arXiv:math/0304105v2 [math.DS] 20 Nov 2026

拓扑熵与 Burau 表示

Boris Kolev

摘要。设 f 是圆盘 D^2 的一个保向同胚，P 是一个有限不变子集，$[f_P]$ 是 $D^2 \setminus P$ 中 f 的同伦类。我们利用与 $[f_P]$ 相关联的 Burau矩阵在 GL(n, $\mathbb{C}$) 中某些特殊化的谱半径，给出 $[f_P]$ 中映射的拓扑熵的一个非平凡下界，并讨论一些例子。

1. 引言

设 f 是圆盘 D^2 的一个保向同胚，且 $P \subset$ 是 n 个点组成的有限不变子集，包含于 int(D^2)。那么 f 诱导出 $D_P = D^2 \setminus P$ 的一个同胚 f_P，而 f_P 诱导出 $\pi_1(D_P) \simeq F_n$ 的一个自同构 $f_{P\sharp}$；后者是由 n 个生成元生成的自由群。若 $h(f)$ 是 f 的拓扑熵 [1]，且 GR($f_{P\sharp}$) 是 $f_{P\sharp}$ 在 $\pi_1(D_P)$ 上的增长率，Bowen [4] 已证明

$$h(f) \geq \ln \mathrm{GR}(f_{P\sharp}). \tag{1}$$

问题在于，一般而言，GR($f_{P\sharp}$) 很难计算。

设 f_{P*1} 是由 f_P 在第一同调群 $H_1(D_P; \mathbb{C})$ 上诱导的同构。那么（见 [10]）

$$\mathrm{GR}(f_{P\sharp}) \geq R(f_{P*1}), \tag{2}$$

其中 $R(f_{P*1})$ 是 f_{P*1} 的谱半径。但 f_{P*1} 只是一个置换，因此不等式（2）总是显然成立的。因此，无法通过这种方式检测正的拓扑熵。

众所周知，[3] F_n 的自同构子群中由 D_P 的同胚诱导的部分同构于 ***Artin*** 辫群[1] B_n。存在一个著名的表示 [3]，将 B_n 表示为 GL($n, \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$) 中的元素，即 ***Burau*** 表示。在本文中，我们证明以下结果。

定理1.1。设 $\alpha \in B_n \subset \mathrm{Aut}(F_n)$，且 B_α 是 α 的 ***Burau***矩阵。那么

$$\mathrm{GR}(\alpha) \geq \sup\{R(B_\alpha(t)) \,;\, t \in \mathbb{C},\ |t| = 1\}, \tag{3}$$

其中 R（B_α（t））是矩阵 B_α（t）$\in$ GL（$n, \mathbb{C}$）的谱半径，该矩阵由在复数 t处对 B_α 求值得到。

日期：1989年8月25日。2020 数学学科分类。20F36 (54C70 57M05)。关键词。拓扑熵、Burau 表示、基本群、自由微分演算。[1]严格来说，这个结果假设 $\pi_1(D_P)$ 的基点位于 D_P 的边界上。

备注1.2。这一结果并非真正的新结果，因为它已隐含地作为 David Fried 的结果的推论出现 [7]。不过，我们在此给出一个直接证明，不引用“扭曲”上同调，只使用 Buraurepresentation 的定义和 Fox 的自由微分演算 [5]。

2. 辫群与 Burau 表示

2.1. Artin 辫群。 引入辫群 B_n有多种方法。本段仅作简要概述 [3]。我们将 B_n代数地定义为自由群的右自同构 α 子群

$$F_n = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$$

满足

$$\begin{aligned} (x_i)\alpha &= A_i\, x_{\mu_i} A_i^{-1}, \quad 1 \le i \le n, \\ (x_1 x_2 \cdots x_n)\alpha &= x_1 x_2 \cdots x_n, \end{aligned}$$

其中（μ_1，μ_2，.....，μ_n）是（1，2，.....，n）的一个置换，而 A_i 是 F_n 的一个元素。

这个群是有限生成的，其生成元为

$$\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}, \tag{4}$$

其中

$$\begin{cases} (x_i)\sigma_i = x_i x_{i+1} x_i^{-1}, \\ (x_{i+1})\sigma_i = x_i, \\ (x_j)\sigma_i = x_j, \quad j \ne i, i+1, \end{cases}$$

以及关系

$$\begin{aligned} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i &= \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \quad 1 \le i \le n-2, \\ \sigma_i \sigma_j &= \sigma_j \sigma_i, \quad |i-j| \ge 2. \end{aligned} \tag{5}$$

2.2. 自由微分演算。 令 $\mathbb{Z}F_n$ 为 F_n 的整数系数群环。对于 $j = 1,2,\dots,n$，存在一个定义良好的映射

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \colon \mathbb{Z}F_n \to \mathbb{Z}F_n, \tag{6}$$

称为自由导数，满足

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j}(c_1 + c_2) &= \frac{\partial}{\partial x_j}(c_1) + \frac{\partial}{\partial x_j}(c_2), && c_1, c_2 \in \mathbb{Z}F_n, \\ \frac{\partial}{\partial x_j}(g_1 g_2) &= \frac{\partial}{\partial x_j}(g_1) + g_1 \frac{\partial}{\partial x_j}(g_2), && g_1, g_2 \in F_n, \\ \frac{\partial}{\partial x_j}(x_i) &= \delta_{ij}, && 1 \le i \le n. \end{aligned}$$

最后，令$\langle t \rangle$ 为由 t生成的自由群，并令

$$\varphi \colon F_n \to \langle t \rangle, \qquad x_i \mapsto t, \quad 1 \le i \le n. \tag{7}$$

态射 φ 扩展为环态射 $\mathbb{Z}F_n \to \mathbb{Z}\langle t \rangle = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$，我们仍将其记为 φ。

2.3. **Burau 表示**。取 B_n 的一个元素 α，并定义矩阵 $B_\alpha = (b_{ij})$，使得

$$b_{ij} = \varphi\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}((x_i)\alpha)\Big) \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}], \qquad 1 \le i, j \le n. \tag{8}$$

容易证明 [5]，即

$$B_{\alpha\beta} = B_\alpha B_\beta. \tag{9}$$

映射 $\alpha \mapsto B_\alpha$ 从 B_n 到 GL$(n, \mathbb{Z}[t, t^{-1}])$ 是辫群 B_n的 ***Burau*** 表示。

设 $\mathbf{M} = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]^n$，并令 V_1, V_2, ..., V_n 表示自由模 $\mathbf{M}$的典范基。Burau 矩阵 B （从右侧）作用于$\mathbf{M}$的行向量。

任意 Burau 矩阵 $B =(b_{ij})$ 都满足

$$\sum_k b_{ik} = 1 \qquad (\forall i). \tag{10}$$

因此，由以下条件定义的$\mathbf{H}$ 是$\mathbf{M}$的子模

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n = 0 \tag{11}$$

在 B 下保持不变。因此，Burau 表示是可约的：其在 $\mathbf{H}$ 上的限制是一个 $(n-1)$ 维表示 B^r，称为约化***Burau***表示。

注 2.1. 辫子 α 的 Burau 表示与 Alexander 多项式之间存在一种有趣的关系；Alexander 多项式是链环的著名不变量。将辫子 α 闭合得到链环 $\widetilde{\alpha}$，并令

$$L = \widetilde{\alpha} \cup m,$$

其中 m 是辫轴（环绕辫子的所有股的一条圆），那么 L 刻画三维球面 S^3 [3] 中的链环 $\widetilde{\alpha}$，而 L 的 Alexander 多项式由下式给出（参见 [11]）

$$\Delta(x, t) = \det\big(B^r_\alpha(t) - xI_{n-1}\big). \tag{12}$$

2.4. **Burau 矩阵的谱性质**。Burau 矩阵 $B = (b_{ij})$还满足

$$\sum_k t^{k-1} b_{kj} = t^{j-1} \qquad (\forall j). \tag{13}$$

因此，行向量 $(1, t, \ldots, t^{n-1})$ 是 B 的特征向量，对应特征值 1。若 P_B 表示 B 的特征多项式，则有

$$P_B(X) = \det(XI_n - B) = (X-1)\, P_{B^r}(X). \tag{14}$$

Squier [13]证明了约化Burau表示是酉的，也就是说，存在一个非奇异矩阵 $J \in$ GL$(n-1, \mathbb{Z}[t, t^{-1}])$，使得

$$B^{r*} J B^r = J, \tag{15}$$

其中 B^{r*} 是将 B^r 中的 t与 t^{-1}互换后得到的矩阵的转置。

由方程（15）可推导出

$$P_{B^r_\alpha}(1/X) = (-1/X)^{n-1}(-t)^e\, P_{B^{r*}_\alpha}(X), \tag{16}$$

其中 e 是α的一个表达式中 σ_i 的指数的代数和。

因此，若 $t \in \mathbb{C}$ 且 $|t| = 1$，此关系变为

$$P_{B_\alpha^r}(1/X) = (-1/X)^{n-1}(-t)^e \, \overline{P_{B_\alpha^r}(\overline{X})}. \tag{17}$$

因此，若 λ是 B_α^r的一个特征值，那么 $1/\lambda$也是 B_α^r的一个特征值，且重数相同。

3. 有限生成群的自同构的增长率

设 G是一个有限生成群， $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$是 G的一个生成集， $L_S(g)$表示 $g \in G$ 相对于 S的词长，即表示 g所需的字母 x_i 或 x_i^{-1}的最少数量。自同构 $\alpha\colon G \to G$ 的增长率定义为

$$\mathrm{GR}(\alpha) = \sup_{g \in G} \left\{ \limsup_{p \to +\infty} \left(L_S((g)\alpha^p)\right)^{1/p} \right\}. \tag{18}$$

不难看出，GR(α)与生成集S无关， $1 \leq \mathrm{GR}(\alpha) < +\infty$，并且

$$\mathrm{GR}(\alpha) = \limsup_{p \to +\infty} \left\{ \max_{1 \leq i \leq n} \left(L_S((x_i)\alpha^p)\right)^{1/p} \right\}. \tag{19}$$

引入出现矩阵 $A_\alpha = (a_{ij})$，其中 a_{ij} 表示 $x_j^{\pm 1}$在表示 $(x_i)\alpha$ 的约化词中的出现次数；对于任意复矩阵 $M = (m_{ij})$，范数 $\|M\| = \max_i \sum_j |m_{ij}|$。由于 $\|A_{\alpha^p}\| = \max_i L_S((x_i)\alpha^p)$ 且 $\|A_{\alpha^{p+q}}\| \leq \|A_{\alpha^p}\| \, \|A_{\alpha^q}\|$，由等式（19）可得（该极限由次乘性保证存在）

$$\mathrm{GR}(\alpha) = \lim_{p \to +\infty} \|A_{\alpha^p}\|^{1/p}. \tag{20}$$

注 3.1. 若 $G = F_n$是自由群， $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$是一组自由生成元， $\alpha \in \mathrm{Aut}(F_n)$，并且进一步假设迭代 α时不会发生约消，那么对于 $1 \leq i, j \leq n$，有 $L_S((x_i x_j)\alpha) = L_S((x_i)\alpha) + L_S((x_j)\alpha)$。因此 $A_{\alpha^p} = A_\alpha^p$，且 GR($\alpha$) 就是矩阵$A_\alpha$的谱半径。一般情况下，我们不知道 A_{α^p}的任何递推公式。

4. 主定理的证明

现在回到 $G = F_n$ 且 $\alpha \in B_n$ 的情形。定理 1.1 是前面讨论的一个推论，下面我们将对此进行说明。

设 $\omega = x_{\mu_1}^{\varepsilon_1} x_{\mu_2}^{\varepsilon_2} \cdots x_{\mu_r}^{\varepsilon_r} \in F_n$ 是一个约化词，且 $\varepsilon_k = \pm 1$。我们有

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\omega) = \sum_{k=1}^{r} \varepsilon_k \, \delta_{\mu_k j} \, x_{\mu_1}^{\varepsilon_1} \cdots x_{\mu_{k-1}}^{\varepsilon_{k-1}} \, x_{\mu_k}^{(\varepsilon_k - 1)/2}. \tag{21}$$

由于 ω 是既约的，出现在这个和中的群元素两两不同。因此，$x_j^{\pm 1}$在 ω 中出现的次数等于 $\frac{\partial}{\partial x_j}(\omega)$中单项式的个数。此外，如果我们写成

$$\varphi\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}(\omega)\Big) = \sum_m c_m t^m,$$

则$\frac{\partial}{\partial x_j}(\omega)$中单项式的个数大于或等于$\sum_m |c_m|$。现在，取 $t \in \mathbb{C}$ 与 $|t| = 1$，我们有

$$\left|\sum_m c_m t^m\right| \le \sum_m |c_m|.$$

因此，若 $\alpha \in B_n$, A_α 是它的出现矩阵，而 B_α 是它的 Burau矩阵，则对所有满足 $|t| = 1$ 的 $t \in \mathbb{C}$，有

$$a_{ij} \ge |b_{ij}(t)|.$$

将此应用于 α^p 并利用 (9)，得到

$$\|A_{\alpha^p}\| \ge \|B_{\alpha^p}(t)\| = \|B_\alpha(t)^p\|.$$

取 p 次方根，并令 $p \to +\infty$，结合 (20) 和盖尔范德公式，可得

$$\lim_{p\to+\infty} \|M^p\|^{1/p} = R(M),$$

对于每个满足 $|t| = 1$ 的 t，都有 GR(α) $\ge R(B_\alpha(t))$。证毕。

注 4.1. 对于 $t = 1$， $B_\alpha(1)$ 恰好是由 α 在同调群 $H_1(D_P; \mathbb{C})$ 上诱导的映射的矩阵，而这只是一个置换矩阵。因此， $t = 1$ 总是给出平凡结果。

5. 例子

5.1. **例1：** $\alpha = \sigma_1\sigma_2^{-1} \in B_3$。在 F_3 上的作用由下式给出

$$\begin{cases} (x_1)\alpha = x_1 x_3 x_1^{-1}, \\ (x_2)\alpha = x_1, \\ (x_3)\alpha = x_3^{-1} x_2 x_3. \end{cases} \tag{22}$$

在这个例子中，对每个生成元 x_i 迭代 α 时不会发生约消。因此，若 A_{α^p} 是 α^p 的出现矩阵，则有

$$A_{\alpha^p} = A_\alpha^p.$$

因此，我们可以将 GR(α) 显式计算为 A_α 的谱半径，得到 $(3+\sqrt{5})/2$。另一方面， B_α 的特征多项式为

$$P_{B_\alpha}(X) = (X-1)(X^2 - (1 - t - t^{-1})X + 1).$$

对于 $t = -1$， 的模最大的根恰好是 $(3+\sqrt{5})/2$。在这种情况下，不等式 (3) 取等号。

然而，这并不令人惊讶：当 $\alpha \in B_3$时，GR(α)总是等于 $B_\alpha(-1)$的谱半径。设D_P 为三穿孔圆盘的胀开 （其中每个穿孔被替换为一个圆周 [4]）。由 α 在 D_P 中表示的同伦类是周期的、可约的或伪阿诺索夫的（在 Thurston [15]的意义下）。在前两种情形中，GR(α) = $R(B_\alpha(-1))$ = 1。在最后一种情形中，该类中伪阿诺索夫映射 ϕ 的不变叶状结构仅在D_P的边界上具有奇点。与超椭圆对合相关联的D_P 的二重覆盖，我们记为 D_P^2，是一个带有4个洞的环面（对应于D_P的每个边界分支各一个）。 ϕ 的提升 $\tilde{\phi}$ 诱导了通过坍缩而得到的环面上的一个阿诺索夫微分同胚

每条边界曲线为一个点。矩阵 $B_\alpha^r(-1) \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$恰好是该类中线性 Anosov 微分同胚 A 的矩阵。因此， ϕ的熵等于 A的熵，也等于$\ln R(B_\alpha(-1))$。

5.2. **例 2：** $\alpha = \sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_3^{-1} \in B_4$。在 F_4 上的作用由下式给出

$$\begin{cases} (x_1)\alpha = x_1x_4x_1^{-1}, \\ (x_2)\alpha = x_1, \\ (x_3)\alpha = x_4^{-1}x_2x_4, \\ (x_4)\alpha = x_4^{-1}x_3x_4. \end{cases} \tag{23}$$

在这个例子中，对 α进行迭代时会出现约消，因此无法直接计算 GR(α)。Burau矩阵的特征多项式为

$$P_{B_\alpha}(X) = (X-1)(X^3 - (1-t-t^{-1})X^2 + (t^{-2}-t^{-1}+1)X + t^{-1}).$$

对于 $t=-1$，我们得到

$$P_{B_\alpha^r}(X) = (X-1)^3,$$

这没有给出任何结果。但对于 $t = j = e^{2\pi i/3}$，我们得到

$$P_{B_\alpha^r}(X) = X^3 - 2X^2 - 2j^2X + j^2,$$

其有一个模严格大于 1 的根。因此我们可以得出结论： $h(f) > 0$ 对于相应同伦类中的所有映射都成立。事实上，这个同伦类属于伪 Anosov 型。增长率$\mathrm{GR}(\alpha)$是多项式 $X^4 - 2X^3 - 2X + 1$ 的最大正根（参见 [8,附录 A]），即 $\lambda = (1+\sqrt{3}+\sqrt{2\sqrt{3}})/2$；我们将证明，我们的估计（3）无法达到这个数值。

引理 5.1. 在例 *2* 中，我们有

$$\lambda > \sup_{|t|=1}\{R(B_\alpha(t))\}.$$

证明. 在整个证明过程中， t 是模为 1 的复数，而 P_t表示上文计算得到的 $B_\alpha(t)$ 的特征多项式的三次因子：

$$P_t(X) = X^3 - (1-t-t^{-1})X^2 + (t^{-2}-t^{-1}+1)X + t^{-1}.$$

$B_\alpha(t)$ 的特征值因此是数 1 和 P_t 的三个根。

我们首先证明， P_t 的任何根的模都不等于 λ。反设 $P_t(\lambda u) = 0$，其中 u 是模为 1 的某个复数。换言之， u 是多项式的一个根

$$F_t(X) = P_t(\lambda X) = \lambda^3X^3 - (1-t-t^{-1})\lambda^2X^2 + (t^{-2}-t^{-1}+1)\lambda X + t^{-1}.$$

由于 $\bar{t} = t^{-1}$、$\bar{-u} = u^{-1}$ 和 λ 均为实数，对等式 $F_t(u) = 0$ 取复共轭并乘以 u^3，可知 u 也是以下多项式的一个根

$$G_t(X) = tX^3 + (1-t+t^2)\lambda X^2 - (1-t-t^{-1})\lambda^2X + \lambda^3.$$

因此，多项式 F_t 和 G_t 有一个公共根，所以它们的结式为零。现在可以显式计算这个结式。利用关系 G_t 对

λ 的幂进行约化后，可以发现它只通过实数 $z = t + t^{-1}$依赖于 t：

$$\mathrm{Res}_X(F_t, G_t) = c\,\Psi(z),$$
$$\Psi(z) = 3z^4 - 2(6-\sqrt{3})z^3 - 12\sqrt{3}\,z^2 + 6(4+3\sqrt{3})z + 4(12+7\sqrt{3}),$$

其中 $c = 2(834\lambda^3 + 247\lambda^2 + 568\lambda - 363)$ 是一个正常数（注意，$\sqrt{3} = \lambda + \lambda^{-1} - 1$）。但 Ψ 在实直线上为正。事实上，展开等式右边可得恒等式

$$3\,\Psi(z) = \big(3z^2 - (6-\sqrt{3})z - 15\big)^2 + 3\,q(z),$$
$$q(z) = (17 - 8\sqrt{3})z^2 + (28\sqrt{3} - 36)z + (28\sqrt{3} - 27),$$

而二次多项式 q 只取正值：其首项系数为正，因为 $17^2 > 3\cdot 8^2$,，且其判别式 $4(2043 - 1196\sqrt{3})$ 为负，因为 $2043^2 < 3\cdot 1196^2$。因此结式非零，这就产生了矛盾。

现在我们可以得出结论。由定理1.1，且由于 $\mathrm{GR}(\alpha) = \lambda$，可得$R(B_\alpha(t)) \le \lambda$。等号成立意味着 $B_\alpha(t)$ 的某个特征值的模为 λ。该特征值不可能是 1，因为 $\lambda > 1$；我们刚刚也已证明，它不可能是 P_t 的根。因此，对于单位圆上的每个 t，都有 $R(B_\alpha(t)) < \lambda$。由于函数 $t \mapsto R(B_\alpha(t))$ 连续，且单位圆是紧集，其上确界可以取到，因此严格小于λ。□

5.3. **例3：** $\alpha = \sigma_4\sigma_3\sigma_2\sigma_1\sigma_4\sigma_3 \in B_5$。$F_5$ 上的作用由下式给出

$$\begin{cases} (x_1)\alpha = x_1x_2x_1^{-1}, \\ (x_2)\alpha = x_1x_3x_4x_3^{-1}x_1^{-1}, \\ (x_3)\alpha = x_1x_3x_5x_3^{-1}x_1^{-1}, \\ (x_4)\alpha = x_1x_3x_1^{-1}, \\ (x_5)\alpha = x_1. \end{cases} \tag{24}$$

这是另一个有趣的例子。这里，α 同样表示一个伪阿诺索夫类。α的增长率 $\mathrm{GR}(\alpha)$ 是 $X^4 - X^3 - X^2 - X + 1$ 的最大正根，我们将其记为 λ（参见 [8, 附录 A]）。

另一方面，我们有

$$P_{B_\alpha(-1)}(X) = (X-1)(X^4 + X^3 - X^2 + X + 1),$$

它以 $-\lambda$ 为根。因此，在这种情况下，(3) 是等式。与例1一样，该类中伪阿诺索夫代表元 ϕ 的不变叶状结构的奇点仅位于 D_P 的边界上。由于 $\mathrm{card}(P) = 5$ 为奇数，可以证明，ϕ 在二重覆盖 D_P^2 上的提升 $\widetilde{\phi}$ 的奇点仅位于边界上，且其阶为偶数 [8]。因此，ϕ 的不变叶状结构是横截可定向的，并且 $h(\phi) = \ln R(\phi_{*1})$。但是，$B_\alpha^r(-1)$ 是 ϕ 的同调矩阵，所以

$$\ln\lambda = h(\widetilde{\phi}) = \ln R(\widetilde{\phi}_{*1}) = \ln R\big(B_\alpha^r(-1)\big).$$

当 $\mathrm{card}(P)$ 为奇数，且 α 表示一个奇点仅位于 D_P 边界上的伪Anosov类时，就会出现这种等号成立的情形。

注5.2。自本文撰写以来，该领域不断发展，并取得了新的成果（例如参见 [6, 9, 14, 2, 12]）。

参考文献

[1] R. L. Adler、A. G. Konheim 和 M. H. McAndrew。拓扑熵。*Trans. Amer. Math. Soc.*，114：309–319，1965。[2] G. Band 和 P. Boyland。辫子的 Burau 估计。*Algebr. Geom. Topol.*，7：1345–1378，2007。[3] J. S. Birman。辫子、链环与映射类群。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1974。《数学年刊研究》，第 82 号。[4] R. Bowen。熵与基本群。载于动力系统中吸引子的结构（会议论文集，北达科他州立大学，法戈，北达科他州，*1977*），《数学讲义》第 668 卷，第 21–29 页。施普林格，柏林，1978。[5] R. H. Crowell 和 R. H. Fox。纽结理论导论。施普林格-弗拉格，纽约，1977。1963 年原版的重印本，《数学研究生教材》，第 57 号。[6] J. Fehrenbach 和 J. Los。圆盘微分同胚的拓扑熵下界。*J. London Math. Soc. (2)*，60(3)：912–924，1999。[7] D. Fried。熵与扭曲上同调。《拓扑学》，25(4)：455–470，1986。[8] B. Kolev。二维拓扑动力学：周期轨道与拓扑熵。博士论文，尼斯大学，法国，1991。[9] J. Los、K. Ko 和 W. Song。辫子的熵。*J. Knot Theory Ramifications*，11(4)：647–666，2002。2000 年韩国纽结会议，第 2 卷（龙平）。[10] A. Manning。拓扑熵与第一同调群。载于动力系统——华威 *1974*（应用拓扑学与动力系统专题讨论会论文集，华威大学，考文垂，*1973/1974*；献给 *E. C. Zeeman* 五十岁寿辰），第 185–190 页。《数学讲义》，第 468 卷。施普林格，柏林，1975。[11] H. R. Morton。可交换辫子。载于低维拓扑（切尔伍德盖特，*1982*），《伦敦数学学会讲义丛书》第 95 卷，第 86–105 页。剑桥大学出版社，剑桥，1985。[12] L. Robitaille 和 M.-T. Q. Trinh。简单辫子趋向于正熵。*Journal of Knot Theory and Its Ramifications*，33(11)，2024 年 10 月。[13] C. C. Squier。Burau 表示是酉的。*Proc. Amer. Math. Soc.*，90(2)：199–202，1984。[14] J.-L. Thiffeault 和 M. D. Finn。拓扑学、辫子与流体混合。*Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*，364(1849)：3251–3266，2006 年 10 月。[15] W. P. Thurston。曲面微分同胚的几何与动力学。*Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*，19(2)：417–431，1988。

法国国家科学研究中心与艾克斯-马赛大学，CMI，F. Joliot-Curie街39号，13453 法国马赛 cedex 13电子邮箱： kolev@cmi.univ-mrs.fr