arXiv:math/0301151v3 [math.AT] 22 Nov 2026

可嵌入矩阵代数丛、张量单位与 UHF 稳定化

A. V. Ershov

摘要

将复矩阵代数丛酉嵌入到一个互素重数的平凡矩阵代数丛中，会确定两个互补因子。我们由此恢复出一个秩为一的整数虚特殊酉丛。这为由 $B\mathrm{SU}_{\otimes}$ 给出的稳定分类提供了证明，并允许底空间的上同调含有扭结。固定核心秩 k 时，具有补秩 ℓ^N 的矩阵格拉斯曼流形望远镜是 $B\mathrm{PU}(k) \to B\mathrm{Aut}(M_k \otimes M_{\ell^\infty})$ 的同伦纤维。因此，UHF 平凡性恰好能检测出哪些核心允许互素的有限维嵌入。我们确定了偶维球面和四维 Moore 空间上的最小阶段。一个定义在 S^6 上的三秩例子首次嵌入于 M_{12}，并表示一个单位元，其粘合给出 S^7 上的高阶扭曲。

1 引言

一族子代数 $M_k \subset M_{km}$ 确定一个 M_k 丛和一个互补的 M_m 丛。乘法将它们的张量积与平凡的 M_{km} 丛等同。当 k 与 m 互素时，这两部分数据可恢复复 K 理论中的一个整数类。该类记录了矩阵因子的变化方式，尽管环境代数是平凡的。这一构造最初在 [5, 6] 中以漂浮代数丛（FAB）之名提出。我们用可嵌入的 描述核心的这一性质，并用嵌入对 表示一个核心及其嵌入。

两种稳定化过程回答的是不同的问题。当两个秩同时增大时，稳定等价类在张量积下构成虚一秩特殊酉丛的群。我们在第 2–3 节中利用互补因子给出一个证明。在固定 k 时，可以只增大补秩。对任意与 k互素的 $\ell \geq 2$，这给出有限 CW 复形 X上单个M_k-丛 $\mathcal{B}$ 的一个判别准则：

$$\mathcal{B} \text{ admits a coprime embedding} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{B} \otimes M_{\ell^\infty} \cong X \times (M_k \otimes M_{\ell^\infty}).$$

第 4 节确定了给出该判别准则的同伦纤维。该论证将 [8, 9], 中已研究过的有限矩阵标架与 Dadarlat 和 Pennig[3]的可缩性定理结合起来。它使用普通丛和映射望远镜。

嵌入与其抽象核心之间的区别，在带扭结的底空间上至关重要。 [6] 的推论 22 断言核心的特殊酉提升的唯一性。例 2.2 给出平凡代数丛的两个提升，它们具有不同的第二陈类。此处的证明由两个因子构造一个类，并检验它在外围平凡代数的自同构下的不变性，

并在拉回到底空间之前定义特征类。

第 5 节和第 6 节讨论有限实现的规模。对于 S^{2j} 上 Bott 整数非零的秩为 k 的向量丛 t，可行的重数恰好是满足 $k \mid mt$ 的 $m \geq j$。在扭结底空间上，低秩代表元也很重要。我们将固定可嵌入核上的所有稳定类描述为一个由 t (S^{2j}) 中的 k -扭结决定的子群的陪集。在一个

固定可嵌入核上的所有稳定类描述为一个由 $K^0(X)$ 中的 k-扭结决定的子群的陪集。在 Moore 空间上，这给出了此类稳定类的数量，并结合重数方程，给出了第一个嵌入阶段。最后一个例子使用 Pennig [10] 的悬挂构造，将最小矩阵规模与一个扭曲的 K-群联系起来。

约定。除非另有说明，底空间均为有限 CW 复形。对于拓扑群，我们使用可数化分类丛。论证分别适用于每个连通分支。所有矩阵代数均在 $\mathbb{C}$ 上，所有代数嵌入均为含单位的 $*$-同态，且自同构群取点范数拓扑。 [6]中的复代数约定给出相同的分类同伦型：射影酉群到复射影线性群中的包含映射是同伦等价，并诱导相应齐性空间之间的等价。记 M_s 为 $s\times s$ 矩阵，记 $\mathbf{1}^s$ 为平凡秩-s 向量丛，记 M_s 为平凡矩阵代数丛。 $K^0(X)$ 中的整数表示平凡丛类。我们采用标准的复稳定范围：在维数至多为 $2s$ 时，每个秩为 s 的稳定类都有唯一的秩为 s 的代表元（在同构意义下）。这源于 $B\mathrm{U}(s)\to B\mathrm{U}$ 的 $(2s+1)$-连通性，使用 $\mathrm{U}(s+1)/\mathrm{U}(s)=S^{2s+1}$。相应的特殊酉断言可通过取行列式映射的同伦纤维得到。我们使用 Bott 周期性以及 K^0 的通常有限 CW 滤过，如 [1, 2] 中所述。

2 嵌入对与相容提升

在 X 上，类型为 $(k,\ m)$ 的嵌入对由一个 M_k-丛 $\mathcal{B}$ 和一个嵌入 $\mathcal{B}\to M_{km}$ 组成。其交换子 $\mathcal{C}$ 是一个局部平凡的 M_m-丛。若两个同类型的嵌入对之间存在一个核心同构以及一个环境平凡代数的丛自同构，使得该自同构与这两个嵌入相交织，则称它们同构。在稳定理论中，我们考虑 $k,\ m>1$，并且在考察最小重数时也允许 $m=1$。

Put

$$\mathrm{Fr}_{k,m}=\mathrm{Emb}_1(M_k,M_{km}),\qquad \mathrm{Gr}_{k,m}=\mathrm{Fr}_{k,m}/\mathrm{PU}(k).$$

矩阵单位的酉共轭将 $\mathrm{Fr}_{k,\ m}$ 识别为 $\mathrm{U}(km)/(1_k\otimes\mathrm{U}(m))$，并将 $\mathrm{Gr}_{k,\ m}$ 识别为 $\mathrm{PU}(km)/(\mathrm{PU}(k)\otimes\mathrm{PU}(m))$。源空间对标架的作用是自由的。其商空间就是子代数构成的空间。固定平凡代数中的一个族对应于到 $\mathrm{Gr}_{k,\ m}$ 的连续映射。丛 $\mathrm{Fr}_{k,\ m}\to\mathrm{Gr}_{k,\ m}$ 是万有核的主标架丛。特别地，其分类映射给出如下同伦纤维序列

$$\mathrm{Fr}_{k,m}\longrightarrow \mathrm{Gr}_{k,m}\longrightarrow B\mathrm{PU}(k). \tag{1}$$

乘法借助局部坐标中的矩阵双中心化子定理，将万有核与其交换子的张量积等同于 M_{km}。

引理 2.1. 设 $(k,m)=1$。格拉斯曼流形具有模型

$$\mathrm{Gr}_{k,m}=\mathrm{SU}(km)/(\mathrm{SU}(k)\otimes\mathrm{SU}(m)).$$

其上存在秩分别为 k、m 的特殊酉丛 V、W，并配备平凡化 $V\otimes W\cong\mathbf{1}^{km}$。它们的自同态代数是万有核及其交换子。

证明。 $\mathrm{SU}(k)\times\mathrm{SU}(m)$ 上张量乘法的核由满足 $z^k=z^m=1$ 的 $(z1_k,z^{-1}1_m)$ 组成，因此它是平凡的。两个中心的乘法映到 $\mathrm{SU}(km)$ 的中心，凭借

互素性。因此，过渡到射影群便诱导出所述商的等同。将齐次主 SU(k) ×SU(m)-丛与其两个定义表示相关联。它们的张量积延拓为 SU(km) 的定义表示，从而给出所声称的平凡化。相伴的自同态丛作用在第一因子和第二因子上。

□

例 2.2（核心的特殊酉提升）。在 $\mathbb{RP}^4$ 中，令 L 为复化典范实线丛，令 $a = c_1(L)$。我们有 $L^2 \cong \mathbf{1}$（线丛的幂表示张量幂），并且在 $H^4(\mathbb{RP}^4;\,\mathbb{Z})$ 中有 $a^2 \neq 0 \;= \mathbb{Z}/2$。事实上，根据 L 的底层实平面的斯蒂费尔–惠特尼公式，a 的模二约化是一次生成元的平方。其平方约化为非零的四次幂。$V_0 = \mathbf{1}^2$ 和 $V_1 = L \oplus L$ 都具有平凡行列式和平凡端omorphism 代数，而 $c_2(V_0) = 0$，且 $c_2(V_1) = a^2$。它们的公共核心在 M_6 中具有标准嵌入。不存在满足 $V_1^{\oplus 3} \cong (W')^{\oplus 2}$ 的 SU(3)丛 W'，因为第二陈类将分别为 a^2 和 0。因此，[6] 中引理 21 的存在性断言成立，而其推论 22 的唯一性断言以及备注 32 的任意提升表述均不成立。

令 $R_X = K^0(X)$，并设

$$\mathcal{U}_{\mathrm{SU}}(X) = \{u \in R_X : \operatorname{rk} u = 1,\; c_1(u) = 0\}.$$

秩零理想由骨架过滤可知是幂零的。因此，$\mathcal{U}_{\mathrm{SU}}(X)$ 在乘法下构成一个群，并由 $B\mathrm{SU}_{\otimes}$ 表示，即通常的 $B\mathrm{SU}$，其中运算为虚秩一类的张量积。稳定复向量丛的行列式分裂将 $[X, B\mathrm{SU}]$ 与第一陈类为零的秩零类对应起来，此处通过 1 平移。

引理 2.3（整系数规范化）。令 V、W 如引理 *2.1* 中所述，或取它们的拉回。恰好存在一个 $u \in \mathcal{U}_{\mathrm{SU}}(X)$ 使得

$$[V] = ku, \qquad [W] = mu^{-1}. \tag{2}$$

该类关于 X 是自然的，并且在嵌入对的同构下保持不变量 .

证明。对于任意阿贝尔群 P 以及互素的 k，m，对角映射将 P 识别为 $P[1/k]$ 与 $P[1/m]$ 沿 $P[1/(km)]$ 的拉回。为证明单射性，对杀死给定元素的幂使用贝祖定理。为证明满射性，用 a/k^i，b/m^j 表示一个匹配对。增大幂后，$m^j a = k^i b$ 位于 P 中。若 $hk^i + tm^j = 1$，则 $ha + tb$ 具有所规定的像。

将此应用于 R_X。$R_X[1/k]$ 中的类 $[V]/k$ 与 $([W]/m)^{-1}$ 中的类 $R_X[1/m]$ 在将 km 取逆后相同，因为 $[V][W] = km$。每个类的秩均为一，因此都是单位元。它们给出唯一的秩为一单位元 u。由同一个乘积等式可知，两个局部化中的两个恒等式 (2) 均成立，因而在整体上也成立。它们推出 $kc_1(u) = mc_1(u) = 0$，从而得到 $c_1(u) = 0$。它们还迫使两个局部化值相同，并证明了唯一性。

秩相同且射影同构的向量丛相差一个线丛张量因子：局部酉交织算子相差标量，而它们的张成空间可粘合为交织算子线丛。因此，对于具有平凡行列式且矩阵代数同构的第一因子的两种选择，线丛 L 满足 $L^k = \mathbf{1}$。在 $R_X[1/k]$ 中，这意味着 $[L] = 1$：因子 $1 + [L] + \cdots + [L]^{k-1}$ 的秩为 k，并且在那里是一个单位元。因此，第一个局部化值与这种歧义无关。互补的射影因子同样确定第二个局部化值。嵌入对的同构保持两个射影因子不变，而拉回保持该构造。

□

交换因子将 u 变为 u^{-1}。嵌入对的张量积将 (u, u') 变为 uu'，只要乘积秩是可容许的：两个向量因子的张量积满足 (2)，并且唯一性适用。特别地，用平凡嵌入对进行放大保持 u。

3 稳定分类与特征类

对于 $k \mid k'$ 和 $m \mid m'$，放大 $\mathrm{Gr}_{k,m} \to \mathrm{Gr}_{k',m'}$ 将核心扩大一个平凡的 $M_{k'/k}$，并将补空间扩大一个平凡的 $M_{m'/m}$。张量坐标被置换，以保持这两个因子按此顺序。对于互素数对，令 $q_{k,m}$：$\mathrm{Gr}_{k,m} \to B\mathrm{SU}$ 在秩一坐标中表示其万有类 u。矩阵格拉斯曼流形是紧致光滑流形，因而具有有限 CW 型。

命题 3.1. 若$(k,m)=1$，映射 $q_{k,m}$ 在 π_i 上对 $i \le 2\min(k,m)$诱导同构。对于维数 $X \le 2\min(k,m)$，不变量 u 在同构意义下分类类型为 (k,m) 的嵌入对，并且 $\mathcal{U}_{\mathrm{SU}}(X)$ 中的每个类都会出现。

证明。令 $b=\min(k,m)$。在 $\mathrm{SU}(k)\times\mathrm{SU}(m) \to \mathrm{SU}(km) \to \mathrm{Gr}_{k,m}$的同伦正合列中，次数为 $2j-1$，$2 \le j \le b$的映射为

$$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, \qquad (x,y) \longmapsto mx+ky.$$

在每个因子上，该表示是 m 个或 k 个副本的直和，这在稳定拼接下给出了所述的乘法。它是满射。Bott 周期性给出 $\pi_{2j}\mathrm{SU}(km)=0$，并且两个因子的偶数次群在所示范围内均为零。因此 $\pi_{2j-1}\mathrm{Gr}_{k,m}=0$，而边界映射将 $\pi_{2j}\mathrm{Gr}_{k,m}$ 识别为由 $(k,-m)$ 生成的核。由于单连通性以及 $\pi_2\mathrm{SU}(s)=0$，第一、二次同伦群均为零。因此该空间是 3-连通的。在一个生成 $2j$-球面上，第一个向量因子的约化类等于 k 倍 Bott 生成元，至多相差一个共同符号。由方程 (2)可知，$q_{k,m}$ 将生成元映到 $\pi_{2j}B\mathrm{SU}$ 的一个生成元。

一个映射若在次数不超过 d 时诱导这些单连通 CW 型之间的同构，就会诱导它们的第 d 阶 Postnikov 截断之间的等价，因此从任意维数至多为 d 的 CW 复形出发的同伦类之间存在双射。将此应用于 $d=2b$。固定的平凡代数中的每个嵌入族都确定一个映射到格拉斯曼流形的映射。同伦映射给出同构的嵌入对：适配标架在 $X\times I$ 上的主丛在两端的限制同构，而这种同构可延拓到相应的环境矩阵丛。反过来，根据引理 2.3，同构的嵌入对具有相同的 u，因此在此范围内它们对应的映射同伦。 □

作为比较，对于任意的 k、$m>1$，令 $g=(k,m)$。射影群纤维化给出$\pi_1\mathrm{Gr}_{k,m} = \pi_2\mathrm{Gr}_{k,m} = \mathbb{Z}/g$。事实上，它们分别是 $(x,y) \mapsto mx+ky$从 $\mathbb{Z}/k\oplus\mathbb{Z}/m$ 到 $\mathbb{Z}/(km)$ 的映射的余核和核。在 $2 \le j \le \min(k,m)$ 的范围内，可由 $\mathbb{Z}^2$ 上相应的映射得到 $\pi_{2j}\mathrm{Gr}_{k,m} = \mathbb{Z}$ 和 $\pi_{2j-1}\mathrm{Gr}_{k,m} = \mathbb{Z}/g$。对于 $(k',m')=(ak,bm)$，记作 $g'=(k',m')$。核 $(k/g,-m/g)$ 的偶数次生成元映射到 $(k'/g,-m'/g)$，因此在所有指定的偶数次中都对应于乘以 g'/g，而二次中为剩余类。奇数次映射将 1 的类通过环境放大映至模 g' 的 ab。由此得到 [6] 的有限同伦群计算。

定义 3.2。成对对象的乘积由其核心、补空间和环境代数的张量积构成。令 $I_{k,m}$ 表示核心为 $M_k\otimes 1_m$ 的常值对。我们施加定义 15[Definition 15] 的稳定等价关系：该关系由以下识别生成：当 $(kk',mm')=1$ 且 $P\otimes I_{k',m'}$ 同构于 $P'\otimes I_{k,m}$ 时，识别类型为 (k,m) 的成对对象 P 与类型为 (k',m') 的成对对象 P'。将所得等价类集合记为 $\mathrm{FAB}_{\mathrm{st}}(X)$。

定理 3.3。*O* 在有限 *CW* 复形上，(2) 中的不变量诱导出一个自然群同构

$$\mathrm{FAB}_{\mathrm{st}}(X) \;\cong\; \mathcal{U}_{\mathrm{SU}}(X) = [X, B\mathrm{SU}_{\otimes}].$$

对于任意由互素数对(k_i, m_i) 构成的逐坐标整除塔，其中 $k_i, m_i \to \infty$，其 *Grassmann* 望远镜与 $B\mathrm{SU}$ 同伦等价。在稳定张量积下，它表示 $B\mathrm{SU}_{\otimes}$。中心化子表示求逆。

证明。不变量在生成等价关系下保持不变。根据命题 3.1， $\mathcal{U}_{\mathrm{SU}}(X)$ 中的任意给定类，都能由秩充分大的任意互素数对表示。为比较具有该类的两个嵌入对，选取第三个秩较大且互不相同的素数对 (r, s)，并避开给定四个秩中的所有素数。在型 (r, s) 中实现同一个类。用这个第三种型进行交叉放大后，所得的两个映射到 $\mathrm{Gr}_{kr,ms}$ 中的不变量相同，且处于命题 3.1 的维数范围内。因此，它们的嵌入对同构。对每个原始嵌入对分别执行此操作。第三个代表元便通过规定的关系将它们连接起来。即使两个原始型无法直接放大为共同的互素型，这也证明了单射性。取可容许的代表元，利用引理 2.3 后的张量和中心化子公式，可得群结构及逆元。

q_{k_i,m_i} 在同伦意义下相容，因为归一化类在每个阶段上都相同。在连续的映射柱上选取同伦，即可定义一个从望远镜出发的映射。根据命题 3.1，该映射在每个同伦群上都诱导出同构。这些空间具有 CW 型，因此这是一个同伦等价。沿此等价传递张量乘法，便得到一个 H-结构。在每一对可容许的有限阶段上，其乘积与对两个族取张量积所得的结果在同伦意义下相同：在它们的乘积上，到 $B\mathrm{SU}$ 的两个映射由 (2) 表示同一个类。对于固定的塔，乘积型未必属于该塔。其万有类仍给出了与 $B\mathrm{SU}$ 的比较，而它在任意有限底空间上的限制，则表示刚刚证明的群运算。

□

例如，$(2^i,\ 3^i)$ 是一个单独的整模型。在整除关系下的可容许因子对不构成有向集，因为 $(2,3)$ 和 $(3,2)$ 没有共同的可容许倍数。在本定理中，各塔的共同同伦类型就是稳定格拉斯曼流形的含义。对于 $u = 1 + x,\ \ v = 1 + y$，张量积在秩零特殊酉类上诱导出 $x + y + xy$。

预先指定的环境特殊酉丛

设 T 的秩为 km，其中 $c_1(T) = 0$，$(k,\ m) = 1$，且 $\dim X \le 2\min(k,\ m)$。考虑秩为 $k,\ m$ 的有序特殊酉向量因子的同构类，其张量积与 T 同构。与 T 的同构不属于所给数据。

命题 3.4。这类因子对存在，并构成 $\mathcal{U}_{\mathrm{SU}}(X)$ 的一个挠子。在稳定类上，该作用为 $u \cdot (v,\ w) = (uv,\ u^{-1}w)$。

证明。令 J 为第一陈类为零的秩为零的类所构成的理想。它是幂零的。从 $v = k,\ w = m$ 和误差 $e = [T] - vw \in J$ 开始。每当 $e \in J^i$ 时，取整数 $a,\ b$，使得 $ma + kb = 1$，并将 $v,\ w$ 替换为 $v + ae,\ w + be$。新的误差属于 J^{i+1}，因为 $v - k,\ w - m \in J$。迭代得到 $vw = [T]$。稳定范围保证 $v,\ w$ 可由丛实现，而它们的张量积通过消去与 T 同构。

对于两个解 $(v, w), (v', w')$，$R_X[1/k]$ 中的商 v'/v 与 $R_X[1/m]$ 中的商 w/w' 由乘积方程在 $R_X[1/(km)]$ 中一致。那里的分母因其秩与幂零性而为单位元。它们粘合为唯一的秩为一的 u。方程 $v' = uv$ 与 $w' = u^{-1}w$ 在两个局部化中成立，因而整体成立。这两个方程给出 $kc_1(u) = mc_1(u) = 0$。这证明了单传递性。因此，选定的因子对将挠子与群等同。

□

特征类与酉版本

定义 $\widetilde{c}_j(P) = c_j(u)$与 $\widetilde{s}_j(P) = s_j(u)$，其中$s_j$为牛顿类，且 $s_0(u) = 1$。对于相容提升，$s_j(V) = k\,\widetilde{s}_j(P)$。在具有 k-扭结的底空间上，(2)在取特征类之前规定了归一化类。特别地，它提供了在$H^{2j}(X;\,\mathbb{Z})$中除以 k 时可能丢失的信息。由分裂原理，两个秩为一的类 u, v的牛顿公式为

$$s_j(uv) = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} s_i(u) s_{j-i}(v).$$

它凭借牛顿类的可加性与张量积的双线性适用于虚丛。记作 $a_i = c_i(u)$ $b_i = c_i(v)$。牛顿恒等式首先在无挠万有环 $H^*(B\mathrm{SU} \times B\mathrm{SU};\mathbb{Z})$ 中成立，再经拉回，给出

$$\begin{aligned} c_2(uv) &= a_2 + b_2, & c_3(uv) &= a_3 + b_3, \\ c_4(uv) &= a_4 + b_4 - 5a_2b_2, & c_5(uv) &= a_5 + b_5 - 11(a_2b_3 + a_3b_2). \end{aligned}$$

也可以保留射影核心的一个已确定的酉提升。其参数空间是 $\mathrm{Gr}_{k,m} \to B\mathrm{PU}(k) \leftarrow B\mathrm{U}(k)$ 的同伦拉回。引理 2.1 在 $\mathrm{Gr}_{k,m}$ 上给出一个提升，因此相对于给定射影化的选择由 $B\mathrm{U}(1) = \mathbb{CP}^\infty$ 参数化：将特定向量因子与一条线丛作张量积。等价地，这平凡化了由拉回中心扩张得到的主 $B\mathrm{U}(1)$-纤维化。这些特定因子在同构意义下与放大相容（在齐性丛上它们成为直和），而对两个提升因子作张量积会对其额外线丛作张量积。在稳定理论中，带装饰的参数给出 $B\mathrm{SU}_{\otimes} \times \mathbb{CP}^\infty \simeq B\mathrm{U}_{\otimes}$。具体而言，一个秩一虚单位元 z 分裂为 $(z[\det z]^{-1}, \det z)$，且行列式在秩一单位元上是可乘的。这解释了 [6]附录中的酉扩张。

4 核心及其 UHF 稳定化

固定 $k,\ \ell \geq 2$ 使得 $(k,\ \ell) = 1$。记 $A_\ell = M_{\ell^\infty}$ 和 $D_{k,\,\ell} = M_k \otimes A_\ell$。二者都是含幺 UHF 代数，分别是将 M_{ℓ^N} 和 $M_{k\ell^N}$ 与单位元作张量积后所得并集的范数完备化。丛的所有张量积均按纤维逐点进行。令

$$G_{k,\ell} = \mathrm{Aut}(D_{k,\ell}), \qquad i : \mathrm{PU}(k) \longrightarrow G_{k,\ell}, \quad i(\alpha) = \alpha \otimes \mathrm{id}_{A_\ell}.$$

当矩阵丛由其主标架丛描述时， Bi 将其结构群的含幺扩张分类。

定理 4.1 (固定秩比较)。 将矩阵格拉斯曼流形在第二个秩上放大后，存在一个覆盖 $B\mathrm{PU}(k)$的自然弱等价

$$\mathrm{Tel}_{N\geq 0}\,\mathrm{Gr}_{k,\ell^N} \;\simeq\; \mathrm{hofib}\Big(B\mathrm{PU}(k) \xrightarrow{Bi} BG_{k,\ell}\Big). \tag{3}$$

H其中 $\mathrm{Gr}_{k,\,1}$ 是一个点，同伦纤维取在平凡丛之上。

证明。 令 $E = \mathrm{Emb}_1(M_k,\ D_{k,\,\ell})$、$D = D_{k,\,\ell}$ 和 $P = \mathrm{PU}(k)$。在 E 上的右作用是通过前合成给出的。将一个 D 的自同构限制到 M_k 的标准副本，便得到一个 P-等变映射 $G_{k,\,\ell} \to E$ ，其中群上的右作用由 $i(P)$ 给出。该映射是满射。事实上，

任意两个嵌入下极小投影的像具有相同的迹 $1/k$。UHF 代数中迹相同的投影是 Murray–von Neumann 等价的（迹在 K_0上是单射，且投影在 AF 代数中具有消去性质）。从第一个对角投影之间取一个部分等距算子，可将其扩张为一个酉元，使所有矩阵单位相互交织：对于系统 (e_{ij}) 和 (f_{ij})，取 $\sum_i f_{i1} v e_{1i}$，使得$v^*v = e_{11}$ 且 $vv^* = f_{11}$。所得的内自同构将一个嵌入映到另一个嵌入。

限制具有连续的局部截面。对于接近某一固定系统 (e_{ij}) 的 (f_{ij})，元素$\sum_i f_{i1} e_{1i}$ 接近于 $\mathbf{1}$，可逆，并且缠结这两个系统。其极分解酉元同样缠结它们，并且关于各分量连续。将所诱导的内自同构与邻域中心处的一个扩张复合。标准包含处的纤维由自同构 $\mathrm{id}_{M_k} \otimes \gamma$、 $\gamma \in \mathrm{Aut}(A_\ell)$ 组成，这可通过限制到交换子得出。因此，限制是一个局部平凡丛。群 $\mathrm{Aut}(A_\ell)$ 依 [3, 定理 2.3], 是可缩的，故限制是一个弱等价。

在有限阶段 $E_N = \mathbf{Fr}_{k,\ \ell^N}$ 并在极限处使用轨道纤维化

$$\mathrm{U}(\ell^N) \longrightarrow \mathrm{U}(k\ell^N) \longrightarrow E_N,$$
$$\mathrm{U}(A_\ell) \longrightarrow \mathrm{U}(D) \longrightarrow E.$$

无穷维轨道映射借助同一极分解公式具有局部截面。两个酉群望远镜都通过弱等价映射到它们的极限范数酉群。为看出这一点，将到某一矩阵阶段上的条件期望作用于紧参数空间上连续酉元族的各分量。这些期望在其紧像上一致收敛。在充分大的阶段取极分解部分。沿直线段的极分解给出到原族的一个同伦。在该族已经位于该阶段的闭子集上，这个同伦是常值的。应用于球面与相对圆盘，这便证明了包括π_0在内的断言。现在在正合同伦序列中取直接极限，便弱地得到 $\mathrm{Tel}_N E_N \simeq E$。

最后对右 P-作用使用 Borel 构造。映射 $(E_N)_{hP} \to \mathbf{Gr}_{k,\ell^N}$是弱等价，因为该作用是主作用。这些 Borel 构造到 BP 的映射对标架丛进行分类。取其望远镜，借助共同的 Borel 模型以及 BP 上的纤维序列，在弱等价意义下给出 E_{hP}。等变限制等价将其等同于 $(G_{k,\ell})_{hP}$。后者在 BP 上是由 i 从 $EP \to BP$ 诱导的主 $G_{k,\ell}$-丛（用取逆交换左右乘法）。它是 Bi 的同伦纤维的一个模型，因为它拉回 $EG_{k,\ell} \to BG_{k,\ell}$。这些构造也将到 BP 的映射等同于 (3) 中的映射。

□

定理 4.2（含幺平凡性与有限嵌入）**.** 对于 X 上的 M_k-丛 $\mathcal{B}$，下列条件等价。

1. 对某个与 k 互素的 m， $\mathcal{B}$ 容许嵌入 M_{km}。

2. $\mathcal{B} \cong \mathrm{End}(V)$ 秩为-k 的特殊酉丛 V，其中 $[V] = ku$ 对某个 $u \in \mathcal{U}_{\mathrm{SU}}(X)$成立。*3.* $\mathcal{B}$ 嵌入于 $M_{k\ell^N}$，其中 $N \geq 0$成立。*4.* 存在一个含单位元的代数丛同构 $\mathcal{B} \otimes A_\ell \cong X \times D_{k,\ell}$。

若这些条件成立，则对于满足 $2s \geq$维数 X的每个正整数 s， $\mathcal{B}$都嵌入于 M_{ks}。特别地，对于任意与 k互素的 $\ell \geq 2$，关于 ℓ 的幂的断言都成立。

证明。引理 2.1 和 2.3 给出 (1)⇒(2)，其中包括 $m = 1$时的常值情形。给定 (2)，当 $2s \geq$ 维 X 时，将 su^{-1} 表示为秩为 s 的向量丛 W_s。乘积的类为$[V \otimes W_s] = ks$，因此由消去性质可知它是平凡的。$\mathrm{End}(V)$ 对第一因子的作用给出了该嵌入。这证明了所述界限以及 (2)⇒(3)。条件 (3) 蕴含 (1)，因为 $(k,\ \ell) = 1$。

对于 $f\colon\ X \to BP$ 对核心进行分类，条件 (4) 表示 $Bi \circ f$ 是零伦的。这等价于将 f 提升到 (3) 中的同伦纤维（在同伦意义下）。从有限 X 到望远镜的映射具有有界高度，并且可以通过收缩有限串映射柱变形到某一层。这里可以使用同伦纤维的 CW 模型，因为 X 是一个 CW 复形。由 (1)，提升到该层的映射是一个嵌入族，其核心与 $\mathcal{B}$ 同构。这证明了 (4)⇔(3)。

□

注4.3。条件 (2) 对两者 V 和 u都是存在性的。对于固定的嵌入，相容的配对确定了 u；而同构核心的不同嵌入可能给出不同的稳定类。第 5 节给出了它们在 Moore 空间上的数量。等价条件 (3) 也保留了选择：提升包含稳定化类的一个零伦。仅凭消失判据会丢失这一信息。

利用两个互素核秩进行有限检验

[6, 引理 23] 中的公共放大检验证明如下。设 $\mathcal{B}_k \otimes M_m \cong \mathcal{C}_m \otimes M_k$ 对具有所示矩阵秩的丛成立，且 $(k, m) = 1$。这两个射影丛在 $H^3(X;\mathbb{Z})$ 中具有相同的酉提升障碍。事实上，由过渡函数的局部酉提升得到的标量余循环在放大下保持不变。行列式表明，此类在两侧分别被相应的矩阵秩湮灭，因此它为零。于是，对于酉丛，$\mathcal{B}_k = \mathrm{End}(V)$ 与 $\mathcal{C}_m = \mathrm{End}(W)$。通常的标量障碍也可以等价地由 $B\mathrm{U}(1) \to B\mathrm{U}(s) \to B\mathrm{PU}(s)$ 得到。

放大丛在射影意义下相同，因此对于一个线丛 L，$V^{\oplus m} \cong W^{\oplus k} \otimes L$。特别地，$mc_1(V) - kc_1(W) = kmc_1(L)$。互素性推出 $c_1(V) \in kH^2(X;\mathbb{Z})$，以及 $c_1(W) \in mH^2(X;\mathbb{Z})$。分别用一个线丛扭曲每个因子，使两个行列式都平凡。对于所得的比较线丛，现记为 L，我们有 $L^{km} = \mathbf{1}$。由贝祖定理将其分解为 $L_k L_m$，其中 $L_k^k = L_m^m = \mathbf{1}$。用 L_k^{-1} 扭曲 V，并用 L_m 扭曲 W，即可得到实际的特殊酉因子，且满足 $m[V] = k[W]$。对于满足$ak + bm = 1$的整数 a、b，单位元 $u = a[V] + b[W]$ 满足 $[V] = ku$ 和 $[W] = mu$。根据引理 2.3 中的线丛论证，其两个局部化值$[V]/k$ 和 $[W]/m$ 与相容提升的选取无关。这给出了唯一的公共稳定嵌入类：取足够大的互素补秩，并应用定理 4.2 的构造，即可用任一核心实现该类。反过来，从 $\mathcal{B}_k$ 及其嵌入类 u 出发，对于任意 $2m \geq$，维数为 $\dim X$ 的对象都可用 W 表示 mu。稳定消去给出 $V^{\oplus m} \cong W^{\oplus k}$，从而得到公共放大。这就证明了该有限检验以及这对核心的唯一性陈述，而无需某一个核心的提升具有唯一性。

两个极限所记住的内容

标架计算还给出了含幺自同构群的同伦群。记$R_\ell = \mathbb{Z}[1/\ell]$。定理 4.1 的证明中两个范数酉群的稳定奇次同伦群为 R_ℓ，而正偶次群消失。在秩一矩阵坐标中，两个塔都以 ℓ^N 归一化时，$u \mapsto 1_k \otimes u$ 的作用是乘以 k。这些群是路径连通的，因此正合列和限制等价给出

$$\pi_0 G_{k,\ell} = 0, \qquad \pi_{2j-1} G_{k,\ell} = R_\ell / kR_\ell \cong \mathbb{Z}/k, \qquad \pi_{2j} G_{k,\ell} = 0 \quad (j \geq 1).$$

对于两个互补参数 ℓ，h，其与 k 互质，和 id_{A_h} 进行张量积会通过交错的张量因子将 $G_{k,\ \ell}$ 映射到 $G_{k,\ \ell h}$。在标架计算中，它诱导出 $R_\ell/kR_\ell \to R_{\ell h}/kR_{\ell h}$：有限阶段重数 h^N 被新的分母抵消。这在每个次数上都是一个同构。交换 h 和 ℓ，则得到与包含映射兼容的群的弱等价的之字形链

PU(k)。因此， BPU(k)上的所得纤维模型在弱等价意义下与互补参数无关。较早的标架空间独立性见于 [7, 引理 28]。

在 [6, 第 3 节4]中另有一种有限矩阵局部化。对于 $p \geq 2$令 T_p =Tel$_n$ BPU(p^n)，并以 p 进行放大。它将有限基空间上秩为 p次幂的矩阵丛按平凡 p次幂矩阵的放大分类。这可由如下事实推出：映射和同伦都可分解为经过有限望远镜片段。群 π_2(T_p)是 $\mathbb{Z}[1/p]/\mathbb{Z}$ 由群 $\mathbb{Z}/p^n$的直接极限给出，而 Aut(A_p) 是可缩的。在 $2j \geq 4$ 度可得π_{2j}(T_p) $= \mathbb{Z}[1/p]$，奇数度的群则直接由 Bott 周期性知为零。若不限制矩阵秩，则相应的群在二次度为 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ，在更高偶数度为 $\mathbb{Q}$ ，这可沿阶乘塔看出。

为描述到 $[X, T_p]$的遗忘映射，先用秩足够大的第一因子p^n 实现 u ，再保留其端 omorphism 代数。这给出向量类为$p^n u$的放大核心。根据特选向量代表的消去性质，归一化类相同就会得到相同的放大核心。像恰好在 $u = 1$ 属于 K^0(X)[$1/p$]时为平凡类。事实上，若放大的端 omorphism 丛平凡，则其向量因子是某条线丛的若干份直和。其行列式平凡，因此这条线丛的阶为 p次幂，于是在 K^0(X)[$1/p$]中变为平凡。反过来，若 p^a($u - 1$) $= 0$，则经充分放大，可在消去范围内得到一个稳定平凡的向量代表元。因此，核由这样的类组成： $u - 1$ 被 p的某个幂消去。对于无约束的塔，相应条件是 $u - 1$的加性挠。用乘法语言来说，这分别就是相同的扭结子群：有理幂零增广理想的单位群由对数可知是无挠的 $1 + x$ ，而由 x 生成的有限加性扭结理想，其单位群按其幂的加性商过滤。对于 p次幂版本，若 $p^a x = 0$ ，则由 x 生成的理想是被 p^a消去的有限群，其单位过滤给出对素因子的相同限制。反过来，若 $u^{p^a} = 1$，则因秩和幂零性，因子 $1 + u + \cdots + u^{p^a - 1}$ 在将 p求逆后是一个单位，故 $u = 1$ 也如此。在 [6, 注记 25], 中的保持秩变体里，点上的取值最初是允许正秩的幺半群。群完备化给出所有秩的 $\mathbb{Q}^{\times}_{>0}$ ，以及 p次幂的 $p^{\mathbb{Z}}$ 。

5 最小有限阶段与扭结

令 $\mathcal{B} =$ End(V) 为一个固定的、矩阵秩为 k 的分裂核心。定义其最小 ℓ阶段 为使其嵌入 $M_{k\ell^N}$ 的最小$N \geq 0$；若该集合为空,则取值 ∞。在此定义中，核心秩保持不变。定理 4.2 的证明给出了存在互素嵌入时阶段的上界。要判断这个界是否锐利，必须考虑补秩。

引理 5.1 (重数丛)。 嵌入 $\mathrm{End}(V) \to M_{km}$ 存在，当且仅当存在一个秩为 m 的丛 W，满足 $V \otimes W \cong \mathbf{1}^{km}$。当维数 $X \leq 2km$时，这等价于存在某个 $w \in K^0(X)$ 的秩为 m 的向量代表元，满足 $[V]w = km$。

证明。通过该嵌入，将 $\mathbf{1}^{km}$ 视为左 End(V)-模。交织子空间 s

$$W_x = \mathrm{Hom}_{\mathrm{End}(V_x)}(V_x, \mathbb{C}^{km})$$

由 M_k的表示论可知，具有常维数 m 。它们构成一个向量丛：在坐标卡中，它们是一个连续丛映射的核，该映射通过对有限个矩阵单位施加交织关系，且具有常秩。求值映射 $V \otimes W \to \mathbf{1}^{km}$ 在每个纤维上都是同构。反过来，张量积的酉平凡化可在第一

因子上实现所需的作用。向量丛平凡化总能通过极分解转化为酉平凡化。在所述维数范围内， $V \otimes W$ 的约化类为零意味着它实际上是平凡的。 □

将 V 乘以线丛 L 进行扭曲，会将重数解双射地对应到由 $W \mapsto W \otimes L^{-1}$ 给出的新提升所对应的解。特别地，最小阶段仅取决于代数丛。定理 4.2 的条件 (2) 便于确保最终存在性，而引理 5.1 适用于给定的重数，且无需互素假设。

命题 5.2 (具有给定核心的所有稳定类)。 设 $\mathcal{B}$ 是一个可嵌入的 M_k-代数丛，且某个嵌入给出归一化单位 u_0。令

$$P_k(X) = \{1 + a : a \in K^0(X),\ ka = 0\}, \qquad d(y) = y[\det y]^{-1} \quad (y \in P_k(X)).$$

那么，具有抽象核心 $\mathcal{B}$ 的代表元的稳定嵌入类集合，恰好对应于陪集

$$u_0\, d(P_k(X)) \ \subset\ \mathcal{U}_{\mathrm{SU}}(X).$$

特别地，产生歧义的子群仅取决于 k 和 X 。

证明。 秩的考量和幂零性表明， $P_k(X)$ 由秩为一的单位元构成。它是一个群，因为 $y \in P_k(X)$ 意味着 $k(y-1) = 0$，而这一条件在乘积和取逆下保持不变。虚秩一类的张量积的行列式具有乘法性，因此 d 是一个同态。若 $y = 1 + a$，则由第一陈类的可加性及 $ka = 0$，有 $(\det y)^k = \mathbf{1}$ 。

设 V_0 是一个相容的特殊酉向量丛提升，且满足 $[V_0] = ku_0$。任意其他相容提升都可写成 $V_0 \otimes L$ ，其中对应的线丛满足 $L^k = \mathbf{1}$。若其单位元为 u，则有 $ku = ku_0[L]$。因此， $y = uu_0^{-1}[L]^{-1}$ 属于 $P_k(X)$，且 $\det y = L^{-1}$，从而得到 $u = u_0 d(y)$。

反过来，设 $y \in P_k(X)$，并令 $L = (\det y)^{-1}$。丛 $V_0 \otimes L$ 的行列式平凡，且其端 omorphism 代数为 $\mathcal{B}$。由于 $ky = k$，其类等于 $ku_0 d(y)$。对于与 k 互素的 m ，且满足 $2m \geq \dim X$，取一个秩为 m 、类为 $m(u_0 d(y))^{-1}$ 的丛。由消去性质，它与 $V_0 \otimes L$ 的张量积是平凡丛。这个嵌入的归一化类为 $u_0 d(y)$：指定的向量因子具有引理 2.3 中的两个局部值，而在提升为其特定的射影提升后，这些值保持不变。 □

定理 5.3 （偶维球面上的所有重数）。 设 $X = S^{2j}$ 满足 $2 \leq j \leq k$。固定一个 *Bott* 生成元 $\beta \in \widetilde{K}^0(S^{2j})$ ，并记 $[V] = k + t\beta$。若 $t \neq 0$，则

$$\mathrm{End}(V) \hookrightarrow \underline{M}_{km} \qquad \Longleftrightarrow \qquad m \geq j \quad and \quad k \mid mt. \tag{4}$$

若 $t = 0$，则任意正重数都适用。对于 $(k,\ \ell)\ = 1$，最小的 ℓ-阶段在 $t = 0$ 时为0 ，在 $k \nmid t$ 时为 ∞ ，否则为满足 $\ell^N \geq j$ 的最小 N 。

证明。 球面是一个悬挂，并且 $\beta^2 = 0$。将 $[W] = m + s\beta$ 记为一个重数丛。于是 $[V][W] = km$ 给出 $mt + ks = 0$。如果 $m < j$，则 W 的所有可能的正陈类都消失：其群在次数 $2j$ 以下均为零，并且 $c_j(W) = 0$ 由秩决定。因此，其约化陈特征消失，从而 $s = 0$ ，因为 $\widetilde{K}^0(S^{2j})$ 是无挠的。这将给出 $t = 0$。反过来，如果 $m \geq j$ 且 $k \mid mt$，则由稳定性，整数类 $m - (mt/k)\beta$ 可以在秩 m 中实现。与 V 的张量积在消去范围内具有平凡的稳定类，因此引理 5.1 给出该嵌入。对于 $t = 0$ ，丛 V 已经是平凡的，因为 $k \geq j$。互素性给出关于 $m = \ell^N$ 的断言。

□

(4) 中的整数 t 是一个稳定粘接数。在选定定向后，根据 Bott 类的陈特征，$c_j(V)[S^{2j}] = (-1)^{j-1}(j-1)!\, t$。因此，仅凭陈数被 k整除可能会丢失信息。例如，在 S^8 上，一个 Bott 整数为 1 的六秩向量丛的顶陈数为 ± 6，但它没有互素嵌入。

命题 5.4（四维 Moore 空间）。设 $X_q = S^3 \cup_q e^4$、$q \geq 2$ 和 $k \geq 2$。在秩 k 的情形下，写作 $[V] = k + t\gamma$，其中 γ 生成 $\widetilde{K}^0(X_q) = \mathbb{Z}/q$，且 $t \in \mathbb{Z}/q$。令 $g = (k, q)$。对于 $m \geq 2$，代数 $\mathrm{End}(V)$ 嵌入 M_{km} 当且仅当按整数代表元的意义有 $g \mid mt$。重数为一当且仅当 $t = 0$。因此，对于每个与 k 互素的 $\ell \geq 2$，最小的 ℓ 阶段为

$$\begin{cases} 0, & t = 0, \\ 1, & t \neq 0, \quad g \mid t, \\ \infty, & g \nmid t. \end{cases}$$

If $g \mid t$，恰有 g 个稳定嵌入类具有以此给定余核为代表元的代表 e.

证明。度数为 q 的 S^3 映射的余纤维序列以及 Bott 周期性给出 $\widetilde{K}^0(X_q) = \mathbb{Z}/q$ 和 $K^1(X_q) = 0$。该空间是一个悬挂，因此 $\gamma^2 = 0$。其 H^2 消失，所以它没有非平凡线丛。由稳定性和引理 5.1 可知，$m \geq 2$ 的秩为 m 的解等价于满足 $mt + ks = 0$ 属于 $\mathbb{Z}/q$ 的剩余类 s。乘以 k 的像由 g 的倍数组成。对于 $m = 1$，重数线丛必须是平凡的，而秩为 k 时的稳定消去给出所述结论。由于 $(\ell,\ g) = 1$，因此得到所示的阶段。

给定射影核心的所有向量丛提升都是同构的，因为 $H^2(X_q;\mathbb{Z}) = 0$。一个可能的归一化单位具有形式 $1 + x\gamma$，且必须在 $\mathbb{Z}/q$ 中满足 $kx = t$。反之，对每一个这样的 x，任取与 k 互素的补秩 $m \geq 2$。取 $m(1 - x\gamma)$ 的一个代表元，并利用稳定消去使其与 V 的张量积平凡化。所得的对依 (2) 具有给定的单位元。解恰好有 g 个，并由定理 3.3 加以区分。 □

例如，X_3 上的平凡 M_3-丛出现在三个不同的稳定类中，其单位元为 $\mathbf{1}, 1+\gamma, 1+2\gamma$。此处向量丛提升本身是唯一的。此处 d 是命题 5.2 中 $P_3(X_3)$ 上的恒等映射。遗忘嵌入时所丢失的信息在于可能的补。例 2.2 展示了另一种效应：向量丛提升的歧义。

6 从稳定单位元到高阶扭曲

与一个嵌入相关联的算子代数构造有两种。核心给出 $\mathcal{B} \otimes A_\ell$ on X 上的含幺丛，其平凡性由定理 4.2 刻画。它完整的嵌入类提供了一个单位元 u，从而在 ΣX 上得到一个悬挂构造。我们将利用在 ℓ 处局部化的复 K-理论来详述后者。

令 $\mathcal{K}$ 为无限维可分希尔伯特空间上的紧算子。Dadarlat 和 Pennig 的群同构 [3, 定理 2.22] 将映射 $X \to \mathrm{Aut}(A_\ell \otimes \mathcal{K})$ 的一个同伦类送到它在投影 $1 \otimes e$ 上的取值，其中 e 的秩为一。其目标是以下对象的正单位元

$$K_0(C(X) \otimes A_\ell) = K^0(X)[1/\ell].$$

该等式由连续性从秩一坐标中的矩阵阶段得出。我们的整单位元 u及其逆元的像均为正：对充分大的 N，$\ell^N u$与 $\ell^N u^{-1}$中的每一个都由一个向量丛表示，而分母则通过过渡到 A_ℓ被消去。因此 u 给出一个粘合映射 $\alpha_u\colon\ X \to \mathrm{Aut}(A_\ell \otimes \mathcal{K})$，在同伦意义下唯一。将两个锥上的平凡丛粘合

定义了 ΣX上的一个扭曲 τ_u。我们采用与来自 $[4,10]$的 $KU[1/\ell]$ 之扭曲的等同。颠倒先粘合哪一个锥会使该单位元取逆。

命题 6.1. 对于定理 *5.3* 中 S^{2j} 上的互素嵌入，记 $t = kh$。则 $u = 1 + h\beta$。若 $h \neq 0$，则 S^{2j+1} 上诱导的扭曲的群为

$$KU[1/\ell]^0(S^{2j+1};\tau_u) = 0, \qquad KU[1/\ell]^1(S^{2j+1};\tau_u) \cong R_\ell/hR_\ell.$$

证明. 方程 (2) 确定了 $u = 1 + h\beta$，因为 $K^0(S^{2j})$ 是无挠的。在锥上，零次的系数群为 R_ℓ，其奇次群均为零。在赤道上，它们分别为 $R_\ell \oplus R_\ell\beta$ 和零。采用一种粘合约定时，Mayer–Vietoris 差映射为

$$R_\ell^2 \longrightarrow R_\ell \oplus R_\ell\beta, \qquad (a,b) \longmapsto (a-b) - bh\beta.$$

事实上，平凡化的改变会将赤道上的常秩一类映射到求值类 u。对于 $h \neq 0$，核为零，余核为 R_ℓ/hR_ℓ。这是用当前坐标对 $[10,\ \text{第}\ 4]$ 节所作的悬挂计算。

□

例 6.2. 在 S^6 上选取 $j = k = 3$、$\ell = 2$ 和 $[V] = 3 + 9\beta$。在秩 2 时，重数丛的约化类必为零，这与 $2 \cdot 9 + 3s = 0$ 矛盾。在秩 4 时，取 $[W] = 4 - 12\beta$。此时 $V \otimes W$ 是平凡的。因此，阶段 M_6 不成立，阶段 M_{12} 可行，而二进塔中的最小指数为 2。完整对的单位元为 $1 + 3\beta$，且 $\mathrm{End}(V) \otimes M_{2^\infty}$ 是 S^6 上的平凡含幺丛。通过局部化单位元进行粘合，可在 S^7 上得到一个扭曲，其偶群为零，奇群为 $\mathbb{Z}/3$。其非零粘接类属于 $\pi_6\mathrm{Aut}(M_{2^\infty} \otimes \mathcal{K}) \cong \mathbb{Z}[1/2]$，而 $H^3(S^7;\mathbb{Z}) = 0$。因此，该例构造出一个高阶扭曲，并确定了此核心对应的第一个有限矩阵阶段。

进一步的问题。 对于一般有限 CW 复形上的给定核心，引理 5.1 将环境消去范围内的最小重数问题归结为 $[V]w = km$ 的解的几何维数。Moore 空间上的计算利用了每个秩至少为二的对象都处于稳定范围，且每个约化乘积都为零这一事实。在高维透镜空间上，约化乘积和可能存在的低秩代表元都会进入这个方程。命题 5.2 描述了固定核心上的所有稳定单位元。一个更精细的问题是，陪集中哪些元素可以在指定的补秩下实现，以及在稳定化之前，如何区分该秩下不同的嵌入。这些问题涉及有限代表元，并且在 UHF 障碍消失后仍然有意义。

致谢。 感谢波恩的马克斯·普朗克数学研究所，在原研究的部分阶段给予支持并提供热情接待。感谢 E. V. Troitsky 一直以来的关注与支持，也感谢 V. M. Manuilov 和 A. S. Mishchenko 与我讨论相关问题。原研究部分由 RFFI 资助项目 02-01-00572 资助。

AI 工具的使用。 OpenAI 的 ChatGPT 协助审阅了先前的论证、推导并验证示例，以及准备这份修订后的手稿。

参考文献

[1] M. F. Atiyah，K-理论, W. A. Benjamin, 1967年。[2] R. Bott，《经典群的稳定同伦》，数学年刊 (2) **70** (1959年), 313–337

.

[3] M. Dadarlat与U. Pennig，强自吸收C^*-代数的Dixmier–Douady理论，纯粹与应用数学杂志**718** （2016年），153–181。arXiv:1302.4468。[4] M. Dadarlat与U. Pennig，来自强自吸收C^*-代数的 K-理论的单位谱，代数与几何拓扑 **15** （2015年），137–168。arXiv:1306.2583。[5] A.V. Ershov，关于矩阵代数丛的 K-理论，俄罗斯数学综述 **55**（2000年），336–337。[6] A.V. Ershov，纤维为矩阵代数的丛的同伦论，2003年，2010年修订。arXiv:math/0301151v2。[7] A.V. Ershov，拓扑布劳尔群的一个推广，预印本版本。arXiv:math/0301180v6。[8] A.V. Ershov，拓扑布劳尔群的一个推广，*J. K*理论 **2** （2008年），407–444。[9] A.V. Ershov，矩阵代数丛嵌入平凡丛的障碍，数学札记 **94** （2013年），482–498。[10] U. Pennig，高阶扭曲 K-理论的非交换模型，拓扑学杂志 **9** （2016年），27–50。arXiv:1502.02807。