arXiv:2611.33155v1 [cond-mat.mes-hall] 24 Nov 2026

位点消除、投影和图案化分形晶格上的拓扑绝缘体

Aiden J. Mains, [1, *] Daniel J. Salib, [1, *] Christopher A. Leong, [1] 和 Bitan Roy[1, †]

[1] *Department of Physics, Lehigh University, Bethlehem, Pennsylvania 18015, USA*(日期：2026年11月25日)

我们将分数（豪斯多夫）维数的分形晶格视为母晶体的几何后代，并从整数维晶格正则化模型出发，采用三种互补方法，展示了一维、二维和三维晶体在其自相似后代上成功实现典型拓扑绝缘体。(a) 第一种方法中，我们移除所有不属于该网络的母晶格位点，从而构造分形哈密顿量（位点消除方法）。(b) 第二种方法中，我们对同一组位点进行积分消去或投影，得到分形晶格的有效哈密顿量（投影或重整化方法）。(c) 第三种方法中，我们保留完整的母晶体晶格，但对位点质量参数进行空间图案化；该参数控制母绝缘系统的拓扑，使其在分形网络及其补集上分别取两个拓扑性质不同的值（图案化分形晶格）。通过对所得哈密顿量进行数值对角化并计算适当的拓扑不变量或局域标记量，再以外边界或内边界处的无隙模验证体边对应，我们利用全部三种方法在康托集上确立了Su-Schrieffer-Heeger拓扑，在六花分形上确立了 Haldane拓扑 [（使用方法 (a) 和 (b)）]，并利用方法 (c) 在谢尔宾斯基 ′地毯 [上确立了 Qi-Wu-Zhang拓扑]，，还通过方法 (a)、(b) 和 (c)，在铺砌门格海绵上确立了强 Z_2 拓扑绝缘相。这些发现补充并大幅拓展了此前报道的利用方法 (a) 和 (b) 在谢尔宾斯基 ′地毯上实现 Qi-Wu-Zhang拓扑的工作 [《物理评论B》**110**, L241302 (2024)]。

I. 引言

平移对称性使布洛赫态成为量子晶体中薛定谔方程的解。当这些态在布里渊区上具有非平凡的拓扑与几何性质时，便会形成拓扑晶体。相关的体内拓扑不变量通过拓扑晶体与真空界面处的无能隙边界模表现出来，体现了著名的体内—边界对应关系 [1–12]。平移对称性还根据所需的能带反转发生在布里渊区中心（ Γ 点）还是有限动量处，将拓扑相进一步分为两大类，分别形成平移惰性和活性拓扑相。将离散旋转对称性纳入这一分类后，晶体拓扑相进一步丰富了这一图景；这类拓扑相的特征是，在布里渊区中由离散旋转联系起来的多个高对称点处同时发生能带反转。在过去几十年中，对这些拓扑相的分类与表征一直是凝聚态物理的核心主题；近年来，拓扑量子化学作为一种在真实材料中识别这些拓扑相的框架应运而生 [13–19]。

然而，自然界孕育了超越完美晶体有序的丰富多样结构，包括分形、准晶体和非晶晶格；这些结构缺少晶体所具有的部分或全部平移对称性与旋转对称性。尽管如此，这类原子或格点的非晶体排列通常可以被视为母晶体的几何后代。例如，规则分形晶格可以通过从母晶体中系统地移除选定格点来构造，从而以自相似性取代平移对称性，同时保留母晶格整体的旋转对称性 [20]。相比之下，准晶是将高维母晶体投影到嵌入其中、取向为无理方向的超平面上形成的。这类非周期结构缺乏平移对称性，却表现出准长程有序，这一点体现在其X射线衍射图样中；此外，它们还可能呈现出在传统晶体中被禁止的涌现旋转对称性。典型例子包括分别见于彭罗斯镶嵌和 Ammann–Beenker 镶嵌的五重和八重旋转对称性。与之密切相关的是准晶的有理近似晶体，它们通过将母晶体投影到取向为有理方向的超平面上获得。这些结构在低维度中表现出涌现的周期性，与原始母晶体 [21–24]。最后，可以通过从其他方面保持有序的母晶体中随机选取有限比例的格点来构造非晶晶格，从而消除平移和旋转对称性 [25]。在这一框架下，不规则分形晶格和具有部分有序的非晶系统也可以被视为母

* 共同贡献者
† 通讯作者：bitan.roy@lehigh.edu

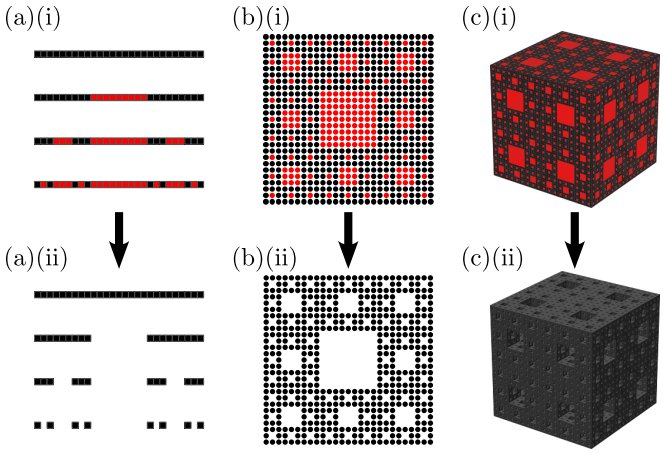


图 1. 本文研究的三种分形纹理：(a) 康托集、(b) 谢尔宾斯基´地毯，以及 (c) 铺砌门格海绵；后者通过按照 $2 \times 2 \times 2$ 配置排列八个传统门格海绵模块构造而成。对于每种纹理，顶部面板展示了完整母晶格：(a) 一维链、(b) 方格晶格，以及 (c) 立方晶格。在替代质量构造 [(i)], 中，黑色和红色格点分别承载位点质量 M_0 和 M_{alt}，占据属于所得分形晶格 [（如 (ii)] 所示）及其补集的格点。总体而言，这些构型构成了图案化分形晶格族。底部面板展示了从母晶格中移除（位点消除方法）或投影掉（投影或重整化方法）所有红色格点后得到的相应分形晶格，所得哈密顿量中只有分形晶格格点起作用。

晶体的几何后代，它们部分保留了母晶体的某些对称性或有序结构。

这类材料平台在结构上的多样性，加之其与上述母晶体之间的内在联系，引出了一个引人入胜的问题：丰富多样的基于晶体的拓扑相能否扩展到分形晶格、准晶体和非晶材料？肯定的答案不仅具有根本意义，还可能带来深远的技术影响，例如有望使结构不完美的材料具备拓扑保护的容错响应，并应用于低功耗逻辑器件。

尽管近年来人们对这一方向的兴趣日益浓厚，但现有研究大多聚焦于在特定非晶结构中实现孤立且依赖具体模型的拓扑相，包括分形晶格 [26–44], 准晶体 [45–49], 以及非晶材料 [50–62]。当前亟需建立统一的理论框架，以驾驭母体晶体的拓扑性质，涵盖分数（豪斯多夫）维度（分形晶格中）、低维系统（准晶及其有理晶体近似中），以及缺乏明确定义维度的结构无序系统（非晶晶格中）；这一框架将以拓扑超越晶体有序，这一领域仍处于起步阶段 [63–66]。本研究朝这一目标迈出了关键一步：通过两种互补的理论方法，展示了如何在几何后代分形晶格上实现基于晶体的一维、二维和三维典型拓扑模型，并引入了图案化拓扑分形这一概念。

A. 方法论

在展开讨论之前，最好先对本文用于构建分形网络上哈密顿量的三种方法作一番教学式概述。这些构造基于两个关键观察。(1) 通过指定要删除、积分掉或图案化（详见下文）的格点集合，可以在母晶体中确定一个分形晶格，从而生成所需的自相似网络。在图1 和2中，属于分形晶格的格点以黑色表示，而母晶格中其余格点则以红色表示。(2) 跨越不同空间维度和对称性类别的拓扑绝缘体，其典型晶格正则化模型可表述为有效的单粒子有质量狄拉克哈密顿量，我们将其记为 H_{parent}。母晶格上的任何此类二次哈密顿量都可以写成如下分块矩阵形式

$$H_{\mathrm{parent}} = \begin{pmatrix} H_{\bullet\bullet} & H_{\bullet\bullet} \\ H_{\bullet\bullet} & H_{\bullet\bullet} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

其中，$H_{\bullet\bullet}$ 和 $H_{\bullet\bullet}$ 分别仅作用于黑色格点和红色格点，而非对角块 $H_{\bullet\bullet}$ 和$H_{\bullet\bullet}$则描述两个子空间之间的耦合。

第一种方法称为格点消除法，以下记为 (a)：我们直接移除红色格点，而不考虑它们与黑色格点之间的耦合。由此得到的分形晶格哈密顿量为

$$H_{\mathrm{SE}} = H_{\bullet\bullet} \,. \tag{2}$$

第二种方法称为投影或重整化方法，记为 (b)：我们在路径积分形式中系统地积分掉红色格点，从而得到分形晶格的有效（重整化）哈密顿量

$$H_{\mathrm{R}} = H_{\bullet\bullet} - H_{\bullet\bullet}\, H_{\bullet\bullet}^{-1}\, H_{\bullet\bullet}, \tag{3}$$

前提是 $H_{\bullet\bullet}^{-1}$ 存在。由于可能出现的奇异性（ $H_{\bullet\bullet}$的零模）总是孤立的，因此可以通过采用适当的极限过程 [67] 进行正则化，从而满足这一条件。例如，可以通过取 $H_{\bullet\bullet} \to H_{\bullet\bullet} - \epsilon$ 并令 ϵ足够小，对可能出现的孤立奇异性进行正则化。 H_{R} 的表达式是 H_{parent} [63–66, 68–70] 的舒尔补。二者 H_{SE} 和 H_{R} 作用于同一缩减后的希尔伯特空间，其维数小于母系统的维数。

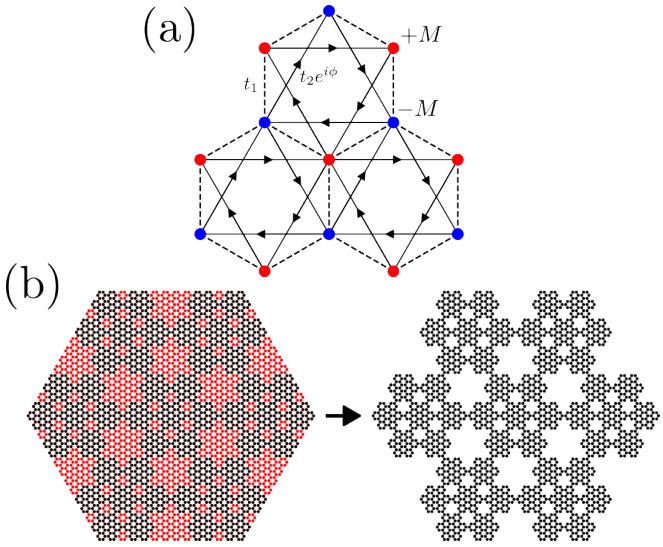


图 2。（a）Haldane 模型示意图：在蜂窝晶格的两个互补子晶格格点上施加交错的现场 Semenoff质量（$\pm M$），实数最近邻跃迁振幅为 t_1，从而产生无质量狄拉克费米子；复数次近邻跃迁 $t_2e^{i\phi}$ 破缺时间反演对称性，并产生陈绝缘体。（b）从包含 3282 个格点的母蜂窝晶格构造包含 2058 个格点的第三代六角片分形晶格。移除红色格点（位点消除方法），或将其积分消去（投影或重整化方法），得到一个仅有分形晶格格点保持有效的哈密顿量。

第三种方法称为图案化分形晶格方法，记作 (c)，不移除格点，也不将其积分消去。相反，保留完整的母晶格，同时对其位点质量参数进行空间图案化，使其取两个拓扑性质不同的值：M_0分别位于分形网络上，$M_{\rm alt}$以及其补集上。因此，图案化分形晶格的哈密顿量为 $H_{\rm pattern} = H_{\rm parent}$，但具有两个不同的质量参数：$M_0$黑色格点上的参数进入 $H_{\bullet\bullet}$，而 $M_{\rm alt}$红色格点上的参数进入 $H_{\bullet\bullet}$。非对角块$H_{\bullet\bullet}$和 $H_{\bullet\bullet}$不受这种质量图案化的影响，因为它们仅表示格点间的跳跃过程。通过这三种互补的方法，我们展示了嵌入一维、二维和三维空间的分形晶格上拓扑绝缘相的出现，具体结果如下文所述。

B. 主要结果总结

在一维中，我们考虑由 Su-Schrieffer-Heeger（SSH）模型描述的母体一维链 [71–73]，并研究其在分形后代康托集上的拓扑特征。康托集由豪斯多夫维数 $d_{\rm H} = \log_3 2 \approx 0.631$表征。通过采用全部三种构造方法，我们展示了在康托集上实现一维拓扑绝缘相。对于方法（a）和（b）中，拓扑相由局域拓扑标记表征，该标记在康托集每个线段的大多数格点上取量子化值；而图案化康托集 [方法（c）] 则由量子化极化（即全局拓扑不变量）表征。在这三种方法中，拓扑相均支持局域于真空边界处的近零能模 [方法（a）、（b）和（c）]，或局域于具有不同位点质量参数的区域之间的界面处 M，以及 $M_{\rm alt}$ [方法（c）]，，其确切位置取决于边界条件（开放边界或周期边界）。这三种方法也都支持平庸绝缘相，其特征是局域拓扑标记或极化为零。有趣的是，方法（c）的平庸相中也会出现近零能模，它们强烈局域于图案化康托集内部具有不同质量参数的区域之间的界面 M，并且 $M_{\rm alt}$位于图案化康托集内部。该模型的更多细节见第IIA节，结果总结于图 3 [方法（a）和（b）] 以及图 4 [方法（c）]。

对于二维系统，我们最近展示了广义方格晶格 Qi-Wu-Zhang（QWZ）模型的平移惰性、平移活性和晶体拓扑绝缘体在其几何后代 Sierpi´nski 地毯上的量子反常霍尔绝缘体（QAHIs）中的实现，其豪斯多夫维数为 $d_{\rm H} = \log_3 8 \approx 1.893$，所采用的是方法（a）和（b）[65, 74]。为进一步探索 Sierpi´nski 地毯从其母方格晶格继承拓扑相的能力，本文使用方法（c）重新研究相同模型（参数空间略有收缩）。与此同时，为拓展方法（a）和（b）在二维拓扑分形中的适用性，我们研究了基于蜂窝晶格的 Haldane 模型在其几何后代六角雪花分形晶格上的量子反常霍尔绝缘体（QAHIs）[75, 76]，其豪斯多夫维数为 $d_{\rm H} = \log_3 7 \approx 1.771$。在这两种设置中，我们都实现了时间反演对称性破缺拓扑绝缘相，其特征是量子化的 Bott指标（一个全局拓扑不变量），并通过近零能模所体现的体边对应得到佐证。它们的局域化性质与此前在一维康托集中发现的性质在定性上相似。更多细节见第 IIB节，结果分别展示于图 5 和 6 中的六角片分形上的 Haldane 模型，以及图 7 中的 Sierpi´nski 地毯上的 QWZ 模型。在所有这些情况下，还存在较大的参数区间，使系统表现为 Bott指标为零的平庸绝缘体。

在三维中，我们考虑一种铺砌门格海绵：将八个传统门格海绵排列成 $2 \times 2 \times 2$ 构型，其中每个门格海绵的豪斯多夫维数为 $d_{\rm H} = \log_3 20 \approx 2.729$，从而所得结构的中心不是空的。由于该铺砌结构由有限个门格海绵的并集构成，其豪斯多夫维数仍为 $d_{\rm H} = \log_3 20 \approx 2.729$，但系统因此失去了全局自相似性。随后，从典型模型

出发，我们研究 Z_2 母体立方晶格上的强拓扑绝缘体，其由三维版 Bernevig-Hughes-Zhang（BHZ）模型描述； [8, 12], 我们利用三种构造方法（a）、（b）和（c），展示了其在铺砌门格海绵上的实现。所得拓扑相在大多数体内格点上表现出量子化的局域拓扑标记，并通过近零能模满足体边对应；这些模的局域化性质在定性上类似于一维和二维拓扑分形中的结果。这些结果将在第IIC 节讨论，并在图8 和9中展示。在一个较宽的参数区域内，铺砌门格海绵还支持正常绝缘相：对于方法（a）和（b），其特征是整个系统中的局域拓扑标记均为零；而对于方法（c），则表现为非量子化值。

最后，我们研究分形拓扑绝缘体对随机点状电荷杂质的鲁棒性。即使在洁净系统中，局域拓扑标记也会发生波动；系统中存在无序时，这种波动会更加显著。因此，局域拓扑标记不适合用于识别由无序驱动的拓扑绝缘相与平庸绝缘相之间的转变。为此，我们仅研究六角雪花分形晶格上的 Haldane 模型，并使用无序平均 Bott 指数，证明在无序足够弱时，采用方法 (a) 和 (b) 得到的量子反常霍尔绝缘体均具有稳定性。无序足够强时，系统必然转变为平庸绝缘相，其特征是无序平均 Bott 指数为零。该分析的细节见第III节，结果见图10。

C. 结构安排

本文其余部分安排如下。第II 节讨论如何在一维 [第IIA], 二维 [第II B], 和三维 [第IIC]几何后代分形晶格上实现各种基于晶体的典型拓扑绝缘体。第III节讨论 Haldane 模型所实现的量子反常霍尔绝缘体在六角雪花分形晶格上对随机电荷杂质的稳定性。第IV节总结研究结果，讨论可能的未来研究方向，并重点介绍有望用于检验本文预测的材料平台。

II. 分形晶格上的拓扑绝缘体

现在，我们将在连续的三个小节中，分别展示如何在一维、二维和三维分形晶格上实现拓扑绝缘体。对于每种情况，我们都从相应拓扑绝缘体的标准晶格正则化模型出发，并构造在相关几何后代分形晶格上的哈密顿量，所采用的三种不同方法详见第 IA 节。随后，我们对所得的分形哈密顿量进行数值对角化，以识别这些自相似网络中拓扑绝缘相的特征。具体而言，我们计算相应的局域拓扑标记或全局拓扑不变量，并通过近零能模的出现，证明其与标志性的体内-边界对应关系相一致。反过来，这些模在开放边界条件（OBCs）和周期性边界条件（PBCs）下的局域化性质，则揭示了底层分形几何的迷人特征。

A. 一维

我们从一维无自旋费米子的SSH模型开始，其布洛赫哈密顿量形式为

$$H_{\mathrm{1D}}^{\mathrm{SSH}}(\boldsymbol{k}) = t\sin(k_x a)\tau_1 + \left[M - 2B\left\{1-\cos(k_x a)\right\}\right]\tau_2, \quad (4)$$

其中 a 是底层一维链的晶格间距，$\{\tau_\mu\}$ 表示作用于子晶格或轨道自由度上的泡利矩阵集合，且 k_x 是沿 x 方向的动量。该模型保持三种对称性：(1) 时间反演对称性，由 $\mathcal{T} = \tau_3\mathcal{K}$生成，其中 $\mathcal{K}$ 表示复共轭；(2) 粒子-空穴对称性，由 $\mathcal{C} = \mathcal{K}$生成；以及 (3) 子晶格对称性，由 $\mathcal{S} = \tau_3$生成。因此，式（4）中的哈密顿量属于十重分类方案中的BDI对称类，并在 $0 < M/B < 4$时实现拓扑绝缘相。对于 M/B的所有其他取值，绝缘相在拓扑上都是平庸的。在拓扑相中，Zak相量子化为 $+1$，而在平庸相中为零 [77]。在下文中，所有数值计算均取 $t = B = 1$。

在一维链上，与 $H_{\mathrm{1D}}^{\mathrm{SSH}}(\boldsymbol{k})$ [式（4）] 对应的紧束缚哈密顿量可通过傅里叶变换直接得到，其精确形式为

$$H_{\mathrm{1D,TB}}^{\mathrm{SSH}} = \sum_x \left\{ \left(\Psi_x^\dagger \left[\frac{t}{2i}\,\tau_1 + B\tau_2 \right] \Psi_{x+\hat{e}_x} + \mathrm{H.c.} \right) + \Psi_x^\dagger \left[(M+2B)\tau_2 \right] \Psi_x \right\} + \cdots . \quad (5)$$

这里，$\Psi_x^\top = (c_{x,+}, c_{x,-})$ 中，$c_{x,\tau}$ 表示位于 x 处、具有宇称本征值 $\tau = \pm$ 的轨道上的费米子湮灭算符；H.c. 表示厄米共轭，$\hat{e}_x$ 是沿 x 方向的单位向量。为简洁起见，我们省略了为施加周期性边界条件（PBCs）所需的其他跃迁项，省略部分以省略号表示。随后，可将母体一维链上的上述紧束缚哈密顿量改写为式（1）的分块矩阵形式，其中 $H_{\mathrm{parent}} \equiv H_{\mathrm{1D,TB}}^{\mathrm{SSH}}$，由此我们构造康托尔集分形的哈密顿量如下。

从一条一维链（所有格点均为黑色）开始，构造第一代（$g = 1$）康托集

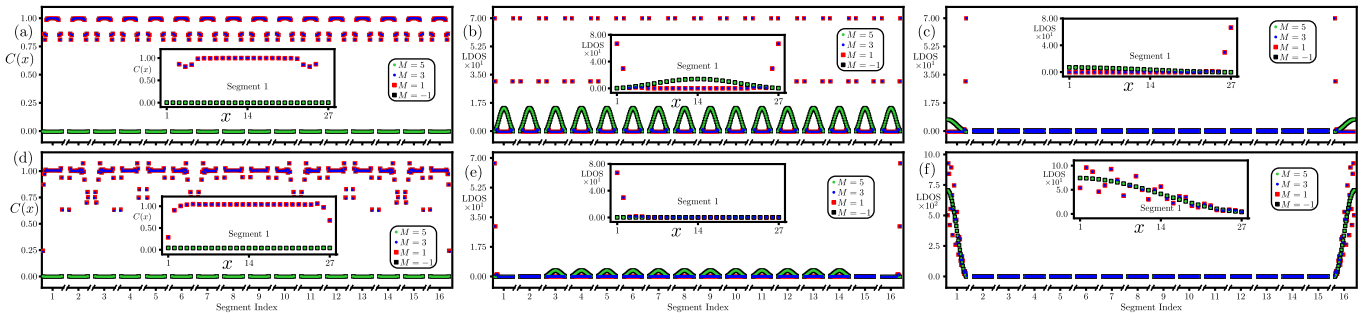


图 3. 在第四代（$g = 4$）一维康托集的每个格点处，局域拓扑标记 $C(x)$ [(a) 和 (d)]，（定义见式（7）），以及两个最接近零能的粒子-空穴对称模的联合局域态密度；对应的边界条件为开放边界 [(b) 和 (e)]，以及周期边界 [(c) 和 (f)]。该康托集包含 $L = 2187$ 个格点 [（图 1(a,ii)]）。结果分别通过位点消除方法 [(a)-(c)] 和投影或重整化方法 [(d)-(f)] 得到，采用了不同的位点质量参数 M （见图例），并在一维链上的母体 Su–Schrieffer–Heeger模型中取 $t = B = 1$ （式（4）和（5）]）。每个面板中的插图展示了链上最初的 27 个格点。注意，在周期性边界条件下，康托集最左侧和最右侧的线段首尾相接，形成长度加倍的单个线段。因此，即使在周期性边界条件下，此类模的局域态密度仍会在线段上呈现（c）边界局域（位点消除方法）或（f）体内占主导的局域（投影或重整化方法）特征。采用投影或重整化方法得到的结果，是在式（3）中取 $H_{\bullet\bullet} \to H_{\bullet\bullet} - \epsilon$，并取 $\epsilon = 0.01$ 来调节 $H_{\bullet\bullet}^{-1}$ 谱中的孤立奇异性。讨论见第 II 节。

确定晶格位点的中央三分之一（标为红色）；在方法（a）中将其移除，在方法（b）中将其积分掉，或M_{alt}在方法（c）中为其赋予位点质量，而剩余的黑色格点保留位点质量 M_0。要构造第二代（$g = 2$）康托集，则在剩余的两段黑色格点上重复相同的步骤。重复这一过程即可生成任意代数的康托集 g[图 1（a）]。由于每一代都将每条保留的线段等分为三段，并移除中央三分之一，因此所得康托集具有豪斯多夫维数 $d_{\text{H}} = \ln 2/\ln 3 = \log_3 2 \approx 0.631 < 1$。下面转而讨论相应的结果。

由于康托集嵌入一维空间，方法 (a) 和 (b) 在每一代都会产生由一维链组成的不连通线段。因此，在这些情况下无法可靠地计算全局拓扑不变量，即极化，因为其计算需要周期性边界条件。值得注意的是，由于康托集独特的几何结构，即使在母体一维链上施加周期性边界条件，其内部线段在每一代仍会获得开放边界条件。因此，我们转而采用局域拓扑标记；对于$d = 1$ BDI 类，该标记定义良好，并可按如下方式计算。

对 H_{SE} [式（2）] 或 H_{R} [式（3）], 进行对角化后，我们构造投影算符 $\mathbf{P}$ ，将其投影到半填充系统上，其中所有负能态均被占据:

$$\mathbf{P} = \sum_{E_i<0} |\Psi_i\rangle \langle\Psi_i| , \tag{6}$$

其中， $|\Psi_i\rangle$ 表示能量为 E_i的 H_{SE} 或 H_{R} 的本征态。其补集 $\mathbf{Q} = \mathbf{I} - \mathbf{P}$，其中 $\mathbf{I}$ 是单位矩阵，投影到未占据的正能态上。位置处的局域拓扑标记 x_i 由第 i个格点对应的算符 [78] 的第（i个）对角元素给出

$$\mathbf{C}_{1\text{D}} = N_D\, W\, [\mathbf{Q}\,\mathbf{X}\,\mathbf{P} + \mathbf{P}\,\mathbf{X}\,\mathbf{Q}] , \tag{7}$$

我们在母体一维链上施加开放边界条件，并将其继承到康托集上，在此条件下计算该标记。这里， $N_D = 1$是归一化常数， $W = \tau_3$ 是子晶格对称性的生成元，而 $\mathbf{X}$ 是（对角）位置算符，其矩阵元为 $\mathbf{X}_{ij} = x_i\delta_{ij}$，其中 δ_{ij} 是克罗内克δ符号。在 SSH 模型的拓扑相中，局域拓扑标记在每个康托集片段的内部格点上取量子化值 1。00（在数值误差范围内）。相比之下，对于 $M > 4$或 $M < 0$，该标记在所有格点上均为零，这对应于 SSH 模型的拓扑平庸相。对于格点消除方法 [图 3(a)] 和投影方法[图 3(d)]，均观察到了这些特征。这些结果共同确立了 SSH 拓扑在康托集上的实现，我们还通过体边对应进一步证实了这一点。

在开放边界条件下，且处于SSH模型的拓扑参数区间内，我们发现近零能模，其对应的局域态密度在方法（a）中于康托集每条孤立线段的两端达到峰值。相比之下，在平庸相中，此类模的局域态密度强烈局域于每条线段的中心附近。见图3（b）。当对母体一维链施加周期性边界条件时，拓扑区间中最接近零能量的两个模的局域态密度在最后一个康托集片段的端点处达到峰值；由于周期性边界条件，该片段的长度现在为其他线段的两倍。然而，在平庸相中，这些模的局域态密度在整个康托集上几乎保持均匀。见图3（c）。综合

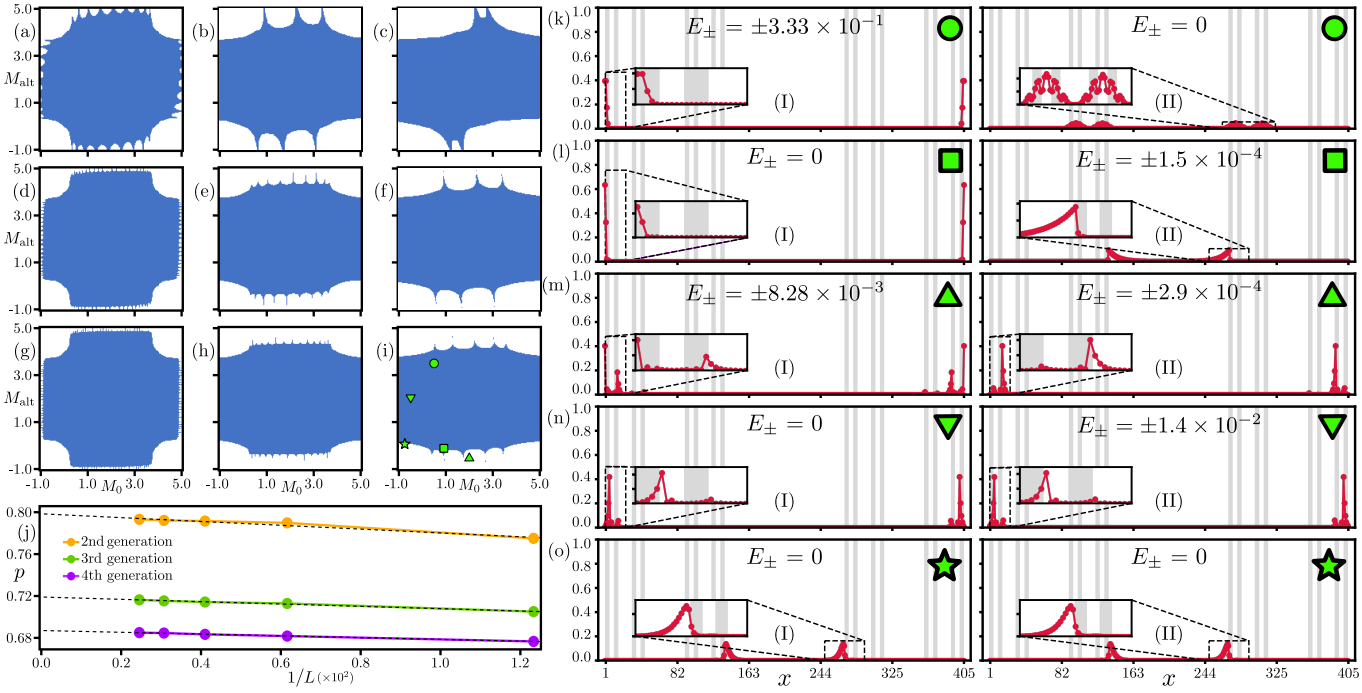


图 4. 图案化或替代质量康托集 [图 1(a,i)], 的相图 [(a)-(i)]，通过沿 x 方向 [的极化 p_x] 在 $(M_0, M_{\rm alt})$ 参数平面上进行判定，参数范围为 $-1 \le M_0 \le 5$ 和 $-1 \le M_{\rm alt} \le 5$。蓝色区域为拓扑区域，其中 $p_x = 0.5$；白色区域为平凡区域，其中 $p_x = 0$。每列对应康托集的一个特定代数 (g)： $g = 2$ [(a)、(d) 和 (g)]、 $g = 3$ [(b)、(e) 和 (h)], 以及 $g = 4$ [(c)、(f) 和 (i)]。每行对应底层 D 链的固定总长度 (L 1 $L = 81$ [ ] $L = 243$ [ ], $L = 405$), 分 [ ] 别为 (a)-(c)、(d)-(f) 和 (g)-(i)。在第二代中，除平凡区域所在的角落外，拓扑区域几乎填满整个参数正方形；随着代数增加，拓扑区域收缩为一条水平带，这与红色格点或 $M_{\rm alt}$ 扇区相对权重的增加一致。在代数固定时，当 L较小时，相边界呈锯齿状；随着 L 增加，相边界变得平滑并趋于稳定形状。(j) 相图中的拓扑占比 (p)，定义为具有 $p_x = 0.5$的采样参数点所占的比例，其随各代 $1/L$ 的变化；虚线为线性拟合，并外推至 $1/L \to 0$，得到其在热力学极限下的饱和值 $p_{\rm sat}$。不同代数之间的偏移 ($p_{\rm sat}$)表明，拓扑区域在大 L 下的极限占比各不相同，说明任一代数的 Su-Schrieffer-Heeger 拓扑绝缘体均可在热力学极限 ($1/L \to 0$)下实现。对于定义在 $g = 4$ 康托集上的替代质量分形图案，其对应的两个最接近零能的粒子-空穴对称能模的联合局域态密度 [(k)-(l)]，能量为 $E_\pm$（见图例）；边界条件为 (I) 开放边界和 (II) 周期性边界条件，其中 $L = 405$。选取的质量参数值及所得相的极化为：(k) $(M_0, M_{\rm alt}, p_x) = (0.50, 3.50, 0.50)$；(l) $(M_0, M_{\rm alt}, p_x) = (0.93, -0.05, 0.50)$；(m) $(M_0, M_{\rm alt}, p_x) = (2.00, -0.50, 0.00)$；(n) $(M_0, M_{\rm alt}, p_x) = (-0.50, 2.00, 0.50)$；以及 (o) $(M_0, M_{\rm alt}, p_x) = (-0.75, 0.05, 0.00)$。这些点在 (i) 面板相图中的位置以绿色形状标出。灰色竖条表示质量为 M_0 的格点，白色竖条表示质量为 $M_{\rm alt}$ 的格点。关于这类 M_0 和 $M_{\rm alt}$ 取值的总结见表一，相关讨论见第 II A 节。

起来，这些观测证明了康托集上的SSH 拓扑与方法（a）中体内-边界对应的相容性。

在方法（b）中， $H_{\rm R}$ [方程（3）] 的第二项在康托集不同线段所属格点之间产生长程耦合，而这完全源于 $H_{\bullet\bullet}^{-1}$；后者是一个非稀疏算符，尽管$H_{\bullet\bullet}$ 本身是稀疏的，仅包含现场项和最近邻跃迁项。因此，在开放边界条件下的拓扑区域中，最接近零能量的两个模态的局域态密度在康托集最外侧的两个端点处呈现出强烈峰值，因为长程耦合连接了内部端点。相比之下，在平庸相中，这些模态的局域态密度在整个分形晶格上几乎均匀 [图3（e）]。当施加周期性边界条件后，拓扑区域中此类模态的局域态密度会在康托集最长线段的中心处呈现强烈峰值。然而，在平庸相中，此类模态的局域态密度仍在整个系统中近乎均匀 [图3（f）]。综合来看，这些观察结果为康托集分形晶格上 SSH 拓扑的体边对应提供了有力证据。

最后，我们聚焦于方法（c），以在图案化康托集分形晶格上建立SSH拓扑。由于在这一构造中没有格点被消除或积分掉，因此可以对底层的替换质量一维链施加周期性边界条件，并以如下方式安全地计算极化。 x方向上的极化定义为

M_0 值	M_{alt} 值	总体相	图	符号
拓扑的	拓扑的	拓扑的	图 4(k)	●
拓扑的	拓扑的	正常	图 4(l)	■
拓扑的	平凡	拓扑的	图4(m)	▲
拓扑的	平凡	正常	图 4（n）	▼
平凡	拓扑的	拓扑的	图 4（o）	★
平凡	拓扑的	正常	—	—
平凡	正常	拓扑的	—	—
平凡	正常	正常	—	—

表一。图 M_0 中选取的（M_{alt}，）相空间点，见图 4，对应一维图案化康托集 [图 1(a,i)]。第一列和第二列分别显示质量参数 M_0 （位于黑色格点上）和 M_{alt} （位于红色格点上）的取值，这些取值分别来自Su–Schrieffer–Heeger模型 [方程（4）], 的拓扑或平凡参数区间。第三列显示在第四代图案化或替代质量康托集分形晶格上形成的绝缘相是拓扑的还是正常的，该结论由 x 方向上的极化值确定；如图 4(i)所示，也可通过相图中相应符号（第五列）的位置看出。第四列对应于图 4中的相应子图（k）—（o），展示了在开放边界条件和周期性边界条件下，与最接近零能的两个能量模相关的局域态密度。第四列和第五列中带有“—”的组合，要么未被发现（倒数第三行），要么不可能（倒数第二行），要么不呈现有趣的体内—边界对应关系（最后一行）。

如 [79, 80]

$$p_x = n - n_{\mathrm{al}} \pmod 1, \tag{8}$$

其中

$$n = -\,\mathrm{Re}\left[\frac{i}{2\pi}\,\mathrm{Tr}\left(\ln\left\{U^\dagger \exp\left[\frac{2\pi i}{L}\sum_x x\,\hat{n}(x)\right]U\right\}\right)\right] \tag{9}$$

L 是一维链的长度，$\hat{n}(x)$是格点 x处的数算符，$n_{\mathrm{al}} = (\sum_x x)/(2L)$，在半填充时，$U$ 由负能量占据态的所有特征向量按列排列构成。拓扑相（平凡相）对应于 $p_x = 0.5$ ($p_x = 0$)。

接下来，我们构建图案化康托集在（M_0，M_{alt}）平面上随 p_x 变化的相图，揭示出拓扑绝缘相和普通绝缘相的明显特征。我们进一步观察到，在固定代数下，随着L增加，分隔这些相的相边界逐渐变得更加平滑。此外，将相图的拓扑占比（p）与 $1/L$ 对比后发现，在外推至热力学极限（$1/L \to 0$）时，该占比趋近于一个有限且稳定的值 p_{sat} 。第二代和第三代图案化康托集呈现出宽广的双参数拓扑绝缘相区域，而第四代图案则在一条水平条带状区域内支持拓扑。因此，替代质量构造提供了一个可控的环境，使我们能够分别考察代数依赖性和有限尺寸效应。我们发现，p_{sat} 对于每个代数都是有限的，但随着 g的增加而单调减小。因此，我们得出结论：在热力学极限下，任意代数的图案化康托集中都可以实现拓扑相，尽管随着 g 增加，这些拓扑相的普遍性会逐渐降低。这些结果总结于图4（a）至4（j）中。

为了将这些观察结果与体内-边界对应联系起来，我们考察由 M_0 和 M_{alt}两种独立选择所产生的八种可能情形，其中每种选择都可以处于 SSH 模型的拓扑或平凡参数区间；此外，所得相也有拓扑或平凡两种可能。这八种情形均列于表I中，不过只有五种在物理上可实现。对于这五种情形，我们考察开放边界条件和周期性边界条件下最接近零能量的两个模式的局域态密度。结果见图4(k)-4(o)。

当 M_0 和 M_{alt} 均处于拓扑区域，且形成的相也具有拓扑性时，此类模式的局域态密度在开放边界条件（周期性边界条件）下分别集中于系统的外端点（内部位置）。即使形成的相为平庸相，开放边界条件下的局域态密度分布在定性上仍保持不变，这可能凸显了局域拓扑环境的重要性，因为具有拓扑 M_0 特征的区域终止于与真空的界面处。当 M_0 和 M_{alt} 分别处于拓扑区域和平庸相时，若形成的相具有拓扑性（为平庸相），则开放边界条件下的局域态密度集中于端点（内部）。然而，在周期性边界条件下，局域态密度始终集中在黑色格点与红色格点之间的内部界面附近，进一步凸显了局域拓扑环境的作用。同理，最后，当 M_0（M_{alt}）处于平庸相（拓扑区域），且形成的相具有拓扑性时，这一对模式的局域态密度始终集中在黑色格点与红色格点之间的界面处。其余三种组合要么未被观测到，例如 M_0（M_{alt}）处于平庸相（拓扑区域）且形成的相为平庸相的情况；要么在物理上不允许（不具有意义），例如 M_0 和 M_{alt} 均处于平庸相，但形成的相却具有拓扑性（为平庸相）的情况。

B. 二维

我们首先讨论拓扑绝缘体在二维分形晶格上的可能实现：考虑母蜂窝（或六边形）晶格上的 Haldane 模型，随后展示其在几何后代六角雪花网络上的表现形式[图 2（b）]。六角雪花晶格的豪斯多夫维数可由其自相似构造得到：在每次迭代中，母六边形会生成七个更小的副本，每条臂均按 1/3 的比例缩放。因此，豪斯多夫维数为$d_{\mathrm{H}} = \ln 7/\ln 3 = \log_7 3 \approx 1.771 < 2$。紧束缚

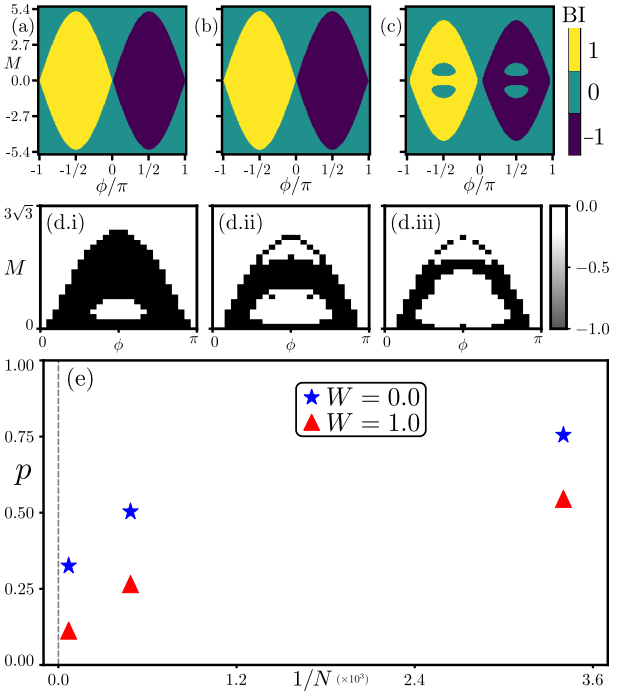


图5。Haldane 模型 [方程（10）] 关于 BI [方程（13）] 的量子化 Bott 指数 $= 0$、±1在（ϕ，M）参数空间中的相图，其中 $-\pi \le \phi \le \pi$ 和$-5.4 \le M \le 5.4$ 分别对应于（a）包含 3282 个格点的母蜂窝晶格，以及通过（b）投影或重整化方法和（c）位点消除方法得到的几何后代第二代六角雪花分形，其中包含 2058 个格点，且 $t_1 = 1$。在母蜂窝晶格上，拓扑绝缘体与普通绝缘体之间的相边界由 $M = \pm 3\sqrt{3}\, t_2 \sin\phi$ 确定，后者位于拓扑叶瓣之外；（b）中的结果几乎相同。在（c）中，拓扑叶瓣仍然清晰可辨，但相较于（a）和（b），其面积有所减小，即叶瓣变短，两个叶瓣不再在 $\phi = 0$处相接，$\phi = \pm\pi$ 附近 $M = 0$ 的区域变为平凡区域，并且每个拓扑叶瓣内部都出现了平凡空洞。（d）位点消除方法下，在 $0 \le \phi \le \pi$ 和 $0 \le M \le 5.4$ 的受限参数区域内，第二代（i）、第三代（ii）和第四代（iii）六角雪花晶格上的 Haldane 模型相图。（e）参数区域（d）内拓扑区域（p）所占的比例随 $1/N$的变化，其中 N 表示洁净（红色）系统（$W = 0$）中六角雪花分形的晶格位点数，以及存在无序（蓝色）且 $W = 1.00$时的晶格位点数；相关讨论见第III节。这表明p是有限的，即当 $1/N \to 0$ （热力学极限）时 $p_{\rm sat}$。

哈密顿量 Haldane 模型的形式为 [75]

$$H_{\rm Hal}^{\rm TB} = t_1 \sum_{\langle i,j\rangle} c_i^\dagger c_j + t_2 \sum_{\langle\langle i,j\rangle\rangle} e^{i\nu_{ij}\phi}\, c_i^\dagger c_j + M \sum_i \xi_i\, c_i^\dagger c_i, \tag{10}$$

其中，$c_i^\dagger$（c_i）表示第 i 个格点上的费米子产生（湮灭）算符。在此设置中，连接互补子晶格上的格点、记作 $\langle\cdots\rangle$的实数最近邻跃迁 t_1，会在六边形布里渊区的六个角点产生无质量狄拉克费米子。复数次近邻跃迁 $t_2 e^{i\nu_{ij}\phi}$ 连接同一子晶格上的格点，记作 $\langle\langle\cdots\rangle\rangle$。这里，符号$\nu_{ij} = \pm1$ 由跃迁路径的方向决定，从而产生由每条闭合路径围成的 Haldane磁通相位 ϕ。尽管每个蜂窝晶格元胞中的净磁通为零，该系统仍可支持拓扑陈绝缘体或量子反常霍尔绝缘体，其中节点狄拉克费米子会获得质量。式（10）中的最后一项，$\xi_i = \pm1$ 以$\xi_i = \pm1$ 标记蜂窝晶格的两个三角形子晶格，在两个子晶格之间产生交错的费米子密度，并代表 Semenoff质量 [76]。图2 展示了式（10）中所有项的示意图。

为理解 $H_{\rm Hal}^{\rm TB}$ 的对称性类别，我们定义一个 N 分量旋量 $\Psi^\top = (\mathbf{c}_A, \mathbf{c}_B)$，其中 N 是系统中的晶格位点数，$\mathbf{c}_A$ $(\mathbf{c}_B)$ 是一个 $N/2$ 分量旋量，由蜂窝晶格的 A （B）子晶格上格点的费米子湮灭算符构成，而 $\top$ 表示转置。在此基底下，与 $H_{\rm Hal}^{\rm TB}$ 相关的哈密顿算符具有如下形式

$$\hat{h}_{\rm Hal}^{\rm TB} = \begin{pmatrix} \mathbf{t}_2 + \mathbf{M} & \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{t}_1^\top & -\mathbf{t}_2 - \mathbf{M} \end{pmatrix}, \tag{11}$$

其中 $\mathbf{t}_1$ $(\mathbf{t}_2)$ 是一个 $N/2$ 维的子晶格间（子晶格内）实（复厄米）跃迁矩阵，正比于 t_1 （t_2），而 $\mathbf{M}$ 正比于一个 $N/2$ 维单位矩阵，其大小为 M。对于 $t_2 = M = 0$，该系统描述一组无质量狄拉克费米子，且 $\hat{}\ h_{\rm Hal}^{\rm TB}$ 保持时间反演对称性（由 $\mathcal{T} = \mathcal{K}$ 生成）、粒子-空穴对称性（由 $\mathcal{C} = \Sigma_z\mathcal{K}$ 生成），以及在 $\mathcal{S} = \Sigma_z$ 下的子晶格对称性，其中 $\Sigma_z = \mathrm{diag.}\,(\mathbf{I}^{N/2}, -\mathbf{I}_{N/2})$，其中$\mathbf{I}^{N/2}$ 是一个 $N/2$ 维单位矩阵，因此属于 BDI 类。当 t_2 和 M 非零时，三种对称性均被破坏，系统进入 A 类。

由于 Semenoff质量会平庸地使狄拉克费米子打开能隙，因此它与 Haldane质量相互竞争，使拓扑绝缘体与平庸绝缘体在（ϕ，M）参数空间中交汇。拓扑绝缘相以第一陈数 $C = \pm1$ 为特征，而其平庸对应相的第一陈数为 $C = 0$ [81]。区分这两种相的相边界为

$$M = \pm 3\sqrt{3}\, t_2 \sin\phi. \tag{12}$$

始终，我们设定 $t_1 = t_2 = 1$。因此，拓扑绝缘相可一直存续至 $|M| = 3\sqrt{3} \approx 5.196$的最大值，该值在 $\phi = \pi/2$ 时实现。因此，我们在参数区域$|M| \le 5.4$ 和 $|\phi| \le \pi$内扫描相图。我们通过计算Bott指标，构建Haldane 模型在母蜂窝晶格及其几何导出的六花分形后代上的相图。这是通过数值对角化 $H_{\rm Hal}^{\rm TB}$，并分别采用 $H_{\rm SE}$ [方法（a）] 或$H_{\rm R}$ [方法（b）], 来实现的。注意，$H_{\rm SE}$ 或 $H_{\rm R}$ 可方便地通过将 $H_{\rm Hal}^{\rm TB}$ 转换为分块矩阵

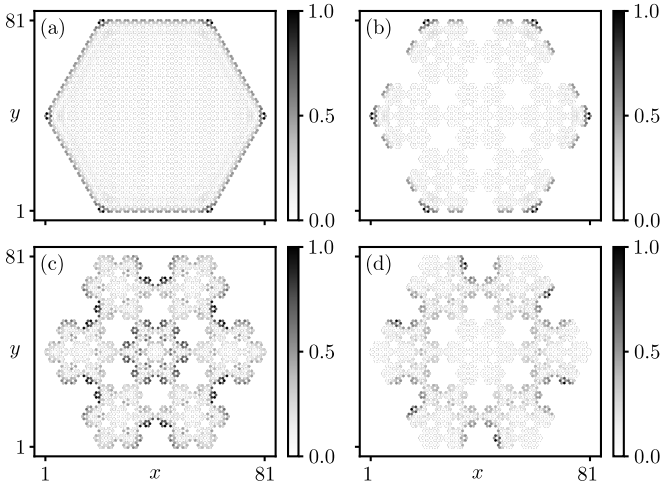


图 6. Haldane 模型中两个最接近零能量的粒子-空穴对称能量模的联合局域态密度（按其最大值归一化）。该模型定义在具有 3282 $\phi = \pi/2$ $M = 3\sqrt{3}/2$ 个格点 [10] 的母蜂窝晶格上，满足方程（），其中（a）为蜂窝晶格；其几何后代第三代六角片分形中，（b）采用投影或重整化方法，（c）采用格点消除方法并施加开放边界条件。图（d）与（c）相同，但采用周期性边界条件。此类能量模的能量本征值为 $\pm E$，其中（a） $E = 1.85 \times 10^{-2}$，（b） $E = 2.96\times10^{-2}$，（c） $E = 2.64\times10^{-2}$，以及（d） $E = 2.10\times10^{-2}$。

形式 H_{parent}，如式（1）所示，并随后遵循第IA节中所述的步骤。

在缺乏平移对称性的情况下——分形晶格正是如此——布里渊区和第一陈数的概念便失去了意义。因此，我们必须转而采用另一种拓扑不变量，在本例中即为 Bott指标。为计算 Bott 指数，我们定义两个对角矩阵$\mathbf{X}$ 和$\mathbf{Y}$，其元素分别为 $\mathbf{X}_{ij} = x_i\delta_{ij}$ 和 $\mathbf{Y}_{ij} = y_i\delta_{ij}$，用于编码第 i 个格点在 x 和 y 方向上的位置。随后，我们构造两个幺正算符$\mathbf{U}_{\mathrm{X}} = \exp(2\pi i\mathbf{X})$ 和$\mathbf{U}_{\mathrm{Y}} = \exp(2\pi i\mathbf{Y})$。Haldane 模型的拓扑不变量，即 Bott 指数，定义为 [82]

$$\mathrm{BI} = \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{Im}\left(\mathrm{Tr}\left[\ln\left(\mathbf{V}_{\mathrm{X}}\,\mathbf{V}_{\mathrm{Y}}\,\mathbf{V}_{\mathrm{X}}^{\dagger}\,\mathbf{V}_{\mathrm{Y}}^{\dagger}\right)\right]\right), \tag{13}$$

其中 $\mathbf{V}_{\mathrm{A}} = \mathbf{Q} + \mathbf{P}\mathbf{U}_{\mathrm{A}}\mathbf{P}$ 对于 $\mathrm{A} = \mathbf{X}$ 和 $\mathbf{Y}$，其中 $\mathbf{P}$ 是半填充系统中的投影算符，所有负能量态均被填充，其定义见式（6），而$\mathbf{Q}$ 是其补集。不过需要注意的是，在计算蜂窝晶格 [六角雪花分形晶格]的 Bott 指标时，$|\Psi_i\rangle$ 是负本征值对应的本征态 E_i，来自 $H_{\mathrm{Hal}}^{\mathrm{TB}}$ [H_{SE} 方法（a）或H_{R} 方法（b）]。接下来，我们讨论母蜂窝晶格和六角雪花分形晶格上的 Haldane 模型在 (ϕ, M) 参数空间中的相图。结果见图5。Bott 指标的计算始终通过对 H_{parent} 施加周期性边界条件，在所有方向上方向，这些方向由 H_{SE} 和 H_{R}继承而来。

在蜂窝晶格上，计算得到的 Bott 指标给出的相图与此前通过对第一布里渊区内的贝里曲率积分而获得的第一陈数结果相同[图 5(a)]。具体而言，在 (ϕ, M) 平面上，相图呈现两个拓扑相叶瓣，其量子化 Bott 指标符号相反（BI $= \pm1$），周围环绕着 Bott 指标为零的平庸绝缘相。相边界在数值误差范围内与式（12）给出的结果高度吻合。相比之下，采用位点消除方法 [方法（a）] 得到的六角雪花晶格相图呈现出拓扑区域被侵蚀的现象。具体而言：（1）拓扑叶瓣在 (ϕ, M) 平面上的面积缩小；（2）每个叶瓣内都出现对应于平庸绝缘相的空洞；（3） $M = 0$线附近的区域在 $\phi = 0$ 和 $\pm\pi$附近变为平庸相。这些特征如图 5(b) 所示。然而，采用投影或重整化方法 [方法（b）], 得到的相图在数值误差范围内与蜂窝晶格的相图完全相同，如图 5(c) 所示。该结果表明，舒尔补能够精确保留母系统在其几何后代上的拓扑性质。相比之下，位点消除会破坏拓扑物态的稳定性。

因此，我们研究了不同代数（g）的六花分形晶格上采用位点消除方法的 Haldane 模型相图。结果如图 5（d）所示，其中 $g = 2$、3 和 4。随着 g 增加，拓扑叶瓣内的平凡空洞面积逐渐增大。为进一步考察位点消除框架内拓扑区域的稳定性，我们追踪了相空间在（p）平面中的拓扑占比（ϕ， M）随分形代数增加（g）的演化。如图 5（e）所示， p 随着 g增加而降低。这一趋势在物理上是可以预期的，因为反复进行位点消除会使蜂窝晶格衍生的六角雪花结构日益稀疏。因此，严格定义于 $d = 2$中的陈绝缘体预计会在这样的自相似网络上变得不那么稳定。然而，必须谨慎解读这一数据集，因为代数和系统大小是同时变化的。因此，图 5（e）无法将分形程度增加的影响与通常的有限尺寸效应区分开来。尽管如此，即使在这一受限范围内，外推趋势仍表明存在有限的 p_{sat}，这表明，当六花分形上的格点数 $N \to \infty$ 时，位点消除过程在热力学极限下仍会留下一片有限的参数空间区域，支持具有量子化 Bott 指数的拓扑绝缘相。

最后，我们建立了由 Haldane 模型产生的拓扑绝缘相与其相应体内-边界对应关系之间的一一对应关系，这种对应关系通过近零能边缘模得以体现。在蜂窝晶格上，采用 OBCs 时，我们观察到了局域于边缘的近零能模，如图所示

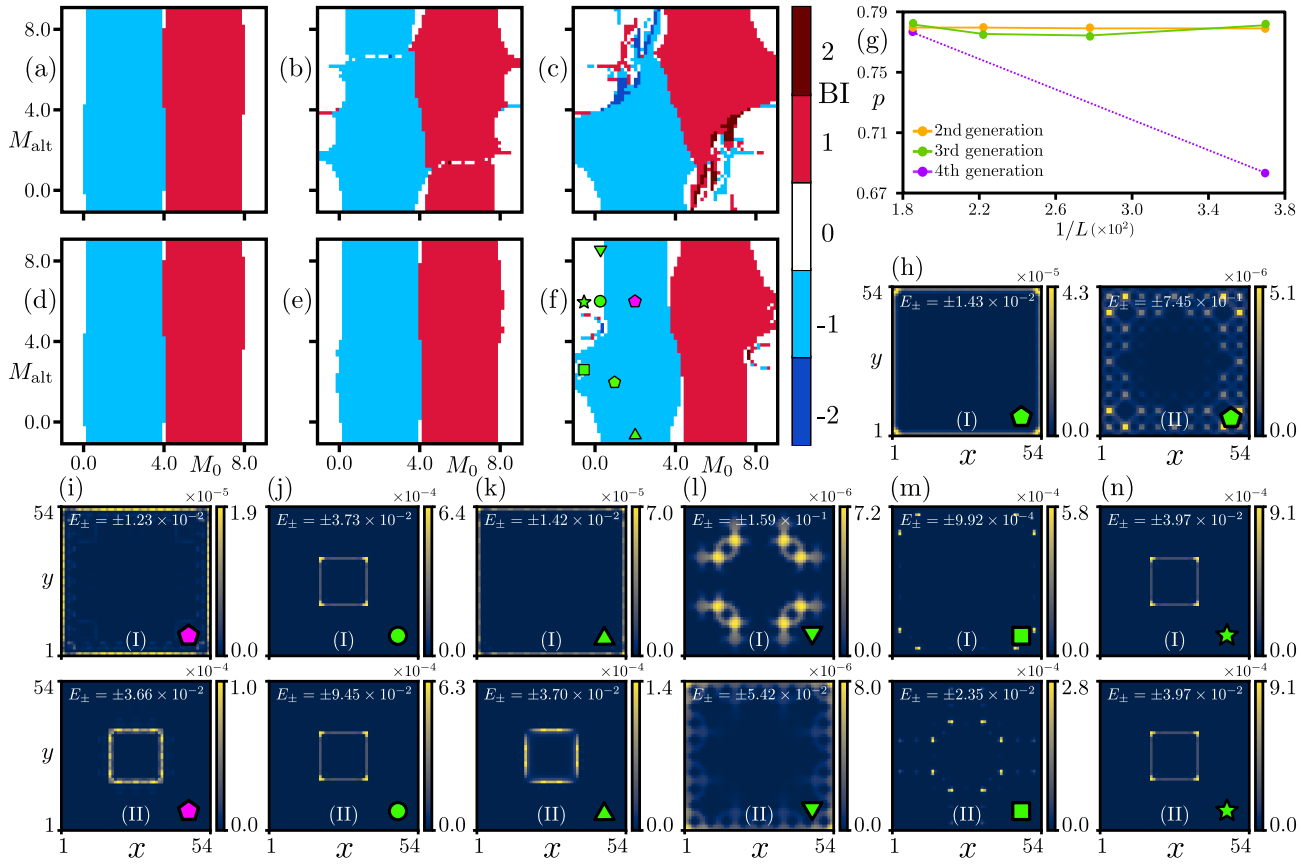


图 7. 通过博特指标（BI）诊断的图案化或替代质量的 Sierpi´nski 地毯分形晶格的拓扑。面板 (a)–(f) 展示了 $(M_0, M_{\rm alt})$ 平面上的相图，以博特指标表示，颜色条范围为 BI $=$ -2 -1 0 1 2，、、、。各列分别对应图案化地毯的 $g = 1$ [(a) 和 (d)]、$g = 2$ [(b) 和 (e)], 以及 $g = 3$[(c) 和 (f)] 代数；各行分别对应母方形晶格的线性尺寸 $L = 27$ [(a)-(c)] 和 $L = 54$ [(d)-(f)]。面板 (a)、(d) 和 (e) 与传统的 $M_{\rm alt} = M_0$ 情形非常相似，其中两个拓扑区域 $0 < M_0 < 4$ 和 $4 < M_0 < 8$ 呈现为条带，并且对 $M_{\rm alt}$的依赖较弱；而它们之间位于 $M_0 = 4$ 处的边界在面板 (c) 和 (f) 中发生扭曲，表现出对 $M_{\rm alt}$增强的依赖，以及携带 $B = \pm 2$ 相的孤立斑块。面板 (c)（$g = 3$ 和 $L = 27$）的变化最为显著，具有扭曲的边界和小块延展的 $B = \pm 2$ 区域；然而，随着 L增加，这些区域逐渐从相图中消失。(g) 拓扑占比 p，定义为 BI $\neq 0$ 的采样参数点所占的比例（计入所有 BI 为 $= \pm 1$、± 2的点），其作为每个代数的 $1/L$ 的函数给出。第一代和第二代曲线各包含四个数据点，而第三代由于较大系统的计算成本较高，仅包含两个数据点。第一代曲线略低于 $p = 0.8$，该数值对应于在所绘质量范围内跨越 $0 < M_0 < 8$ 的纯垂直拓扑区域的预期值。第二代曲线几乎不依赖于 L。随着 L 从 27 增加到 54，第三代曲线从 $p \approx 0.68$ 上升至 $p \approx 0.78$，表明在热力学极限下，替代质量的 Sierpi´nski 地毯分形晶格的拓扑相在任意代数中都具有稳定性（$1/L \to 0$）。面板 (h)–(m) 展示了在 $g = 3$和 $L = 54$ 替代质量的 Sierpi´nski 地毯分形晶格上，两个粒子-空穴对称的最接近零能量的模在能量 $E_\pm$ 处（见图例）的局域态密度，其中 (I) 为开放边界条件，(II) 为周期性边界条件。选定的质量参数值及所得相的 BI 为：(h) $(M_0, M_{\rm alt}, {\rm BI})$ $=$ (1.00, 2.00, 1.00)，(i) $(M_0, M_{\rm alt}, {\rm BI})$ $=$ (2.00, 6.00, 1.00)，(j) $(M_0, M_{\rm alt}, {\rm BI})$ $=$ (0.25, 6.00, 0.00)，(k) $(M_0, M_{\rm alt}, {\rm BI})$ $=$ $(2.00, -0.50, 1.00)$，(l) $(M_0, M_{\rm alt}, {\rm BI})$ $=$ (0.25, 8.50, 0.00)，(m) $(M_0, M_{\rm alt}, {\rm BI})$ $=$ $(-0.50, 2.50, 1.00)$，以及 (n) $(M_0, M_{\rm alt}, {\rm BI})$ $=$ $(-0.50, 6.00, 0.00)$。这些点在面板 (f) 的相图中的位置以绿色和洋红色形状标出。选择这些参数值的理由总结于表 II，并在第 II B 节中讨论。

图 6（a）所示。当使用重整化或投影方法构造其有效哈密顿量时，在六角雪花分形晶格上，这一观察结果在定性上仍未改变，如图6（b）所示。值得注意的是，尽管六角雪花晶格具有内边缘，但沿其内边缘并未观察到与近零能模相关的明显局域态密度权重。这是因因为这类边缘上的格点通过由$H_{\bullet\bullet}^{-1}$（非稀疏算符）连接到系统中的所有其他格点，而该算符会进入相应的哈密顿量 $H_{\rm R}$。相比之下，在开放边界条件下，$H_{\rm SE}$（位点消除方法）的近零能模的局域态密度权重分布在六角雪花分形晶格的外边缘和内边缘上，

M_0 值	$M_{\rm alt}$ 值	总体相	图	符号
拓扑(Γ)	拓扑 (Γ)	拓扑的	图 7（h）	⬟
拓扑 (Γ)	拓扑 (M)	拓扑的	图 7（i）	⬟
Topo	Topo	正常	图 7(j)	●
Topo	平凡	拓扑的	图 7（k）	▲
Topo	平凡	正常	图 7（l）	▼
平凡	Topo	拓扑的	图 7（m）	■
平凡	Topo	正常	图 7(n)	★
平凡	平凡	拓扑的	—	—
平凡	平凡	正常	—	—

表二。图7中二维图案化或替代质量的谢尔宾斯基 ´地毯中选定的（M_0，$M_{\rm alt}$）相空间点，见图7，对于嵌入图1(a,i)]。前两列分别显示质量参数 M_0 （黑色格点上）和 $M_{\rm alt}$ （红色格点上）的取值；这些参数分别取自 Qi–Wu–Zhang 模型 [方程（14）], 中的拓扑（Topo）或平凡参数区间。第三列显示，在嵌入 ´母方形晶格上的第三代图案化或替代质量的谢尔宾斯基地毯分形晶格 $L = 54$ 中，由 Bott指标（BI）确定的所得绝缘相是拓扑的还是正常的；如图7(f)所示，这也由相图中相应符号（第五列）的位置表示。第四列对应于图7中的相应子图（h）—（n），展示在开放边界条件和周期性边界条件下，与最接近零能的两个能量模相关的局域态密度。第四列和第五列中带有“—”的组合，要么不可能（倒数第二行），要么不呈现有趣的体内—边界对应关系（最后一行）。由于 Chern绝缘相可在 Γ 或 M点附近通过能带反转出现，并以相反的 Chern数或 Bott 指数为特征，因此总体相可以是拓扑的，并且能够从与这两个不同相之一相关的参数区间中取出 M_0 和$M_{\rm alt}$ （由“Topo”后括号内的符号表示）。

如图所示。6(c)。值得注意的是，在构建 $H_{\rm parent}$ 时施加 $H_{\rm SE}$，只有内边缘暴露出来，并呈现显著的局域态密度峰，这些峰与最接近零能量的拓扑模相关，如图 6(d) 所示。

接下来，我们聚焦于量子反常霍尔绝缘体的基于方格晶格的 QWZ 模型，并展示其在图案化或替换质量的谢尔宾斯基地毯分形晶格上的典型拓扑特征。晶格间距为 a 的方格晶格上 QWZ 模型的布洛赫哈密顿量为 [74]

$$H_{\rm 2D}^{\rm QWZ}(\boldsymbol{k}) = t\left[\sin(k_x a)\tau_1 + \sin(k_y a)\tau_2\right] + \left[M - 2B\left\{2 - \cos(k_x a) - \cos(k_y a)\right\}\right]\tau_3, \quad (14)$$

其中，$\{\tau_\mu\}$ 表示作用于轨道自由度的泡利矩阵集合。QWZ 模型在 $0 < M/B < 8$时实现拓扑绝缘相，否则实现平庸绝缘相。有趣的是，尽管 QWZ 模型具有最简的双能带结构，但由于布里渊区中不同反演对称高对称点处发生能带反转，该模型支持两种不同的拓扑相。具体而言，对于 $0 < M/B <$ 4 和 $4 < M/B < 8$，能带反转分别发生在 Γ和 M 点，从而产生以第一陈数 ± 1 [81]为特征的量子反常霍尔绝缘相。

与 QWZ 模型对应的紧束缚哈密顿量 [式（14）] 在母方形晶格上可写为

$$H_{\rm 2D,TB}^{\rm QWZ} = \sum_{\boldsymbol{r}}\Bigg\{\Bigg(\sum_{\mu=x,y}\Psi_{\boldsymbol{r}}^{\dagger}\left[\frac{t}{2i}\tau_\mu + B\tau_3\right]\Psi_{\boldsymbol{r}+\hat{e}_\mu} + \text{H.c.}\Bigg) + \Psi_{\boldsymbol{r}}^{\dagger}\left(M + 4B\right)\tau_3\Psi_{\boldsymbol{r}}\Bigg\} + \cdots . \quad (15)$$

这里，$\Psi_{\boldsymbol{r}}^{\top} = (c_{\boldsymbol{r},+}, c_{\boldsymbol{r},-})$ 是一个双分量费米子旋量，其中 $c_{\boldsymbol{r},\tau}$ 湮灭轨道中位于格点 $\boldsymbol{r} = (x, y)$、宇称本征值为 $\tau = \pm$ 的费米子，且$\tau_{x,y} \equiv \tau_{1,2}$。省略号表示实现周期性边界条件所需的其他跃迁项，为简洁起见予以省略。在整个数值计算中，我们设定$t = B = 1$。随后，我们通过分别为黑色格点和红色格点赋予不同的位点质量参数 M_0 和 $M_{\rm alt}$，构建分块矩阵哈密顿量 $H_{\rm parent}$，该哈密顿量来自 $H_2^{\rm QWZ}$ D'TB，对应于谢尔宾斯基地毯分形晶格及其补集 [见图 1(b,i)]。接着，我们研究图案化或替换质量的谢尔宾斯基地毯在 $(M_0, M_{\rm alt})$ 参数空间中的拓扑相图，并使用 Bott 指标 [式（13）] [82]表征各相。

图案化谢尔宾斯基地毯的相图 ´对于代数 $g = 1$、2 和 3，以及母方形晶格的不同线性系统尺寸 L如图 7(a)-7(f)所示。与前文讨论的图案化康托集相比，所得相图相较于传统 QWZ 模型仅表现出较为温和的偏离。具体而言，对于 $g = 1$ 和 2，拓扑区域仍近似保持垂直，在参数范围 $0 < M < 8$ 内延伸，仅对 $M_{\rm alt}$表现出微弱依赖。对于第三代地毯和较小的系统尺寸，这种行为出现了明显偏离：相边界变得弯曲，并出现带有 BI $= \pm 2$ 的小岛。这些小岛是质量替代型谢尔宾斯基地毯中的有限尺寸效应，因为对应于 ´的均匀 QWZ 模型仅支持 BI $M_0 = M_{\rm alt}$相。与这一解释一致的是，在我们数值计算可达到的范围内增大系统尺寸后，BI $= \pm 1$小岛消失。

值得注意的是，对于代数为$g = 1$ 和 2 的图案化 Sierpi ´nski 地毯，相图中拓扑区域的占比（p）几乎不依赖于系统大小，这表明在热力学极限（$1/L \to 0$）下，p 存在一个有限的饱和值，即 $p_{\rm sat}$。对于 $g = 3$，在（p、$1/L$）平面中仅有两个数据点，因而无法进行明确的有限尺寸标度分析。然而，p 随系统大小呈现出明显的增长趋势；在可获得的最大L处，其数值逐渐接近代数为 $g = 1$ 和 2 时得到的结果。这一趋势表明，在图案化或替代质量的 Sierpi ´nski 地毯中，拓扑相仍然存在，并且贯穿

热力学极限下的不同代数。相应结果见图7（g）。

接下来，我们通过考察开放边界条件和周 期性边界条件下近零能模的流形，建立替代质量 Sier pi7(h)-7(n) 分形晶格中的体边对应关系，并在图 II中总结了相应结果。总体而言，这些现象与此前在替代质量康托尔集中观察到的现象非常相似，但有一个显著区别：近零能模局域在分形晶格的外边界和/或围绕中心区域的最大内部边界上，并且邻接于具有不同位点质量值的区域 M_0 以及 M_{alt}。此外，具有相反 Bott 指数的不同量子反常霍尔绝缘相的可能性，产生了几种有趣的边界局域模组合，而这些组合在一维 SSH 模型中并无对应物。下面我们将考察这些可能性。

例如，当 M_0 和 M_{alt} 分别选自支持 Γ相和 M 相的参数区间时，所得系统可以实现拓扑绝缘相或普通绝缘相。在前一种情况下，开放边界条件会在外缘产生显著的局域态密度峰，对应于一对粒子-空穴对称的近零能模。然而，在普通绝缘相中不存在这类外缘特征。有趣的是，在两个方向上施加周期性边界条件后，可以发现与这些模相关的显著局域态密度峰，并且它们在两个相中都位于中心内缘附近。这些结果见图7(i) 和7(j)，分别对应前述两种情况。图 7(i) 中的行为与以下情形中观察到的现象在定性上相似：当 M_0 和 M_{alt} 分别选自拓扑参数区间和平凡参数区间，使所得相为拓扑相时 [图 7(k)]。相比之下，当 M_0 和 M_{alt} 分别选自平凡参数区间和拓扑参数区间，从而得到普通绝缘体时，近零能局域态密度峰在开放边界条件和周期性边界条件下都局限于最大内缘 [图 7(n)]。综合来看，这些结果确立了体拓扑不变量与边界局域近零能模出现之间的对应关系，同时凸显了局域拓扑环境在决定其空间分布方面的关键作用。

C. 三维

最后，我们转向属于AII 对称类、在立方晶格上实现的三维（3D）拓扑绝缘体，并研究其在拼接 门格海绵的几何后代上的拓扑特征；该几何后代通过将八个标准门格海绵排列成 2×2×2 构型而构建。这种拼接产生了非中空的中心区域，同时保留了原始门格海绵的豪斯多夫维数，尽管破坏了其全局自相似性。为说明这一点，回顾标准门格海绵通过递归生成：每次迭代保留20个较小的立方副本，每个副本的线性缩放因子为 1/3。因此，其豪斯多夫维数由 $d_{\mathrm{H}} = \ln 20/\ln 3 = \log_3 20 \approx 2.727 < 3$ 给出。由于该拼接结构由有限个原始门格海绵副本组成，其豪斯多夫维数保持不变。

我们从一个经过立方晶格正则化的三维 AII 类拓扑绝缘体原型模型开始，即 BHZ 模型的三维推广 [8, 12], ，该模型由布洛赫哈密顿量描述：

$$H_{3\mathrm{D}}^{\mathrm{BHZ}}(\mathbf{k}) = t\left[\sin(k_x a)\Gamma_1 + \sin(k_y a)\Gamma_2 + \sin(k_z a)\Gamma_3\right] + \left[M - 2B\sum_{\mu=x,y,z}\{1-\cos(k_\mu a)\}\right]\Gamma_4. \tag{16}$$

其中，a表示晶格间距，彼此反对易的厄米 Γ 矩阵定义为 $\Gamma_1 = \tau_3 \otimes \sigma_1$、$\Gamma_2 = \tau_3 \otimes \sigma_2$、$\Gamma_3 = \tau_3 \otimes \sigma_3$ 和 $\Gamma_4 = \tau_1 \otimes \sigma_0$，其中 $\otimes$ 表示张量积。两组泡利矩阵 $\{\tau_\mu\}$ 和 $\{\sigma_\mu\}$分别作用于轨道和自旋自由度。根据比值 M/B 的不同，该模型支持不同的拓扑绝缘相，其特征是在布里渊区不同的时间反演不变动量处发生能带反转。具体而言，对于 $0 < M/B < 4$ 和 $8 < M/B < 12$，能带反转分别发生在 Γ 和 R 点，从而产生强拓扑绝缘体。在中间区域 $4 < M/B < 8$，三个 X 点和三个 M 点同时发生能带反转，由此形成弱拓扑绝缘体。相比之下，$M/B < 0$ 和 $M/B > 12$ 对应的绝缘相在拓扑上是平凡的。强拓扑相具有非平凡的 $\mathbb{Z}_2$ 不变量，其受到时间反演对称性以及能带相关的克拉默简并保护。在下文中，我们主要关注 $0 < M/B < 4$ 的强拓扑相，同时将部分结论推广到弱拓扑区域。

与公式 $H_{3\mathrm{D}}^{\mathrm{BHZ}}(\mathbf{k})$ 中的布洛赫哈密顿量相对应的紧束缚哈密顿量16定义在母立方晶格上，其形式为

$$H_{3\mathrm{D,TB}}^{\mathrm{BHZ}} = \sum_{\boldsymbol{r}}\left\{\left(\sum_{\mu=x,y,z}\Psi_{\boldsymbol{r}}^{\dagger}\left[\frac{t}{2i}\Gamma_\mu + B\Gamma_4\right]\Psi_{\boldsymbol{r}+\hat{e}_\mu} + \mathrm{H.c.}\right) + \Psi_{\boldsymbol{r}}^{\dagger}(M+6B)\Gamma_4\Psi_{\boldsymbol{r}}\right\} + \cdots, \tag{17}$$

其中，$\Psi_{\boldsymbol{r}}^{\top} = (c_{\boldsymbol{r},+,\uparrow}, c_{\boldsymbol{r},+,\downarrow}, c_{\boldsymbol{r},-,\uparrow}, c_{\boldsymbol{r},-,\downarrow})$ 是一个四分量费米子旋量，且 $\Gamma_{x,y,z} \equiv \Gamma_{1,2,3}$。这里，$c_{\boldsymbol{r},\tau,\sigma}$ 表示在格点 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ 处湮灭一个费米子，其轨道宇称本征值为 $\tau = \pm$，沿 z 方向的自旋投影为 $\sigma = \uparrow, \downarrow$。省略号表示实现周期性边界条件所需的额外跃迁项。确定铺砌门格海绵所属的格点后 [（图 1(c) 中的黑色格点）], ，母哈密顿量 $H_{3\mathrm{D}}^{\mathrm{BHZ}}{}_{,\mathrm{TB}}$ 可写成分块矩阵形式 H_{parent}，其中红色格点表示其补集。遵循相关规定

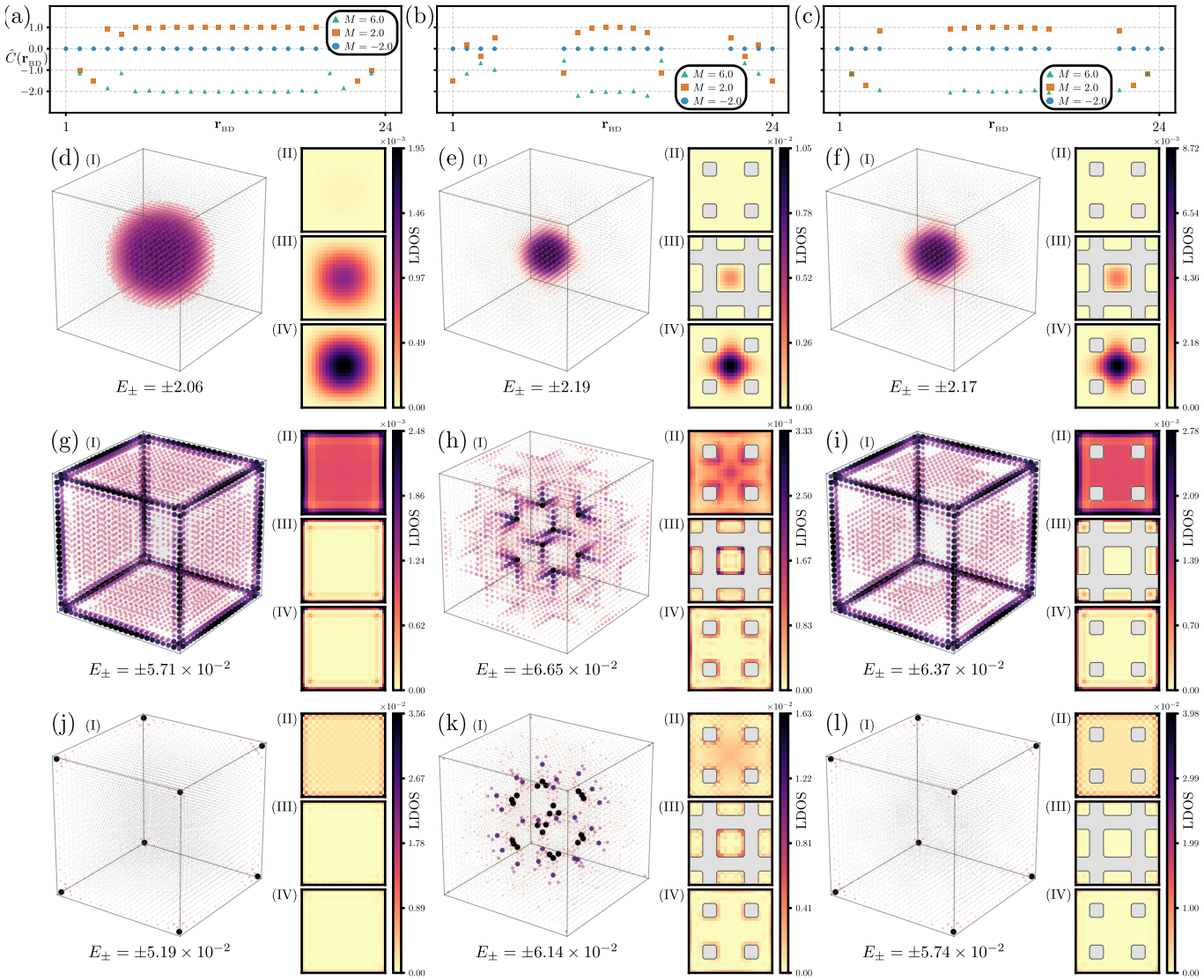


图 8. 局域拓扑标记 $C_{3D}(\boldsymbol{r})$ [式（18）] 在质量取值为 $M = -2.0$ （平庸绝缘体）以及 $M = 2.0$ 和 6.0（拓扑绝缘体）时的结果（取值见图例），定义见式（16），并显示在体对角线（$\boldsymbol{r}_{\mathrm{BD}}$）上的格点上：包括 $L = 24$ (a) 母立方晶格，以及通过（b）位点消除 [方法 1], 和（c）投影或重整化 [方法 2] 得到的铺砌门格海绵。具有开放边界条件 [的两个粒子-空穴对称的最接近零能量的模，其能量为 $E_{\pm}$ （取值见图例）所对应的局域态密度（LDOS）显示于 $L = 24$ 母立方晶格 [（d）、（g）、（j）], 以及通过位点消除方法 [（e）、（h）、（k）], 和投影或重整化 [方法] 得到的铺砌门格海绵上，分别对应 $M = -2.0$ [（d）–（f）]、 2.0 [（g）–（i）], 和 6.0 [（j）–（l）] 。在（I）中，最大的 20% LDOS 值被投影到晶格上，其余格点被遮蔽为灰色；在其二维切片（II） $z = 1$、（III） $z = 7$和（IV） $z = 13$上，孔洞以灰色表示。

见第 IA 节所述 H_{SL} ，随后我们通过位点消除（方法 1）构造铺砌门格海绵哈密顿量 H_{R} ，或通过投影或重整化（方法 2）构造该哈密顿量。对于图案化或替代质量构造，我们分别为黑色和红色格点赋予不同的位点质量参数 M_0 和 M_{alt}。在整个数值计算过程中，我们设定 $t = B = 1$。

不同于低维系统，对于三维 AII 类绝缘体，通过对相应的实空间紧束缚哈密顿量进行对角化，无法轻易获得全局拓扑不变量。因此，我们使用局域拓扑标记来表征其拓扑，其在每个晶格位点处的值编码于算子 [78] 相应的对角矩阵元中

$$\mathbf{C}_{3\mathrm{D}} = N_D\, W\, [\mathbf{Q}\,\mathbf{X}\,\mathbf{P}\,\mathbf{Y}\,\mathbf{Q}\,\mathbf{Z}\,\mathbf{P} + \mathbf{P}\,\mathbf{X}\,\mathbf{Q}\,\mathbf{Y}\,\mathbf{P}\,\mathbf{Z}\,\mathbf{Q}], \tag{18}$$

其中，$\mathbf{X}$、$\mathbf{Y}$和$\mathbf{Z}$ 是对角位置算符，其矩阵元分别为 $\mathbf{X}_{ij} = x_i\delta_{ij}$、$\mathbf{Y}_{ij} = y_i\delta_{ij}$ 和 $\mathbf{Z}_{ij} = z_i\delta_{ij}$； $\boldsymbol{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ 表示第 i 个晶格位点的位置。算符 W 定义为 $W = \Gamma_5$,

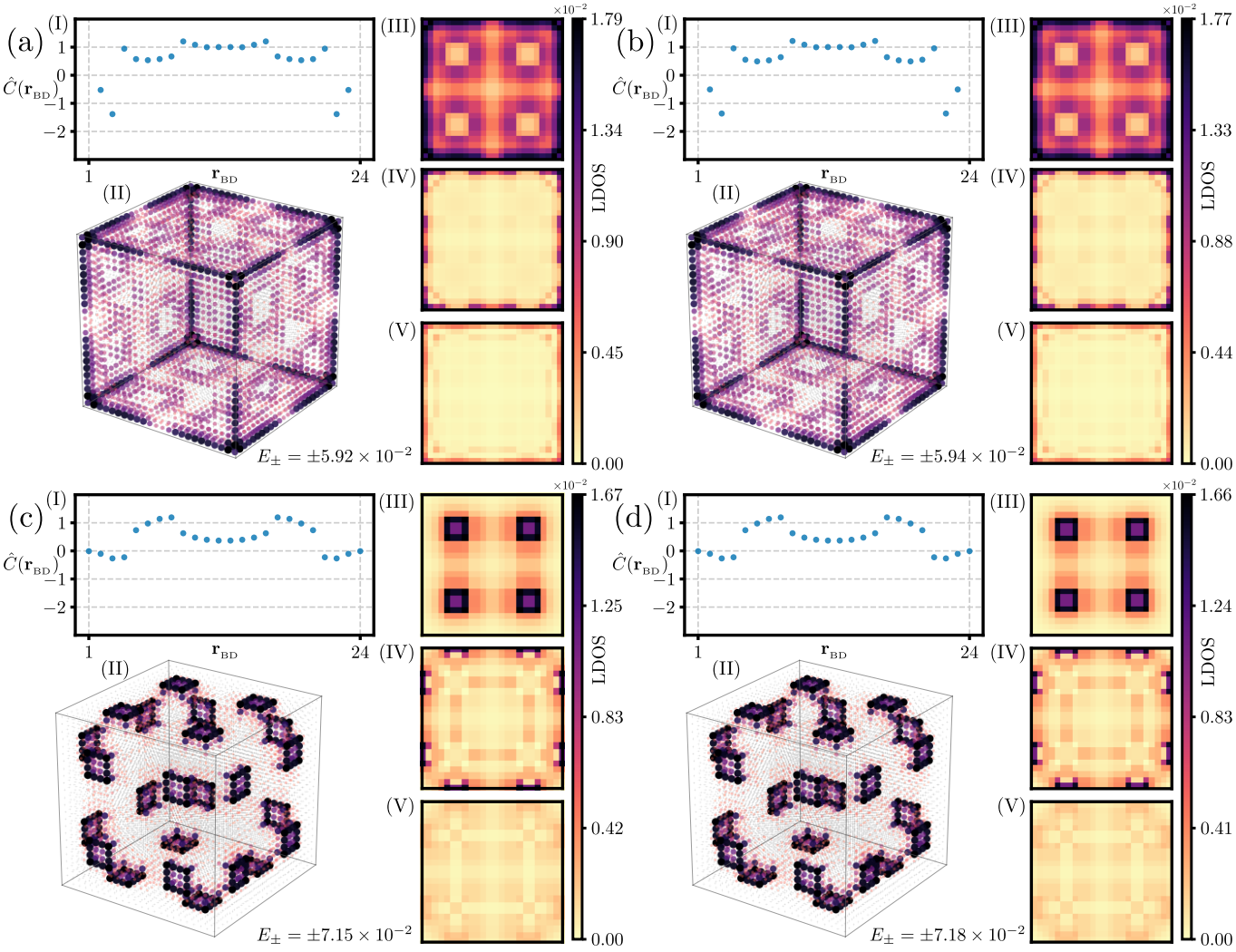


图9. 开放边界条件下 $L = 24$ 图案化分形质量铺砌门格海绵上，沿体对角线 $\boldsymbol{r}_{3\mathrm{D}}$ [(I)] 各格点的局域拓扑标记 $C_{3\mathrm{D}}(\boldsymbol{r})$，以及与能量为 $E_{\pm}$（见图例）的两个粒子-空穴对称的最接近零能量的模相关的局域态密度（局域态密度） [(II)]，分别对应于(a) $(M_0, M_{\mathrm{alt}}) = (2.00, -0.05)$、(b) $(M_0, M_{\mathrm{alt}}) = (2.00, -0.10)$、(c) $(M_0, M_{\mathrm{alt}}) = (-0.05, 2.00)$和(d) $(M_0, M_{\mathrm{alt}}) = (-0.10, 2.00)$。其中，最大的20%局域态密度值被投影到晶格上，其余格点则以灰色遮罩。在(III) $z = 1$、(IV) $z = 7$和(V) $z = 13$处母立方系统二维切片上的局域态密度。

其中，$\Gamma_5 = \Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3\Gamma_4 = -\tau_2 \otimes \sigma_0$ 是第五个厄米矩阵，它与在 $H_{3\mathrm{D}}^{\mathrm{BHZ}}(\boldsymbol{k})$ 和$H_{3\mathrm{D}}^{\mathrm{BHZ}}{}_{,\mathrm{TB}}$ 中出现的四个 Γ 矩阵反对易。归一化常数为 $N_D = 1/(8\pi i)$。由于此处考虑的所有系统都具有立方对称性，我们沿体对角线计算并呈现局域拓扑标记。

我们首先考察母立方晶格上局域拓扑标记的空间分布。对于$M = -2$，该标记在整个晶格中恒为零，从而证实了该绝缘相的拓扑平庸性质。相比之下，对于 $M = 2$ 和 6，它分别取 $+1$ 和 -2的量子化体内值，表明存在不同的拓扑绝缘相。正如局域拓扑标记所预期的那样，即使在这些拓扑绝缘相中，其值在系统边界附近也会消失。这些结果展示于图 8（a）中。对于铺砌门格海绵，无论其哈密顿量是通过位点消除（方法 1）构造的 [图 8（b）] 还是通过投影/重整化（方法 2）构造的 [图 8（c）]。

接下来，我们考察这些系统在开放边界条件下所支持的无隙表面态，以此确立体边对应，并验证局域标记的量子化体内取值所给出的拓扑表征。由于计算局域拓扑标记需要进行精确对角化，计算需求较高，加之我们的数值资源有限，因此我们仅对第一代（$g = 1$）铺砌门格海绵进行分析。尽管如此，基于我们对一维和二维

分形晶格的明确结果，我们预计这些结论也适用于三维铺砌门格海绵的更高代数（$g > 1$）。

对于 $M = -2$，与最接近零能量的两个粒子-空穴对称模相关的局域态密度，在母立方晶格 [Fig. 8(d)]以及分别采用方法 1 [Fig. 8(e)] 和方法 2[Fig. 8(f)]构造的铺砌门格海绵中，均主要分布于体内，没有明显的边界局域现象。对垂直于 z 方向选取的二维平面计算分层局域态密度，进一步证实了这种类似体内的特征。相比之下，对于 $M = 2$，这些近零能模的局域态密度主要局域在最外层表面，这一点从相应的分层剖面中清晰可见。母立方晶格 [Fig. 8(g)]以及分别采用方法1 [Fig. 8(h)]和方法 2 [Fig. 8(i)]构造的铺砌门格海绵中，均一致观察到这一行为。此外，铺砌门格海绵上的局域态密度呈现出其底层分形结构，尤其是在采用位点消除方法时，在自相似网络的内表面附近显示出显著的局域态密度权重。对于 $M = 6$，在母立方晶格 [Fig. 8(j)] 以及通过位点消除 [Fig. 8(k)] 和投影或重整化 [Fig. 8(l)]得到的铺砌门格海绵中，也呈现出定性相似的表面局域模式。不过，一个细微差别是，与$M = 2$相比， $M = 6$ 最外层表面上的谱权重略弱，这可能反映了该绝缘相的弱拓扑特征。此外，在这种情况下，局域态密度结构没有呈现出任何清晰可见的分形结构。

在确立了铺砌门格海绵（立方晶格的几何后代）上强和弱$\mathbb{Z}_2$ 拓扑绝缘相的存在性之后，我们最终研究其图案化或替代质量对应体中拓扑相的出现。具体而言，我们聚焦于母 $H_{3\mathrm{D}}^{\mathrm{BHZ}}$模型的平凡（$M < 0$）和强 $\mathbb{Z}_2$ 拓扑（$0 < M < 4$）绝缘区域，并据此选定位点质量参数 M_0 和 M_{alt}。具体来说，我们考虑四组具有代表性的参数组合：$(M_0, M_{\mathrm{alt}}) = (2.00, -0.05)$、$(2.00, -0.10)$、$(-0.05, 2.00)$ 和 $(-0.10, 2.00)$。相应结果分别展示于图 9(a)–9(d) 中。

对于前两组参数组合，局域拓扑标记沿体对角线在相当大比例的晶格位点上趋近于 $+1$的量子化值（在数值误差条范围内），表明存在拓扑绝缘相。与此一致，与最接近零能量的两个粒子-空穴对称模相关联的局域态密度在系统的整个外表面上呈现显著局域化，相应的层分辨分布进一步证实了这一点。相比之下，对于后两组参数组合，局域拓扑标记通常显著偏离任何非平凡量子化值，仅在以平凡 M_0 和拓扑的 M_{alt}为特征的区域之间界面附近的少数格点处例外。这一行为表明，所得绝缘相在全局上是拓扑平庸的。有趣的是，尽管不存在非平凡的体内拓扑标记，两个近零能模的局域态密度仍强烈局域在外表面上，且显著的谱权重集中在以位点质量 M_{alt}为特征的区域，而该位点质量属于母体三维 BHZ 模型的拓扑区域。这一对比凸显了局域拓扑环境在决定近零能边界模空间分布中的关键作用。综合来看，这些结果为图案化或替代质量的铺砌门格海绵晶格中拓扑相和边界局域模的出现提供了有力证据。

III. 无序下分形拓扑绝缘体的稳定性

迄今为止，我们已经证明，通过晶格位点消除以及投影或重整化，可以在一维、二维和三维分形晶格上成功实现拓扑绝缘相；在洁净极限下，也可以在其图案化或替代质量对应体上实现这些相。尽管这些发现令人鼓舞，但确立基于分形的拓扑绝缘体对无序的稳定性同样重要，尤其是考虑到其潜在的实际应用，因为真实材料不可避免地含有杂质和缺陷。然而，即使在洁净极限下，局域拓扑标记也表现出显著的空间涨落，尽管它们在大多数晶格位点上呈现预期的量子化值。因此，它们并不适合可靠地识别由无序驱动的拓扑相与普通绝缘相之间的转变。此类分析需要一个全局拓扑不变量，使其在这两个相中呈现不同的量子化值。在本文研究的系统中，只有实现量子反常霍尔绝缘体的二维模型具有这样的全局不变量，即Bott指标。因此，我们聚焦于这些系统，以研究基于分形的拓扑相对无序的稳健性。

为研究基于分形的拓扑相对无序的稳健性，我们聚焦于 Haldane 模型，并考察随机电荷杂质对母蜂窝晶格及其几何衍生结构——六角雪花晶格的影响。我们通过计算无序平均 Bott 指数来量化拓扑相的稳定性。在母蜂窝晶格上，每个晶格位点均引入点状电荷杂质，其位点势从均匀盒式分布 $[-W/2, W/2]$ 中独立抽取，其中 W 表示无序强度。

在格点消除方法中，六花分形上的无序哈密顿量是这样构造的：对每一个无序实现，移除母蜂窝晶格中不属于自相似六角雪花网络的所有格点。相比之下，投影或重正

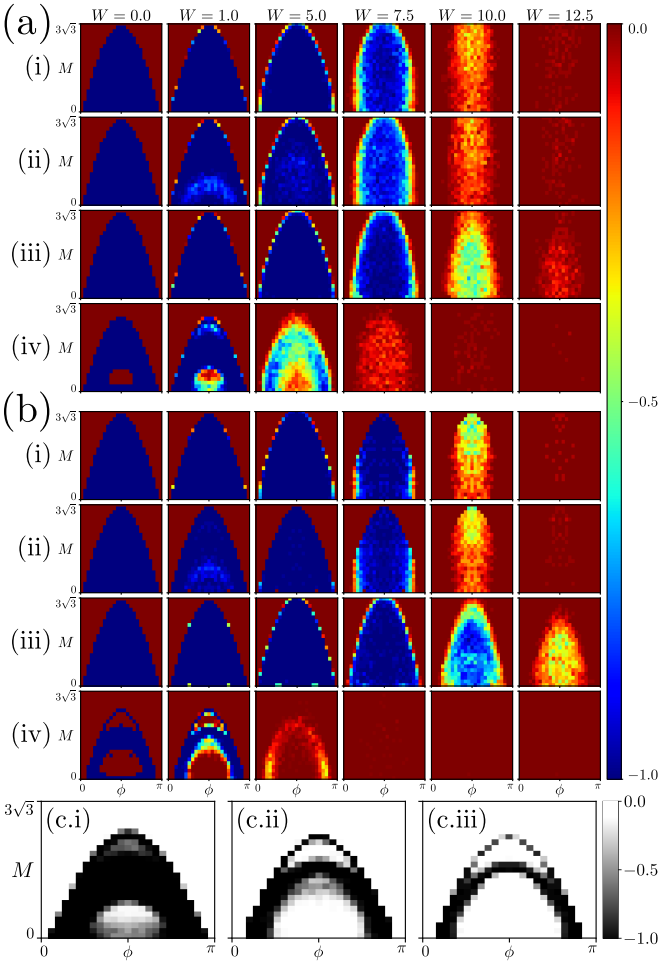


图10. 蜂窝晶格上无序海尔丹模型的相图 [行 (i)] ，其中(a)包含366个格点，(b)包含3282个格点；在随机电荷杂质存在的情况下，以无序平均 Bott 指数表示，并且在(a)第二代($g = 2$)和(b)第三代($g = 3$)六角雪花晶格中也得到类似结果 [行 (ii)–(iv)] 。在蜂窝晶格 [(i)]上，将从箱式分布中随机抽取的点状电荷杂质 $[-W/2, W/2]$ 添加到每个格点，其中 W 表示无序强度；随后将该系统投影到六角雪花晶格 [(ii)] 上，以构建相应的相图。在(iii)中，将洁净的基于蜂窝晶格的 Haldane 模型投影到六角雪花晶格上，随后向其每个格点添加点状电荷杂质。行(iv)对应于一个六角雪花晶格，其由(i)中的母体无序蜂窝晶格 Haldane 模型经过位点消除得到。(c)与(a)和(b)中的行(iv)类似，展示六角雪花晶格相图对代数的依赖性，并给出(i) $g = 2$、(ii) $g = 3$和(iii) $g = 4$的具体结果；其渐近行为如图5(d)所示。对于有限 W 的每个参数值，均取50个相互独立的无序实现进行平均，并展示 $0 \leq M \leq 5.4$ 和 $0 \leq \phi \leq \pi$参数区域内的结果。参见第III节。

化方法允许两种不同的构造。在第一种中，我们在存在无序的情况下，将位于六花分形之外的蜂窝晶格格点投影出去。这一过程将母晶格上的位点无序映射为六角雪花上的长程关联无序，同时也产生长程跃迁振幅。在第二种构造中，我们首先将无序 Haldane 哈密顿量投影到六角雪花上，然后在其格点上引入独立点状无序势，这些无序势同样取自均匀分布 $[-W/2, W/2]$。在这种情况下，尽管有效跃迁振幅仍是长程的，但无序是短程的。这两种截然不同的构造带来了有趣的结果，我们将在下文讨论。

Haldane 模型在蜂窝晶格和六角雪花晶格上的相图均具有关于 $\phi \to -\phi$ 和 $M \to -M$的对称性。因此，我们将分析限制在参数区域 $0 \leq M \leq 5.4$ 和 $0 \leq \phi \leq \pi$内；在该区域中，洁净系统的 Bott 指标为 -1。对于该区域中的每个参数点，我们通过对 50 个独立无序实现取平均，计算无序平均 Bott 指数。结果见图10。

在蜂窝晶格上，拓扑叶瓣能够抵御足够弱的无序。随着无序强度 W 增大，叶瓣会从边界处逐渐侵蚀，表明无序诱导的正常或平庸绝缘相开始出现。我们发现，具有有限面积且界限明确的拓扑区域（其无序平均 Bott 指数固定在 -1）可持续存在，直至 $W = 7.5$。超过这一数值后，系统会平滑地向平庸绝缘区间交叉过渡，此时无序平均 Bott 指数趋近于零，如 $W = 12.5$处的结果所示。值得注意的是，随着系统尺寸增大，这种交叉过渡会变得愈发陡峭，表明在热力学极限下会发生陡峭的拓扑相变。图10(a,i) 和 10(b,i) 分别展示了包含 366 和 3282 个格点的蜂窝晶格结果，其几何后代为代数分别为 $g = 2$和 $g = 3$的六角雪花晶格。对于较大的系统，在 $W = 10.0$处，我们还在（ϕ， M）参数空间中确定了一个有限区域，其中无序平均 Bott 指数趋近于预期的临界值，约为 0。5。

在第一种重整化方案中，将无序 Haldane 哈密顿量直接投影到六花分形晶格上时，我们发现所得结果与母蜂窝晶格上的结果在定量上一致，而与系统大小或分形生成代数无关。这些结果分别展示在图10（a,ii）和10（b,ii）中，对应于 $g = 2$ 和 $g = 3$。这一致性确立了 Schur 补投影过程的稳健性，以及其即使在存在无序时仍保持精确的性质。相比之下，当仅在将无序 Haldane 哈密顿量投影到六花分形晶格之后才引入随机点状电荷杂质时，我们观察到拓扑绝缘相对无序的稳健性增强。具体而言，如图10（a,iii）和10（b,iii）所示，拓扑瓣持续存在，直至更大的无序强度，对应于$g = 2$ 和 $g = 3$，分别为。该增强的稳定

性可以从洁净母系统与后代系统之间的对应关系中得到理解：尽管蜂窝晶格上的 Haldane 模型由局域跃迁振幅和现场交错质量所刻画，但其六花分形对应系统则由 H_{R} 的长程矩阵元支配。尽管两者在微观描述上存在这些差异，但由于 Schur 补投影过程的精确性，这两个系统展现出完全相同的洁净极限相图。因此，六花分形晶格继承的长程耦合为其抵抗随机现场无序提供了额外的稳健性，需要更大的无序强度才能破坏其拓扑相。关于在投影方法或重整化框架内比较这两种方法的一般性讨论，尤其是对临界无序强度的比较，请参阅文献69。

最后，我们研究了无序存在时，位点消除方案下六角雪花晶格上 Haldane 模型产生的量子反常霍尔绝缘体的稳定性。在洁净极限下，六角雪花晶格的稀疏连通性会在拓扑叶瓣内产生一个平凡绝缘区域，使量子反常霍尔绝缘体相变得脆弱。在无序存在时，这一特征同样持续存在；当 $5.0 \leq W \leq 7.5$ 时，拓扑相会完全消失，如图 10(a,iv) 和 10(b,iv) 所示，分别对应 $g = 2$ 和 $g = 3$。这些结果表明，位点消除显著削弱了拓扑相抵抗无序的稳健性。

为进一步考察热力学极限下量子反常霍尔绝缘体的稳定性，我们将无序强度固定在 $W = 1.0$ 这一适中值，并比较代数为$g = 2$、3 和 4 的六角雪花晶格的相图，如图10(c,i)、10(c,ii) 和10(c,iii) 所示。我们发现，在扫描的参数空间中，拓扑相所占的比例 p 会随着 g的增加而单调减小。然而，当将其表示为系统尺寸倒数 $1/N$时，其中 N 表示晶格位点的数量， p似乎会趋近于一个有限的渐近值（p_{sat}），当 $1/N \to 0$时，如图5(e) 所示。尽管代数g 与系统尺寸 N 在分形几何中内在地相互交织，使得难以可靠地外推至热力学极限，但现有数据初步表明，在位点消除方案下，即使存在弱无序，量子反常霍尔绝缘体相也可能在热力学极限下存活。

IV. 总结与讨论

总之，我们从一维、二维和三维中属于不同 Altland–Zirnbauer 对称性类别的典型拓扑绝缘体母晶格模型出发，通过两种互补方法，展示了如何在几何派生的分形晶格上实现这些模型。我们主要关注自相似分形几何，并通过移除或消除位于目标分形网络之外的母晶格格点，构造相应的有效哈密顿量（H_{SE}）；我们将这种方法称为位点消除。另一种方法是对这些相同的格点进行积分消去，从而获得定义在分形晶格上的重整化哈密顿量；我们将其称为投影或重整化。利用这两种互补方案，我们成功地在康托集上实现了 SSH 拓扑，在六角雪花分形上实现了 Haldane 模型的量子反常霍尔绝缘相，并在铺砌门格海绵分形晶格上实现了强 $\mathbb{Z}_2$ 和弱拓扑相。我们利用适当的量子化局域拓扑标记和全局拓扑不变量对这些相进行表征，并通过分形晶格外边界和/或内边界上局域化的近零能模的出现，确立了它们与体边对应的一致性。

在第三种方法中，我们保留母晶体的底层晶格结构，但引入空间图案化的质量项，分别为属于目标分形网络及其补集的格点赋予不同的位点质量参数 M_0 和 M_{alt}。这些参数取自母模型的不同拓扑区域，由此生成了我们称为图案化或替代质量分形晶格的结构。通过这种方法，我们展示了嵌入一维链中的图案化康托集上的 SSH 拓扑、嵌入母方晶格中的替代质量 Sierpi´nski 地毯上的 QWZ 模型量子反常霍尔绝缘相，以及嵌入立方晶格中的图案化铺砌门格海绵上的强 $\mathbb{Z}_2$ 拓扑绝缘相。在每种情况下，所得拓扑相均通过适当的局域拓扑标记或全局拓扑不变量加以表征，其体内—边界对应关系则表现为局域于图案化分形结构外边界和/或内边界的无隙模。

最后，我们证明，采用方法 1 或方法 2 构造的六边形分形晶格上的量子反常霍尔绝缘相，对于足够弱的势无序仍具有稳健性；在后一种方法中，无论是在投影之前还是之后引入点状电荷杂质，这一结论都成立。我们预计，这种稳健性也将延伸至其他基于分形的拓扑绝缘相。综上所述，我们的研究结果提出了一个通用框架，可用于在任意空间维度、不同的 Altland–Zirnbauer 对称性类别下，并从广泛的母晶体出发，在洁净极限以及存在足够弱无序的情况下，实现基于分形的拓扑绝缘体。这些结果为在分形晶格上实验实现拓扑相开辟了充满希望的途径。

设计型电子材料和超冷原子光学晶格为在分形晶格上实现拓扑绝缘体提供了两个颇具前景的量子平台。高度可调的人工设计材料已经能够实现规则晶格、准晶体和分形几何结构 [83–89]，从而提供可用于模拟各种拓扑模型的多样化平台。

类似地，通过选择性移除激光阱势，可以在光学晶格中构造所需的分形图案。近期已有若干种在光学晶格中实现不同拓扑相的方案被提出 [90–93],这些方案可以很容易地扩展到其几何后代分形网络。其中，Haldane 模型 [92] 和 QWZ 模型 [93]的实验实现尤其具有前景。在本文提出的三种、用于在基于晶体的拓扑绝缘体的几何后代分形晶格上实现拓扑绝缘体的方法中，替代质量图案化方案可能是最具实践性且最易于实验实现的路径，原因有以下几点。首先，它保留了底层晶格连接关系，从而避免了结构改性可能带来的潜在复杂性，例如不期望的能带弯曲效应；这些效应可能损害拓扑相的稳定性，并使边界模的探测更加困难。其次，它只需要对位点质量参数进行局域控制。在人工设计材料中，这可以通过调节局域陷阱势的深度来实现；而在光学晶格中，则可以通过对激光阱势进行空间选择性调制来实现。

除了这些前景广阔的量子平台之外，我们的理论预测还可以利用几种高度可调的经典超材料平台进行检验，其中拓扑电路 [94–96]，光子晶格 [97]，以及声子或机械晶格 [98, 99]尤其具有前景。这些系统中已经在不同空间维度上实现了各种拓扑相，并展现出能够抵御固有无序、保持稳健的边界模。这些平台中的先进实验技术可用于实现与消除格点、投影以及图案化或替代质量分形晶格相关的拓扑哈密顿量。值得注意的是，一些拓扑相已经在分形超材料 [100–103]上实现。这些实现还可以纳入投影方案（方法 2）所固有的长程耦合，从而为系统探索不同嵌入维度下基于分形的丰富拓扑绝缘相提供一条灵活途径。我们期待，本理论工作将激发人们在这一方向上的新实验兴趣。

致谢

本研究得到美国国家科学基金会 CAREER 资助项目 No.DMR-2238679（美国）的资助，受资助人：B.R。

[1] M. Z. Hasan 和 C. L. Kane， *Colloquium*：拓扑绝缘体，《现代物理学评论》82，3045（2010）。[2] X.-L. Qi 和 S.-C. Zhang，拓扑绝缘体与超导体，《现代物理学评论》83，1057（2011）。[3] A. Bansil、H. Lin 和 T. Das，*Colloquium*：拓扑能带理论，《现代物理学评论》88，021004（2016）。[4] C.-K. Chiu、J. C. Y. Teo、A. P. Schnyder 和 S. Ryu，具有对称性的拓扑量子物质分类，《现代物理学评论》88，035005（2016）。[5] C. L. Kane 和 E. J. Mele， Z_2 拓扑序与量子自旋霍尔效应，《物理评论快报》95，146802（2005）[6] L. Fu 和 C. L. Kane，具有反演对称性的拓扑绝缘体，《物理评论B》76，045302（2007）。[7] J. E. Moore 和 L. Balents，时间反演不变能带结构的拓扑不变量，《物理评论B》75，121306(R)（2007）[8] B. A. Bernevig、T. L. Hughes 和 S.-C. Zhang，碲化汞量子阱中的量子自旋霍尔效应与拓扑相变，《科学》314，1757（2006）。[9] R. Roy，三维中的拓扑相与量子自旋霍尔效应，《物理评论B》79，195322（2009）。[10] A. Kitaev，拓扑绝缘体与超导体的周期表，《美国物理联合会会议论文集》1134，22（2009）。[11] S. Ryu、A. P. Schnyder、A. Furusaki 和 A. W. W. Lud-wig，拓扑绝缘体与超导体：十重分类与维度层级，《新物理学杂志》12，065010 2010（）。[12] C.-X. Liu、X.-L. Qi、H. Zhang、X. Dai、Z. Fang 和 S.-C. Zhang，拓扑绝缘体的模型哈密顿量，《物理评论B》82, 045122（2010）。[13] L. Fu，拓扑晶体绝缘体，《物理评论快报》106, 106802（2011）。[14] R.-J. Slager、A. Mesaros、V. Juriˇci´c 和 J. Zaanen，拓扑能带绝缘体的空间群分类，《自然·物理》9, 98（2012）。[15] K. Shiozaki 和 M. Sato，晶体绝缘体与超导体的拓扑，《物理评论B》90, 165114（2014）。[16] B. Bradlyn、L. Elcoro、J. Cano、M. G. Vergniory、Z. Wang、C. Felser、M. I. Aroyo 和 B. A. Bernevig，拓扑量子化学，自然（伦敦）547, 298（2017）。[17] H. C. Po、A. Vishwanath 和 H. Watanabe，能带拓扑基于对称性的指标的完备理论，《自然·通讯》8, 50（2017）。[18] J. Kruthoff、J. de Boer、J. van Wezel、C. L. Kane 和 R-J. Slager，通过能带结构组合学对晶体绝缘体进行拓扑分类，《物理评论X》7, 041069（2017）。[19] T. Zhang、Y. Jiang、Z. Song、H. Huang、Y. He、Z. Fang、H. Weng 和 C. Fang，拓扑电子材料目录，自然（伦敦）566, 475（2019）。[20] B. B. Mandelbrot，*The Fractal Geometry of Nature*，第2版（Times Books，纽约，1982）。[21] C. Janot， *Quasicrystals: A Primer*，第2版（Clarendon，牛津，2012）。[22] D. Shechtman、I. Blech、D. Gratias、J. W. Cahn，无平移对称性的长程取向有序金属相，《物理评论快报》53, 1951（1984）。

[23] A. I. Goldman 和 R. F. Kelton，准晶体与晶体近似相，《现代物理学评论》65, 213（1993）。[24] A. J agannathan，斐波那契准晶体：隐藏维度与多重分形性的案例研究，《现代物理学评论》93, 045001（2021）。[25] R. Zallen，《非晶固体物理学》（Wiley，纽约，1983）。[26] M. Brzezi´nska、A. M. Cook 和 T. Neupert，Sierpi´nski-Hofstadter问题中的拓扑，《物理评论B》98, 205116（2018）。[27] S. Pai 和 A. Prem，分形晶格上的拓扑态，《物理评论B》100, 155135（2019）。[28] A. A. Iliasov、M. I. Katsnelson 和 S. Yuan，谢尔宾斯基地毯的霍尔电导，《物理评论B》101, 045413（2020）。[29] S. Manna、B. Pal、W. Wang 和 A. E. B. Nielsen，分形维度中的任意子与分数量子霍尔效应，《物理评论研究》2, 023401（2020）。[30] M. Fremling、M. van Hooft、C. M. Smith 和 L. Fritz，谢尔宾斯基分形中鲁棒边缘电流的存在，《物理评论研究》2, 013044（2020）。[31] Z. Yang、E. Lustig、Y. Lumer 和 M. Segev，分形晶格中的光子Floquet拓扑绝缘体，《光科学与应用》9, 128（2020）。[32] S. Manna、C. W. Duncan、C. A. Weidner、J. F. Sherson 和 A. E. B. Nielsen，具有局域哈密顿量的分形晶格上的任意子编织，《物理评论A》105, L021302（2022）。[33] S. Manna、S. Nandy 和 B. Roy，分形晶格上的高阶拓扑相，《物理评论B》105, L201301（2022）。[34] M. N. Ivaki、I. Sahlberg、K. P¨oyh¨onen、T. Ojanen，拓扑随机分形，《通讯·物理》5, 327（2022）。[35] S. Manna 和 B. Roy，非厄米拓扑分形中的内皮肤效应，《通讯·物理》6, 10（2023）。[36] B. Ren、Y. V. Kartashov、L. J. Maczewsky、M. S. Kirsch、H. Wang、A. Szameit、M. Heinrich 和 Y. Zhang，光子分形晶格中的非线性角态理论，《纳米光子学》12, 3829（2023）。[37] Y.-B. Yang、J.-H. Wang、K. Li 和 Y. Xu，晶体与非晶体系统中的高阶拓扑相：综述，《凝聚态物理杂志》36, 283002（2024）。[38] S. Manna、S. K. Das 和 B. Roy，非晶体拓扑超导体，《物理评论B》109, 174512（2024）。[39] P. Lai、H. Liu、B. Xie、W. Deng、H. Wang、H. Cheng、Z. Liu 和 S. Chen，声子分形晶格中的自旋陈绝缘体，《物理评论 B 》109, L140104（2024）。[40] Z. Li 和 P. Yan，磁性分形中的奇特角态，《物理评论B》110, 024402（2024）。[41] L. L. Lage、N. C. Rappe、A. Latg´e，拓扑Sierpiński地毯系统中的角态和边缘态，《凝聚态物理杂志》37, 025303（2025）。[42] M. Amundsen、V. Juriˇci´c、J. A. Ouassou，分形几何中的约瑟夫森效应，《应用物理学快报》125, 092601（2024）。[43] L. Eek、Z. F. Osseweijer 和 C. Morais S mith，分形性诱导拓扑，《物理评论快报》134, 246601（2025）。[44] L. L. Lage、A. B. F´elix、S. dos A. Sousa-J´unior、A. Latg´e 和 T. P. Cysne，分形中的拓扑相：Kane-Mele-Rashba中的局域自旋陈标记

关于谢尔宾斯基地毯上的模型，《物理评论B》111, 245418（2025）。[45] D-T. Tran、A. Dauphin、N. Goldman和P. Gaspard，二维准晶中的拓扑霍夫施塔特绝缘体，《物理评论B》91, 085125（2015）。[46] H. Huang和F. Liu，准晶格中的量子自旋霍尔效应与自旋博特指标，《物理评论快报》121, 126401（2018）。[47] R. Chen、C-Z. Chen、J.-H. Gao、B. Zhou和D.-H. Xu，准晶体中的高阶拓扑绝缘体，《物理评论快报》124, 036803（2020）。[48] A. Jagannathan，二维量子霍尔问题与一维准晶体之间缺失的联系，《物理评论B》112, L100102（2025）[49] A. Jagannathan，金属平均准晶及其拓扑不变量，《物理评论B》114, 235115（2026）。[50] A. Agarwala和V. B. Shenoy，非晶系统中的拓扑绝缘体，《物理评论快报》118, 236402（2017）。[51] N. P. Mitchell、L. M. Nash、D. Hexner、A. M. Turner和W. T. M. Irvine，由随机点集构造的非晶拓扑绝缘体，《自然·物理》14, 380（2018）。[52] Y.-B. Yang、T. Qin、D.-L. Deng、L.-M. Duan和Y. Xu，拓扑非晶金属，《物理评论快报》123, 076401（2019）。[53] M. Costa、G. R. Schleder、M. B. Nardelli、C. Lewenkopf和A. Fazzio，迈向现实的非晶拓扑绝缘体，《纳米快报》19, 8941（2019）。[54] P. Zhou、G-G. Liu、X. Ren、Y. Yang、H. Xue、L. Bi、L. Deng、Y. Chong和B. Zhang，光子非晶拓扑绝缘体，《Light: Science & Applications》9, 133（2020）。[55] A. Agarwala、V. Juriˇci´c和B. Roy，非晶固体中的高阶拓扑绝缘体，《物理评论研究》2, 012067（2020）。[56] Q. Marsal、D. Varjas和A. G. Grushin，非晶物质的拓扑韦尔–索普模型，《美国国家科学院院刊》117, 30260（2020）。[57] J-H. Wang、Y-B. Yang、N. Dai和Y. Xu，结构无序诱导的三维二阶拓扑绝缘体，《物理评论快报》126, 206404（2021）。[58] K. Li、J-H. Wang、Y-B. Yang和Y. Xu，里德伯玻璃中的对称性保护拓扑相，《物理评论快报》127, 263004（2021）。[59] Y-L. Tao、J.-H. Wang、Y. Xu，平均对称性保护的高阶拓扑非晶绝缘体，《SciPost物理》15, 193（2023）。[60] P. Corbae、S. Ciocys、D. Varjas、E. Kennedy、S. Zelt- mann、M. Molina-Ruiz、S. Griffin、C. Jozwiak、Z. Chen、L-W. Wang、A. M. Minor、M. Scott、A. G. Grushin、A. Lanzara和F. Hellman，非晶Bi_2Se_3, 中的自旋–动量锁定表面态观测，《自然·材料》22, 200（2023）。[61] S. Manna、S. K. Das和B. Roy，非晶拓扑超导体，《物理评论B》109, 174512（2024）。[62] A. Syrota、A. Mesaros、P. Simon，结构缺陷驱动的拓扑相变，arXiv:2609.26586。[63] A. Panigrahi、V. Juriˇci´c和B. Roy，投影拓扑膜，《通讯物理》5, 230（2022）。

[64] A. Panigrahi和B. Roy，作为晶体、超导和高阶拓扑相平台的投影膜，《物理评论B》113, 035301（2026）。[65] D. J. Salib、A. J. Mains和B. Roy，分形晶格上的拓扑绝缘体：一种普适构造原理，《物理评论B》110, L241302（2024）。[66] A. Panigrahi和B. Roy，投影非晶拓扑绝缘体，arXiv:2609.30260。[67] J. R. Silvester，分块矩阵的行列式，《数学公报》84, 460（2000）。[68] A. C. Tyner和V. Juriˇci´c，无反射对称性的三维 ℤ 拓扑绝缘体，《科学报告》14, 4288（2024）。[69] A. C. Tyner、V. Juriˇci´c和B. Roy，二维无序投影膜：通过维数约化研究稳定性与量子临界性，arXiv:2507.23780（2025）。[70] S. Dordevi´c和V. Juriˇci´c，由厄米投影产生的非厄米晶体编织拓扑：零模共振机制，arXiv:2606.06626（2026）。[71] W. P. Su、J. R. Schrieffer和A. J. Heeger，聚乙炔中的孤子，《物理评论快报》42, 1698（1979）。[72] W. P. Su、J. R. Schrieffer和A. J. Heeger，聚乙炔中的孤子激发，《物理评论B》22, 2099（1980）。[73] A. J. Heeger、S. Kivelson、J. R. Schrieffer和W.-P. Su，导电聚合物中的孤子，《现代物理学评论》60, 781（1988）。[74] X.-L. Qi、Y.-S. Wu和S.-C. Zhang，二维顺磁半导体中自旋霍尔效应的拓扑量子化，《物理评论B》74, 085308（2006）。[75] F. D. M. Haldane，无朗道能级的量子霍尔效应模型：“宇称反常”的凝聚态实现，《物理评论快报》61, 2015（1988）。[76] G. W. Semenoff，三维反常的凝聚态模拟，《物理评论快报》53, 2449（1984）。[77] J. Zak，固体能带的贝里相，《物理评论快报》62, 2747（1989）。[78] W. Chen，普适拓扑标记，《物理评论B》107, 045111（2023）。[79] R. D. King-Smith和D. Vanderbilt，晶体固体的极化理论，《物理评论B》47, 1651(R)（1993）。[80] R. Resta，扩展系统中的量子力学位置算符，《物理评论快报》80, 1800（1998）。[81] D. J. Thouless、M. Kohmoto、M. P. Nightingale和M. den Nijs，二维周期势中的量子化霍尔电导，《物理评论快报》49, 405 1982（）。[82] T. A. Loring和M. B. Hastings，通过C*-代数研究无序拓扑绝缘体，《欧洲物理快报》92, 67004（2010）。[83] K. K. Gomes、W. Mar、W. Ko、F. Guinea和H. C. Manoharan，分子石墨烯中的设计型狄拉克费米子与拓扑相，《自然》483, 306（2012）。[84] L. C. Collins、T. G. Witte、R. Silverman、D. B. Green和K. K. Gomes，人造彭罗斯镶嵌中的准周期电子态成像，《自然·通讯》8, 15961 2017（）。[85] S. N. Kempkes、M. R. Slot、S. E. Freeney、S. J. M. Zeven- huizen、D. Vanmaekelbergh、I. Swart和C. Morais Smith，电子在一分形几何，《自然·物理》15，127（2019）。[86] R. Canyellas、C. Liu、R. Arouca、L. Eek、G. Wang、Y. Yin、D. Guan、Y. Li、S. Wang、H. Zheng、C. Liu、J. Jia 和 C. Morais Smith，《铋分形纳米结构中的拓扑边缘态和角态》，《自然·物理》20，1421（2024）。[87] J. Shang、Y. Wang、M. Chen、J. Dai、X. Zhou、J. Kut- tner、G. Hilt、X. Shao、J. M. Gottfried 和 K. Wu，《组装分子 Sierpi´nski 三角形分形》，《自然·化学》7，389（2015）。[88] L. Ma、R. Chaturvedi、P. X. Nguyen、K. Watanabe、T. Taniguchi、K. F. Mak 和 J. Shan，《扭曲 WSe2 四层结构中的相对论莫特转变》，《自然·材料》24，1935（2025）。[89] D. Yang、J. Liang、H. Hu、N. Kaushal、C.-E. Hsu、K. Watanabe、T. Taniguchi、J. I. Dadap、Z. Li、M. Franz 和 Z. Ye，《蜂窝莫尔超晶格中慢狄拉克费米子的关联绝缘态》，arXiv:2504.17970（2025）。[90] N. R. Cooper、J. Dalibard 和 I. B. Spielman，《超冷原子的拓扑能带》，《现代物理学评论》91，015005（2019）。[91] L. Asteria、D. T. Tran、T. Ozawa、M. Tarnowski、B. S. Rem、N. Fl¨aschner、K. Sengstock、N. Goldman 和 C. Weitenberg，《测量超冷拓扑物质中的量子化圆二色性》，《自然·物理》15，449（2019）。[92] G. Jotzu、M. Messer、R. Desbuquois、M. Lebrat、T. Uehlinger、D. Greif 和 T. Esslinger，《利用超冷费米子实验实现拓扑 Haldane 模型》，《自然》（伦敦）515，237（2014）。[93] M-C. Liang、Y-D. Wei、L. Zhang、X-J. Wang、H. Zhang、W-W. Wang、W. Qi、X-J. Liu 和 X. Zhang，《自旋轨道耦合超冷费米子中齐-吴-张模型的实现》，《物理评论研究》5，L012006（2023）。[94] S. Imhof、C. Berger、F. Bayer、J. Brehm、L. W. Molenkamp、T. Kiessling、F. Schindler、C. H. Lee、M. Greiter、T. Neupert 和 R. Thomale，《拓扑角模的拓扑电路实现》，《自然·物理》14，925（2018）。[95] J. K. Dong、V. Juriˇci´c 和 B. Roy，《拓扑电路：理论与构造》，《物理评论研究》3，023056（2021）。[96] N. A. Olekhno、A. D. Rozenblit、V. I. Kachin、A. A. Dmitriev、O. I. Burmistrov、P. S. Seregin、D. V. Zhir- ihin 和 M. A. Gorlach，《长程耦合电路中拓扑角态的实验实现》，《物理评论B》105，L081107（2022）。[97] T. Ozawa、H. M. Price、A. Amo、N. Goldman、M. Hafezi、L. Lu、M. C. Rechtsman、D. Schuster、J. Simon、O. Zilberberg 和 I. Carusotto，《拓扑光子学》，《现代物理学评论》91，015006（2019）。[98] R. S¨usstrunk 和 S. D. Huber，《机械拓扑绝缘体中声子螺旋边缘态的观测》，《科学》349，47（2015）。[99] Z. Yang、F. Gao、X. Shi、X. Lin、Z. Gao、Y. Chong 和 B. Zhang，《拓扑声学》，《物理评论快报》114，114301（2015）。[100] T. Biesenthal、L. J. Maczewsky、Z. Yang、M. Kremer、M. Segev、A. Szameit 和 M. Heinrich，《分形光子拓扑绝缘体》，《科学》376，1114（2022）。[101] S. Zheng、X. Man、Z.-L. Kong、Z.-K. Lin、G. Duan、N. Chen、D. Yu、J.-H. Jiang 和 B. Xia，《声学超材料中分形高阶拓扑态的观测》，《科学通报》67，2069（2022）。

[102] J. Li、Q. Mo、J.-H. Jiang 和 Z. Yang，《声学分形晶格中的高阶拓扑相》，《科学通报》**67**，2040（2022）。

[103]B. Yan、Y. Qi、X. Xi、L. Yang、Y. Meng、Z- X. Zhu、J-M. Chen、Z. Wang、Z. Gao，《光子晶体中分形性诱导拓扑的观测》，arXiv:2606.24505。