*，《数学科学基础原理》[Fundamental Principles of Mathematical Sciences]，第 332 卷，Springer-Verlag，柏林，2006。[LM25] S. Lentner 和 M. Mombelli，*Fiber functors and reconstruction of Hopf algebras*，《加拿大数学杂志》77（2025），第 5 号，1718–1761。[NLS21] S. Nyobe Likeng 和 A. Savage，*Group partition categories*，《组合代数杂志》5（2021 年 11 月），第 4 号，369–406，电子版见 2007.02743。[RW14] S. Raum 和 M. Weber,
The combinatorics of an algebraic class of easy quantum groups，《无限维分析、量子概率及相关主题》17（2014），第 03 号，1450016。[RW16]，
The Full Classification of Orthogonal Easy Quantum Groups，《数学物理通讯》341（2016），751–779。[Sno24] A. Snowden，*Regular categories, oligomorphic monoids, and tensor categories*，2024。
Mathematical Institute, University of Bonn, Endenicher Allee 60, 53115 Bonn, Germany*Email address*: flake@math.uni-bonn.de

Mathematical Institute, University of Bonn, Endenicher Allee 60, 53115 Bonn, Germany*Email address*: mader@math.uni-bonn.de